



XXI Международная конференция
*Математическое моделирование
в механике сплошных сред.*
Методы граничных и конечных элементов.
4 - 7 октября, 2005
Санкт-Петербург

ТРУДЫ - PROCEEDINGS

21-th International Conference
Mathematical Modeling in Solid Mechanics
Boundary & Finite Elements Methods

4 – 7 October 2005
Saint Petersburg, Russia



BEM & FEM

XXI Международная конференция

*Математическое моделирование
в механике сплошных сред.*

*Методы граничных
и конечных элементов*

4 – 7 октября, 2005

Санкт-Петербург

Труды. Том 2

(Доклады конференции)

Proceedings. Vol. 2

*21-th International Conference
Mathematical Modeling in Solid Mechanics.
Boundary and Finite Elements Methods*

4 – 7 October, 2005

Saint Petersburg, Russia

УДК 539.3

Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Труды XXI Международной конференции. – СПб: 4 – 7 октября 2005г.

ISBN 5-9651-0126-0

От редакции

Труды XXI Международной конференции по математическому моделированию в механике сплошных сред и конструкций включает два тома. В томе 1 представлены тезисы докладов конференции. В томе 2 опубликованы заслушанные и отобранные Оргкомитетом доклады конференции. Конференции по данной тематике проводятся по нечетным годам в соответствии с планом работы секции строительной механики и надежности сооружений им. профессора Н.К. Снитко Санкт-Петербургского Дома ученых Российской Академии наук.

Конференция посвящается рассмотрению перспективных направлений математического моделирования задач механики деформируемого твердого тела, жидкости и газа с позиций их фундаментальной и прикладной значимости, моделированию сложных физических процессов, имеющих место при создании современных материалов и конструкций.

Принят алфавитный порядок расположения тезисов по фамилии первого из авторов доклада.

Тематика выносимых на конференцию докладов соответствует основным направлениям работы конференции.

Редакционная коллегия:

Проф. Р.А. Арутюнян, проф. Д.А. Индейцев, проф. А.М. Линьков, проф. В.И. Плетнев, проф. В.А. Постнов (отв. редактор), проф. В.В. Улитин, проф. А.И. Фрумен., с.н.с. Г.Д. Федоровский, асс. Г.А. Тумашик

Тезисы подготовлены и изданы на средства Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-10130) и на средства спонсорской помощи mb AEC Software GmbH (Germany) и ООО "Техсофт",

ISBN 5-9651-0126-0

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ

Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербургский научный центр РАН,
Российский фонд фундаментальных исследований,
Научный совет РАН по механике деформируемого твердого
тела,

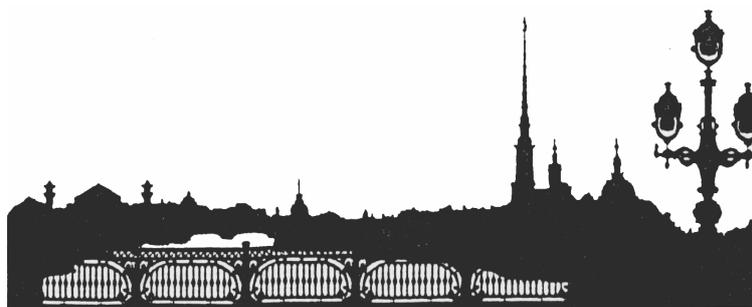
mb AEC Software GmbH (Germany),
ООО “Техсофт”,

Научный совет РАН по строительной механике,
Международная Академия наук высшей школы,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербургский государственный технический
университет,

Санкт-Петербургский государственный Архитектурно-
строительный университет,

Санкт-Петербургский государственный морской технический
университет,

Секция строительной механики и надежности конструкций
Санкт-Петербургского Дома ученых им. А.М. Горького.



ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Сопредседатели комитета:

Индейцев Д.А., Постнов В.А.

Зам председателя:

Морозов В.И., Семенов В.А.,

Улитин В.В.

Члены комитета:

Арутюнян Р.А. (Россия),

Agyassov G.P. (Estonia),

Боровков А.И., Голованов А.И.,

Свойский Ф.М., Сеницын Е.Н.,

Федоровский Г.Д., Фрумен А.И.

(Россия).

СЕКРЕТАРИАТ КОНФЕРЕНЦИИ

Ученый секретарь: Фрумен А.И.

Члены: Зубков В.В.,

Каган-Розенцвейг Л.М.,

Тумашик Г.А. (Россия)

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель комитета:

Морозов Н.Ф.

Зам. председателя:

Линьков А.М., Плетнев В.И.

Члены комитета:

Баженов В.Г., Болотин В.В.

(Россия), Bauer E. (Austria),

Викторов Е.Г. (Россия),

Crouch S.L. (U.S.A),

Городецкий А.С. (Украина),

Горшков А.Г., Даль Ю.М.,

Индейцев Д.А.,

Ломакин Е.В. (Россия),

Loewenstein J.G. (Germany),

Масленников А.М.,

Мельников Б.Е., Нарайкин О.С.,

Овидько И.А., Пальмов В.А.,

Палий О.М., Петров Ю.В.,

Постнов В.А., Розин Л.А.,

Рутман Ю.Л., Сливкер В.И.,

Скворцов В.Р. (Россия),

Solarski H. (USA),

Фрейдин Ф.Б., Харлаб В.Д.,

Чирков В.П., Шаманов Н.П.,

Шугаев В.В. (Россия),

Ziegler F. (Austria)

ОТ ОРГКОМИТЕТА

Во втором томе Трудов XXI Международной конференции “Математическое моделирование в механике деформированных тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов” освещены следующие основные научные направления работы конференции:

- *Метод конечных элементов и метод граничных элементов*
- *Конечно-разностные и аналитические методы решения краевых задач механики сплошной среды*
- *Наномеханика и ее приложения*
- *Динамические задачи механики сплошной среды*
- *Механика повреждаемости и разрушения новых материалов и конструкций*
- *Методы оптимизации*
- *Методы идентификации*
- *Задачи взаимодействия различных физических сред*
- *Компьютерные технологии и программное обеспечение для моделирования НДС конструкций.*

В публикуемых Трудах конференции:

- приведен анализ и обсуждение перспективных направлений развития вычислительной механики деформируемого твердого тела, жидкости и газа с точки зрения их фундаментальной и прикладной значимости;
- дается оценка научных исследований по математическому моделированию и созданию компьютерных наукоемких технологий автоматизированного анализа процессов нелинейного (физически и геометрически) деформирования;
- приведены новые более эффективные методы оценки повреждаемости и разрушения физико-механических объектов сложной структуры и конфигурации при произвольных силовых, тепловых и импульсивных динамических воздействиях.

Рассмотрение содержания Трудов конференции позволяет заключить, что развитие фундаментальных и прикладных научных исследований в области методов граничных и конечных элементов привело к созданию многочисленных программных средств автоматизированного моделирования и проектирования, обладающих высокой эффективностью и производительностью.

Вместе с тем, в области практической реализации разрабатываемых программных средств имеются недостатки. Научные исследования в различных научно - исследовательских и проектно – конструкторских организациях ведутся разрозненно. Организационный механизм, стимулирующий создание универсальных высококачественных средств, ориентированных на широкий масштаб внедрения, не отлажен.

В своем решении Конференция предложила ряд мер, призванных устранить некоторые из отмеченных выше недостатков.

В заключение отметим, что очередную, XXII конференцию «Математическое моделирование в механике деформированных тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» Оргкомитет планирует провести в апреле-мае 2007 г. в Санкт-Петербурге.

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ ПОМОЩИ ПОЛИНОМОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В СИСТЕМЕ MAPLE

**Аверьянова Г.В., *Голоскоков Д.П.*

*(*Санкт-Петербургский Государственный Университет Водных Коммуникаций, Санкт-Петербург, Россия)*

Рассматривается использование Maple для решения динамических краевых задач теории тонких упругих пластин. Решение задачи строится на основе метода Канторовича с помощью полиномов специального вида, удовлетворяющих однородным граничным условиям. В качестве примера рассматривается расчет на динамическую нагрузку защемленной по всему контуру прямоугольной пластины.

1. Введение. В работе демонстрируется метод решения задач о колебаниях тонких прямоугольных пластин при помощи полиномов специального вида, удовлетворяющих однородным граничным условиям. В работе [2] указан способ построения полиномов, удовлетворяющих однородным граничным условиям, на основе классических полиномов Якоби и объясняется свойство "квазиортогональности" первых и вторых производных этих полиномов. Свойство "квазиортогональности" оказалось решающим при построении решения задачи методом Л.В. Канторовича, так как оно приводит к расщеплению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на отдельные ОДУ, которые легко решаются аналитически. Однако это свойство полиномов выполняется лишь приближенно. В работе авторов [3] демонстрируется использование системы Maple для вывода и последующего решения полной системы ОДУ метода Л.В. Канторовича для статического расчета тонких пластин. В данной работе указанный метод распространяется на динамические задачи теории тонких пластин и приводится пример динамического расчета прямоугольной пластинки, жестко защемленной по контуру.

2. Постановка задачи и ее решение. Основное разрешающее уравнение колебаний тонкой изотропной пластины толщины h в безразмерных координатах $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ имеет вид

$$\frac{D}{a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2D}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D}{b^4} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y, t) - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1)$$

где a и b – размеры в плане, D – цилиндрическая жесткость пластины, w – функция нормального прогиба, ρ – плотность материала, $q(x, y, t)$ – поперечная нагрузка.

В соответствии с методом Л.В. Канторовича, решение задачи будем искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{m,n}(t) f_m(x) f_n(y), \quad (2)$$

где $f_k(y)$ – система ортонормированных полиномов специального вида, удовлетворяющих однородным граничным условиям [3]:

$$f_k(0) = f_k(1) = 0, \quad \left. \frac{df_k(y)}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{df_k(y)}{dy} \right|_{y=1} = 0, \quad (3)$$

а $W_{m,n}(t)$ – пока неизвестные функции, определяемые из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть получена, например, с помощью метода Бубнова – Галеркина:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\rho h \delta_{m,r} \delta_{n,s} \frac{d^2 W_{m,n}(t)}{dt^2} + A_{m,n,r,s} W_{m,n}(t) \right] = q_{r,s}(t), \quad s, r = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

где

$$A_{m,n,r,s} = \frac{D}{a^4} \alpha_{m,r} \delta_{n,s} + \frac{2D}{a^2 b^2} \beta_{m,r} \beta_{n,s} + \frac{D}{b^4} \delta_{m,r} \alpha_{n,s},$$

$$\alpha_{m,r} = \int_0^1 \frac{d^4 f_m(x)}{dy^4} f_r(x) dx, \quad \beta_{m,r} = \int_0^1 \frac{d^2 f_m(x)}{dy^2} f_r(x) dx,$$

$$q_{r,s}(t) = \int_0^1 \int_0^1 q(x, y, t) f_r(x) f_s(y) dx dy, \quad \delta_{m,r} = \int_0^1 f_m(x) f_r(x) dx,$$

причем, в силу ортогональности полиномов, $\delta_{m,r} = \begin{cases} 1, & m = r, \\ 0, & m \neq r. \end{cases}$

Систему ОДУ (4) в первом приближении можно преобразовать в отдельные ОДУ для каждого номера (r,s) , если ввести предположение об ортогональности первых и вторых производных полиномов $f_k(y)$, то есть принять

$$\alpha_{k,s} = \begin{cases} \alpha_{s,s}, & k = s, \\ 0, & k \neq s; \end{cases} \quad \beta_{k,s} = \begin{cases} \beta_{s,s}, & k = s, \\ 0, & k \neq s. \end{cases}$$

В этом случае имеем

$$\rho h \frac{d^2 W_{r,s}(t)}{dt^2} + \left[\frac{D}{a^4} \alpha_{r,r} + \frac{2D}{a^2 b^2} \beta_{r,r} \beta_{s,s} + \frac{D}{b^4} \alpha_{s,s} \right] W_{r,s}(t) = q_{r,s}(t), \quad (5)$$

$r, s = 1, 2, 3, \dots$,

Аналитическое решение уравнений (5) для каждого (r,s) может быть легко получено, как "вручную", так и с помощью системы Maple.

После решения системы (4) (или, в первом приближении, уравнений (5)) все остальные характеристики напряженно-деформированного состояния определяются по известным формулам через функцию прогиба (2). Отметим, что система (4) (или (5)) должна решаться с соответствующими начальными условиями. Например, если начальный

прогиб и начальная скорость в каждой точке равны нулю, то должны выполняться условия

$$W_{m,n}(0) = 0, \quad \left. \frac{dW_{m,n}(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

3. Пример решения задачи в системе Maple. На пластину толщиной $h=0,012$ м с размерами в плане $a=4$ м, $b=4$ м действует внешняя гармоническая сила $q(\xi, \eta, t) = \frac{q_0 \xi}{a} \sin(t)$, $q_0=1000$ Па. Модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu=0,3$, линейная плотность материала $\rho = 7850$ кг/м³. Пластина жестко закреплена по контуру, начальное отклонение и начальная скорость равна нулю.

Для решения задачи воспользуемся системой полиномов $\{f_n^{(\alpha, \beta)}(y)\}$

при $\alpha = \beta = 4$, то есть в формуле (2) принимаем $f_n(y) \equiv f_n^{(4,4)}(y)$.

Построим несколько таких полиномов в Maple:

```
buildF:=proc(NP::numeric)
local k,l,F,Jacob,Jacob_Norm,change_var,Jacob_Pi;
global f;
with(orthopoly,P);
for k from 0 to NP do
```

Ненормированный полином Якоби при $\alpha=\beta=4$

```
Jacob[k]:=P(k,4,4,y);
```

Нормируем [3]:

```
Jacob_Norm[k]:=sqrt((2*k+9)*(k+5)*(k+6)*(k+7)*(k+8)/
(2^9*(k+1)*(k+2)*(k+3)*(k+4)))*Jacob[k];
```

```
od:
```

```
for l from 0 to NP do
```

```
change_var[l]:=simplify(subs(y=2*x-1,Jacob_Norm[l]));
```

```
Jacob_Pi[l]:=collect(sqrt(2^9)*change_var[l],x);
```

Полиномы, удовлетворяющие условиям (3), находим по формуле (8) [3]

```
F[l]:=x^2*(1-x)^2*Jacob_Pi[l];
```

```
f[l]:=unapply(F[l],x);
```

```
od:
```

```
print();
```

```
end proc;
```

Определяем дифференциальное уравнение изгиба пластины:

```
EQ := d/a^4*difff(w(x,y,t),x$4)+2*d/a^2/b^2*difff(w(x,y,t),x$2,
y$2)+d/b^4*difff(w(x,y,t),y$4) = q[0]*x*sin(t)-rho*h*
difff(w(x,y,t),t$2);
```

$$EQ := \frac{d \left(\frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial x^4} \right)}{a^4} + \frac{2 d \left(\frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial y^2 \partial x^2} \right)}{a^2 b^2} + \frac{d \left(\frac{\partial^4 w(x,y,t)}{\partial y^4} \right)}{b^4} =$$

$$q_0 x \sin(t) - \rho h \left(\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} \right)$$

Вводим исходные данные для расчета:

```
a:=4.;b:=4.;q[0]:=1000;h:=0.012;E:=2e11;v:=.3;d:=E*h^3/12/(1-
v^2);rho:=7850;NP:=1;
```

Построим полиномы $f_k(y)$:

```
buildF(NP);
```

Решение задачи ищем в виде:

```
w_gal:=proc(NP) options operator, arrow;local m,n;
sum(sum(W[m,n](t)*f[m](x),m=0..NP)*f[n](y),n=0..NP);end proc;
```

$$w_gal := NP \rightarrow \text{local } m, n; \sum_{n=0}^{NP} \left(\sum_{m=0}^{NP} W_{m,n}(t) f_m(x) \right) f_n(y)$$

Подставляем ряд в уравнение изгиба

```
eq:=value(subs(w(x,y,t)=w_gal(NP),EQ));
```

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4) получим непосредственно в Maple. При этом учтем, что при интегрировании выражений, состоящих из большого числа слагаемых, может потребоваться значительное количество оперативной памяти. Поэтому непосредственное интегрирование громоздких выражений заменим интегрированием каждого слагаемого и их суммированием.

Преобразуем левую и правую часть уравнения eq в сумму слагаемых и определим их количество:

```
eqleft:=collect(lhs(eq),[x,y],distributed):i1:=nops(eqleft);
eqright:=collect(rhs(eq),{x,y},distributed):
i2:=`if`((whattype(eqright)='+' ),nops(eqright),1);
```

Таким образом, левая часть уравнения состоит из 25, а правая из 17 слагаемых (если взять $NP=4$, получим соответственно 73 и 50 слагаемых).

Отдельно интегрируем произведение каждого слагаемого на $f_r(x)f_s(y)dx dy$:

```
for p from 0 to NP do
  for s from 0 to NP do
    lhu:='lhu';lhu:=0;
    for j from 1 to i1 do
      lhu:=lhu+int(int(op(j,eqleft)*f[p](x),x=0..1)*f[s](y),
        y=0..1);
    end do;
    rhu:='rhu';rhu:=0;
    for j from 1 to i2 do
      rhu:=rhu+int(int(op(j,eqright)*f[p](x),x=0..1)*f[s](y),
        y=0..1);
    end do;
    eqn[p,s]:=value(lhu)=value(rhu)
  end do:
end do:
```

Упростим полученную систему простых дифференциальных уравнений

```
for m from 0 to NP do
  for n from 0 to NP do
    eqn[m,n]:=simplify(eqn[m,n]):
  od:
od:
```

```

Теперь сформируем начальные условия
var:={}:eqn:=convert(eqn,set):grn:={}:
for m from 0 to NP do
  for n from 0 to NP do
    grn:=grn union {W[m,n](0)=0,D(W[m,n])(0)=0}:
    var:=var union {W[m,n](t)}:
  od:
od:

```

Решаем систему

```
sols:=dsolve(eqn union grn,var,numeric,output=listprocedure);
```

В результате получаем решение в виде списка процедур, которое не очень удобно для дальнейшей работы, поэтому преобразуем его для подстановки в уравнение.

```

allVar:={}:
for m from 0 to NP do
  for n from 0 to NP do
    W_proc[m,n]:=eval(W[m,n](t),sols);
    allVar:=allVar union {W[m,n](t)=W_proc[m,n](T)}:
  od:
od:

```

Подставляем полученные функции $W_{mn}(t)$ в общее решение

```
w:=unapply(evalf(subs({t=T} union allVar,value(w_gal(NP)))) , x, y, T):
```

Например, прогиб в точке $(0,5; 0,5)$ в момент времени $t=10$:

```

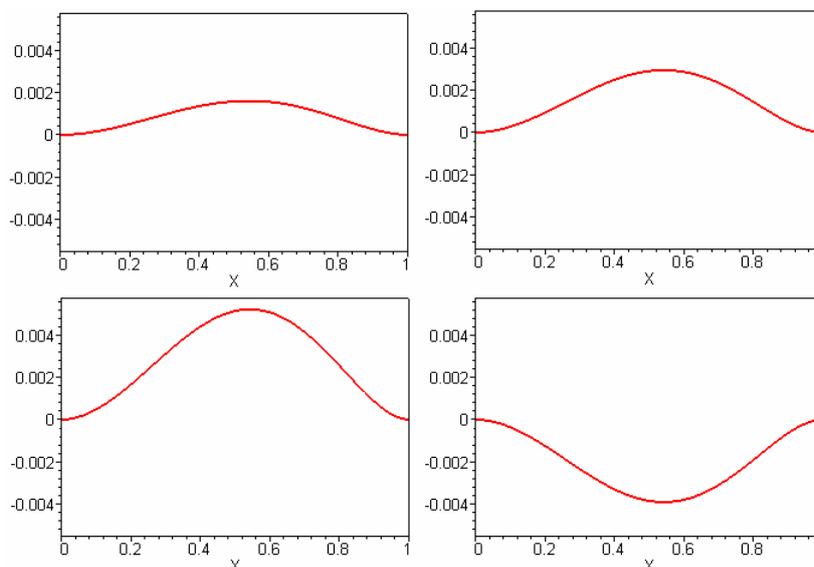
w(0.5,0.5,10);
-0.002827005977

```

Теперь мы можем отобразить полученные результаты на графиках. Например, для отображения прогиба в сечениях $y=0,5$ при $t=\overline{0,8}$ выполним следующую команду:

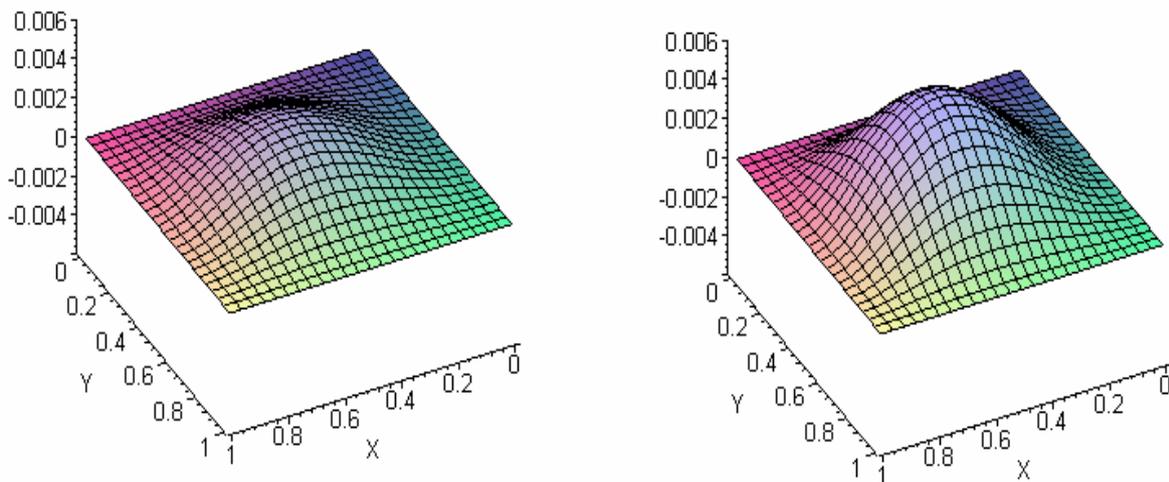
```
plots[animate](w(X,.5,T),X=0..1,T=0..8,frames=30,axes=BOX);
```

Результатом этой команды будет мультфильм, состоящий из 30 кадров. Ниже приведено только четыре из них.



Для построения трехмерной анимации используем команду:
`plots[animate3d](w(X, Y, T), X=0..1, Y=0..1, T=0..8, frames=30, axes=FRAME, view=-0.006..0.006);`

Получим мультфильм, состоящий из 30 кадров, два из которых приведены ниже.



4. Заключение. Изложенный метод позволяет решить задачу о колебании прямоугольной пластинки при любых однородных граничных условиях. В случае изменения условий закрепления пластинки, достаточно взять другие полиномы в выражении прогиба, удовлетворяющие соответствующим однородным граничным условиям. При этом структура дифференциальных уравнений метода Л.В. Канторовича остается прежней; другими будут только постоянные коэффициенты в этих уравнениях.

Рассмотренная методика легко распространяется на анизотропные прямоугольные пластинки, а также на секториальные пластинки, анизотропные и изотропные, и на пластинки переменной толщины. Кроме того, изложенная методика может быть использована при решении аналогичных задач теории тонких оболочек, теории ребристых пластин и оболочек.

Литература

1. Голоскоков П.Г. Изгиб прямоугольной плиты, жестко заделанной по двум противоположным сторонам. – М.: Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. 1959, № 11 – 12, стр. 25 – 34.
2. Голоскоков П.Г. Применение ортогональных полиномов с квазиортогональными производными в задачах об изгибе прямоугольных и секториальных плит. – К.: Труды Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. 1962, стр. 177 – 180.
3. Аверьянова Г.В., Голоскоков Д.П. Расчет тонких пластин при помощи полиномов специального вида. – М.: Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004, №1, стр. 70 – 75.

**НЕКОТОРЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С
НАЛИЧИЕМ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ И КОРНЕВЫХ
ВЕКТОРОВ, ПРИ РЕАЛИЗАЦИЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ
И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ И
ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Акимов П.А., Золотов А.Б., Сидоров В.Н.

(Московский государственный строительный университет, Россия)

**CERTAIN NUMERICAL ASPECTS ASSOCIATED WITH ADJOINT
FUNCTIONS AND ROOT VECTORS IN ANALYTICAL AND
SEMIANALYTICAL SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL AND
THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF ELASTIC THEORY**

Akimov P.A., Zolotov A.B., Sidorov V.N.

(Moscow State University of Civil Engineering, Russia)

В настоящей статье обсуждаются некоторые вычислительные проблемы, связанные с наличием присоединенных функций и корневых векторов у определяющих операторов, возникающих при реализации аналитических и численно-аналитических (в частности, в рамках дискретно-континуального метода конечных элементов и дискретно-континуального вариационно-разностного метода) решений двумерных и трехмерных задач теории упругости. Авторами предлагаются подходы по преодолению трудностей.

1. Введение. В настоящее время решение задач строительной механики упругих систем осуществляется преимущественно численными методами. Для большинства проблем не представляется возможным найти аналитическое решение, однако в последние годы появляется потенциал для расширения доли аналитических подходов, связанный с реализацией численно-аналитических методов. Область применения разработанных авторами дискретно-континуальных методов (дискретно-континуальный метод конечных элементов, дискретно-континуальный метод граничных элементов, дискретно-континуальный вариационно-разностный метод [1-3]) составляют конструкции и сооружения с постоянными физико-геометрическими характеристиками по одному из координатных направлений. Методы являются дискретно-континуальными в том смысле, что по выделяемому направлению постоянства характеристик (основное направление) сохраняется континуальный характер задачи и аналитический вид получаемого решения, а по остальным производится дискретизация того или иного рода (в итоге имеем ансамбль дискретно-континуальных элементов). Аналогичная идея была положена в основу появившихся во второй половине XX века методов типа прямых, многие из которых остались нереализованными на практике, так как не учитывали сложной вычислительной специфики проблемы и необходимости компьютерной реализации.

2. Примеры континуальных постановок: задачи теории упругости.

Вторая краевая задача теории упругости записывается в виде [1]:

$$Lu = \sum_{j=1}^N \partial_j \sigma_{ij} = -F_i, \quad \bar{x} \in \Omega; \quad Tu = \sum_{j=1}^N n_j \sigma_{ij} = -f_i, \quad \bar{x} \in \partial\Omega, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где Ω – область занимаемая конструкцией; L – дифференциальный оператор условий внутри Ω ; T – оператор дифференциальных условий на границе области $\partial\Omega$; $\bar{x} = [x_1 \dots x_N]^T$ – вектор координат точки; $\bar{u} = [u_1 \dots u_N]^T$ – вектор составляющих перемещений; $\bar{F} = [F_1 \dots F_N]^T$, $\bar{f} = [f_1 \dots f_N]^T$ – векторы составляющих нагрузок внутри Ω и на $\partial\Omega$ соответственно; $\bar{\sigma}$ – вектор компонент напряжений; $\bar{n} = [n_1 \dots n_N]^T$ – вектор составляющих внутренней нормали к поверхности; $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, N$.

Операторная постановка задачи после выделения основного направления (переменная x_N) может быть представлена в виде:

$$\bar{U}' = \tilde{L}\bar{U} + \bar{F}, \quad \text{где } \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix}; \quad \tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ L_{vv}^{-1}L_{uu} & L_{vv}^{-1}\tilde{L}_{uv} \end{bmatrix}; \quad \bar{F} = -\begin{bmatrix} 0 \\ L_{vv}^{-1}\bar{S} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\bar{S} = [S_1 \dots S_N]^T; \quad S_i = \theta F_i + \delta_{\Gamma} f_i; \quad (3)$$

$$\bar{v} = [v_1 \dots v_N]^T = \partial_N \bar{u} = \bar{u}'; \quad \bar{v}' = \partial_N \bar{v};$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{uv} &= L_{uv} - L_{uv}^*; & \theta(\bar{x}) &= 1, \quad \text{при } \bar{x} \in \Omega; \\ \theta(\bar{x}) &= 0, \quad \text{при } \bar{x} \notin \Omega; & \delta_{\Gamma} &= \partial\theta/\partial n; \end{aligned} \quad (4)$$

$\theta(\bar{x})$, δ_{Γ} – характеристическая функция области Ω и дельта-функция ее границы [1]; E – единичная матрица; индекс «*» обозначает сопряжение.

Для трехмерного случая ($N = 3$) имеем:

$$L_{vv} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} \end{bmatrix}; \quad L_{uv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_1^* \tilde{\lambda} \\ 0 & 0 & \partial_2^* \tilde{\lambda} \\ \partial_1^* \tilde{\mu} & \partial_2^* \tilde{\mu} & 0 \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$L_{uu} = \sum_{j=1}^2 \partial_j^* \tilde{\mu} \partial_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^* \tilde{\mu} \partial_1 & \partial_2^* \tilde{\mu} \partial_1 & 0 \\ \partial_1^* \tilde{\mu} \partial_2 & \partial_2^* \tilde{\mu} \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^* \tilde{\lambda} \partial_1 & \partial_1^* \tilde{\lambda} \partial_2 & 0 \\ \partial_2^* \tilde{\lambda} \partial_1 & \partial_2^* \tilde{\lambda} \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где λ, μ – постоянные Ламе; $\tilde{\lambda} = \theta\lambda$; $\tilde{\mu} = \theta\mu$; $\partial_i^* = -\partial/\partial x_i$, $i = 1, \dots, N$.

В двумерном случае ($N = 2$) операторы определяются формулами:

$$L_{vv} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} \end{bmatrix}; \quad L_{uv} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1^* \tilde{\lambda} \\ \partial_1^* \tilde{\mu} & 0 \end{bmatrix}; \quad L_{uu} = \partial_1^* \begin{bmatrix} \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} & 0 \\ 0 & \tilde{\mu} \end{bmatrix} \partial_1; \quad (7)$$

где $\lambda, \mu, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ – соответствующие параметры материала [1];
 $\tilde{\lambda} = \theta\lambda; \tilde{\mu} = \theta\mu.$

Вариационная постановка задачи записывается следующим образом:

$$\Phi(\bar{U}) = 0.5 \cdot (\tilde{L} \bar{U}, \bar{U}) - (\bar{S}, \bar{U}) = \quad (8)$$

$$= 0.5 \cdot [(L_{vv} \bar{v}, \bar{v}) + 2(\tilde{L}_{uv} \bar{v}, \bar{u}) + (L_{uu} \bar{u}, \bar{u})] - (\bar{S}, \bar{u})'$$

где

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} L_{uu} & \tilde{L}_{uv} \\ \tilde{L}_{uv}^* & L_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{uu} & \tilde{L}_{uv} \\ \tilde{L}_{vu} & L_{vv} \end{bmatrix}; \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{S} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$\tilde{L}_{vu} = \tilde{L}_{uv}^* = -\tilde{L}_{uv}; \quad \bar{U}' = \partial_N \bar{U}.$$

Решением задачи является точка (функция) условного экстремума функционала (8) с условием (3), связывающим вектор-функции \bar{u} и \bar{v} .

3. Некоторые спектральные свойства определяющих операторов.

Определяющий оператор (2), как для двумерной задачи теории упругости, так и для трехмерной, имеет важные особенности качественного характера.

Спектр оператора (2) состоит, главным образом, из простых собственных значений разных знаков, которым соответствуют собственные функции, при этом в континуальном виде спектр неограничен сверху и поэтому при аппроксимации оператору соответствует жесткая система дифференциальных уравнений. Под понятием «жесткая система» понимается наличие большого соотношения максимального и минимального из модулей ненулевых собственных значений соответствующей матрицы коэффициентов.

Кроме простых собственных значений в спектре присутствуют и кратные, которым соответствуют Жордановы цепочки, т.е. совокупность собственных и присоединенных функций. При дискретизации, таким образом, в Жордановой форме матрицы коэффициентов системы возникают жордановы клетки неединичного порядка и отвечающие им собственные и присоединенные (корневые) вектора. В [1] для двумерного случая показано, что у оператора (2) есть только две цепочки собственных и присоединенных функций более чем единичной длины, причем они соответствуют нулевому собственному значению оператора (2) и имеют длины два и четыре соответственно. Вектора первой цепочки длиной четыре представимы в виде

$$\bar{w}_1^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(i)} \\ \bar{v}_1^{(i)} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \bar{u}_1^{(i)} = \sum_{j=0}^i \bar{C}_{1,j}^i x_1^j; \quad \bar{v}_1^{(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} \bar{C}_{1,j}^{i-1} x_1^j, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (10)$$

Аналогично для векторов второй цепочки длины два имеем:

$$\bar{w}_2^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{u}_2^{(i)} \\ \bar{v}_2^{(i)} \end{bmatrix}, \text{ где } \bar{u}_2^{(i)} = \sum_{j=0}^i \bar{C}_{2,j}^i x_1^j; \quad v_2^{(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} \bar{C}_{2,j}^{i-1} x_1^j, \quad i = 0, 1, \quad (11)$$

Здесь

$$\bar{C}_{1,s}^i = [C_{1,s,1}^i \quad C_{1,s,2}^i]^T, \quad s = 0, 1; \quad i = 0, 1, 2, 3; \quad (12)$$

$$\bar{C}_{2,s}^i = [C_{2,s,1}^i \quad C_{2,s,2}^i]^T, \quad s = 0, 1; \quad i = 0, 1. \quad (13)$$

– некоторые коэффициенты [1].

В трехмерных задачах теории упругости, как позволяет заключить опыт многочисленных практических расчетов, у оператора (2) есть только четыре цепочки собственных и присоединенных функций более чем единичной длины, причем они опять соответствуют нулевому собственному значению оператора (2) и две из них имеют длину два и две - длину четыре.

В действительности построение присоединенных функций сводится к решению специальных вспомогательных краевых задач. В трехмерном случае в роли последней выступает двумерная задача Неймана для оператора Лапласа, в двумерном случае – одномерная задача Неймана для оператора Лапласа. Постановка и решение вспомогательных краевых задач для плоской задачи теории упругости представлены в [1], для пространственной задачи теории упругости соответствующие постановки приведены в статьях А.Г. Костюченко, М.Б. Оразова [4], А.А. Шкаликова, А.В. Шкреды [5], где решалась близкая задача о спектральных свойствах квадратичного операторного пучка.

4. Дискретно-континуальная постановка задачи. Многоточечная краевая задача. Введением сетки по неосновным («поперечным») направлениям конструкции осуществляется дискретизация операторов континуальной постановки (2) на основе вариационных подходов (вариационно-разностный метод или метод конечных элементов), после чего проблема сводится к многоточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, поскольку только в таком виде может выполняться построение аналитического решения.

Под многоточечной краевой задачей понимается задача с «внутренними» граничными условиями, т.е. совокупность обычных краевых задач, рассматриваемых на областях, имеющих общие границы:

$$\bar{y}' - A\bar{y} = \bar{f}, \quad x \in \bigcup_{k=1}^{n_k-1} (x_k, x_{k+1}); \quad (14)$$

$$B_k^- \bar{y}(x_k - 0) + B_k^+ \bar{y}(x_k + 0) = \bar{g}_k, \quad k = 1, \dots, n_k, \quad (15)$$

где $\bar{y} = \bar{y}(x) = [y_1(x) \quad y_2(x) \quad \dots \quad y_n(x)]^T$ – искомая n -мерная вектор-функция; $\bar{f} = \bar{f}(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \dots \quad f_n(x)]^T$ – n -мерная вектор-функция

правых частей; $x_k, k = 1, \dots, n_k$ – координаты граничных точек; A – матрица коэффициентов n -го порядка; V_k^-, V_k^+ – матрицы граничных условий, квадратные n -го порядка; \bar{g}_k – n -мерный вектор правых частей граничных условий; $x \equiv x_N$.

Итак, дискретно-континуальные методы, как и многие стандартные полуаналитические подходы (метод Л.В. Канторовича, метод В.З. Власова, метод прямых и прочие) приводят, как правило, к задаче решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Здесь важно акцентировать внимание на том факте, что во всех стандартных полуаналитических методах алгоритм построения аналитического решения такой задачи отсутствует и отсутствует совсем не случайно.

5. Разложение Жордана матрицы коэффициентов. Как известно, жорданово разложение матрицы A системы (14) записывается в виде

$$A = T J T^{-1}, \quad \text{где } J = \{J_1, J_2, \dots, J_u\} \quad (16)$$

T – невырожденная матрица, столбцы которой собственные и корневые векторы матрицы A ; J – блочно-диагональная матрица Жордана; J_p – жорданова клетка, соответствующая собственному значению λ_p ; $\dim J_p = m_p$.

Наличие жордановых клеток неединичного порядка требует вычисления корневых векторов. В [6] доказывается, что в общем случае не может существовать ни одного численно устойчивого способа вычисления жордановых канонических форм. Однако, в задачах расчета конструкций, как установлено в ходе проведенных исследований, количество и размерности жордановых клеток неединичного порядка не меняются при сгущении сетки дискретно-континуальных элементов, они соответствуют нулевым собственным значениям. Непосредственное построение Жордановых цепочек собственных и присоединенных векторов, хоть и является решаемым на основе полученных для континуального оператора соотношений, тем не менее, на дискретном уровне относительно трудоемко и не всегда оправдано. Вряд ли может быть рекомендовано и возможное в данном случае возмущение матрицы коэффициентов системы. В силу характерной жесткости системы (14) здесь особенно рискован выбор параметров возмущения. В этой связи авторами, наряду с первыми двумя подходами, предлагается третий, который не предусматривает детального разбора и исследования характера присоединенных векторов, хотя, как отмечалось ранее, о них все известно и это сам по себе важным и интересным качественным фактом. Третий путь, описываемый далее, более прост и с той точки зрения, что не требуется

решать вспомогательных краевых задач (см. п. 3), оставаясь при этом в классе численно-устойчивых дискретно-континуальных методов.

6. Схема метода решения. Суть решения задачи (14)-(15) состоит в рассмотрении ее матрицы коэффициентов как оператора и введении трех подпространств. Первое подпространство отвечает собственным векторам, соответствующим положительным собственным значениям, второе – собственным векторам, соответствующим отрицательным собственным значениям, третье – собственным и присоединенным векторам, соответствующим нулевым собственным значениям.

Вычисление проекторов на первые два подпространства осуществляется за счет определения правых и левых собственных векторов матрицы коэффициентов, которое производится по устойчивому алгоритму. Иными словами одновременно решается левая и правая проблемы собственных значений, что является очень существенным приемом для получения конечного результата. Итак, проектор на подпространство собственных векторов, отвечающих ненулевым (положительным и отрицательным) собственным значениям, может быть определен формулой

$$P_1 = T_1 (\tilde{T}_1 T_1)^{-1} \tilde{T}_1, \quad (17)$$

где T_1 и \tilde{T}_1 – соответственно матрицы, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A ; матрицу \tilde{T}_1 предлагается определять из решения левой проблемы собственных значений (практически невозможно построить матрицы T и T^{-1} в случае наличия в J жордановых клеток неединичного порядка).

Третье же подпространство является дополнительным к двум первым и в этой связи не нуждается в специальном построении проектора. Он элементарным образом находится как разность тождественного оператора с парой остальных проекторов, которым он ортогонален. С этих позиций найдено достаточно простое точное решение проблемы. Иными словами

$$P_2 = E - P_1, \quad (18)$$

где E – единичная матрица соответствующего порядка.

Таким образом, строится разложение матрицы коэффициентов системы (14), которое при решении задач расчета конструкций предлагается называть частичным жордановым разложением:

$$A = A_1 + A_2, \quad \text{где} \quad A_1 = T_1 J_1 \tilde{T}_1, \quad A_2 = A - A_1. \quad (19)$$

После специальных сортировок собственных значений и соответствующих собственных векторов, проведения биортогонализации последних, фундаментальная матрица-функция строится однозначно в виде, исключая экспоненциальные функции с положительными

аргументами (функции катастрофы по В.И. Арнольд). На подпространстве, отвечающем собственным и присоединенным векторам, соответствующим нулевым собственным значениям, выполняется прямое построение решения:

$$\varepsilon(x) = T_1 \tilde{\varepsilon}_0(x) \tilde{T}_1 + \chi(x,0) [P_2 + \sum_{k=1}^{m_{\max}-1} \frac{x^k}{k!} A_2^k], \quad (20)$$

$$\text{где } \chi(x, \lambda_p) = \begin{cases} \text{sign}(x) \theta(-\text{Re}(\lambda_p)x), & \lambda_p \neq 0 \\ 0.5 \text{sign}(x), & \lambda_p = 0; \end{cases} \quad \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad (21)$$

$$\tilde{\varepsilon}_0(x) = \text{diag} \{ \chi(x, \lambda_1) \exp(\lambda_1 x), \dots, \chi(x, \lambda_l) \exp(\lambda_l x) \}; \quad m_{\max} = \max_{l \leq i \leq u} m_i, \quad (22)$$

l – число ненулевых собственных значений матрицы A .

Общее решение многоточечной краевой задачи (обобщенное решение) ищется в виде свертки фундаментальной матрицы-функции системы с вектор-функцией правых частей, т.е.

$$\bar{Y} = \varepsilon * \bar{F} = \varepsilon * \bar{f} + \sum_{k=1}^{n_k} \varepsilon(x - x_k^b) \bar{C}_k, \quad \text{где } \bar{C}_k = \Delta \bar{y}_k, \quad (23)$$

где $x \in (-\infty, +\infty)$; $\Delta \bar{y}_k = \bar{y}(x_k^b + 0) - \bar{y}(x_k^b - 0)$ – вектор величин конечных разрывов в точке x_k^b ; \bar{Y} – обобщенная вектор-функция неизвестных.

Определение постоянных коэффициентов в общем решении из граничных условий (15) производится методами описанными в [1].

Литература

1. Золотов А.Б., Акимов П.А. Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 стр.
2. Золотов А.Б., Акимов П.А. Прямой дискретно-континуальный метод граничных элементов для определения напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций. // «НТТ – наука и техника транспорта», 2004, №3, с. 70-77.
3. Акимов П.А., Золотов А.Б. Численно-аналитические методы расчета строительных конструкций: перспективы развития и сопоставления. // САПР и графика, 2005, №1, с. 78-82.
4. Костюченко А.Г., Оразов М.Б. Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки. // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Т. 6. М.: Издательство МГУ, 1981. с. 97-146.
5. Шкаликов А.А., Шкред А.В. Задача об установившихся колебаниях трансверсально-изотропного полуцилиндра. // Математический сборник, 1991, т. 182, №3, с. 1222-1246.
6. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕДУКЦИОННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДЕФОРМИРОВАННОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Александров А.В.

(ЦНИИ им. Акад. А.Н. Крылова, Санкт-Петербург, Россия)

DEFINITION OF BEAM REDUCING FACTOR BY FEM

Aleksandrov A.V.

(Krylov Shipbuilding Research Institute, St Petersburg, Russia)

Рассматривается решение задачи об участии гибких связей в общем изгибе корпуса судна. Элементы корпуса имеют начальную погибь, вызванную остаточными сварочными деформациями и эксплуатационными повреждениями. Задача решается с учетом сложного изгиба и физической нелинейности материала. Величина редуционного коэффициента определяется на основе сочетания аналитического решения о сложном изгибе балок и аппроксимации численного решения, полученного методом конечных элементов.

1. Введение. В настоящее время вопрос, о расчете редуционного коэффициента не имеет удовлетворительного физически обоснованного решения. Приводимая в Правилах Российского Речного Регистра [1] расчетная модель по этому вопросу слишком сложна для широкого практического использования. В качестве основы для построения рациональной процедуры определения степени участия деформированных балок в общем изгибе корпуса используются основные расчетные зависимости для решения аналогичной задачи, описанные в сборнике нормативно-методических материалов Российского Морского Регистра Судоходства [2]. Однако, они основываются на представлении о чисто упругой работе конструктивных элементов без учета влияния остаточных напряжений и пластического деформирования материала. Результаты предварительного анализа показывают, что влияние этих и некоторых других факторов может быть достаточно существенным.

2. Построение модели оценки участия гибких конструктивных элементов (балок) в общем изгибе корпуса. Снижение несущей способности балок продольного набора корпуса на восприятие продольных сжимающих нагрузок от общего изгиба учитывается при расчете предельного изгибающего момента введением редуционного коэффициента (РК). Редуционный коэффициент Ψ_V является отношением между уровнем средних напряжений в балке $\sigma_{\bar{\sigma}}$ с присоединенном пояском к напряжениям, действующих в жестких связях

$$\sigma_{жс} : \Psi_V = \frac{\sigma_{\bar{\sigma}}}{\sigma_{жс}}$$

Иначе, коэффициент можно определить как отношение осевых реакций в опорном сечении балки с присоединенным пояском к опорным реакциям жесткой связи, при условии равного сближения опор.

В математической модели балки для расчетного определения Ψ_U должны учитываться размер и форма поперечного сечения балки, геометрия пролетов до приложения нагрузки, отклонения свойств материала от закона Гука, а также влияние геометрической нелинейности при расчете деформированного состояния.

С целью детального анализа перечисленных выше факторов рассмотрим четыре типа конечноэлементных (КЭ) моделей:

А – балочная КЭ модель, прямоугольное поперечное сечение, линейно упругий материал;

В – балочная КЭ модель, прямоугольное поперечное сечение, упруго-пластический материал;

С – составная КЭ модель (балочный КЭ для моделирования ребра и оболочечный для моделирования присоединенного пояса), линейно упругий материал;

Д – составная КЭ модель, упруго-пластический материал.

Расчет напряженно- деформированного состояния моделей выполнялся с учетом геометрической нелинейности. В этом случае становится возможным выявить зависимость поперечных перемещений (прогибов) балки от величины осевых сжимающих усилий.

Геометрия нейтральной оси пролетов балки показана на рис. 1. Следует заметить, что наличие симметрии в геометрии расчетного пролета позволяет при составлении КЭ модели ограничиться только половиной конструкции. Материал балки упруго-пластический с нелинейным упрочнением.

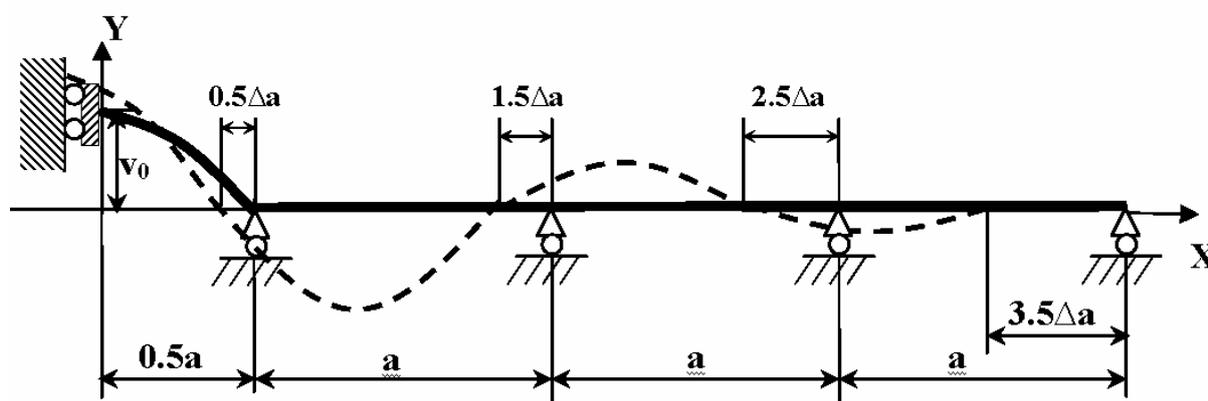


Рис.1. Расчетная модель многопролетной балки. Центральный пролет имеет синусоидальную погиб
 a – длина расчетного пролета,
 Δa – сближение опор расчетного пролета,
 v_0 – амплитуда начальной синусоидальной погиби.

Программный комплекс ANSYS реализует процедуру метода конечных элементов на персональном компьютере и применяется для решения рассматриваемых задач.

При расчете жесткости балочного двух узлового пространственного конечного элемента BEAM188 учитывается форма поперечного сечения, сдвиговая жесткость, физические и геометрические нелинейные факторы, а также предусмотрено задание положения центра тяжести поперечного сечения с эксцентриситетом по отношению к узлам. В составных моделях C и D используются оболочечные четырех узловые элементы типа SHELL181, совместные по перемещениям и расчетным параметрам жесткости с BEAM188.

Рассмотрим деформацию балок при продольном укорочении при наличии начальной погиби расчетного пролета. Фрагмент конечноэлементной сетки для модели балки с присоединенным пояском типа C и D показан рис. 2.

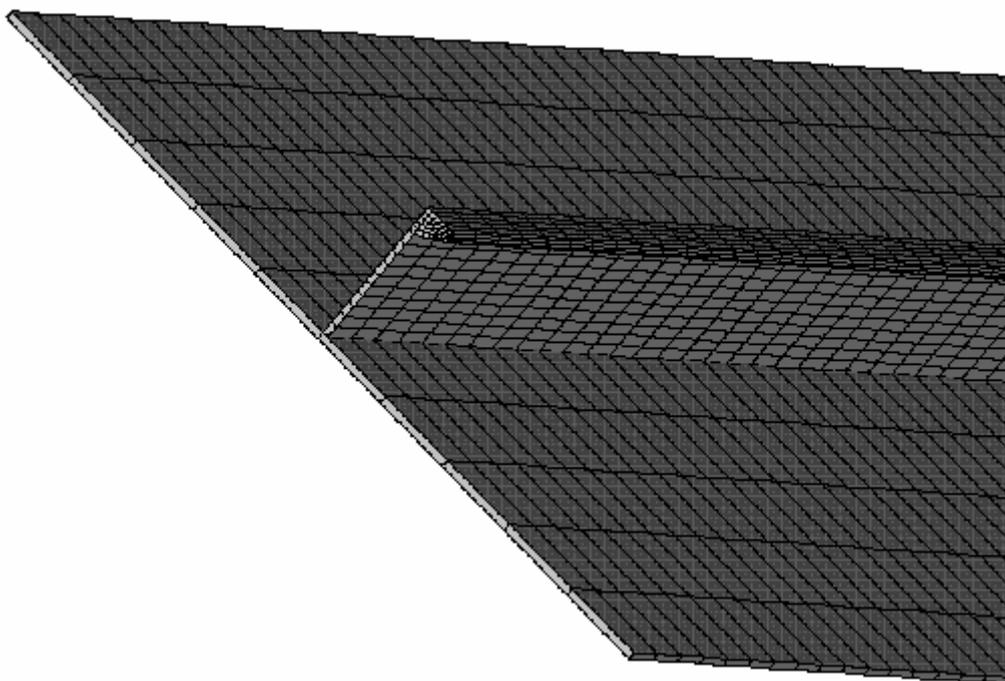


Рис.2. Фрагмент конечноэлементной модели балки с присоединенным пояском

Результаты расчетов представлены в форме зависимости редуцированного коэффициента Ψ_V от отношения $\frac{\sigma_{ж}}{\sigma_{кр}}$ (где $\sigma_{кр}$ -

критически напряжения в расчетном пролете балки при нелинейной потере устойчивости. Индексы на графиках (рис.3) обозначают тип модели и величину относительной начальной погиби $\bar{f}_0 = v_0/a$ в центре расчетного пролета (для 1 - погибь $\bar{f}_0 = 0.0005$, 2 - погибь 0.02, 3 - погибь 0.04), например, A-3 – зависимость для модель A, относительная начальная погибь 0.04.

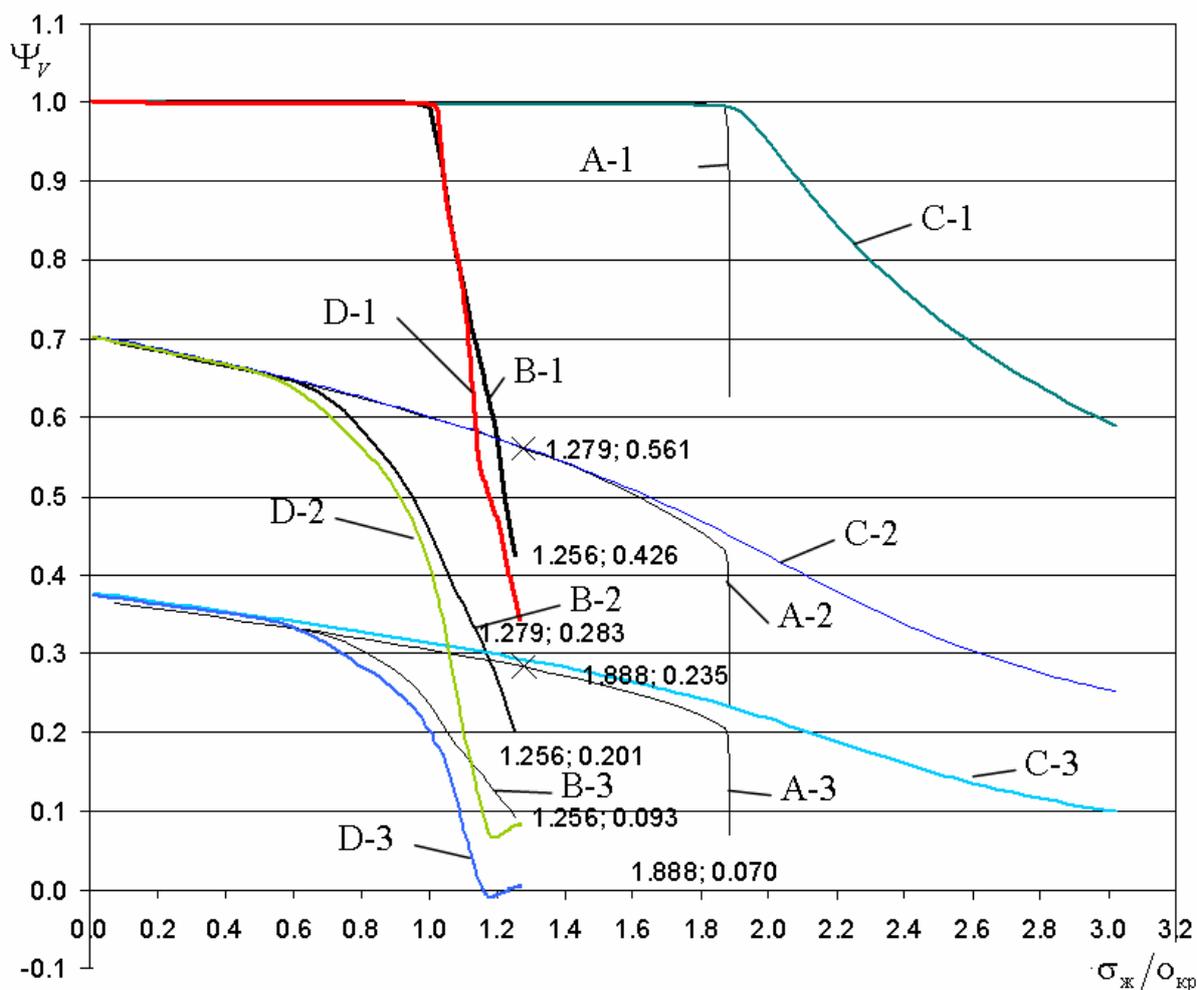


Рис.3. Зависимость редуцированного коэффициента от относительных напряжений в жестких связях.

3. Заключение. Проведение массовых расчетов РК для балок с различными геометрическими параметрами, а также сопоставление с результатами численного моделирования балок с начальной погибью в составе перекрытия [3], позволяют сделать следующие выводы:

1. Учет пластических свойств материала наибольшее значение имеет при расчете редуцированного коэффициента в случае действия сжимающих напряжений. Наличие пластических деформации может приводить к снижению редуцированных коэффициентов более чем в 2 раза по сравнению результатами расчетов в упругой области.
2. Остаточная погибь балки может возникать в случае потери устойчивости при напряжениях меньше допускаемых. Это следует учитывать при расчете редуцированных коэффициентов изношенных элементов набора.
3. Редуцированные коэффициенты по результатам расчетов МКЭ совпадают с коэффициентами, полученными по аналитическим зависимостям для сложного изгиба балки в упругой стадии нагружения, вплоть до

отношения $\frac{\sigma_{жс}}{\sigma_{кр}} = 0.6$. При больших величинах этого соотношения учет

физической нелинейности деформирования материала приводит к снижению редуцированных коэффициентов по сравнению с их оценками в предположении неограниченной упругости материала.

4. В пластической области для составной модели балки с отношением $\frac{\sigma_{э}}{\sigma_{т}} = 1.51$ происходит полное исчерпание несущей способности балки при $\sigma_{жс} = \sigma_{т}$.
5. При наличии начальной синусоидальной погиби балки пластины присоединенного пояска не теряют устойчивости.
6. Учет поперечного равномерно распределенного давления на балку не оказывает влияние на значение РК, т.к. величина относительного прогиба от поперечной нагрузки $\bar{f} = 0.0005$ находится в пределах точности процедуры пошагового интегрирования нелинейного уравнения равновесия балки

Литература

1. Российский Речной Регистр. Правила классификации и постройки судов внутреннего плавания (ПСВП), Москва, 2002
2. Российский морской регистр судоходства. Нормативно-методические указания по расчетам прочности морских судов. Сборник нормативно-методических материалов, книга одиннадцатая, СПб, 2002
3. Proceeding of the 15th international ship and offshore structures congress, vol.1, Elsevier, 2003

ЗАВИСИМОСТЬ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ОТ МИКРОСТРУКТУРЫ.

Аристович К.Ю.

1. Введение. В последнее время большое количество научно-исследовательских и технических работ посвящено моделированию материалов с учетом микроструктуры. Хорошо известно, что твердый кристаллический материал меняет свои свойства при изменении внутренней структуры. Проблема моделирования и прогнозирования эффектов, связанных с микроуровнем до сих пор остается одной из наиболее сложных в современном научном мире. Эксперименты показывают, что ни методы теории упругости, ни другие континуальные методы не работают там, где размер объекта исследования не превышает нескольких нанометров (наноструктуры). Также континуальные теории упускают ряд эффектов при исследовании фуллеренов [1] и композитов

[2]. В большинстве работ по нанотематике исследуются макроскопические свойства объекта при заданной молекулярной структуре вещества [3],[4],[5]. Упругие, пластичные, химические, а так же биологические свойства хорошо описываются и моделируются с использованием метода молекулярной динамики [6]. Данный метод позволяет построить модель с использованием безразмерных параметров, определяемых из эксперимента, и предсказать поведение того или иного объекта исследования на основании проведенного аналитического, или, в основном, компьютерного исследования построенной модели.

Актуальна проблема исследования переходов энергии в веществе с макроскопической степени свободы на флуктационную (энергию хаотического движения частиц в веществе). Моделирование вещества как механической системы атомов позволяет ввести модель температуры. В данном случае энергия хаотического движения частиц представляет собой тепловую энергию.

Эффект перехода энергии в твердом стержне моделируется в континуальной теории введением коэффициента внутреннего трения (тело Фойхта, тело Сорокина), однако этот коэффициент носит эмпирический характер. Для больших объектов его значение принимают постоянным и не зависящим от размеров и внутренней структуры [1], однако для наноразмерных объектов дискретность вещества становится одним факторов, существенно влияющих на физические свойства объекта. Коэффициент внутреннего трения, так же как и упругие модули требует более глубокого уточнения. Влияние размера объекта на модули упругости исследовалось во многих работах по нанотематике [2]-[6], однако переход к континуальности.

Упругие, пластичные, химические, а так же биологические свойства хорошо описываются и моделируются с использованием метода молекулярной динамики [6]. Данный метод позволяет построить модель с использованием безразмерных параметров, определяемых из эксперимента, и предсказать поведение того или иного объекта исследования на основании проведенного аналитического, или, в основном, компьютерного исследования построенной модели.

В настоящей работе методом молекулярной динамики исследован переход энергии свободных продольных колебаний твердого плоского конечномерного стержня в тепловую энергию. Построена кривая роста тепловой энергии. Получено равновероятное распределение тепловой энергии по степеням свободы атомов. На основе численного расчета в совокупности с методами теории упругости, определен безразмерный коэффициент внутреннего трения (КВТ) материала. Показана его связь с реальным коэффициентом. Произведен анализ зависимости КВТ от размеров стержня. На основе серии численных экспериментов построена и

проанализирована зависимость коэффициента внутреннего трения от размеров кристаллического стержня.

2. Постановка задачи. Рассмотрим объект исследования – твердый кристаллический стержень (рис.1).

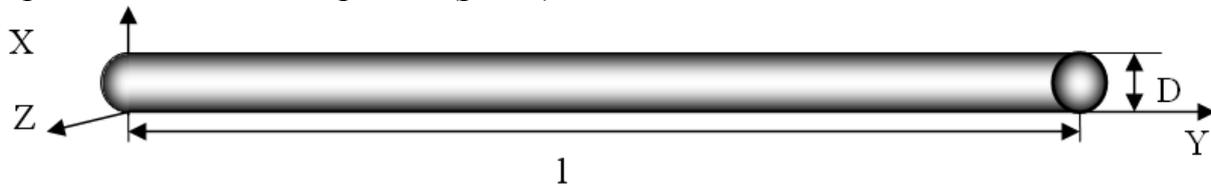


Рис.1. Стержень.

1. Механическая модель. Обозначим за l длину стержня, D – диаметр (в случае кругового сечения). Стержень совершает свободные продольные колебания на первой собственной частоте. Вследствие наличия внутреннего трения энергия макроскопических колебаний будет переходить в тепловую энергию. В рамках рассматриваемой модели введем тепловую энергию как энергию хаотического движения атомов друг относительно друга.

Стержень представляет собой совокупность точечных масс – носителей вещества, связанных неким законом взаимодействия. В простейшем случае – это линейный закон, и стержень эквивалентен системе грузов на пружинах (рис.2)

В более сложных случаях, для описания тех или иных свойств вещества или процессов, происходящих в веществе, используют переменные массы грузов (для описания неоднородности вещества) и различные нелинейные законы взаимодействия (для описания нелинейных эффектов). Таким «грузом» может быть заменен и атом, а закон взаимодействия в таком случае принимает характер межатомного. В зависимости от закона, у частиц - носителей вещества может быть различная конфигурация положения равновесия. Чтобы описать кристалл, например, меди, то достаточно взять соответствующие параметры для рассматриваемого потенциала, а в качестве носителя вещества – атом меди.

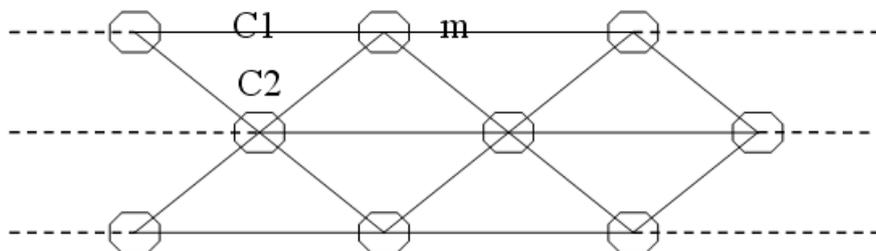


Рис.2. Простейшая модель описания стержня (плоская).

Переход энергии с низкочастотной степени свободы на высокочастотную в одномерной линейной системе не наблюдается (эффект Ферми-Паста-Улама [7]), поэтому начнем рассмотрение задачи с

двумерного случая. Будем рассматривать нелинейный закон взаимодействия между частицами. Массы всех частиц положим равными (моделируем атомы в кристаллической решетке).

2. *Кристаллическая решетка и потенциал взаимодействия.* Закон взаимодействия – парный центральный, в виде потенциала Леннарда-Джонса:

$$U(r) = D \left(\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right) \quad (1)$$

где D – энергия связи, a – равновесное расстояние. Потенциал учитывает дальнейшее взаимодействие частиц. В дальнейшем для простоты и уменьшения численных операций воспользуемся так называемым сплайновым потенциалом, сконструированным на базе потенциала Леннарда-Джонса [6]:

$$\tilde{U}(r) = \begin{cases} U(r), & 0 < r \leq b \\ -a_2(a_{cut}^2 - r^2)^2 + a_3(a_{cut}^2 - r^2)^3, & b < r \leq a_{cut} \\ 0, & a_{cut} < r \end{cases} \quad (2)$$

где

$$a_2 = \frac{5b^2 - a_{cut}^2}{8b^3(a_{cut}^2 - b^2)} f_*, \quad a_3 = \frac{3b^2 - a_{cut}^2}{12b^3(a_{cut}^2 - b^2)^2} f_* \quad (3)$$

$$a_{cut}^2 = b^2 \left(5 - \sqrt{16 + \frac{24U(b)}{bf_*}} \right)$$

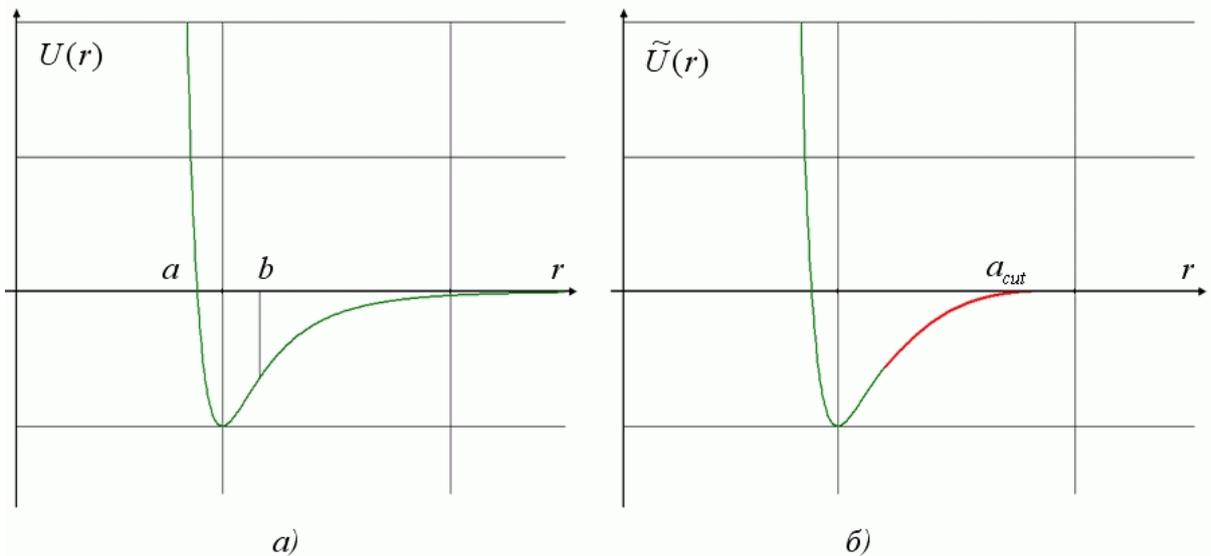


Рис.3. а) потенциал Леннарда джонса. б) Сплайновый потенциал.

Сплайновый потенциал обеспечивает обращение в ноль потенциала Леннарда-Джонса на расстоянии a_{cut} с сохранением гладкости. На рис.3

показаны графики обоих потенциалов. Сплайновый потенциал обеспечивает взаимодействие только ближайших соседей, что в свою очередь обеспечивает регулярную гексагональную кристаллическую решетку (рис.4). Трехмерный случай построения стержня представлен на рис.5.

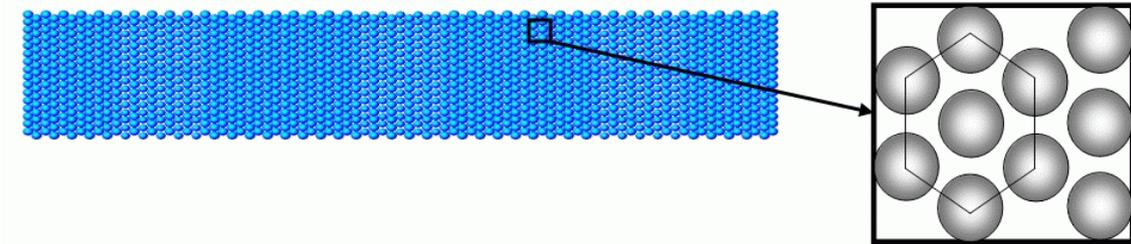


Рис.4. Плоская модель. Вверху: так выглядит получившийся стержень; справа: частицы имеют гексагональную конфигурацию

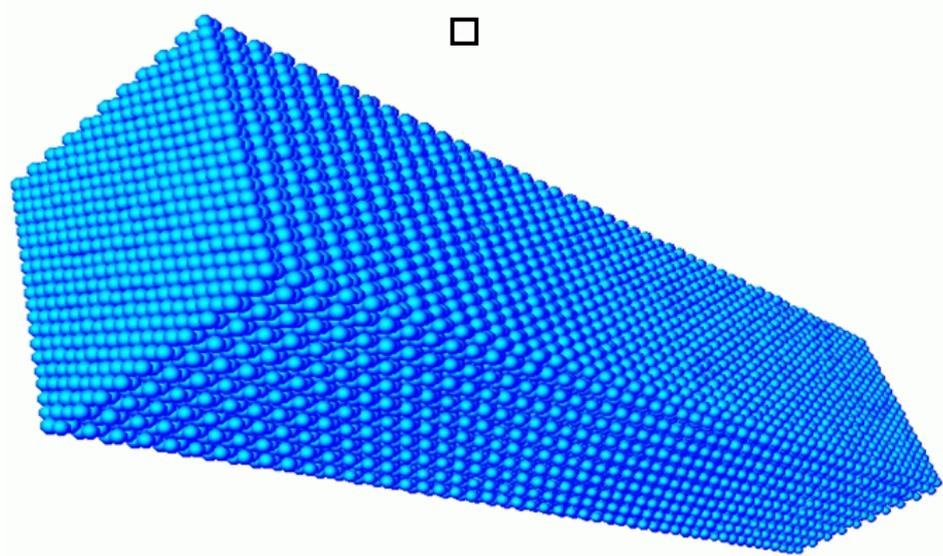


Рис.5. Трехмерная модель.

3. Математическая модель. С механической точки зрения, получившаяся модель описывает систему материальных точек, связанных потенциалом взаимодействия. Соответственно, для каждой частицы напишем уравнение движения в виде закона Ньютона:

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \quad (4)$$

где

$$\underline{F} = \frac{\partial U}{\partial \underline{r}}; \quad (5)$$

$$\dot{\underline{r}} = \underline{V}$$

Получаем систему дифференциальных уравнений для одной частицы

$$\begin{cases} \dot{V} = \frac{1}{m} F; \\ \dot{r} = V \end{cases} \quad (6)$$

В совокупности все уравнения представляют собой задачу Коши с заданными векторами скорости и положения частиц в качестве начальных условий.

4.Компьютерная модель. Воспользуемся методом центральных разностей для численного интегрирования данной системы. Проведем анализ устойчивости метода на тестовом уравнении $\dot{r} = \lambda r$. Пусть шаг интегрирования равен h . Тогда $t_{i+1} = h + t_i = h^{i+1}$. Значения r связаны в силу точного решения соотношением

$$r(t_{i+1}) = \varrho(h\lambda)r(t_i) \quad (7)$$

где $\varrho(h\lambda) = e^{h\lambda}$. Разностная схема для приближенного решения методом центральных разностей выглядит:

$$\begin{cases} V_{i+1} = V_i + F_i h \\ r_{i+1} = r_i + V_i h \end{cases} \quad (8)$$

где V_i и r_i - значения векторов скорости и положения частицы на данном шаге интегрирования, \tilde{V}_i и \tilde{r}_i - значения векторов скорости и положения частицы на предыдущем шаге. Выразив r_{i+1} через r_i , получим

$$r_{i+1} = (1 + h\lambda + h^2 \lambda^2) r_i \quad (9)$$

откуда

$$\varrho(h\lambda) = 1 + h\lambda + h^2 \lambda^2 \quad (10)$$

Для устойчивости численного решения необходимо выполнение условия

$$|\varrho(h\lambda)| \leq 1 \quad (11)$$

а значит, условие устойчивости решения для метода центральных разностей, то есть условие выбора шага интегрирования, выглядит так:

$$\left| 1 + h\lambda + h^2 \lambda^2 \right| \leq 1 \quad (12)$$

На рис.6 показана область устойчивости метода.

Для нашей задачи условие выбора шага интегрирования является результатом масштабирования времени по периоду свободных колебаний двух частиц друг относительно друга T :

$$h \leq 0.01T \quad (13)$$

Для большого числа частиц время работы алгоритма перебора всех частиц пропорционально N^2 , где N – количество частиц. Поэтому в работе также используется алгоритм, позволяющий существенно уменьшить количество операций. Из-за того, что мы рассматриваем сплайновый потенциал, частица взаимодействует только с ближайшими соседями, т.е

частицами, находящимися в первой координационной сфере. Можно не рассматривать взаимодействие частиц, находящихся далеко друг от друга. Численный алгоритм выглядит так: пространство делится на ячейки размером a_{cut} , частица взаимодействует только с частицами из ее ячейки и соседних ячеек. На рис.7 представлена графическая иллюстрация данного алгоритма – два последовательных шага перебора по ячейкам (белым цветом отмечены одни и те же ячейки). Таким образом, время работы программы пропорционально количеству операций перебора и, следовательно, количеству частиц N .

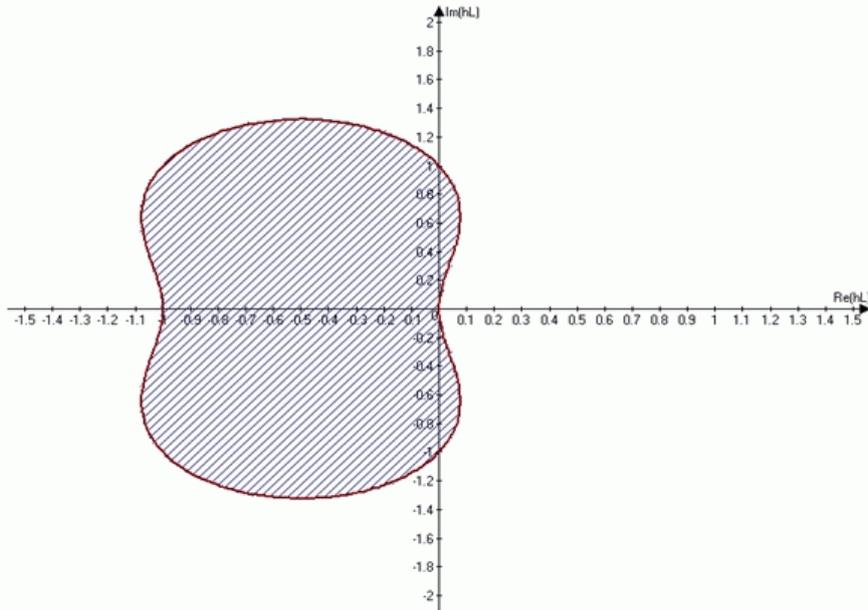


Рис.6. Область устойчивости метода центральных разностей.

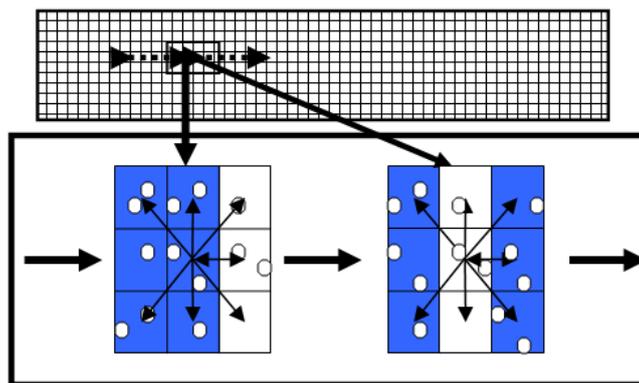


Рис.7. Алгоритм перебора частиц в области.

5. Начальные условия и параметры задачи. Определим начальные условия:

- Частицы находятся в положении равновесия, т.е. в плотноупакованной конфигурации .

- Задано поле скоростей в начальной конфигурации – первая форма колебаний стержня, посчитанная методами континуальной теории упругости:

$$V(x, t)|_{t=0} = V_0 \cos(\omega_0 x) \quad (14)$$

В данной работе актуальнее задавать поле скоростей в точке минимума потенциальной энергии, т.е. сообщать стержню не потенциальную энергию, отклоняя все частицы в соответствии с первой формой, а кинетическую.

- В качестве начального уровня внутренней (тепловой) энергии задается случайное начальное равномерное распределение скоростей (начальная температура), реализуемое встроенным генератором случайных чисел.

Границы стержня свободны.

6. Основные вычисляемые величины. Основная задача анализа данных компьютерного моделирования – определить правильным образом тепловую составляющую энергии и выделить ее. Кинетическая энергия определяется выражением

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{mV_i^2}{2} \quad (15)$$

Разделим частицы на группы, сначала распределим их по слоям в поперечном направлении для определения продольной составляющей температурной энергии. Затем разделим частицы на группы по продольным слоям для определения поперечной составляющей. Перейдем от энергии к скоростям (массы всех частиц одинаковы).

Рассчитаем среднюю энергию частиц в слое

$$\langle V \rangle_j^x = \frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} V_{i,j}^x \quad (16)$$

где N_y - количество частиц в слое, j – номер слоя в сечении, i – номер частицы в слое. Рассчитаем среднеквадратическое отклонение скорости частиц в слое

$$\tilde{V}_j^x = \sqrt{\frac{1}{N_y} \sum_{i=1}^{N_y} (V_{i,j}^x - \langle V \rangle_j^x)^2} \quad (17)$$

Теперь просуммируем по всем слоям квадраты этой величины (как сумму энергий)

$$W_x = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_x} m (\tilde{V}_j^x)^2 \quad (18)$$

Проделав аналогичную процедуру для продольных слоев, получаем вклад поперечной составляющей скорости в энергию хаотического движения частиц W_y . Сложив их, мы и получим тепловую энергию стержня (19).

$$W = W_x + W_y \quad (19)$$

7. Результаты компьютерного моделирования. На рис.8 показан основной результат численного моделирования – график тепловой энергии от времени. В данном случае можно тепловую энергию считать пропорциональной температуре, тогда график имеет смысл кривой роста температуры. Ниже, на рис.9, показана кинетическая энергия системы.

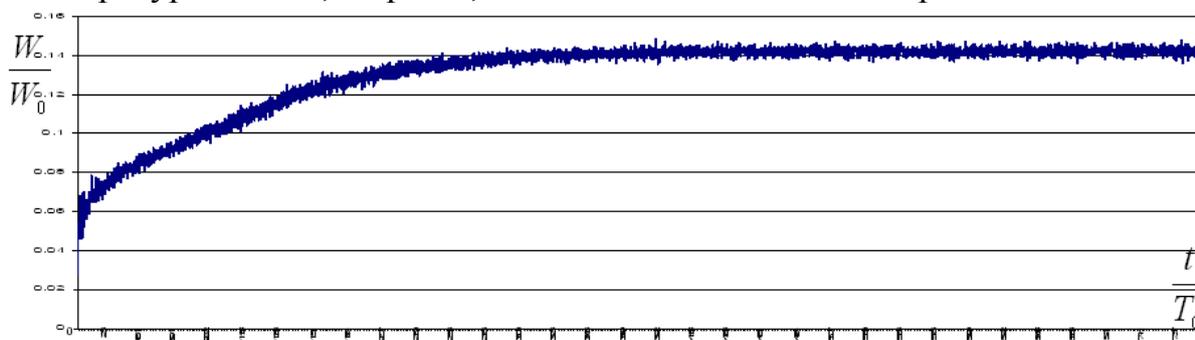


Рис.8. График тепловой энергии стержня от времени.

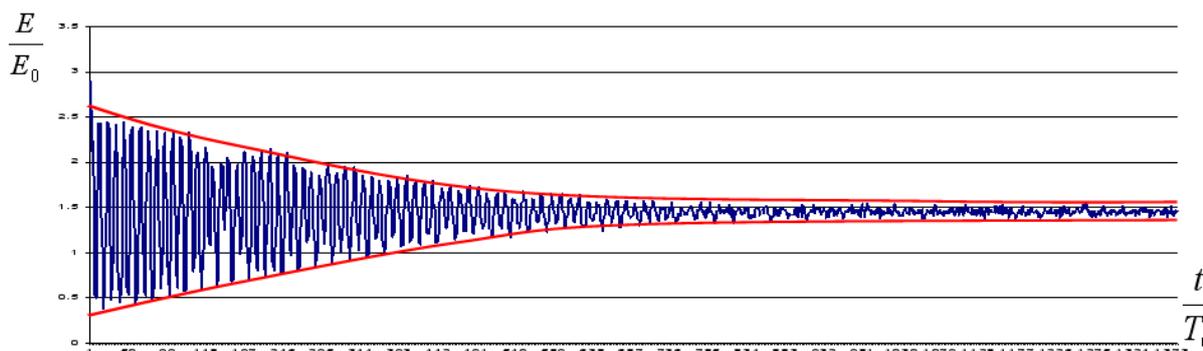


Рис.9. График кинетической энергии стержня от времени.

8. Спектральная плотность кинетической энергии. В данной задаче методом частотного преобразования Фурье была рассчитана спектральная плотность кинетической энергии системы. Алгоритм FFT (Fast Fourier Transform) [8] позволяет сделать преобразование Фурье в реальном времени и записывать изменение спектральной характеристики в данный момент времени, а также сравнивать распределение на последующем шаге времени с предыдущим шагом. Реализация FFT для данной задачи представлена на рис.10, 11. На рис.10 показана спектральная плотность энергии на начальном отрезке времени до полного перехода макроэнергии в температуру. Явно выражен пик макроколебаний стержня. Так же на рисунке видны еще два малых пика – это означает, что рассчитанная континуальными методами частота свободных колебаний стержня отличается от частоты дискретной модели. На рис.11 показана спектральная плотность кинетической энергии на отрезке времени после полного перехода энергии в тепловую. Видно, что спектральная плотность «размазана» по всем частотам практически равномерно, то есть суммарная

кинетическая энергия движения частиц фактически является «белым шумом».

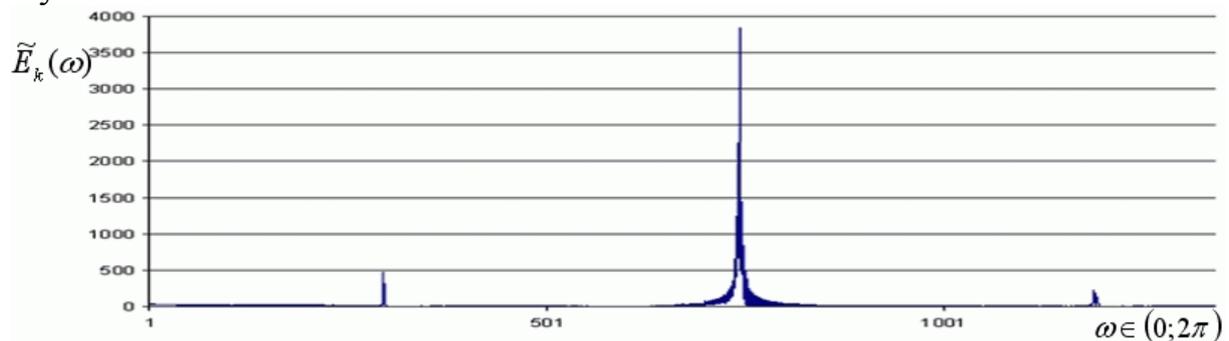


Рис.10. Спектральная плотность кинетической энергии на начальном отрезке времени.

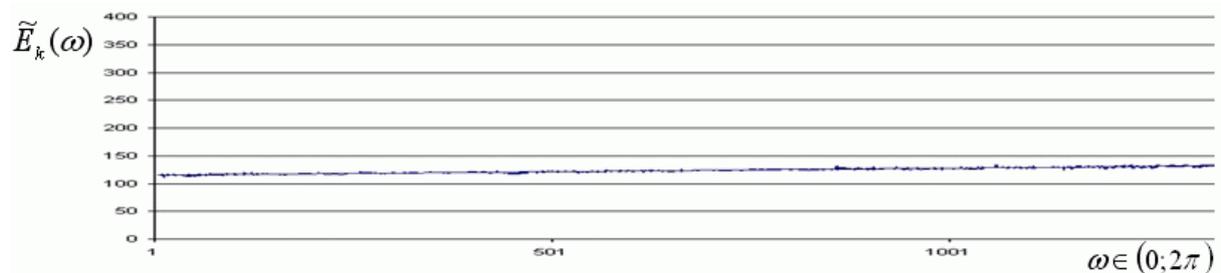


Рис.11. Спектральная плотность кинетической энергии на конечном отрезке времени.

9. Аналитический расчет коэффициента внутреннего трения на основании результатов моделирования. Рассчитаем аналитически, имея параметры модели и результаты компьютерного моделирования, коэффициент внутреннего трения материала.

Уравнение продольных колебаний стержня с внутренним трением [9] (тело Сорокина)

$$\rho \dot{U} = E U'' + \beta \dot{U}'' \quad (15)$$

или в частных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \quad (20)$$

где α и γ - безразмерные коэффициенты, связанные с масштабными параметрами соотношениями

$$\alpha^2 = \frac{ET^2}{\rho X^2}; \quad 2\gamma = \frac{\beta T}{\rho X^2} \quad (21)$$

В соотношениях (24) T , X - масштабы времени и длины; E , ρ , β - модуль Юнга, плотность и коэффициент внутреннего трения соответственно. Получившийся безразмерный коэффициент γ и будем рассматривать как

свойство материала. При известных свойствах материала, реальный КВТ может быть рассчитан с помощью соотношений (17), где в качестве T берется период колебаний двух атомов в решетке друг относительно друга (может быть получен методами спектрального анализа), а в качестве X – межатомное расстояние (например, для меди $X = 3,7 \text{ \AA}$). Решая линейное дифференциальное уравнение (16), получаем уравнение для определения безразмерного коэффициента внутреннего трения:

$$U = Ae^{-bt} \sin(\omega t) \sin(kt) \quad (22)$$

где

$$k = \frac{\pi}{l} X; b = \gamma k^2; \quad (23)$$

$$A = \frac{V_{amp}}{w};$$

$$\omega = \sqrt{k^2 \alpha^2 - b^2};$$

Получаем формулу для суммы кинетической и потенциальной энергии стержня (полная энергия без внутренней)

$$E = \frac{A^2 M}{4} e^{-2bt} \left[(\omega \cos \omega t - b \sin \omega t)^2 + \frac{4E}{M} \sin^2 \omega t \right] \quad (24)$$

Соответственно тепловая энергия стержня, если система замкнута

$$W = E|_{t=0} - E; \quad \text{где} \quad E|_{t=0} = \frac{A^2 M \omega^2}{4} + T_0 \quad (25)$$

Таким образом, получаем уравнение

$$W = \frac{A^2 M}{4} \left[\omega^2 - e^{-2bt} \left[(\omega \cos \omega t - b \sin \omega t)^2 + \frac{4E}{M} \sin^2 \omega t \right] \right] + T_0 \quad (26)$$

С учетом выражений

$$\langle \sin^2(x) \rangle_{x \rightarrow \infty} = \langle \cos^2(x) \rangle_{x \rightarrow \infty} = \frac{1}{2} \quad (27)$$

уберем из уравнения периодические составляющие и разделим на масштабный коэффициент энергии

$$\frac{W}{W_0} = \frac{A^2 M \omega^2}{4W_0} \left[1 - e^{-2bt} \left(\frac{(\omega - b)^2}{2} + \frac{2\sqrt{2}E}{M} \right) \right] + \frac{T_0}{W_0} \quad (28)$$

приведем уравнение к удобному виду для определения коэффициента внутреннего трения

$$2bt = -\ln \left(\frac{A^2 M \omega^2}{4W_0} + \frac{T_0 - W}{W_0} \right) + \ln \left(\frac{(\omega - b)^2}{2} + \frac{2\sqrt{2}E}{M} \right) \quad (29)$$

где $\frac{W}{W_0}$ - безразмерная величина, которую мы определяем из эксперимента.

Для рассматриваемого стержня определим параметры задачи. Модуль Юнга и плотность определяются [6]

$$E = \frac{96D}{\sqrt{3}a^2}; \rho = \frac{M}{S} = \frac{m}{a^2} \quad (30)$$

где D - энергия связи, a - межатомное расстояние, m -масса одной частицы.

Из уравнений (26) очевидно, что

$$\omega|_{b \rightarrow 0} \rightarrow k\alpha \quad (31)$$

Получаем уравнение для определения безразмерного коэффициента внутреннего трения:

$$\gamma = \frac{1}{2k^2t} \left[-\ln \left(\frac{A^2 M \omega^2}{4W_0} + \frac{T_0 - W}{W_0} \right) + \ln \left(\frac{\omega^2}{2} + \frac{2\sqrt{2E}}{M} \right) \right] \quad (32)$$

Численно из результатов компьютерного эксперимента его можно получить методом парных точек.

10. Исследование зависимости КВТ от размеров стержня. На рис.12 приведены данные для КВТ, полученные при пропорциональном изменении размеров стержня. С целью проверки зависимости КВТ от характера случайного начального распределения скоростей, была проведена серия компьютерных экспериментов с различными начальными значениями скоростей частиц при сохранении равенства параметров нормального распределения. Из графика следует, что КВТ стремится к своему континуальному значению не зависимо от начального распределения.

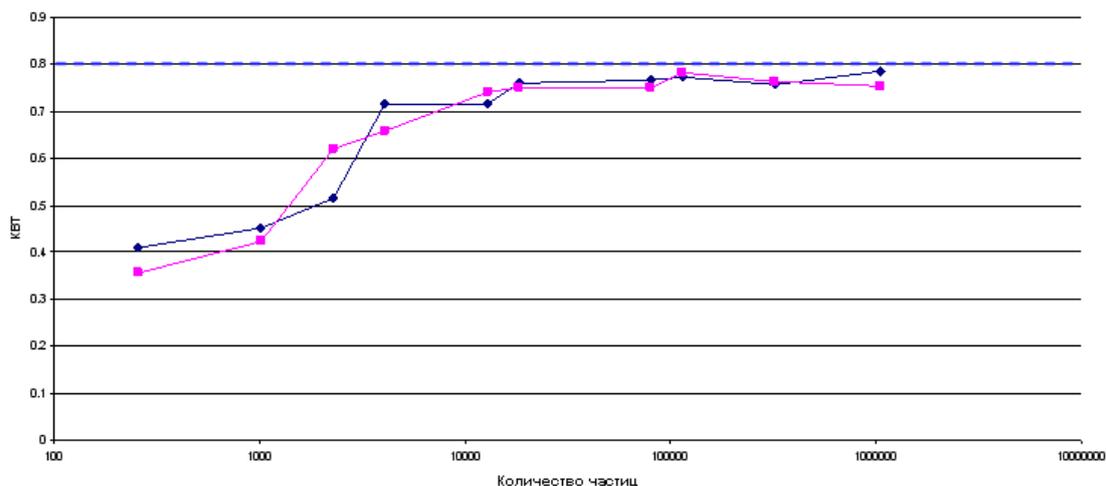


Рис.12. График КВТ от количества частиц в стержне. Различные генераторы случайных чисел.

11. Заключение. В работе были исследованы свободные колебания плоского кристаллического стержня. Методом молекулярной динамики был смоделирован переход энергии макроскопических колебаний в энергию хаотического движения частиц. Далее на основании теории упругости из результатов компьютерного моделирования был получен безразмерный коэффициент внутреннего трения вещества. Показана зависимость КВТ от числа частиц при пропорциональном изменении размеров. Из результатов анализа получено, что при числе частиц меньшем $N_f=10000$ КВТ зависит от размеров стержня. При числе частиц, большем N_f , КВТ стабилизируется и равен своему континуальному значению при выбранных соответствующим образом параметрах континуальной модели.

Автор благодарен А. М. Кривцову, П. А. Жилину и Д. А. Индейцеву за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-0094-а.

Литература

1. Y.Liu, N.Nishimura and Y.Otani // Computational Material Science, in press
2. Y.Hu, I.Jang and S.B.Sinnott // Composite Science and Technology 63 (2003) 1663
3. P.K. Valavala, G.M. Odegard // Modeling Techniques for Determination of Mechanical Properties of Polymer Nanocomposites // Rev.Adv.Mater.Sci. 9(2005) 34-44
4. Andrew N.Cleland // Foundations of Nanomechanics: From Solid-state Theory to Device Applications // Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (2003)
5. Krivtsov A.M., Morozov N.F. // On Mechanical Characteristics of Nanocrystals // Physics of the Solid State , 2002, 44(12), 2260-2265.
6. А.М. Кривцов, Н.В. Кривцова // Метод частиц и его использование в механике деформируемого твердого тела // Дальневосточный математический журнал ДВО РАН, 2002, Т.3, №2, с.254-276.
7. Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев // Введение в нелинейную физику // М.: Наука, 1988
8. Numerical Recipes In Fortran 77: The Art Of Scientific Computing // ISBN 0-521-43064-X by Cambridge University Press
9. Пальмов В.А. // Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 214с.

УДК 539.4:678

ОПИСАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ПО МОДЕЛИ СТАРЕЮЩЕЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА И КЕЛЬВИНА-ФОЙХТА

*Арутюнян Р.А., Бражникова Н.В.
(Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия)*

Для стареющей среды на основе моделей Максвелла и Кельвина-Фойхта сформулированы реологические уравнения, записанные в шкале обобщенного времени. Построены кривые ползучести и релаксации и

конкретизированы параметры модели. Дано сравнение с результатами опытов на ползучесть и старение для полимерных материалов.

Рассматривается двухпараметрическая модель Максвелла и трехпараметрическая модель Кельвина-Фойхта, состоящие, соответственно, из одного упругого (E_2 – модуль упругости) и одного вязкого (η – коэффициент вязкости) и двух упругих (E_1, E_2 – модули упругости) и одного вязкого (η – коэффициент вязкости) элементов. В классическом варианте, когда уравнения рассматриваемых сред записываются через реальное время, эти модели являются линейными и не учитывают процессы старения среды. Для описания эффектов старения вводится модифицированная среда Максвелла

$$\sigma + \dot{\sigma} = E_2 \eta \dot{\varepsilon} \quad (1)$$

и Кельвина-Фойхта

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon} + \tau H \varepsilon, \quad H = E_2, \quad \tau = \frac{\eta}{E_1 + E_2}, \quad E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad (2)$$

записанные через обобщенное время ω , которое согласно [1, 2] определяется с помощью следующего кинетического соотношения

$$d\omega = f_1(\omega, \varepsilon, T, t) dt + f_2(\omega, \varepsilon, T, t) d\varepsilon \quad (3)$$

Как показывают расчеты, при описании опытных кривых податливости и релаксации напряжений для полимерных материалов с учетом эффектов старения можно ограничиться следующей конкретизацией кинетического уравнения (3)

$$d\omega = k t^n dt \quad (4)$$

Запишем уравнения (1) и (2) через параметр ω согласно соотношению (3) и рассмотрим процесс ползучести ($\sigma = const$). Принимая $E_1, E_2, \eta = const$ и начальные условия $\omega = 0, t = 0, \varepsilon = \sigma / E_2$ решения этих уравнений для функции ползучести (податливости D) запишутся, соответственно, в виде

$$D = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{1}{E_2} \left(1 + \frac{k t^{n+1}}{\tau(n+1)} \right) \quad (5)$$

$$D = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \left[1 - \frac{E_2}{E_1 + E_2} e^{-\frac{k E_1}{\eta(n+1)} t^{n+1}} \right] \quad (6)$$

В работах [1, 2] построены теоретические кривые ползучести по стареющей модели Максвелла и дано сравнение с результатами соответствующих опытов [3] по ползучести и старению тонкой пленки. Дадим результаты аналогичных расчетов для стареющей модели Кельвина-

Фойхта (6) с использованием тех же экспериментальных результатов [3]. По этим данным конкретизированы параметры уравнения (6) в следующем виде $E_1 = 3 \text{ МПа}$, $E_2 = 2500 \text{ МПа}$, $\eta_1 = 18$, $\eta_2 = 29$, $k = 0,07$, $n = -0,92$. Теоретические и экспериментальные кривые ползучести (податливости $D = \varepsilon / \sigma_0$) представлены на рис. 1. С учетом естественного разброса, теоретические кривые податливости хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными кривыми. Сравнительный анализ решений по модели Максвелла [1, 2] и Кельвина-Фойхта показывает, что опытные точки описываются более точно по решению Кельвина-Фойхта.

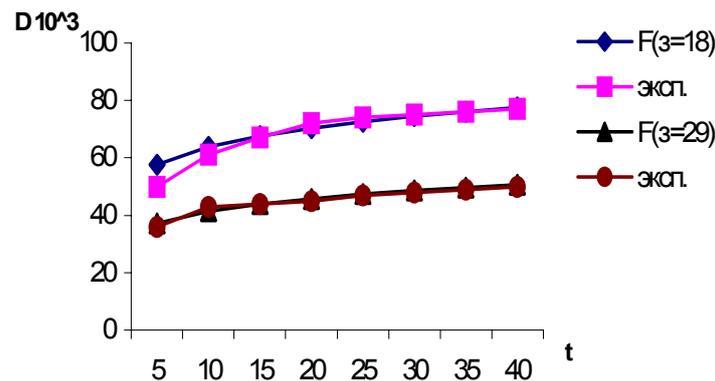


Рис. 1.

Рассмотрим также случай релаксации напряжений для модифицированной модели Максвелла и Кельвина-Фойхта, записанных в масштабе приведенного времени (3). Для сравнения даются соответствующие соотношения для релаксации напряжений, записанных в масштабе реального времени. Считая деформацию заданной и решая модифицированные уравнения Кельвина-Фойхта и Максвелла, получим следующие выражения для релаксации напряжений

$$\sigma = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon \left[1 - e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta(n+1)} k t^{n+1}} \right] + \sigma_0 e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta(n+1)} k t^{n+1}} \quad (7)$$

$$\sigma = e^{-\frac{E_2 k}{\eta(n+1)} t^{n+1}} + \sigma_0 \quad (8)$$

Согласно классическим уравнениям, решения задачи о релаксации напряжений записываются, соответственно, по Кельвину-Фойхту

$$\sigma = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon \left[1 - e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t} \right] + \sigma_0 e^{-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t} \quad (9)$$

и по Максвеллу

$$\sigma = e^{-\frac{t}{\tau}} + \sigma_0 \quad (10)$$

Кривые релаксация напряжений (7)-(8) и (9)-(10) показаны на рис.2 при $\varepsilon = 0,5$ и следующих значениях параметров: $E_1 = 3 \text{ МПа}$, $E_2 = 2500 \text{ МПа}$, $\eta = 1000$, $k = 0,07$, $n = -0,5$.

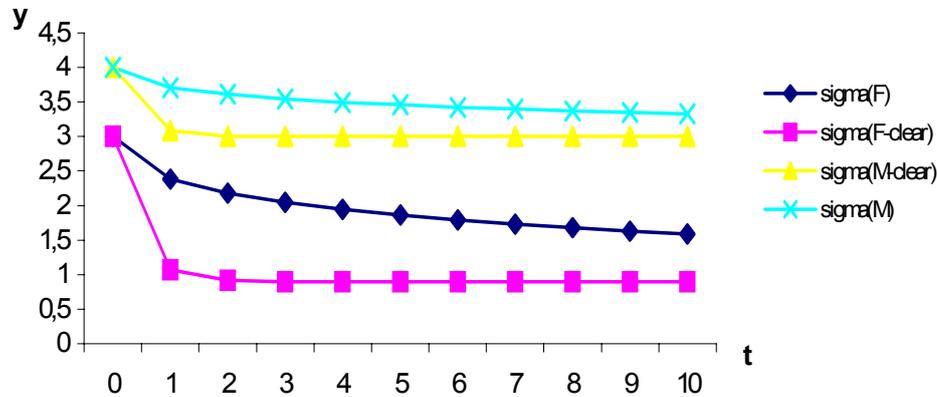


Рис. 2.

Из этих графиков видно, что предложенные уравнения для стареющего материала описывают качественную картину релаксации напряжений в стареющей среде. Из расчетов также следует, что уравнения по стареющей модели Максвелла по точности описания экспериментальных кривых уступают модели Кельвина-Фойхта.

Литература

1. Арутюнян Р.А., Бражникова Н.В., Нанзай Ю. Упруго-вязкая модель стареющей полимерной среды // Проблемы механики деформируемого твердого тела. К 70летию со дня рождения академика Н.Ф.Морозова. СПб. 2002. С.37-43.
2. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С-Петербур. ун-та 2004. 252с.
3. Пестриков В.М. Об определяющих соотношениях стареющих материалов с учетом протекающих физико-химических процессов // Известия РАН. Мех. тверд. тела. 1999. №4. С.134-140.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЗАТРАТЫ ПРИ РАЗРУШЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

*Арутюнян Р.А., **Якимова К.С.

(*Санкт-Петербургский государственный университет, **Институт
Проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия)

Согласно концепции вязкого разрушения Хоффа величина энергетических затрат при длительном разрушении металлических материалов равна бесконечности. В работе сформулирован термодинамический критерий длительной прочности, учитывающий реальные энергетические затраты на разрушение металлических материалов. Показано, что они соответствуют экспериментальным величинам и зависят от реологического закона среды. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 05-08-18149).

В опытах на ползучесть и разрушение образцов, изготовленных из металлических материалов, и находящихся под воздействием относительно больших напряжений и высоких температур реализуется вязкое течение с относительно большой величиной предельной деформации. Принимая условие несжимаемости, и считая, что разрушение стержня в этих условиях наступает вследствие неограниченного его удлинения, Хофф сформулировал критерий длительной прочности известный, как критерий чисто вязкого разрушения [1].

При решении поставленной задачи Хофф исходил из закона степенной ползучести Нортон

$$\dot{\varepsilon} = B \sigma^m, \quad B = B_0 \exp\left(-\frac{U}{RT}\right), \quad (1)$$

где B_0 , m – постоянные, U – энергия активации ползучести, R – газовая постоянная, $\dot{\varepsilon}$ – скорость деформации ползучести, σ – напряжение.

Для случая логарифмической деформации и истинных напряжений закон Нортон можно записать в виде

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} = B \sigma_0^m \left(\frac{F_0}{F}\right)^m, \quad (2)$$

где $\sigma = \frac{P}{F}$ (P – приложенная к образцу заданная нагрузка), $\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$,

$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0}$, l_0 , F_0 – начальная, l , F – текущая длина и площадь поперечного сечения стержня.

Учитывая условие несжимаемости $l_0 F_0 = l F$, которое является следствием закона сохранения массы $l_0 F_0 \rho_0 = l F \rho$ при предположении $\rho = \rho_0$ (ρ_0 – начальная, ρ – текущая плотность материала стержня), и, решая уравнение (2) при начальном условии $t = 0$, $l = l_0$, получим

$$\frac{1}{m} \left(1 - e^{-m\varepsilon} \right) = B \sigma_0^m t \quad (3)$$

При предположении $\varepsilon \rightarrow \infty$, $t = t_p^x$ из соотношения (3) следует критерий вязкого разрушения Хоффа

$$t_p^x = \frac{1}{m B \sigma_0^m} \quad (4)$$

Таким образом, согласно Хоффу вязкое разрушение является следствием неограниченного течения образца и связано с изменением его геометрических размеров. На практике образцы из металлических материалов разрушаются при ограниченной величине деформации, а критерий Хоффа описывает хорошо начальный участок экспериментальной кривой длительной прочности [1-7].

Другое обстоятельство, связанное с критерием разрушения (4), касается величины энергетических затрат. Согласно концепции Хоффа эта величина равна бесконечности. Однако ясно, что энергетические затраты на разрушение образцов из любого материала, в том числе и металлического, ограничены. В работе определяются реальные энергетические затраты при разрушении металлических образцов в условиях высокотемпературной ползучести и формулируется соответствующий критерий длительного разрушения. Естественно, при решении поставленной задачи привлекаются термодинамические соотношения [8-10].

В приложении к рассматриваемой проблеме деформирования и разрушения металлического образца в условиях ползучести первый закон термодинамики может быть сформулирован следующим образом. При переходе элемента системы (образца) из начального состояния (начальное нагружение) в конечное состояние (разрушение образца), малое приращение внутренней энергии системы du равно сумме приращений, совершенной над системой работы δw (работа деформации), и отведенной от системы тепла δq .

$$du = \delta w - \delta q, \quad (5)$$

где $\delta w = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ ($d\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} dt$) – плотность работы сил, действующих на элемент среды, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, $d\varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора приращения деформаций. В законе (5) все величины отнесены к объему элемента среды, т. е. являются удельными величинами. При этом два элементарных приращения δw и δq не являются полными

дифференциалами. В общем случае эти величины зависят от траектории в пространстве параметров состояния и функционалами состояния не являются. Однако суммарно они составляют величину приращения внутренней энергии, которая является функцией состояния.

Проинтегрируем соотношение (5) от начального состояния (соответствующие величины отмечены индексом 0) до момента разрушения (соответствующие величины отмечены индексом *). Тогда из (5) имеем

$$\Delta u_* = w_* - \Delta q_* \quad (6)$$

где

$$\Delta u_* = \int_{u_0}^{u_*} du = u_* - u_0, \quad w_* = \int_0^{w_*} \delta w, \quad \Delta q_* = \int_{q_0}^{q_*} \delta q \quad (7)$$

Далее введем обозначения $\Delta u_* = w_{*1}$ и $\Delta q_* = w_{*2}$, тогда закон сохранения энергии (6) запишется в виде

$$w_* = w_{*1} + w_{*2}, \quad (8)$$

где w_* – полная работа деформации, состоящая из работы w_{*1} , затрачиваемой на производство теплоты и из работы w_{*2} , необходимой для разрушения образца. В случае одноосного растяжения имеем $\varepsilon_{ij} = \varepsilon$,

$\sigma_{ij} = \sigma = \sigma_0 e^\varepsilon$ и работа деформации вычисляется следующим образом

$$w_* = \int_0^{\varepsilon_*} \sigma_0 e^\varepsilon d\varepsilon = \sigma_0 (e^{\varepsilon_*} - 1), \quad (9)$$

где ε_* – величина деформации в момент разрушения (предельная деформация).

Разрешая уравнение (9) относительно предельной деформации, будем иметь

$$\varepsilon_* = \ln \left(1 + \frac{w_{*1} + w_{*2}}{\sigma_0} \right) \quad (10)$$

Согласно формуле (3) в момент разрушения $t = t_P$, $\varepsilon = \varepsilon_*$, следовательно

$$\varepsilon_* = \ln \left(1 - mB\sigma_0^m t_P \right)^{-1/m} \quad (11)$$

Сравнивая соотношения (10) и (11), получим следующий критерий длительной прочности

$$t_P = \frac{1}{mB\sigma_0^m} \left[1 - \left(1 + \frac{w_{*1} + w_{*2}}{\sigma_0} \right)^{-m} \right] \quad (12)$$

Критерий (12) совпадает с критерием разрушения Хоффа, при условии,

$$\left(1 + \frac{w_{*1} + w_{*2}}{\sigma_0}\right)^{-m} \rightarrow 0, \text{ или } w_* = w_{*1} + w_{*2} \rightarrow \infty$$

Таким образом, при разрушении образца в условиях ползучести по концепции Хоффа затраты энергии должны быть бесконечными. Как будет показано далее, действительные затраты энергии, по сравнению с предсказаниями по теории Хоффа, являются конечными и существенно зависят от реологии среды.

Некоторые авторы [11-13] считают, что условие

$$w_* = w_{*1} + w_{*2} = \text{const} \quad (13)$$

выполняется в опытах, поэтому может быть использовано для прогнозирования разрушения в условиях ползучести.

Согласно [11-13] условие (13) выполняется приблизительно для ряда конструкционных металлических материалов (дюралюминий, $T = 250^0 C$, титановый сплав $OT-4$, $T = 500^0 C$) в условиях ползучести при достаточно высоких уровнях напряжений, фиксированных температур и на относительно небольшом временном интервале, порядка нескольких тысяч часов, независимо от вида нагружения и температуры. К аналогичному заключению относительно условия (13) приходят авторы работы [13], в которой испытывались образцы из полимерных материалов (полиэфирное связующее $ПН-1$, $T = 50^0 C$). В работах [11-13] термодинамические аспекты проблемы разрушения не обсуждаются.

Другие авторы [10, 15], напротив, считают критическую энтропию характеристикой материала и формулируют критерий длительной прочности по энтропийным показателям

$$t_p = \frac{T \Delta s_*}{B_0 \sigma_0^{m+1}}, \quad (14)$$

где $\Delta s_* = s_* - s_0$ – предельная величина приращения плотности энтропии.

Из критерия (14) следует, что время до разрушения увеличивается с увеличением температуры испытания образца. Однако такой вывод противоречит результатам опытов. Этот парадоксальный результат, по-видимому, является следствием отождествления реологических законов для металлических материалов реологии состояния идеального газа.

Как будет показана далее, экспериментальные кривые длительной прочности наилучшим образом описываются с помощью критерия

$$t_p = \frac{1}{m B \sigma_0^m} \left[1 - \left(1 + \frac{w_{*2}}{\sigma_0} \right)^{-m} \right] \quad (15)$$

Критерий (15) следует из формулы (12) при предположении, что тепловая часть энергии не оказывает значительного влияния на процессы

разрушения образца. Такое заключение связано с тем обстоятельством, что в опытах на ползучесть значительная часть энергии деформации w_{*1} уходит в теплоту и отдается образцом внешней среде. Другая часть энергии, равная w_{*2} , расходуется на увеличение внутренней энергии, и является источником так называемой “скрытой” энергии деформации [9, 16]. Согласно физическим представлениям “скрытая” энергия деформации расходуется на образование дефектов различной природы, которые определяют, согласно механическим представлениям, состояние поврежденности материала. Разрушение образца является следствием достижения параметра поврежденности критической величины [6].

В случае несжимаемой среды сдвиговые процессы являются основными “потребителями” энергии, поэтому необратимая деформация ползучести может рассматриваться в качестве параметра поврежденности и разрушения образца. С учетом этих положений дадим количественные оценки различным критериям разрушения согласно данными опытов на ползучесть и разрушение металлических образцов [5].

Учитывая формулу (4), и вводя безразмерные величины $y = t_p / t_p^x$, $x = w_* / \sigma_0$, критерий (12) запишем в виде

$$y = 1 - (1 + x)^{-m} \quad (16)$$

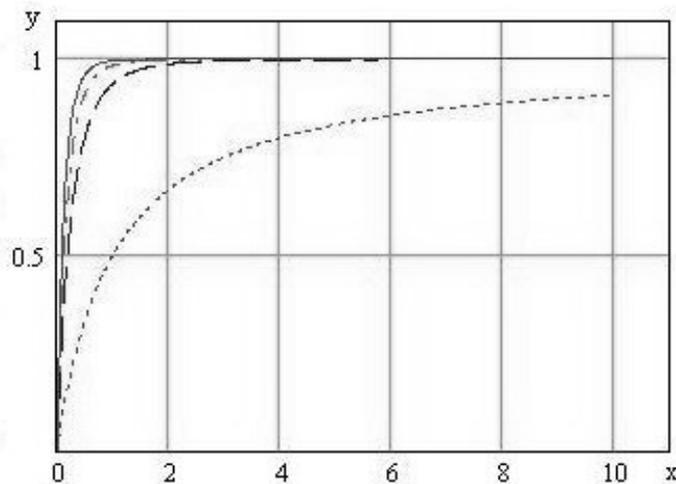


Рис. 1.

График зависимости (16) для различных значений показателя нелинейности m рассматриваемой вязкой среды представлен на рис. 1. Кривые на этом рисунке соответствуют следующим величинам показателя нелинейности в формуле (16): сплошная линия ($m = 8$), штрих-пунктирная линия ($m = 6$), штриховая линия ($m = 4$), точечная линия ($m = 1$). Согласно экспериментальным данным работы [5] по ползучести и разрушению трубчатых образцов (по данным для семи образцов), изготовленных из стали марки Ст.20, при температуре 500°C было вычислено среднее

значение относительной величины времени до разрушения y , которое составило $y = 0,7$. Этой величине, согласно кривым на рис.1, соответствуют энергетические затраты (по значению x на рис.1): при $m = 1$ (линейно вязкая среда Ньютона) энергетические затраты равны $x = 2,0$ условных единиц. С увеличением показателя нелинейности m наблюдается значительное снижение энергетических затрат: при $m = 4$, $x = 0,5$; при $m = 6$, $x = 0,25$; при $m = 8$, $x = 0,2$.

Таким образом, энергетические затраты на разрушение образца в процессе высокотемпературной ползучести, согласно предложенному критерию, конечны и зависят от реологического закона среды. При этом наблюдаемая картина качественно отражает тот факт, что предположение о неограниченном течении образца без разрушения (концепция Хоффа) имеет место для линейно вязкой среды Ньютона. С увеличением нелинейности существенно уменьшается предельная величина деформации разрушения, и, как следствие, уменьшаются энергетические затраты на разрушение.

По экспериментальным кривым ползучести и разрушения для семи образцов из стали Ст.3, полученным в опытах на простое растяжение при температуре $T = 500^0 C$ [5], были конкретизированы параметры закона Нортона в виде $m = 8$, $B = 1,9 \cdot 10^{-21} [МПа]^{-8} ч^{-1}$.

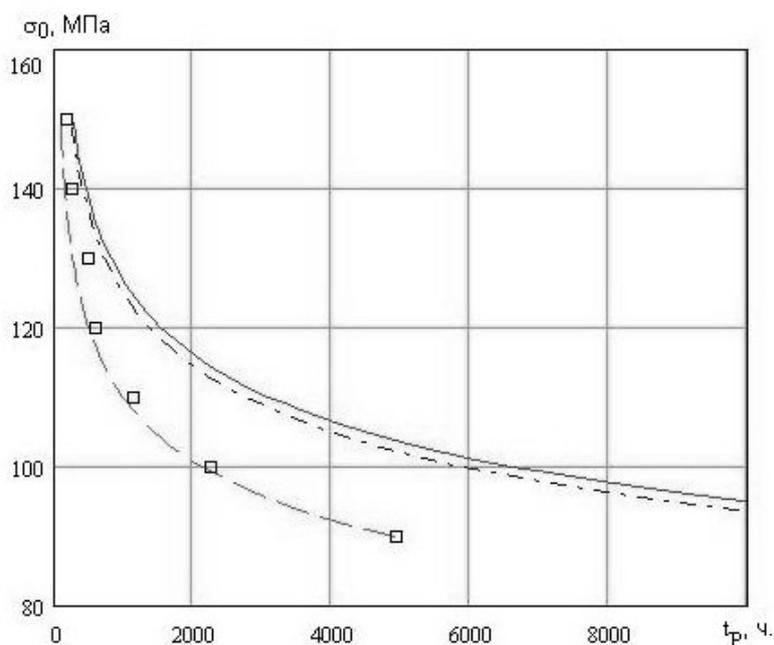


Рис.2.

С помощью приближенного соотношения $x = \epsilon^* / \sigma_0 \approx \epsilon^*$ введем относительную величину энергетических затрат. Легко показать, что при условии $x = 1$ критерий (12) практически совпадает с критерием Хоффа

(4). На рис.2 этот критерий отмечен сплошной линией. При $x = 0,32$, соответствующей средней величине предельной деформации по данным работы [5] для семи разрушенных образцов, критерий (12) записывается в виде

$$t_p = \frac{0,89}{mB \sigma_0^m} \quad (17)$$

На рис.2 критерий (17) показан штрих пунктирной линией. Штриховая линия на этом рисунке соответствует кривой длительной прочности по критерию

$$t_p = \frac{0,32}{mB \sigma_0^m}, \quad (18)$$

который следует из соотношения (15) при условии $x = 0,05$, что составляет около 15,6% от общей энергии деформации, согласуется с данными опытов [16] и, в соответствии с принятым предположением, расходуется на разрушение образца.

Экспериментальные точки работы [5] на рис.2 отмечены квадратиками.

Как видно из этого рисунка, критерий Хоффа дает завышенные величины времени до разрушения. Завышенные величины времени до разрушения наблюдаются также при расчетах по формулам (12), (17). В то же время экспериментальные точки описываются хорошо с помощью соотношений (15), (18), которые соответствуют концепции критической величины энергии w_{*2} , расходуемой на разрушение.

Согласно рис.2 критерий Хоффа, как и критерий (12) описывают хорошо начальный участок кривых длительной прочности (в пределах 1000 ч.). Поэтому их использование на этом этапе разрушения оправдано.

Учитывая температурную зависимость коэффициента B в законе ползучести (1), критерий (15) запишется в виде

$$t_p = \frac{\exp(U/RT)}{m B_0 \sigma_0^m} \left[1 - \left(1 + \frac{w_{*2}}{\sigma_0} \right)^{-m} \right]. \quad (19)$$

В отличие от критерия (14) критерий длительной прочности (19), в соответствии с имеющимися в литературе представлениями [3, 17], дает качественно правильное описание температурной зависимости времени до разрушения.

Литература

1. Hoff N.J. The necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads // Jour. appl. mech. 1953. vol. 20. №1. P. 105-108.
2. Станюкович А.В. Хрупкость и пластичность жаропрочных материалов. М.: Металлургия. 1967. 200с.

3. Чадек Й. Ползучесть металлических материалов. М.: Мир. 1987. 304с.
4. Кац Ш.Н. Ползучесть и разрушение труб под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 10. С. 86-89.
5. Кац Ш.Н. Исследование длительной прочности углеродистых труб // Теплоэнергетика. 1955. №.11 С. 37-40.
6. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука. 1974. 311с.
7. Арутюнян Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та. 2004. 252с.
8. Григорян С.С. Некоторые специальные вопросы термодинамики сплошных сред // Прикладная математика и механика. 1960. том XXIV. вып. 4. С. 651-662.
9. Вакуленко А.А. О связях между напряжениями и деформациями в изотропных и первоначально изотропных средах // Исследование по упругости и пластичности Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1961. №1. С. 3-35.
10. Гольденблат И.И., Бажанов В.Л., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение. 1977. 248с.
11. Соснин О.В. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности // Проблемы прочности. 1973. №5. С. 45-49.
12. Соснин О.В., Шокало И.К. Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности // Проблемы прочности. 1974. №1. С. 20-24.
13. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР. 1986. 96с.
14. Скудра А.М., Булавс Ф.Я., Роценс К.А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Рига: Зинатне. 1971. 235с.
15. Киялбаев Д.А., Чудновский А.И. К вопросу о характеристиках разрушений // Механика стержневых систем и сплошных сред. Труды Ленинград. Инженерно строительного института. 1969. №10. С. 32-34.
16. Большанина М.А., Панин В.Е. Скрытая энергия деформации // Исследование по физике твердого тела. М.: Изд-во АН СССР. 1957. С. 193-234.
17. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение. 1975. 400с.

ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИИ НА ХАРАКТЕР МИКРОНЕРОВНОСТЕЙ ОБРАБАТЫВАЕМЫХ ДЕТАЛЕЙ

* Арясов Г.П., ** Отто Т.

(**Институт Мехатроники Таллиннского технического университета,
**Институт Машиностроения Таллиннского технического университета*)

В работе рассматривается влияние вибрации токарного станка на шероховатость обрабатываемых деталей. В предыдущих работах [5-7] эта проблема рассматривалась без учета сил сопротивления, что не полностью отражало в достаточной мере условия обработки деталей при резании. При исследовании вынужденных колебаний используются две модели сил резания, одна из которых применяется в расчетной схеме с двумя степенями свободы, а другая как функция времени – с одной степенью свободы. Результаты теоретических и экспериментальных исследований показали достаточно удовлетворительное согласование между собой.

EFFECT OF VIBRATIONS ON CHARACTER OF MICROROUGHNESS OF MACHINED DETAILS

*Aryassov Gennady and **Otto Tauno

(*Department of Mechatronics, Tallinn University of Technology

**Department of Machinery, Tallinn University of Technology)

This paper describes the influence of lathe vibrations on the roughness of machined details. In the previous works the problem was solved without taking into account the damping forces. The results of experimental and theoretical investigations coincided satisfactorily and can be used for monitoring tool life in CNC control systems.

1. Introduction. In the turning operations, tool vibrations influence both product quality and productivity and may also have a negative influence on the working environment [1-2]. During the machining of a material, all disturbances finally lead to relative displacements of the cutter and the blank. It allows us to link the parameters of surface roughness to the relative vibrodisplacements of the cutter and the blank [3-4]. In the calculation of dynamics characteristics, the real elastic system of the lathe was replaced by a system with finite degrees of freedom, composed on the basis of experimental investigations.

In this work internal friction determined by non-elastic damping factor of frequency of cyclical strains is taken into consideration. In many cases structural damping depends on the type of construction, therefore we assume that non-elastic damping coefficient includes also the losses caused by structural damping. Experimental measurements were performed on the lathes of type 1K62 at different cutting speeds, feeds and depths of cut. The experimental results satisfactorily coincide with the corresponding theoretical results in an adequate frequency range. After every cutting, surface roughness was measured with a profilograph ‘Surtronic 3+’. The analysis of data on roughness measurement confirmed the accuracy of the calculation model. Surface roughness parameters of the blank satisfactorily agreed with the corresponding data of the theoretical investigation. The results enable us to increase the accuracy of different conditions of cutting.

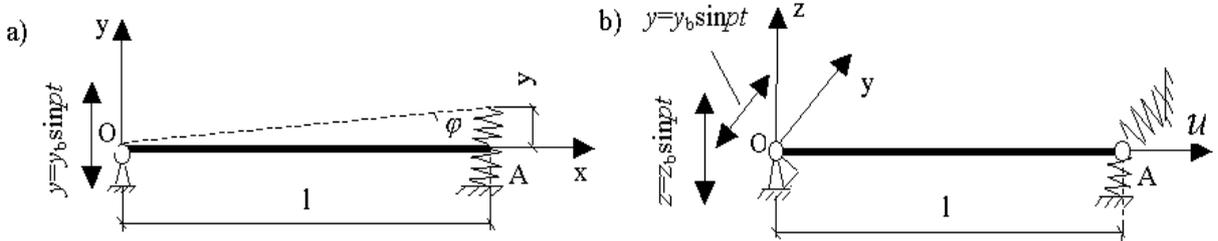


Figure 1. Dynamic models with one (a) and two (b) degrees of freedom

2. Dynamical model with one degree of freedom without damping. To develop a dynamic calculation model, first, we formulated the research problem. In order to simplify the dynamic model, we eliminated the factors, which have a

minor effect on the results. As a matter of fact, these models have a limited area of application [1, 3, and 5-7]. In this article dynamic models with one and two degrees of freedom were investigated (Fig.1).

The accuracy of the accepted calculation model is verified by means of comparing theoretical and experimental results. In machining of the detail on the lathe, the cutting force F (Fig.2) is not constant. It is determined by several factors as the change in the thickness of the cut-off chips, the change in the mechanical properties of the blank material and tool wear. The input of the lathe system is the cutting force F as the function of time and the output is the displacement of the cutter or the blank (Fig.2).

In the author paper [4] we have been obtained the solution in the case of the first model cutting force with regard to the blank. Now we have dealing with motion cutting force (Fig.2).

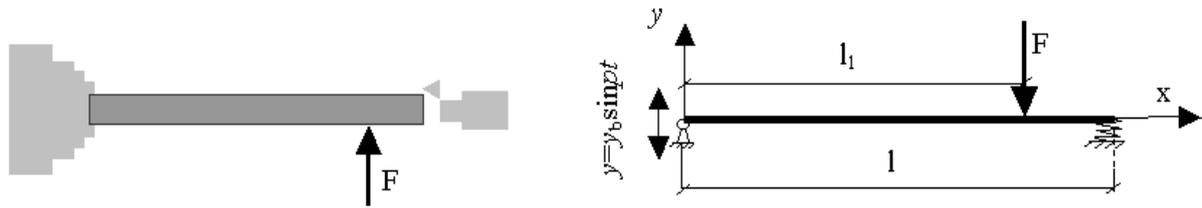


Figure 2. Calculation scheme in cutting

The differential equation of forced vibrations caused by the moving cutting force F

$$J_o \ddot{\varphi} + k_y l^2 \varphi = M_y \sin pt + F_r(l - ut) + F_a \sin \omega^* t \cdot l - F_a \cdot ut \sin \omega^* t, \quad (1)$$

where J_o is the moment of inertia of the blank around the headstock (spindle), φ is the declination angle of the blank, k_y is the horizontal spring constant of elastic support of the blank, l is the length of the blank $M_y = mp^2 y_b l / 2$, m is the mass of the blank, $p = 2\pi f$, f is the frequency of foundation vibrations and y_b is the amplitude of the foundation vibrations, $u = sn_b 10^{-3} / 60$ is the velocity of the cutter, s is the feed of the cutting tool, n_b is the velocity of the rotation of the blank.

The cutting force F is reproduced as a sum of the following items: the constant component F_r determined in practice by the simplified empirical formula [2] and the variable component $F_a \cos \omega^* t$ (l_1 is the coordinate of the cutting force). The amplitude of the variable component of the cutting force is related to the roughness value and changes in a rather wide range.

The general solution of the differential equation (1) for the declination angle of the blank taking into account the initial conditions

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = & C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{M}{J(\omega^2 - p^2)} \sin pt + \frac{F_r}{kl} - \frac{F_r u}{kl^2} t + \\ & + \frac{F_a l}{J(\omega^2 - \omega^{*2})} \sin \omega^* t + \frac{2F_a u \omega^*}{J(\omega^2 - \omega^{*2})^2} \cos \omega^* t - \frac{F_a u}{J(\omega^2 - \omega^{*2})} t \sin \omega^* t \end{aligned} \quad (2)$$

where

$$C_1 = \varphi_0 - \frac{F_r}{kl} - \frac{2F_a u \omega^*}{J(\omega^2 - \omega^{*2})^2}, C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} - \frac{Mp}{\omega J(\omega^2 - p^2)} + \frac{F_r u}{\omega kl^2} - \frac{F_a l \omega^*}{\omega J(\omega^2 - \omega^{*2})} \quad (3)$$

ω is the natural frequency of the lathe system.

From Eq. (2) can be found the displacement $y = \varphi l$ and velocity v of the blank end in relation to initial conditions y_0 and v_0 .

3. Dynamical model with one degree of freedom with damping. It has been so far assumed that no frictional resisting forces act on the systems in free vibrations, but actually, in practice, such forces are always present and will in time damp out the vibrations. Usually, in the study of steady-state vibration, the values of the components, which determine free damping vibrations, are reduced. However, it is impossible to achieve it in this instance, because the operating conditions in the cutting are changed due to surface roughness.

The differential equations of forced vibrations with damping varying as the velocity in much the same way as Eq.(1)

$$J_o \ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} l^2 + k_y l^2 \varphi = M_y \sin pt + F_r(l - ut) + F_a \sin \omega^* t \cdot l - F_a \cdot ut \sin \omega^* t, \quad (4)$$

where β is the damping factor.

A general solution of the differential equation (4) for the declination angle of the blank

$$\begin{aligned} \varphi = \exp(-nt) & (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) + \\ & + A + Bt + C \sin \omega^* t + D \cos \omega^* t + Et \sin \omega^* t + Kt \cos \omega^* t, \end{aligned} \quad (5)$$

where $N = 4n^2 \omega^{*2} + (\omega^2 - \omega^{*2})^2$, $B = -\frac{F_r u}{J_o \omega^2}$,

$$\begin{aligned} C = & \frac{F_a l (\omega^2 - \omega^{*2})}{J_o N} + \frac{2n (\omega^2 - \omega^{*2}) F_a u}{J_o N^2} + \\ & + \frac{4n \omega^{*2} (\omega^2 - \omega^{*2}) F_a u}{J_o N^2} - \frac{8n^3 \omega^{*2} F_a u}{J_o N^2} + \frac{4n \omega^{*2} F_a u}{J_o N^2} \end{aligned}$$

$$D = -\frac{F_a l 2n \omega^*}{J_o N} - \frac{4n^2 \omega^* F_a u}{J_o N^2} - \frac{8n^2 \omega^{*3} F_a u}{J_o N^2} - \frac{4n^2 \omega^* (\omega^2 - \omega^{*2}) F_a u}{J_o N^2} + \frac{2\omega^* (\omega^2 - \omega^{*2}) F_a u}{J_o N^2}, \quad (6)$$

$$E = \frac{F_a u}{J_o \left(4n^2 \omega^{*2} + (\omega^2 - \omega^{*2})^2 \right)}, \quad K = \frac{F_a u 2n \omega^*}{J_o \left(4n^2 \omega^{*2} + (\omega^2 - \omega^{*2})^2 \right)},$$

C_1 and C_2 are the constants of integration, $2n = \beta l^2 / J_o$, $\omega_1 \approx \omega$ [1].

4. Dynamical model with two degrees of freedom with damping. Such a model (Fig.1, b and 4) enables us to take into account the effect of gyroscopic forces resulting from the rotation of the blank. In this paper on the basis of model with two degrees of freedom the motionless cutting force with regard to the blank is assumed and the invariable coordinate of the cutting force is evaluated on each step of calculations

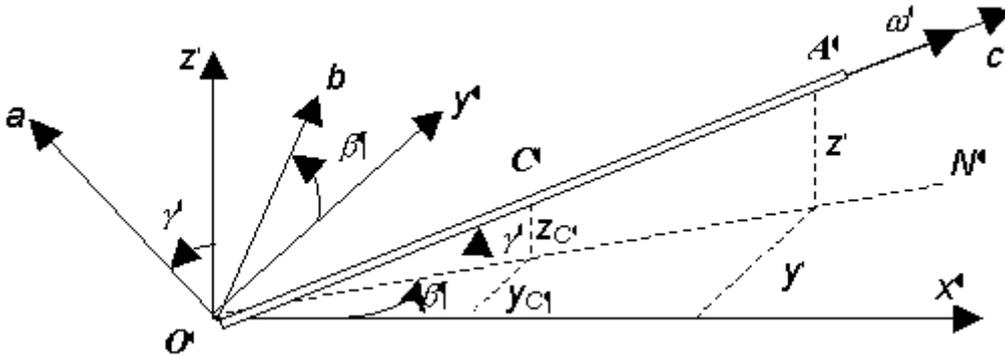


Figure 4. Gyroscope system with two degrees of freedom in cutting

The differential equations of forced vibrations with damping, caused by the cutting force F , according to the theorem about the kinetic moment, are presented in the following form

$$J_0 \ddot{z} - A \omega_b \dot{y} + \beta l^2 \dot{z} + k_z z l^2 = M_z l \sin pt,$$

$$J_0 \ddot{y} + A \omega_b \dot{z} + \beta l^2 \dot{y} + k_y y l^2 = M_y l \cos pt + F_r l_1 l + F_a l_1 l \cos \omega^* t \quad (7)$$

The general solution of Eqs.(7)

$$z = \exp(-n_1 t) (D_1 \cos \omega_1 t - D_3 \sin \omega_1 t) + \exp(-n_2 t) (D_2 \cos \omega_2 t + D_4 \sin \omega_2 t) + a_2 \cos pt + b_2 \sin pt + c_2 \cos \omega^* t,$$

$$y = \exp(-n_1 t) (D_1 \sin \omega_1 t + D_3 \cos \omega_1 t) + \exp(-n_2 t) (-D_2 \sin \omega_2 t + D_4 \cos \omega_2 t) + a_1 \cos pt + b_1 \sin pt + F_r l_1 / k_y l + c_1 \cos \omega^* t + d_1 \sin \omega^* t, \quad (8)$$

where D_1, D_2, D_3 and D_4 are constants of integrations to be determined from the initial conditions, ω_1 and ω_2 are the natural frequencies of vibrations with gyroscopic forces and damping.

5. Experimental analysis. Experimental measuring was performed at different cutting speeds, feeds and depths of cut. After every cutting, surface roughness was measured by the profilograph ‘Surtronic 3+’ [8]. The amplitude value F_a of the variable component of the cutting force in Eq. (1) was taken according to the experimental value of roughness. Surface roughness parameters of the blank quite satisfactorily agree with the data of the theoretical investigation. The results of calculation with gyroscopic forces according to Eqs. (8) are in better agreement with the experimental results. Test results and results of the calculation using Eqs.(6-7) , Eqs.(13-14) [6] and (5-6) of the present paper are presented in Fig.5.

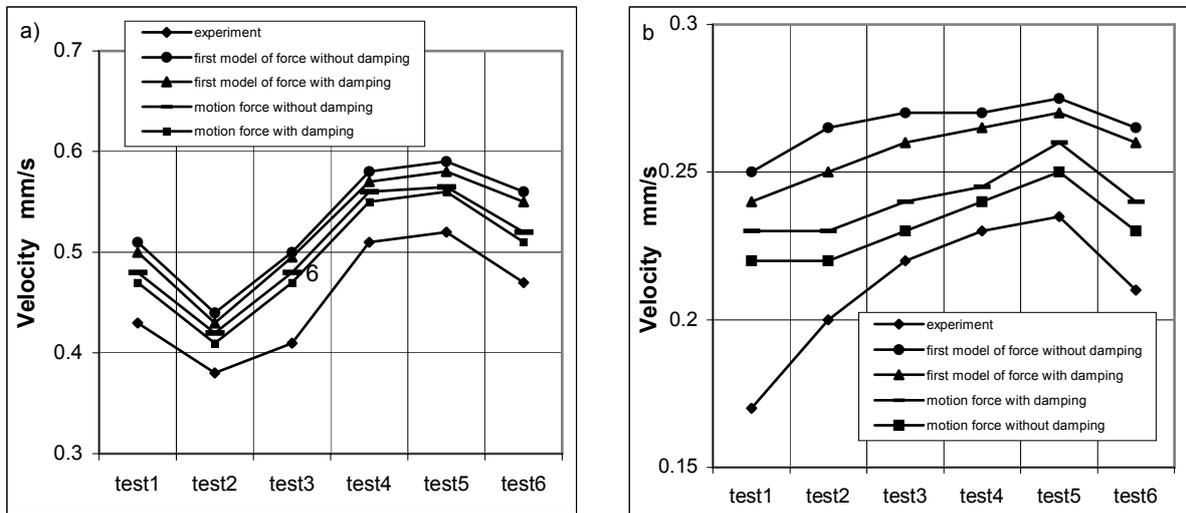


Figure 5. Comparative analysis of experimental and theoretical results (dynamical model with one degree of freedom) about horizontal (a) and vertical (b) vibrations by cutting.

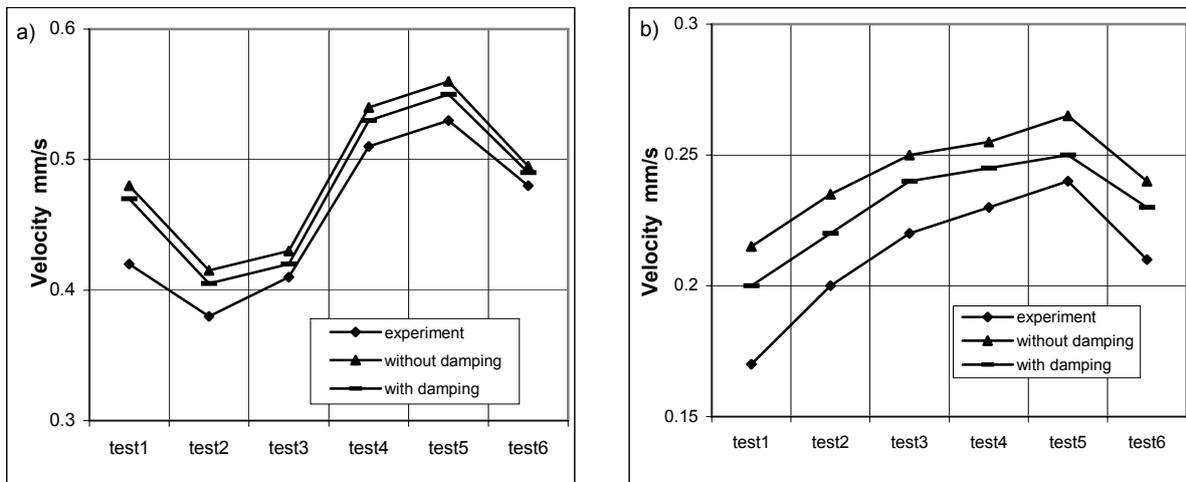


Figure 6. Comparative analysis of experimental and theoretical results (dynamical model with two degrees of freedom) about horizontal (a) and vertical (b) vibrations by cutting.

Analogically test results and results of the calculation using Eqs.(18-19) [4] and (8) of the present paper, taking into account gyroscopic forces, are presented in Fig.6.

6. Conclusion. Analysis of roughness measurements data confirmed the accuracy of the dynamical calculation model. Surface roughness parameters of the blank quite satisfactorily agreed with the corresponding data of the theoretical investigation. The calculation model with two degrees of freedom was used to analyse the influence of gyroscopic forces on surface roughness. The results of calculation with taking into account the damping forces correspond with the experimental results better. Analogically the results of calculation for the dynamical model with one degree of freedom and second model cutting force are in better agreement with the experimental results in comparison with the cutting force first model. The results of experimental and theoretical investigations showed that this model is adequate.

References

1. Hakansson L. Adaptive Active Control of Machine-Tool Vibration in a Lathe. Lund University, KFS AB Lund, 1999.
2. Gaponkin V.A., Lukashev L.K. and Suvorov,T.G. Cutting Process , Metal-cutting Instrument and Lathes. M.: Mashinostroenie, 1995 (in Russian).
3. Arshanski M.M. and Tcherbakov V.P. Vibrodiagnostics and Control of the Processing Accuracy on Metal-cutting Lathes. M.: Mashinostroenie, 1998, (in Russian).
4. Bayard O. Investigation of Forces and Contact Area for Modelling Turning Process, Thesis. Stockholm Department of Production Engineering, The Royal Institute of Technology, 2003.
5. Astakhov V.P. Metal Cutting Mechanics. CRC Pr., Boca Raton, 1999.
6. Aryassov G., Pappel T. and Gromova S. Effect of vibration on accuracy of processed details when cutting // Proc. of 20th Inter. Conf. on Mathematical Modelling in Mechanics of Solids and Structures by Boundary & FEM. 2003, Vol.2, St.Petersburg, , pp.51-57.
7. Aryassov G., Otto T. and Gromova S. Advanced dynamic models for evaluation of accuracy of machining on lathes // Proc. Estonian Acad. Sci. Eng. 2004, 10, pp. 270-280.
8. Aryassov G., Otto T. and Gromova S. Analysis of Lathe Vibration Influence on Blank Roughness // Proc. of the 4th Intern. Conf. Industrial Engineering-New Challenges to SME, DAAM-04. Tallinn, Estonia, 2004, pp.120-123.
9. Klyev V.V., Nachapetjan E.G. and Schebakov V.V. Methods for non-destructive testing and diagnostics of automatic equipment and technological systems of machines // Manufacturing Technologies for Machines of the Future (Dashchenko, A., ed). Springer, Berlin, 2003, pp.683-719.

Acknowledgement. This work was supported by Estonian Science Foundation (grants No. 5161 and 5636).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД С РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ УДАРНО-ИМПУЛЬСНОМ И СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

*Атрошенко С.А., Кривошеев С.И., Петров Ю.В., Смирнов В.И.,
Уткин А.А., Федоровский Г.Д.*

(Санкт-Петербургский государственный университет, Россия)

Проведено сравнительное экспериментальное исследование динамического и статического разрушения горных пород с разной структурой: габбро-диабазы, змеевика, гранита, песчаника известняка, мрамора, доломита и глины.

THE EXPERIMENTAL RESEARCH OF DESTRUCTION OF ROCKS WITH VARIOUS STRUCTURE AT SHOCK-PULSE AND STATIC LOADING

*Atroshenko S.A., Krivosheev S.I., Petrov Y.V., Smirnov V.I.,
Utkin A.A., Fedorovsky G.D.*

(St. Petersburg state university, Russia)

Comparative investigation of dynamic and static fracture of rocks with different structure on different techniques was carried out. The materials under investigation were gabbro-diorite, serpentinite, granite, sandstone, limestone, marble, dolomite and clay.

Разрушение материала - сложный процесс, происходящий на различных структурно-масштабных уровнях. Традиционно в статике (линейной механике разрушения) для определения разрушающих нагрузок используются статическая прочность и трещиностойкость (критический коэффициент интенсивности напряжений) материала. При динамическом нагружении появляется еще одна характерная координата – время, которая делает описание разрушения более сложным, так как требуется описание процесса не только на различных пространственных масштабных уровнях, но и его развития во времени. В [1] показано, что традиционно используемые для описания разрушения скоростные зависимости прочности и трещиностойкости не являются характеристиками динамической прочности материала и сильно зависят от конкретной, реализованной в эксперименте схемы нагружения, что делает их использование для описания поведения материалов в других ситуациях необоснованным. Кроме того, эксперименты по ударно-импульсному разрушению твердых тел демонстрируют целый ряд эффектов, принципиально противоречащих классическим моделям прочности и трещиностойкости [1, 2].

При проведении экспериментов по импульсному разрушению материалов определяющим условием правильной интерпретации полученных результатов является знание не только статических характеристик материалов и реализованных схем нагружения, но и

параметров воздействующего импульса. Магнитноимпульсный способ является удобным средством формирования ударных нагрузок с управляемыми и полностью контролируемыми в процессе нагружения параметрами. Этот метод позволяет проводить исследования как по разрушения образцов с макродефектами типа трещин, так и реализацию откольной схемы нагружения [3].

В ряде работ [4, 5] для описания процесса динамического разрушения использован структурно-временной подход, позволяющий определить из экспериментальных данных структурное время разрушения материала – параметр τ , ответственный за разрушение материала при импульсном воздействии [1, 6]. Введение этого параметра в систему определяющих процесс разрушения параметров наряду со статическими прочностью и трещиностойкостью позволяет описывать разрушение материала при различных схемах и законах импульсного нагружения. Структурно-временной подход применен в данной работе.

1. Условия проведения опытов. Для изучения динамического трещинообразования проведено ударное нагружение в микросекундном диапазоне на магнитно-импульсной установке образцов-пластин со срединным сквозным разрезом, с приложением задаваемой равномерно-распределенной нагрузки по его берегам. В опытах устанавливалась длина прорастания трещины. Исследовалось также откольное разрушение образцов-стержней при ударе по торцу, с определением пороговой разрушающей нагрузки. Лазерным интерферометром измерены скорости распространения продольных стержневой C_r и пространственной C_e волн в средах. Установлены исходный объемный вес ψ и плотность ρ материалов.

По данным образцов и статических опытов определены статическая прочность σ_c (временное сопротивление) и характеризующий трещиностойкость коэффициент интенсивности напряжений K_{Ic} (в табл. индексом c (crack) отмечены характеристики разрушения, r (rod) характеристики полученные по данным растяжения стержня, индексом b (bend) – изгиба, а e (expanse) – для пространственной волны).

Определяющие параметры для динамического диапазона найдены путем численного решения соответствующих краевых задач механики для пластины с надрезом и для стержня при пороговых значениях нагрузки, а также использования для оценки динамической прочности критерия «инкубационного» времени [1]. Определяющими параметрами критерия являются инкубационное время τ и отмеченные статические характеристики.

Эксперименты проводились на образцах, изготовленных из одной партии материала. Размеры и форма образцов определялись требованиями эксперимента, формой и размерами поставленных заготовок материала и

возможностью их обработки. Определение статических определяющих характеристик прочности и трещиностойкости пород, выполненных по данным статических испытаний на разрывной машине (при скорости деформирования 10 мм/мин) образцов - стержней и балок (без надрезов), а также длинных пластин и балок с надрезами, при одноосном растяжении и трехточечном изгибе. Из некоторых материалов не удалось изготовить образцы для соответствующих испытаний. Например, для мрамора и глины не были реализованы образцы для испытаний по откольной схеме нагружения. Ограниченные размеры исходных заготовок некоторых материалов не позволили изготовить образцы, размеры которых были бы достаточны для определения структурного времени разрушения в симметричной схеме динамического нагружения в образцах-пластинах со срединным надрезом. Для этих материалов в таблице приведена минимальная граница значения этого параметра (см. табл.).

2. Изучение микроструктуры материалов и поверхностей разрушения. Для анализа микроструктуры исследованных горных пород и характеристик поверхностей разрушения использовался оптический микроскоп, позволяющий проводить исследования в отраженном свете в светлом и темном полях и поляризованном свете. Установлен различный фрактографический вид поверхностей и профилей разрушения пород в зависимости от их структуры и вида нагружения. Профили поверхностей разрушения как при статическом, так и при динамическом нагружении характеризуются изломами различной протяженности, особенно большими у гетерогенных структур с крупными прочными компонентами (прежде всего, гранит).

После импульсного нагружения габродиабаза трещина распространяется вдоль границ зерен слюды и по границам зерен кварца, иногда наблюдается пересечение зерен. У известняка трещина, как правило, распространяется по границам зерен. На поверхности разрушения видна хрупкая фрактура с образованием трещин на включениях и их коалесценция. В мраморе видны трещины, идущие вокруг зерен. Внутри зерен наблюдаются полосы сдвига. На тройном стыке зерен наблюдаются полости, образованные микротрещинами. В микроструктуре песчаника после испытаний на откол видны поры различных размеров, расположенные как внутри зерен, так и между ними. В глине после импульсного нагружения заметны трещины, проходящие среди небольшого размера ламелей глины. Наблюдается маленькие поры.

3. Анализ результатов опытов. В таблице представлена сводка осредненных результатов расчетов определяющих параметров разрушения горных пород по опытным данным, разброс которых не превышал преимущественно $\pm 15\%$. Значком * обозначены параметры, установленные из предположения, что $C_r \cong 0.9C_e$; $E_{din} = \rho C_r^2$ – динамический

продольный модуль Юнга; ν_{din} – динамический коэффициент Пуассона, определенный по скоростям C_r и C_e : $\nu_{din} = 1/[4\sqrt{a(a+8)} - a]$, $a = (C_e^2 - C_r^2)/C_e^2$; $d = 2K_{1c}^2/(\pi\sigma_c^2)$ – структурный размер Новожилова; $\gamma_{din} = K_{1c}^2/(2E_{din})$ – удельная поверхностная энергия (вязкость) разрушения.

Таблица. Некоторые характеристики исследованных горных пород

Параметр	Размерность.	Г-Д	З	Гр	П	И	М1	М2	Д	Гл
σ_{c_r}	МПа	17.54	10.17	5,18	4.12	2.76	2.19	1.07	2.67	-
σ_{c_b}	МПа	44.04	36.34	19,50	31.18	12.40	13.16	6.19	9.00	1.63
K_{1c_r}	МПа $\sqrt{м}$	< 2.40	1.63	0,67	0.35	0.43	0.47	0.42	0.22	-
K_{1c_b}	МПа $\sqrt{м}$	2.36	2.19	1.08	1.19	1.31	0.87	1.34	0.66	1.12
C_e	м/с	5600	-	4250	5100	3790	-	3790	-	2200
C_r	м/с	5000	-	3800	4520	3410*	-	3410*	-	1610
ψ	кг/м ³	3286	2656	2667	2519	2574	2576	2548	1999	2011
$\tau_{(K_{1c_r})}$	мкс	> 40	-	> 69	> 54	15	-	44	-	> 75
$\tau_{(\sigma_{c_r})}$	мкс	72	-	84	63	16	-	-	-	-
E_{din}	МПа	8200	-	3850	5100	3000*	-	2960*	-	5200
ν_{din}		0.272	-	0.320	0.278	-	-	-	-	0.381
d_r	мм	11.90	16,40	10.70	4.60	15.50	29.40	98.10	4.30	-
d_b	мм	1.83	2,30	1.97	0.93	7.10	2.80	28.80	3.40	3.70
γ_{din_r}	МПа мм	0.351	-	0.058	0.012	0.031*	-	0.030*	-	-
γ_{din_b}	МПа мм	0.340	-	0.151	0.139	0.286*	-	0.303*	-	0.121

Здесь Г-Д – габбро-диабаз; З – змеевик; Гр – гранит; П – песчаник; И – известняк; М – мрамор; Д – доломит; Гл – глина.

Значения параметров статической прочности и трещиностойкости указанных выше горных пород убывают в соответствии с перечислением их названий. При изгибе они значительно выше, чем при растяжении. Инкубационное время преимущественно ниже у пород с более низкой статической прочностью и трещиностойкостью, причем, в случае откола в стержнях оно примерно такое же.

Исследование горных пород позволило существенно расширить спектр материалов, испытанных с помощью магнитноимпульсного способа и структурно-временного подхода. Следует отметить, что во всех испытаниях был реализован ударно-волновой режим нагружения, что позволяет с единой точки зрения провести анализ всей совокупности полученных результатов.

Эксперименты, проведенные на различных материалах, демонстрируют пороговый характер разрушения и увеличение разрушающей амплитуды с уменьшением длительности импульса нагрузки при разрушении как бездефектных образцов, так и образцов с макродефектами типа трещин.

Типичные зависимости длины проросшей трещины в образцах с макродефектами от амплитуды и длительности импульса, равномерно приложенного к берегам трещины, показаны на рис. 1.

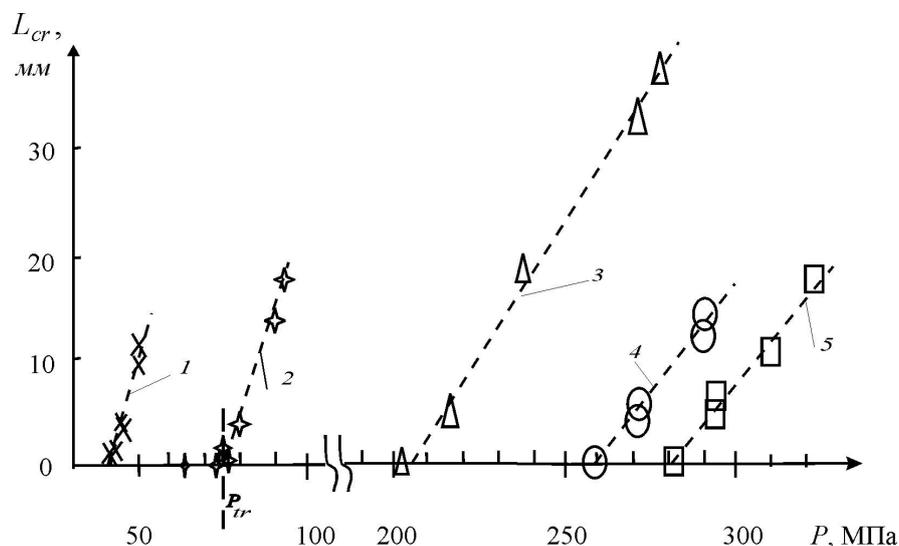


Рис. 1. Зависимости длины проросшей трещины от амплитуды одиночного импульса нагрузки при длительности нагружения (T_p): 1 – известняк, 4.4 мкс; 2 – мрамор, 3.6 мкс; 3 – габбро-диабаз, 3.6 мкс; 4 – песчаник, 3.6 мкс; 5 – гранит – 3.6 мкс.

Как и для испытанных ранее материалов, так и для горных пород имеет место пороговый характер разрушения и линейность зависимости длины проросшей трещины от амплитуды нагрузки. Пороговые разрушающие нагрузки P_{tr} находят путем экстраполяции длины проросшей трещины L_{cr} в область $L_{cr} \rightarrow 0$.

Проведенные исследования разрушения образцов с макродефектами позволяют определить поведение важной характеристики материала – поверхностной энергии разрушения в условиях импульсного нагружения. Энергия, требуемая для образования новых поверхностей – постоянная Гриффитса, при статическом нагружении линейно-упругого тела устанавливается из соотношения:

$$\gamma_0 = K_{Ic}^2 / (2 \cdot E), \quad (1)$$

где E - модуль Юнга.

Особенностью магнитно-импульсного способа является полное прекращение энергообмена между образцом и нагрузочным устройством после окончания импульса. Кроме этого, как показано в [2], разрушение материала при пороговых нагрузках происходит с задержкой t^* , близкой к τ . Это позволяет провести анализ энергобаланса в динамике. При импульсном нагружении увеличивается не только амплитуда разрушающей нагрузки. В [7] показано, что поверхностная энергия

разрушения может быть определена из данных по разрушению образцов с макродефектами типа трещин по следующему соотношению:

$$2 \cdot \gamma_d = \frac{3 \cdot T_p \cdot P_{tr} \cdot t^*}{2 \cdot k \cdot \rho}, \quad (2)$$

где k – тангенс угла наклона зависимости $L_{cr}(P)$ (рис. 2) в области $L_{cr} \rightarrow 0$ при длительности импульса нагружения T_p ; ρ – плотность материала; t^* – время до старта трещины.

Значения поверхностной энергии разрушения для различных материалов, рассчитанного по (2) приведены на рис. 2.

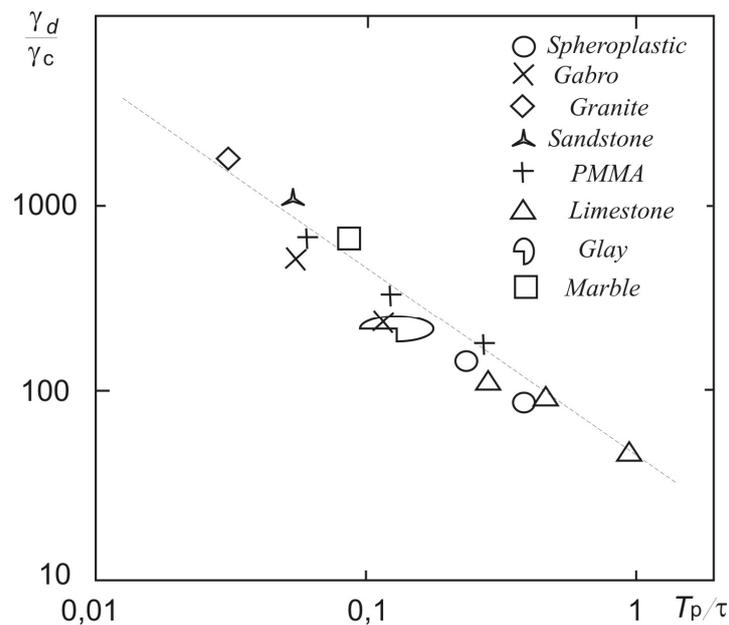


Рис. 2. Зависимость относительной поверхностной энергии разрушения от относительной длительности импульса.

Эти данные хорошо описываются зависимостью

$$\gamma_d = \gamma_0 \cdot A \cdot \left(\frac{T_p}{\tau} \right)^{-\beta} = \gamma_0 \cdot \frac{\tau}{T_p}, \quad (3)$$

т.к. коэффициент пропорциональности $A \approx 50$, а показатель степени $\beta \approx 1$.

Выявленная зависимость поверхностной энергии разрушения от относительной длительности импульса свидетельствует об инвариантности процесса разрушения в выбранной системе определяющих параметров.

Проведенные исследования разрушения горных пород и данные, полученные ранее при исследовании других материалов, показывают, что различие в структурном времени разрушения τ , определяемом из опытов по разрушению бездефектных образцов $\tau|_{\sigma}$ и образцов с макродефектами типа трещин $\tau|_{K_{1c}}$ не превышает 10%. Этот факт позволяет использовать

для определения структурного времени разрушения наиболее удобные для испытаний схемы нагружения.

Работа выполнена при поддержке грантов фонда РФФИ 05-01-01068, РФФИ-ГФЕН 03-0139010 и Минобразования Е02-4.0-90.

Литература

1. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. - 132 с.
2. Березкин А.Н., Кривошеев С.И., Петров Ю.В., Уткин А.А. Эффект запаздывания старта трещины при пороговых импульсных нагрузках// Доклады РАН, 2000, 3, 375. - С. 328-331.
3. Кривошеев С.И. Магнитно-импульсная методика тестирования материалов при импульсном нагружении// ЖТФ, 2004, том 75, вып. 3. – С. 47-53.
4. Кривошеев С.И., Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Федоровский Г.Д., Шнеерсон Г.А. Исследование пороговых характеристик разрушения материалов при кратковременных нагрузках, создаваемых электромагнитными силами. - Тр. Междун. конф. «У Забабахинские научные чтения» (Снежинск, 20-26 сент. 1998.): Снежинск Челябинской обл. Изд-во РФЯЦ - ВНИИТФ, 1999, Ч.1.- - С. 706-713.
5. Атрошенко С.А., Кривошеев С.И., Петров Ю.В., Уткин А.А., Федоровский Г.Д. Исследование трещиностойкости сферопластика при статических и динамических нагрузках // Межд. конф. 3-е Харитоновские тематические научные чтения. Экстремальное состояние вещества. Детонация. Ударные волны. Саров (2001), - С. 131-132.
6. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. О концепции структурного времени в теории динамического разрушения хрупких материалов// ДАН.- 1992.- Т.324, No.5. - С. 964-967.
7. Груздков А.А., Кривошеев С.И., Петров Ю.В. Энергоемкость разрушения материалов в условиях импульсного нагружения микросекундной длительности //Физика твердого тела, 2003, том 45, вып. 5. - С. 842-845.

УДК 519.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЪЕМНО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ «COMPASS».

**Бездедев В.В., *Буклемишев А.В., **Погодин В.К., **Трутаев С.Ю.,
**Преженцева В.В., **Шадрин Д.А.*

*(*ОАО «Иркутский Промстройпроект», **ОАО «ИркутскНИИхиммаш»)*

Рассматривается возможность исследования трехосного напряженно-деформированного состояния машиностроительных конструкций и их элементов с помощью программной системы COMPASS

Одним из основных этапов проектирования новых конструкций машиностроительных деталей, например при разработке различных типоразмеров элементов бугельных соединений, арматуры высокого

давления, является исследование их объемного напряженного состояния с целью оптимизации геометрии конструкции и других параметров. В настоящее время существует множество специализированных методик, позволяющих с известной степенью приближения решить указанную задачу. Однако более целесообразно исследование объемного напряженного состояния, особенно для деталей имеющих сложную форму, выполнять с помощью универсального метода конечных элементов [1], который нашел отражение во многих современных программных пакетах, таких как NASTRAN, ANSYS, MicroFe, COMPASS. Наиболее распространенным типом конечного элемента, используемым во всех перечисленных программных пакетах, является тетраэдральный конечный элемент. С помощью совокупности таких универсальных элементов можно легко описать практически любую геометрическую форму. Однако в практике часто встречаются случаи, когда целесообразнее для дискретизации исходной геометрии применять различные типы конечных элементов, а для повышения точности расчетов необходимо применение конечных элементов с высокой степенью аппроксимирующих полиномов (квадратичные или кубические КЭ) и элементов с переменной степенью аппроксимации границ.

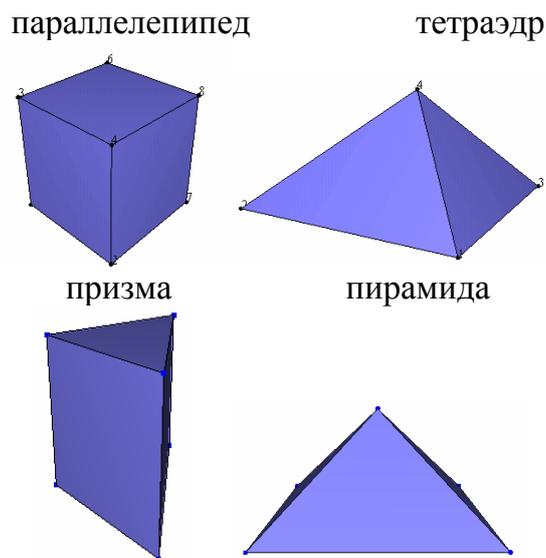


Рисунок 1. Объемные КЭ программной системы COMPASS

Для решения подобных задач в 2003-2005 гг. творческим коллективом авторов проведена значительная работа по расширению иерархии объемных конечных элементов программной системы COMPASS (COMPUter - aided Analysis and Synthesis of bearing Structures) [2]. К настоящему времени разработаны и успешно применяются для расчета машиностроительных деталей следующие типы конечных элементов: линейный, квадратичный и кубический гексаэдр, тетраэдр, призма, пирамида. Иерархия конечных элементов программной системы COMPASS изображена на рис. 1.

Следует отметить также, что в процессе развития программной системы COMPASS по направлению реализации возможностей работы с объемными конечными элементами, наряду с расчетными модулями, значительной переработке подверглась и непосредственно сама оболочка программы. В частности за счет перехода на технологию OpenGL были усовершенствованы возможности визуализации расчетных схем и результатов расчета. На рис. 2, 3 показаны примеры расчетных схем и изополя напряжений, полученные в программной системе COMPASS, для различных машиностроительных деталей.

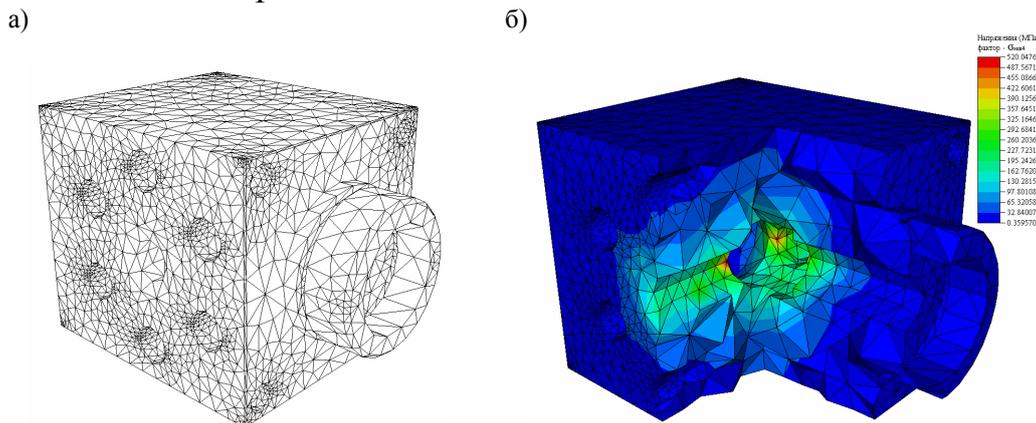


Рисунок 2. Клапан высокого давления
а) конечно-элементная модель, б) изополя напряжений

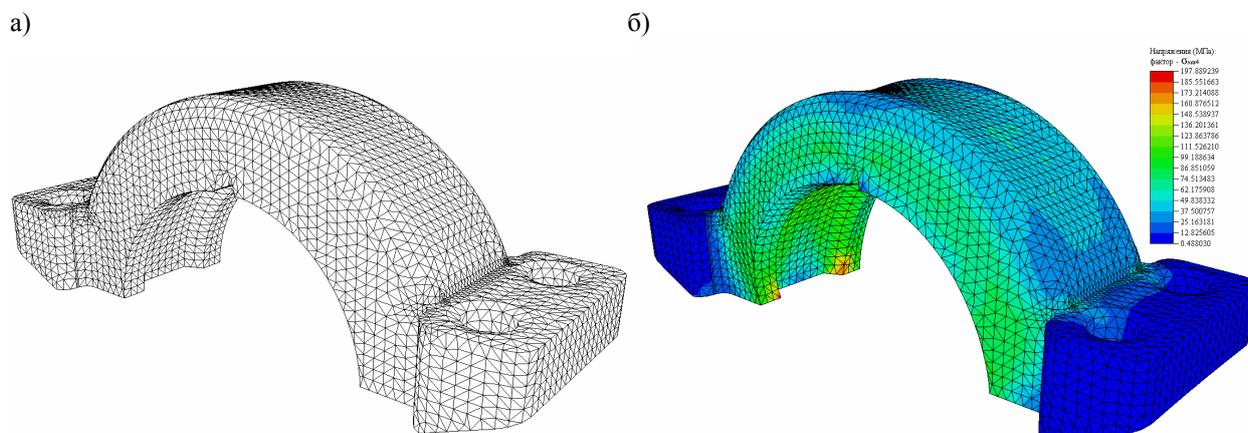


Рисунок 3. Бугель
а) конечно-элементная модель, б) изополя напряжений

Наряду с расчетом отдельно взятых машиностроительных деталей иногда приходится осуществлять оценку напряжено-деформированного состояния различных соединений, в том числе с учетом контактного взаимодействия соединяемых деталей. Для решения таких задач разработаны и включены в программную систему COMPASS специализированные расчетные модули и генераторы расчетных схем. На рис. 4 показан пример расчетной схемы бугельного соединения в сборе и изополя напряжений в зоне контакта ниппеля и уплотнительного кольца.

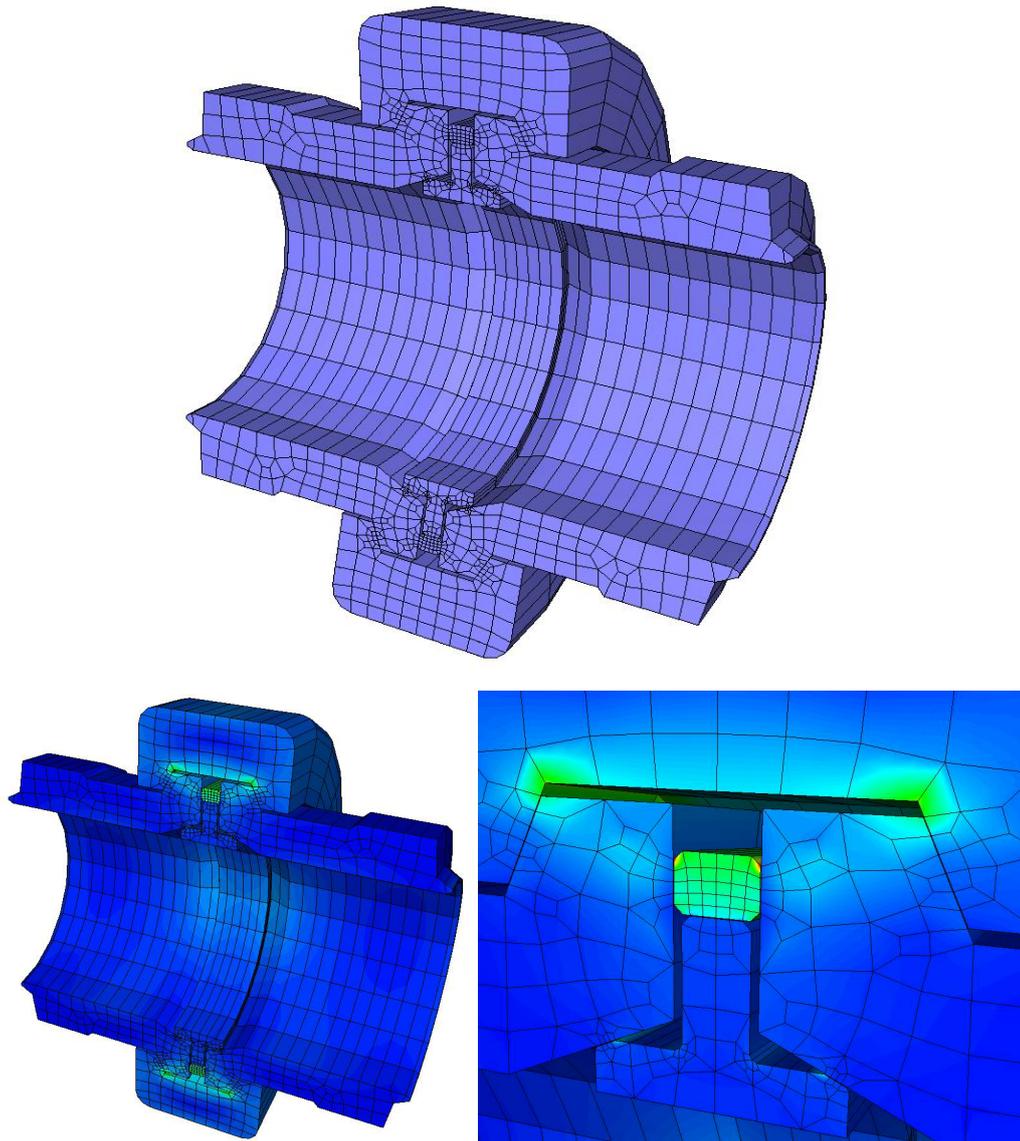


Рисунок 4. Расчетная схема бугельного соединения (ниппель - уплотнительное кольцо) и изополя напряжений в зоне контакта

Таким образом, в настоящее время программная система COMPASS представляет собой многофункциональный конечно-элементный пакет, с помощью которого можно легко осуществлять расчет и анализ объемного напряженно-деформированного состояния широкого класса машиностроительных конструкций, выполнять проектирование новых конструкций с применением методов анализа чувствительности и оптимизации, выполнять расчет различных сопряжений, в том числе с учетом контактного взаимодействия.

Литература

1. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов/Пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; Под ред. А.Ф. Смирнова – М.: Стройиздат, 1982 - 448 с.

2. Безделев В.В., Буклемишев А.В., Программная система COMPASS. Руководство пользователя. - Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. техн. ун-та, 2000 г. – 120 с.

УДК 624.03

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ COMPASS ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ СЕЙСМОИЗОЛЯЦИИ РЕКОНСТРУИРУЕМЫХ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

**Безделев В.В., *Сутырин Ю.А., *Буклемишев А.В., **Трутаев С.Ю.
(*ОАО Иркутский Промстройпроект, **ОАО ИркутскНИИхиммаш)*

На примере программной системы COMPASS рассматривается возможность применения конечно-элементных программных пакетов для проектирования эффективной сейсмоизоляции реконструируемых зданий и сооружений, основанной на использовании специальных демпфирующих устройств.

При реконструкции зданий, построенных в сейсмически активных регионах, как правило, возникает необходимость обеспечения их сейсмобезопасности. В 2000г. в нормы [1] включены новые карты сейсмического районирования. В связи с тем, что по этим картам уровень сейсмической опасности для большинства регионов возрос, то даже для зданий, построенных сравнительно недавно, возникает необходимость повышения их сейсмостойкости. Традиционные методы усиления зданий не всегда эффективны как с технической, так и с экономической точек зрения. Например, установка железобетонных диафрагм в изначально гибких зданиях повышает жесткость этих зданий и приводит к росту сейсмических сил вследствие уменьшения периода колебаний и увеличения коэффициента динамичности. Кроме того, затраты, связанные с устройством подобных диафрагм в существующем здании тоже значительны. Одним из перспективных направлений повышения сейсмоустойчивости зданий и сооружений является использование специальных устройств для демпфирования колебаний. Поскольку демпфирующие элементы устанавливаются между двумя перемещающимися узлами, то даже самая упрощенная расчетная схема здания или сооружения должна иметь как минимум две динамические степени свободы. В отличие от систем с одной степенью свободы, в таких системах увеличение параметра демпфирования отдельного элемента не всегда ведет к уменьшению демпфирования системы в целом. Поэтому для проектирования эффективных систем сейсмозащиты необходим подбор оптимального демпфирования. Вопрос оптимизации сил сопротивления рассматривался в [2] и других работах. В существующих нормах [1] отсутствуют какие-либо количественные рекомендации по учету сил демпфирования. Учитывая важность этого вопроса, в [3] была предложена

методика учета сил демпфирования в явном виде, которую предлагалось включить в нормы [1].

Анализ опубликованных источников показывает, что вопросы оптимизации демпфирования рассматривались, в основном, в контексте проектирования систем сейсмоизоляции зданий, в частности сейсмоизолирующих фундаментов [2]. В то же время, устройство систем сейсмоизоляции в уже построенных зданиях и сооружениях сопряжено со значительными техническими трудностями. Кроме того, реализация таких решений требует значительных финансовых ресурсов. Между тем, идея снижения сейсмической нагрузки в гибких зданиях и сооружениях за счет связи их в верхней части с более жесткими соседними зданиями при помощи демпферов может оказаться чрезвычайно плодотворной.

В 2005 году при разработке проекта реконструкции (проектная организация – ОАО «ИркутскПромстройпроект») иркутского аэровокзала было принято решение, согласно которому, для повышения сейсмической безопасности здания использовался вышеупомянутый метод снижения сейсмической нагрузки. В качестве демпфирующих устройств были приняты вязкоупругие демпферы фирмы GERB [4]. Статические и динамические расчеты здания аэровокзала с учетом характеристик реальных демпферов выполнялись по пространственным расчетным схемам с помощью программной системы COMPASS[5].

Здание аэровокзала (рис. 1) состоит из двух прямоугольных блоков общим размером в осях 98,0 м х 29,95 м. Конструктивная схема – каркас, решенный по рамной схеме в поперечном направлении и по рамно-связевой – в продольном.



Рисунок 1. Существующее здание аэровокзала

В качестве несущих конструкций покрытия использованы стальные двухконсольные фермы пролетом 24 м и вылетом консолей 6 м. Аэровокзал введен в эксплуатацию в 1976 г. К настоящему времени здание и его оборудование морально устарели и требуют реконструкции. По

результатам обследования техническое состояние конструкций оценено как «работоспособное», однако сейсмобезопасность здания не обеспечивается в связи с несоответствием ряду положений действующих норм [1]. Одной из главных причин несоответствия является повышение расчетной сейсмичности до 9 баллов в связи с повышенной ответственностью объекта. Для обеспечения сейсмобезопасности объекта необходимо либо усиление конструкций существующего здания в поперечном направлении, либо устройство системы сейсмозащиты, снижающей сейсмические нагрузки на конструкции здания. В продольном направлении сейсмическая нагрузка воспринимается связями. Поэтому основное внимание при реконструкции уделено проблеме восприятия сейсмических нагрузок в поперечном направлении. План реконструкции предусматривает строительство пристроя расширяющего площади аэровокзала (рис. 2).



Рисунок 2. Проект реконструкции здания аэровокзала

Основная идея по сейсмозащите здания аэровокзала состоит в соединении конструкций пристраемого и существующего здания с помощью вязкоупругих демпферов фирмы GERB [4] на отметке 7.75 м.

На рис. 3 показаны пространственные расчетные схемы здания аэровокзала и пристроя, построенные с помощью программной системы COMPASS [5]. Для детального моделирования основных конструкций обоих зданий были использованы стержневые конечные элементы с соответствующими жесткостными и масс-инерционными характеристиками. Моделирование демпфирующих устройств осуществлялось посредством специальных вязкоупругих элементов, имеющих в библиотеке конечных элементов программы.

Расчет реконструируемого здания осуществлялся в несколько этапов. На первом этапе выполнялись расчеты здания на действие статических

нагрузок. Также определялись собственные частоты и формы колебаний системы.

На втором этапе исследований выполнялись динамические расчеты системы на действие реальных акселерограмм.

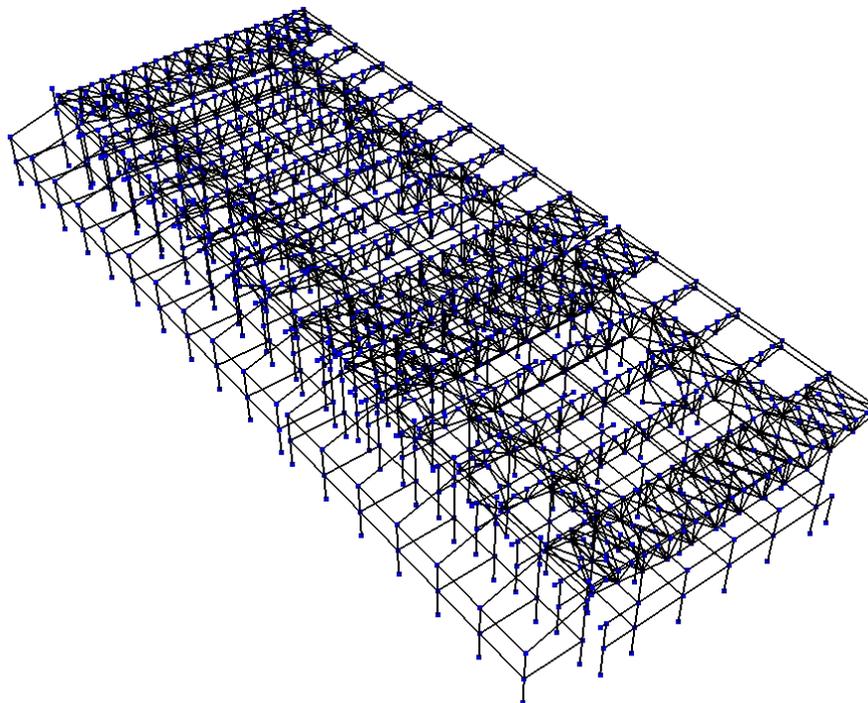


Рисунок 3. Пространственная расчетная схема здания аэровокзала и здания прибора

В качестве расчетных акселерограмм были приняты цифровые записи восьми наиболее сильных землетрясений, произошедших в Байкальском регионе за период с 1999г. по 2005г., зарегистрированные инженерно-сейсмометрическими станциями Института земной коры ИЦ СО РАН. В частности, в этот набор расчетных акселерограмм входила запись землетрясения, произошедшего в Южном Байкале 25 февраля 1999г. и ощущавшегося в Иркутске как 5-6 баллов. Все акселерограммы масштабировались к уровню 9 баллов по максимальному ускорению, которое в соответствии с [1] должно составлять не менее 400 см/с^2 . Для каждой акселерограммы в каждый момент времени определялась динамическая реакция системы методом прямого интегрирования Ньюмарка [6]. На рис. 4 показана деформированная схема исследуемой системы «аэровокзал-пристрой» для одной из акселерограмм в момент времени, соответствующий максимуму перемещений здания аэровокзала.

На третьем этапе исследования выполнялся анализ напряженно-деформированного состояния системы для случаев наиболее невыгодных сочетаний нагрузок. Для этого были построены эпюры огибающих усилий в элементах каркаса реконструируемого здания по всем статическим и динамическим загрузкам системы.

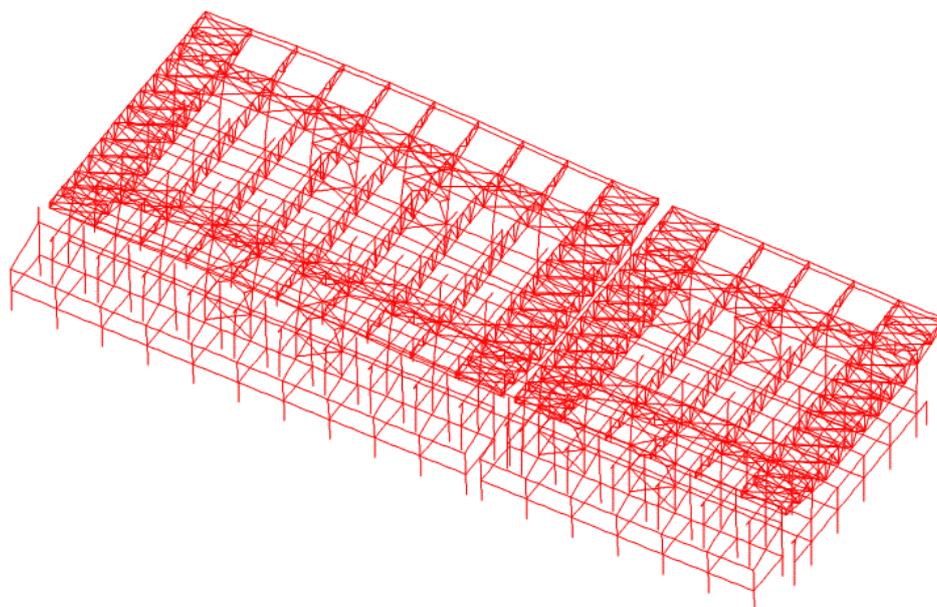


Рисунок 4. Деформированная схема реконструируемого здания

Для оценки эффективности применения демпфирующих устройств в целях снижения сейсмической нагрузки на здание аэровокзала дополнительно была проведена серия динамических расчетов системы (рис. 3) без установки демпферов, а также с заменой демпферов жесткими связями. Расчеты показали, что в случае использования для сейсмоизоляции здания вязкоупругих демпферов GERB[4] сейсмическую нагрузку на здание аэровокзала можно снизить приблизительно в 2 раза, по сравнению со случаями, когда демпферы не используются или существующее здание сопрягается с пристраиваемым зданием жесткой связью.

Литература

1. СНиП II-7-81*. Строительство в сейсмических районах. М.: ГУП ЦПП, 2000. – 44 с. + прил. 2: 10 карт.
2. Долгая А.А., Уздин А.М. К вопросу об оптимизации сил сопротивления в задачах проектирования сейсмоизолирующих фундаментов. – М.: Сейсмостойкое строительство, № 3, 1999. - с. 28-31
3. Уздин А.М., Пейчев М.М. К вопросу учета демпфирования в рамках СНиП «Строительство в сейсмических районах» – М.: Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений, № 3, 2001. - с. 37-39.
4. GERB Vibrations Control Systems, Inc., 2002.
5. Безделев В.В., Буклемишев А.В., Программная система COMPASS. Руководство пользователя. - Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. техн. ун-та, 2000 г. – 120 с.
6. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов/Пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; Под ред. А.Ф. Смирнова – М.: Стройиздат, 1982 - 448 с.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИЙ АВТОМОБИЛЬНОЙ ШИНЫ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ КАЧЕНИИ

*Белкин А.Е., Нарская Н.Л., Одинцов О.А
(МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия)*

Рассматривается решение геометрически нелинейной контактной задачи о деформациях шины, катящейся под нагрузкой по недеформируемой опорной поверхности. В качестве расчетной модели шины используется ортотропная оболочка вращения с конечной жесткостью при поперечных сдвигах. Решение получено методом конечных элементов с применением процедуры множителей Лагранжа для выполнения условий контакта. Расчеты выполнены с помощью элемента МІТС₄. Рассмотрены режимы свободного качения при отсутствии касательных сил в пятне контакта и буксования при предельных значениях этих сил.

При формулировке задачи стационарного качения предполагается, что ось колеса неподвижна, движется опорная плоскость под шиной. Скорости и ускорения точек шины определяются конвективными производными векторов положения точек в конфигурации деформированной шины

$$\bar{v} = \Omega r \bar{i}_\varphi + \Omega \bar{u}_{,\varphi\varphi} \quad \bar{a} = -\Omega^2 r \bar{i}_r + \Omega^2 \bar{u}_{,\varphi\varphi};$$

где Ω - угловая скорость вращения колеса, \bar{u} - перемещения точек с пространственными цилиндрическими координатами r, φ, z ; $\bar{i}_r, \bar{i}_\varphi$ - орты радиального и окружного направлений.

Уравнения движения элементов шины получены, исходя из принципа возможных перемещений

$$\delta A^{(i)} = \iiint_V \delta \bar{u} \rho \left(\Omega^2 r \bar{i}_r - \Omega^2 \bar{u}_{,\varphi\varphi} \right) dV + \iint_{S_q} \delta \bar{u} \bar{q} dS,$$

где $\delta \bar{u}$ - возможные перемещения, $\delta A^{(i)}$ - работа внутренних сил на возможных перемещениях, ρ - плотность материала, V - объем оболочки, \bar{q} - внешние силы, действующие на части поверхности оболочки S_q .

В соответствии с гипотезой Тимошенко перемещения, скорости и ускорения распределены по толщине оболочки по линейному закону. С учетом этих распределений внутренние силы и инерционные нагрузки приведены к базовой поверхности оболочки S_0 . Вариационное уравнение представлено в матричной форме

$$\begin{aligned} & \iint_{S_0} \left(\delta \varepsilon^T T + \delta \chi^T M + \delta \gamma^T Q \right) dS_0 - \frac{1}{2} \Omega^2 \delta \iint_{S_0} e_2^T m e_2 dS_0 = \\ & = \delta \iint_{S_0} u^T (q + q_\Omega) dS_0 \end{aligned}$$

с использованием следующих векторов-столбцов:

u - линейных и угловых перемещений, q - внешней поверхностной нагрузки, q_{Ω} - центробежной нагрузки, ε - деформаций базовой поверхности, χ - изгибных деформаций, γ - деформаций поперечного сдвига, T, Q - мембранных и поперечных сил, M - изгибающих и крутящих моментов, e_2 - параметров деформации оболочки в окружном направлении; m - матрицы инерционных характеристик оболочки.

Поскольку при обжатии шины могут наблюдаться весьма большие перемещения, то деформации базовой поверхности ε определены нелинейными соотношениями квадратичной теории оболочек

$$\varepsilon_1 = e_1 + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \vartheta_1^2), \quad \varepsilon_2 = e_2 + \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \vartheta_2^2), \quad \gamma_{12} = \omega_1 + \omega_2 + \vartheta_1\vartheta_2.$$

Деформации изгиба и поперечного сдвига определены соотношениями линейной теории.

Предполагается, что в пределах деформаций, наблюдаемых при нормальных условиях эксплуатации шин, резина и резинокордные слои проявляют свойства линейной упругости. В этом случае физические соотношения для оболочки имеют вид

$$T = D_{\varepsilon} \varepsilon + D_{\varepsilon\chi} \chi, \quad M = D_{\varepsilon\chi} \varepsilon + D_{\chi} \chi, \quad Q = D_{\gamma} \gamma,$$

где D_{ε} , $D_{\varepsilon\chi}$, D_{χ} , D_{γ} - симметричные матрицы коэффициентов упругости.

Условия контакта шины в направлении нормали \bar{N} к опорной поверхности формулируются следующим образом:

$$\eta_N - u_N \geq 0, \quad q_N \leq 0, \quad q_N (\eta_N - u_N) = 0,$$

где η_N - начальные зазоры между недеформированной шиной и основанием в направлении нормали \bar{N} , $u_N = \bar{u} \cdot \bar{N}$ - нормальные составляющие векторов перемещений, $q_N = \bar{q}_c \cdot \bar{N}$ - нормальная компонента искомого контактного напряжения \bar{q}_c .

Для определения касательных напряжений в контакте $\bar{q}_t = \bar{q}_c - q_N \bar{N}$, используется модель «сцепление - скольжение», согласно которой область контакта делится на две зоны: зону сцепления в передней части пятна контакта и зону скольжения, прилежащую к выходу из контакта. В зоне сцепления точки наружной поверхности шины движутся со скоростью основания (напомним, что по договоренности ось колеса неподвижна, движется дорожное полотно), касательные напряжения по величине меньше предельных $|\bar{q}_t| < \mu |q_N|$, где μ - коэффициент трения скольжения. В зоне скольжения касательные напряжения имеют предельные значения и направлены в сторону, противоположную относительной скорости движения точек шины и основания.

Если действующая на шину продольная сила мала по сравнению с предельной, то задачу можно упростить, предположив, что отсутствует зона скольжения, и во всей области контакта выполняются условия

сцепления. В такой постановке задача решалась приближенно в работе [1]. В настоящей работе рассмотрен случай предельной продольной силы (режим буксования), когда в контакте исчезает зона сцепления.

В результате дискретизации задачи и учета кинематических условий нормального контакта с помощью процедуры множителей Лагранжа формулируется модифицированное вариационное уравнение

$$\delta\Delta^T \left(F^{(i)} - \Omega^2 M \Delta \right) + \delta \left[\lambda^T \left(C^T \Delta - \eta \right) \right] = \delta\Delta^T F^{(e)},$$

где Δ , $F^{(i)}$, $F^{(e)}$, η , λ - векторы узловых перемещений, внутренних и внешних сил, зазоров, множителей Лагранжа; M , C - матрицы масс и коэффициентов, определяющих кинематические условия в узлах контакта.

Связанная система нелинейных уравнений движения и условий контакта решается методом Ньютона

$$\left(K_n - \Omega^2 M \right) d\Delta_{n+1} + C d\lambda_{n+1} = F_n^{(e)} - F_n^{(i)} + \Omega^2 M \Delta_n - C \lambda_n,$$

$$C^T d\Delta_{n+1} = \eta - C^T \Delta_n,$$

где K_n - матрица тангенциальной жесткости шины при перемещениях Δ_n , n - номер приближения.

Предельные касательные силы в пятне контакта, соответствующие режиму буксования колеса, вычисляются непосредственно через значения нормальных контактных сил λ_n . Эти силы включены в вектор внешней нагрузки $F_n^{(e)}$. Их значения уточняются итерационно вслед за уточнением нормальных сил.

Изложенный алгоритм реализован с использованием оболочечного четырехугольного четырехузлового элемента МІТС4 [2], построенного на основе метода перемещений с применением билинейной аппроксимации как текущих координат, так и искомым полей перемещений. Особенностью этого элемента является применение специальной процедуры аппроксимации поперечных сдвигов, благодаря которой устраняется присущий многим оболочечным элементам дефект «сдвигового заклинивания».

Для оценки пригодности элемента МІТС4 проведены тестовые расчеты шины 175/70R13 при осесимметричном нагружении внутренним давлением. Решение МКЭ сравнивалось с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений этой одномерной задачи, которые служили эталоном. На рис. 1 показаны графики изменения вдоль профиля шины деформаций поперечного сдвига, а также меридиональных и окружных деформаций в точках наружной поверхности корпуса шины при внутреннем давлении 0,2 МПа. Сложный характер распределения деформаций по профилю объясняется тем, что коэффициенты упругости шины имеют сильно различающиеся значения в зонах борта, боковой

стенки и брекера. Как можно видеть, результаты МКЭ и численного интегрирования уравнений не только согласуются качественно, но и весьма близки по числовым значениям. Таким образом, элемент MITC4 обеспечивает приемлемую точность расчета оболочек по модели Тимошенко.

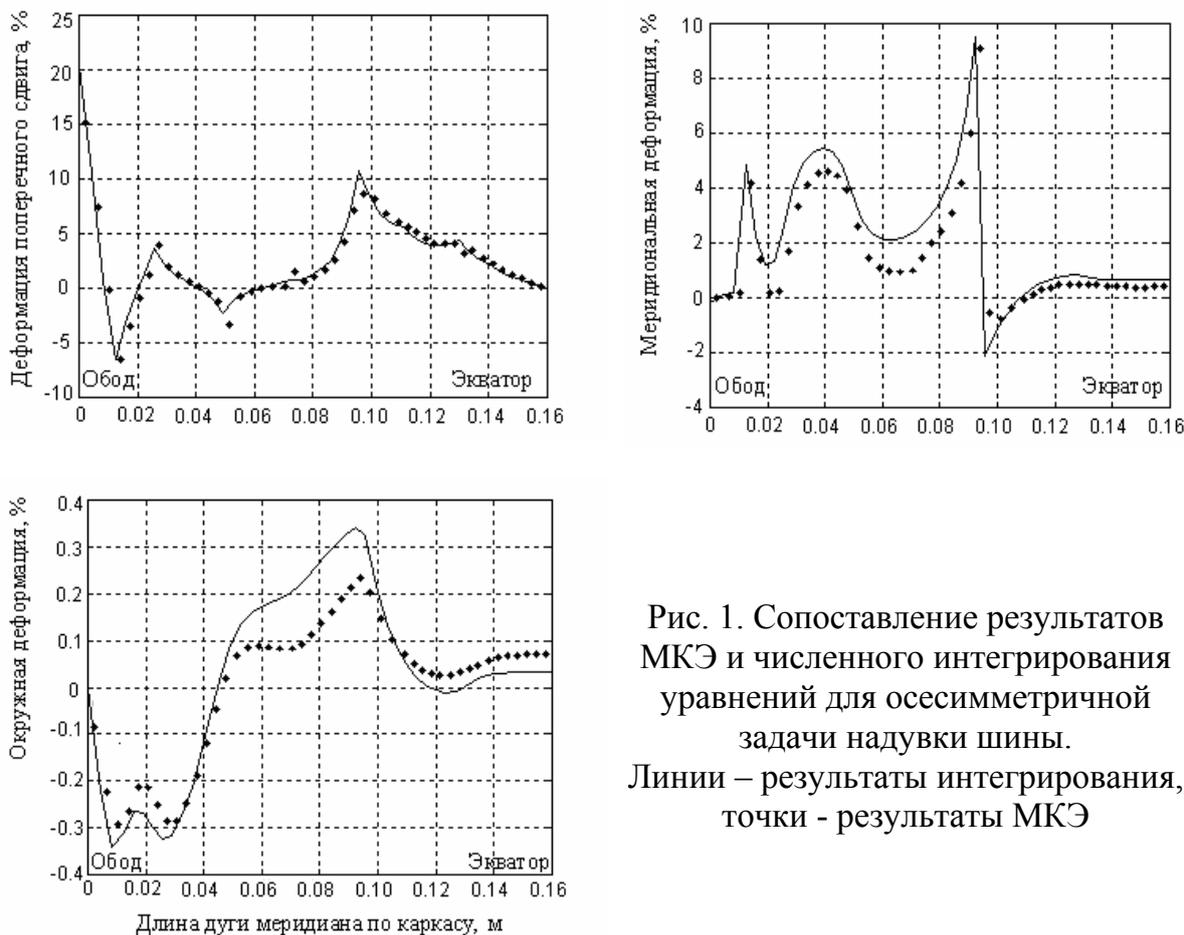


Рис. 1. Сопоставление результатов МКЭ и численного интегрирования уравнений для осесимметричной задачи надувки шины. Линии – результаты интегрирования, точки - результаты МКЭ

Перейдем к результатам решения контактной задачи. На рис. 2 показано распределение контактного давления по ширине беговой дорожки для шины 175/70R13, катящейся с угловой скоростью 90 рад/с. Шина обжата на 26 мм до радиуса 265 мм. Если в случае неподвижной шины давление распределяется симметрично относительно меридионального сечения, проходящего через центр контакта, то при качении с появлением продольной силы и крутящего момента происходит перераспределение сил в контакте, отмеченная симметрия исчезает. На рисунке представлено распределение давления в различных меридиональных сечениях при действии предельной продольной силы, значение которой определено заданным коэффициентом сцепления $\mu = 0,5$. По эпюрам можно проследить изменение давления при движении точки шины в пятне контакта от входа к выходу, рассматривая эпюры в следующей последовательности: 3-2-1-4-5.

На рис. 3 для пяти режимов нагружения показаны графики изменения силы натяжения корда в брекере в зависимости от угла поворота шины. Линии 1, 3 соответствуют двум осесимметричным состояниям. В первом случае шина нагружена внутренним давлением 0,2 МПа, во втором случае - внутренним давлением и центробежными силами при скорости вращения 90 рад/с. Кривая 2 соответствует вертикальному обжатию неподвижной шины на 26 мм, кривые 4, 5 – такому же обжатию вращающейся шины, причем во втором случае на шину действует продольная сила. Как можно видеть, влияние сил инерции заметным образом сказывается на натяжении брекера.

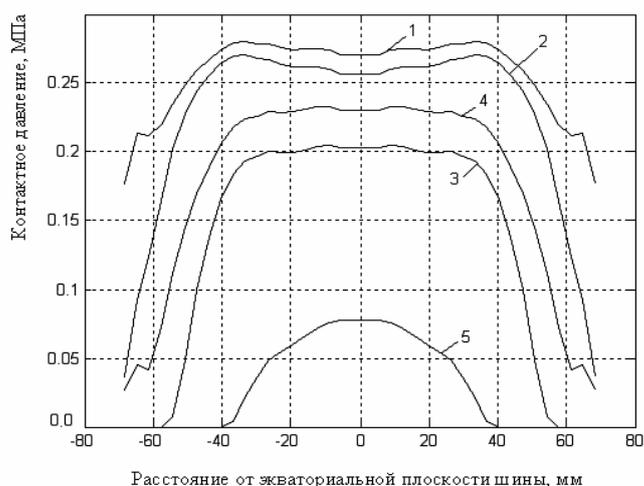


Рис. 2. Распределение давления при качении со скоростью 90 рад/с (коэффициент трения 0.5):

- 1 – в центральном сечении пятна контакта;
- 2, 3 – в меридиональных сечениях, повернутых по отношению к центральному на углы -10° , -15° , т.е. в направлении входа в контакт;
- 4, 5 – в сечениях, повернутых на углы 10° , 15° , т.е. в направлении выхода из контакта

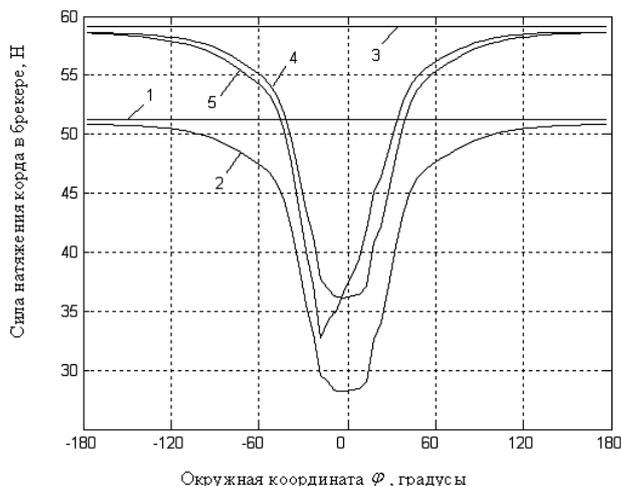


Рис. 3. Изменение силы натяжения корда в брекере

Приведенные числовые результаты свидетельствуют об успешности изложенного алгоритма для расчета сложного состояния автомобильных шин при стационарном качении.

Литература

1. Белкин А.Е., Нарская Н.Л. Контактная задача для радиальной шины как вязкоупругой оболочки при действии тягово-тормозных сил // Вестник МГТУ. Машиностроение. - 1997. - № 4. - С. 100-112.
2. Bathe K.J., Dvorkin E.N. A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components // International journal for numerical methods in engineering. - 1986. Vol. 22. - P. 697-722.

УДК 624.04:624.072

МЕТОД РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗ УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ

Белов М.В.

(Пензенский ГУ архитектуры и строительства, Пенза, Россия)

METHOD OF ROD SYSTEMS CALCULATION IN ELASTO-PLASTIC STAGE IN FINITE ELEMENTS REPRESENTATION FROM CONDITIONS OF STRENGTH

Belov M.V. (Penza State university of architecture and building, Penza, Russia)

Рассматривается метод расчета стержневых систем в упруго-пластической стадии, реализованный на базе МКЭ и метода предельного равновесия с применением линейного программирования. Производится расчет 2-ухэтажной, 2-ухпролетной рамы по программе «StroiMAX», разработанной автором статьи на основе данного метода.

В Пензенском Государственном университете архитектуры и строительства на кафедре Строительной и теоретической механики научной школой под руководством доктора технических наук, профессора А. Н. Раевского проводятся научные исследования в области расчета и оптимизации стержневых систем в упругопластической стадии с использованием методов математического программирования [9-12].

Расчет конструкций в упругом состоянии позволяет определить лишь напряженно-деформированное состояние сооружения от различных видов воздействий, но он не дает сведений о несущей способности конструкций, т.е. о тех наибольших нагрузках, при которых конструкция разрушается. Разрушение большинства строительных конструкций связано с появлением пластических деформаций. Следовательно, при расчете сооружений необходимо учитывать не только упругие, но и пластические свойства материала конструкций [1-4, 8-12].

В данной статье описывается способ расчета конструкций с учетом пластических свойств материала основанный на статической теореме метода предельного равновесия, реализованный на базе метода конечных элементов (МКЭ) с применением линейного программирования.

Идея метода состоит в расчленении конструкции на простейшие элементы и узлы, составлении уравнений равновесия для них в матричной форме и объединении их в виде матрицы равновесия, формировании ограничений в виде условий прочности для элементов системы и определении функции цели, как предельно допустимой нагрузки.

Стержневая система делится на отдельные стержни (конечные элементы) с различными условиями закрепления их концов, соединенных между собой в узлах, а за узлы принимается шарнирное или жесткое их соединение и опорные сечения [5, 7].

Предельную нагрузку для железобетонных и металлических каркасов с небольшой гибкостью стоек (до $\lambda \leq 40$) определяют методом предельного равновесия из условия прочности с использованием линейного программирования симплекс-методом [6]. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значения целевой функции возрастает. Условия прочности в опасных сечениях рамы принимают в виде

$$S_j \leq (S_{jnp} = S_j^o) \quad (j=1,2,3,\dots,n_{ок}), \quad (1)$$

где S_j^o - предельные значения усилий в опасных сечениях, определенные с использованием геометрических параметров сечения и расчетного сопротивления арматуры R_s и бетона R_b или предела текучести $R_y = \sigma_m$ - для металла.

В дальнейшем рассматриваются условия равновесия, и формируется статическая матрица $[A]$, выражающая внешние силы F_i через искомые усилия S_j

$$[A]\vec{S} = \vec{F} \quad (2)$$

При этом внешняя нагрузка выражается через один искомый параметр

$$F_i = \beta_i F \quad (3)$$

и получаем

$$[A]\vec{S} - \vec{\beta}F = 0 \quad (4)$$

Функция цели имеет следующий вид

$$F \rightarrow \max \quad (5)$$

Это и есть математическая модель задачи предельного равновесия в статической формулировке, которая представляет собой задачу выпуклого математического программирования. Эта модель соответствует статической теореме А.А. Гвоздева [1], сформулированной в 1936 году: *Предельная нагрузка является наибольшей из всех нагрузок, при которых*

удовлетворяется еще условия равновесия системы и предельные условия в любом (опасном) сечении.

Проведя расчет получаем значение предельной нагрузки F_{np} и значения внутренних усилий в узлах системы, предшествующих разрушению конструкции, а также определяем места образования пластических шарниров и характер деформаций системы, т.е. получаем схему разрушения конструкции.

Рассчитаем 2-ухэтажную, 2-ухпролетную раму (рис. 1) по представленному алгоритму программой «StroiMAX», разработанной автором статьи. Рама состоит из 18 стержней, сечения которых постоянны по всей длине и характеризуется предельно допустимыми моментами $M_{np} = M_{i-j}^0 = \sigma_T \cdot W_{пл}$ и продольными силами $N_{np} = N_{i-j}^0 = \sigma_T \cdot A$, т.е. теми предельными усилиями $S_{np} = S_{i-j}^0$ см. формулу (1), где i – узел начала стержня, а j – конца (см. рис. 1 в кружках), с такими исходными данными:

$$M_{2-3}^0 = M_{9-10}^0 = M_{17-16}^0 = M_{10-12}^0 = M_{12-14}^0 = M_{14-17}^0 = 2,907 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$N_{2-3}^0 = N_{9-10}^0 = N_{17-16}^0 = N_{10-12}^0 = N_{12-14}^0 = N_{14-17}^0 = 7,2 \text{ кН}$$

$$M_{1-2}^0 = M_{8-9}^0 = M_{15-16}^0 = M_{3-5}^0 = M_{5-7}^0 = M_{7-10}^0 = M_{9-11}^0 = M_{11-13}^0 = M_{13-16}^0 = 5,815 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$N_{1-2}^0 = N_{8-9}^0 = N_{15-16}^0 = N_{3-5}^0 = N_{5-7}^0 = N_{7-10}^0 = N_{9-11}^0 = N_{11-13}^0 = N_{13-16}^0 = 14,4 \text{ кН}$$

$$M_{7-18}^0 = M_{18-19}^0 = M_{19-9}^0 = 8,722 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$N_{7-18}^0 = N_{18-19}^0 = N_{19-9}^0 = 21,6 \text{ кН}$$

Вертикальные элементы конструкции длиной 4м, а горизонтальные первого пролета по 3м, второго – по 2м каждый. Рама загружена десятью сосредоточенными силами, выраженными через один параметр F , формула (3), с коэффициентами, β_i изображенными на рис. 1.

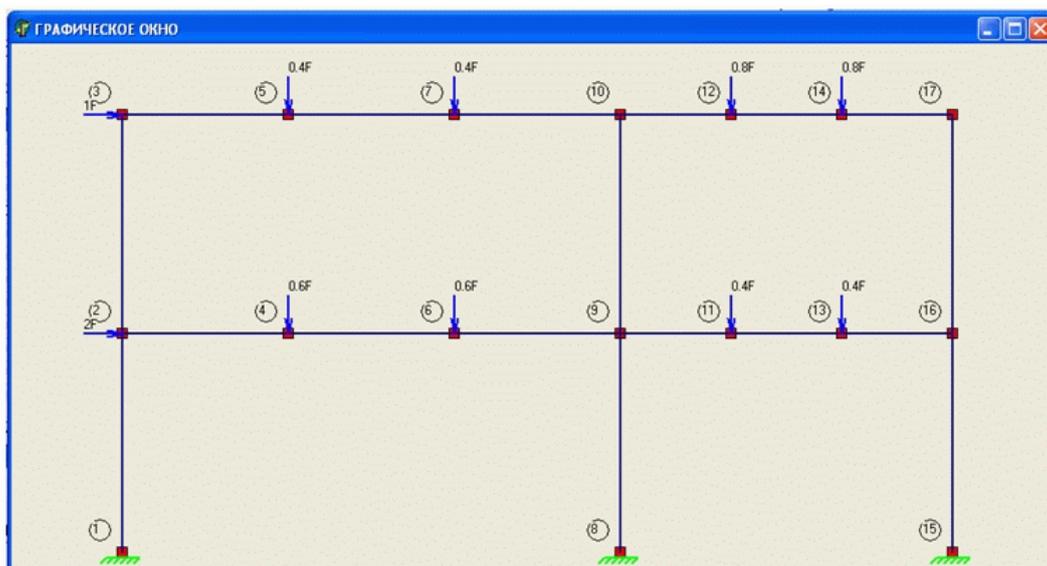


Рис. 1.

В программу вводим последовательно узлы, указывая их координаты, после чего стержни, соединяющие эти узлы с соответствующими характеристиками и условиями закрепления, затем жесткие опоры и параметры нагрузки в необходимые узлы. Внутри программы формируется статическая матрица, формула (2) и (4). После этого производим расчет, на основе симплекс-метода определяем экстремальное значение функции цели формула (5) и получаем значение предельной нагрузки для данной конструкции $F_{\max} = 2,908 \text{ кН}$, распределение внутренних усилий при разрушении эпюры M (рис. 2), N (рис. 3) и Q (рис. 4) а также места образования пластических шарниров на эпюре M (рис. 2).

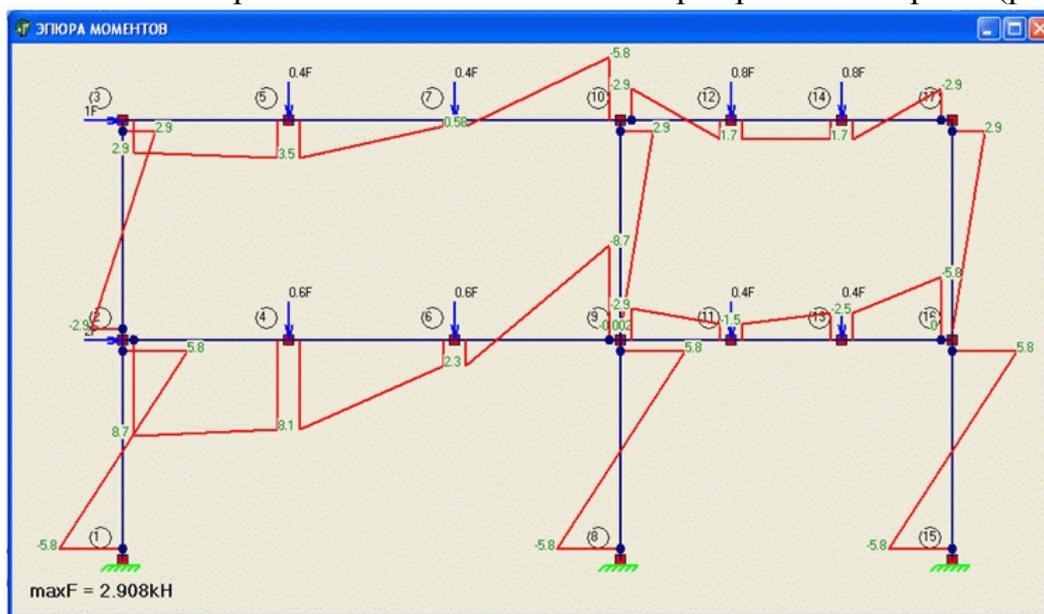


Рис. 2.

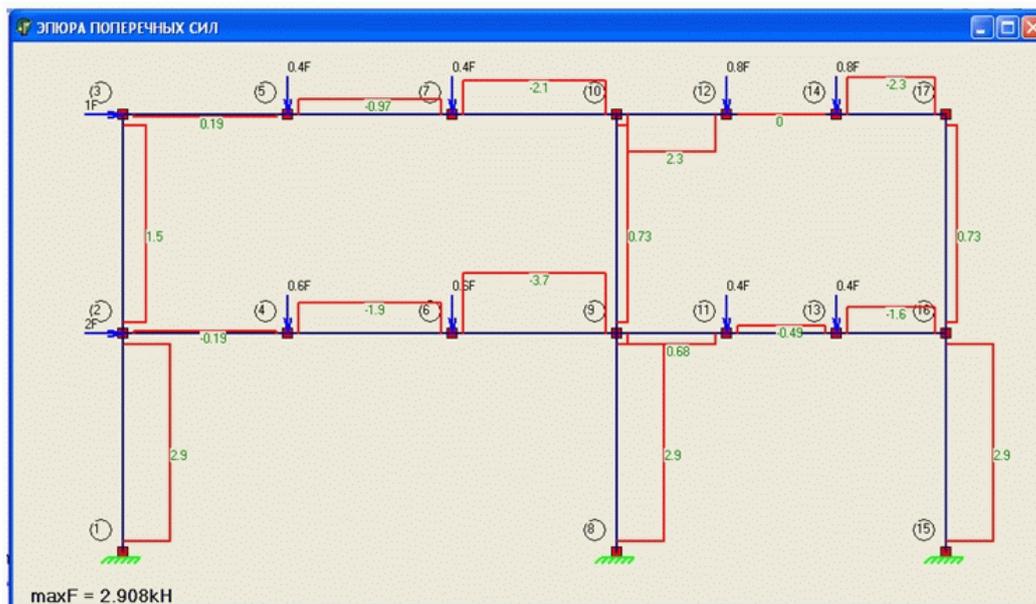


Рис. 3.

Эпюра моментов при разрушении конструкции показана на рис. 2. Там же указаны места образования пластических шарниров их 14. Откуда получаем схему разрушения конструкции (рис. 5). Стоит обратить внимание на то, что достижения предельных моментов в сечениях, то есть образование пластических шарниров, происходит как в элементах первого, так и второго этажей, но схема разрушения получается за счет бокового смещения элементов первого этажа.

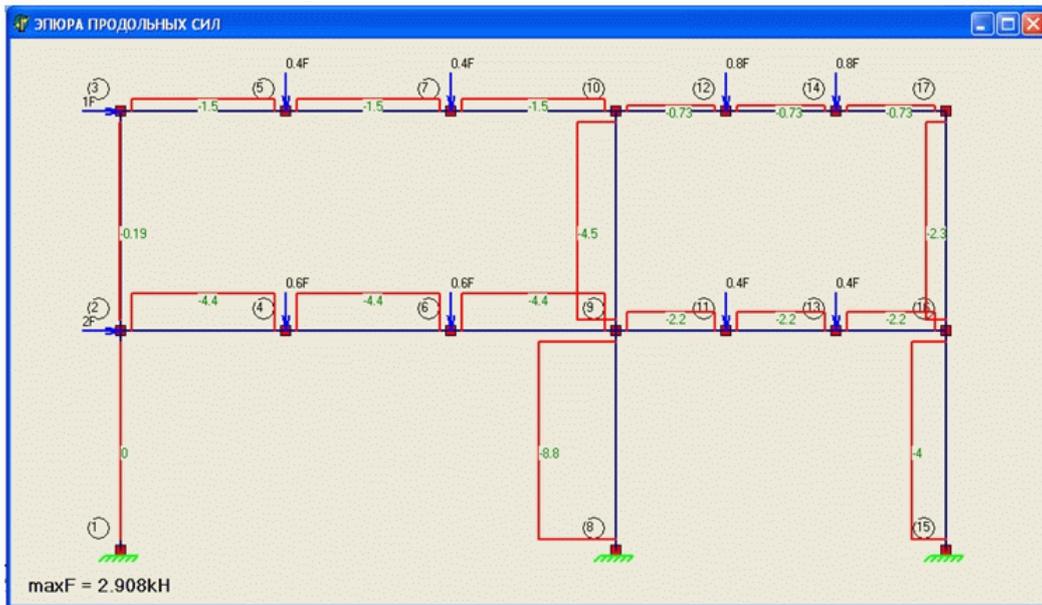


Рис. 4.

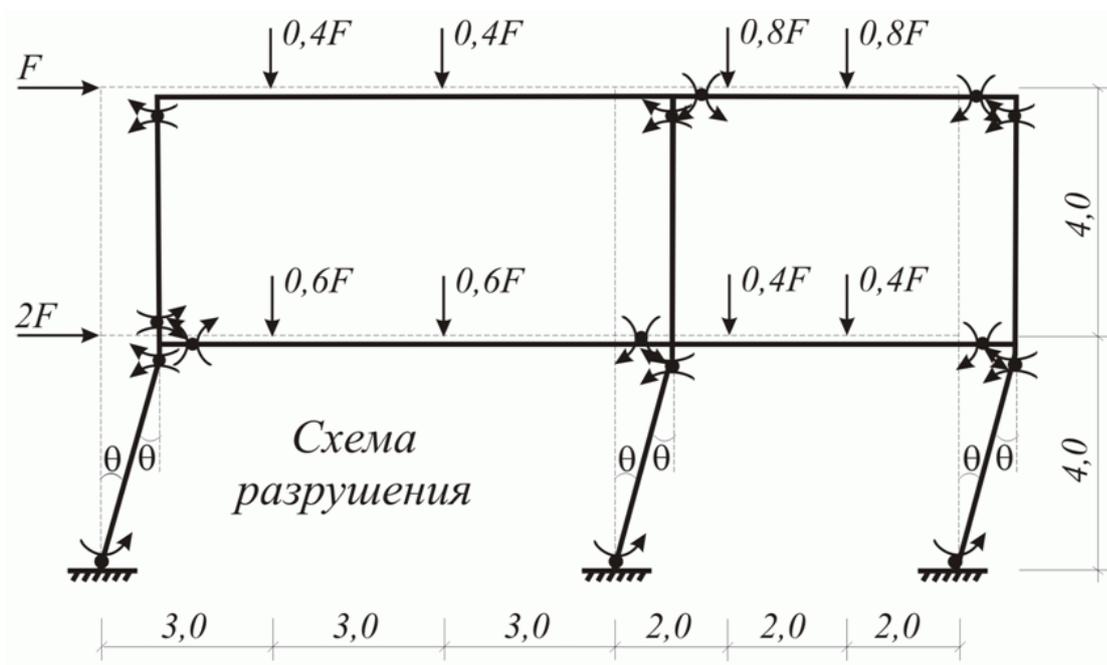


Рис. 5.

Сделаем проверку предельной нагрузки кинематическим способом, рассмотрев данный механизм разрушения, используя кинематическую

теорему А.А. Гвоздева [1]: *Из всех нагрузок, соответствующих различным формам превращения системы в кинематически изменяемую (в механизм), действительная нагрузка имеет минимальное значение.*

Работа внешних сил

$$T = \sum F_k \cdot \Delta_{Fk} = 2F \cdot 6\theta = 12F \cdot \theta \quad (6)$$

Работа внутренних сил

$$U = \sum M_k^0 \cdot \theta_k = 2(M_{1-2}^0 \cdot \theta + M_{8-9}^0 \cdot \theta + M_{15-16}^0 \cdot \theta) = 6 \cdot 5,815\theta \quad (7)$$

Тогда из принципа возможных перемещений $T = U$ получаем

$$F_{\min} = \frac{6 \cdot 5,815\theta}{12\theta} = 2,908 \text{ кН} \quad (8)$$

Получили точно такое же значение критической силы. Но способ перебора механизмов разрушения не дает распределения внутренних усилий, а лишь определяет значение критической силы при соответственном механизме разрушения. Поэтому расчет в статической постановке более целесообразен, а с учетом разбиения конструкции на конечные элементы и применения математического программирования получаем наиболее рациональный метод расчета для ЭВМ, который и был реализован мной в программе «StroiMAX».

Литература

1. Гвоздев А.А. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации. Труды конференции по пластическим деформациям // М.: 1936.
2. Гвоздев А.А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия // Стройиздат, 1939г.
3. Нил Б.Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов: Пер. с англ. Лужина О.В. под ред. Рабиновича И.М. // М.: Стройиздат, 1961г., с. 316.
4. Чирас А.А. Методы программирования при расчете упруго-пластических систем // Л.: Стройиздат, 1969г., с.200.
5. Масленников А.М. Расчет статически неопределимых систем в матричной форме // Л.: Стройиздат, 1970г., с.128.
6. Лященко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З. Линейное и нелинейное программирование // Киев: Изд-во «Вища школа», 1975г., с. 372.
7. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов // Л.: Изд. ЛГУ им. Жданова, 1976г., с. 232.
8. Мразик А., Шкалоуд М., Тохачен М. Расчет и проектирование стальных конструкций с учетом пластических деформаций: Пер. с чешск. Поддубного В.П. под ред. Бельского Г.Е. - М.: Стройиздат, 1986г., с. 456.
9. Раевский А.Н., Белов М.В. Качественный анализ предельного состояния рамных каркасов по прочности с образованием пластических шарниров: Сборник материалов XXXII Всероссийской научно технической конференции, Часть 2. «Актуальные проблемы современного строительства» // Пенза: ПГАСА, Изд. ПГАСА, 25-27 марта 2003г., с. 79-80.
10. Раевский А.Н. Расчет стержневых конструкций в предельном состоянии по прочности и устойчивости: Учебное пособие // Пенза: Изд. ПГУАС, 2004г., с.111.

11. Раевский А.Н., Белов М.В. Определение предельной нагрузки для металлических рамных каркасов из условия прочности и устойчивости: Тезисы докладов Международной научно-технической конференции Часть 1: «Актуальные проблемы современного строительства» // Пенза, ПГУАС, Изд. ПГУАС, 11-15 апреля 2005г., с. 57-59.
12. Белов М.В., Раевский А.Н. Идея метода предельного равновесия в конечно-элементной постановке задачи с использованием линейного программирования / Журнал «Строительная механика и расчет сооружений», №1 – Москва, Изд. ООО «Градация П», 2005г., с. 61 - 65.

СОВРЕМЕННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И САПР-ТЕХНОЛОГИИ В ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТАХ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС АСТРА-НОВА'2005.

**Белостоцкий А.М., *Воронова Г.А., *Потапенко А.Л., *Клепец О.Ю.
(*ЗАО НИЦ СтаДиО, Москва, Россия)*

Рассмотрены новые возможности, реализованные в актуальной версии ПК АСТРА-НОВА'2005, в числе которых: включение сложных конструктивных узлов (опоры, детали, оборудование и др.) в единую динамическую суперэлементную модель с использованием матриц Крейга-Бемптона, учет статического и сейсмического взаимодействия с грунтом для подземных трубопроводов тепловых сетей, магистральных газо- и нефтепроводов, интерфейс с развитыми САПР и расчетными программами.

MODERN NUMERICAL METHODS AND CAD-TECHNOLOGIES IN PIPELINES STRENGTH ANALYSIS. PROGRAM PACKAGE ASTRA-NOVA'2005.

**Belostotsky A.M., *Voronova G.A., *Potapenko A.L., *Klepets O.Y.
(*StadyO Ltd, Moscow, Russia)*

1. Востребованные практикой и отраженные в обязательных к исполнению нормативных положениях задачи комплексного автоматизированного прочностного расчета сложных пространственных разветвленных трубопроводных систем различных отраслей (атомной и тепловой энергетики, нефтехимии и нефтепереработки, тепловых сетей, магистральных газо- и нефтепроводов) решаются с привлечением современных численных методов механики и САПР-технологий. В действующей версии программного комплекса АСТРА-НОВА'2005 [1] вновь реализованы методы и алгоритмы, позволяющие расширить спектр рассматриваемых задач, уточнить или облегчить их решение.

2. В дополнение к «традиционным», страдающим нестрогостью подходам, реализован адекватный учет в единой суперэлементной модели геометрико-жесткостных и инерционных свойств и нагрузочных характеристик сложных конструктивных узлов, работающих совместно с трубопроводами (нестандартные опоры, неортогональные и нерадиальные тройники и развилки, иные сложные детали, арматура, технологическое оборудование и др.), путем построения и использования редуцированных

матриц влияния (Бемптона-Крейга) на основе подробного пространственного массивно-оболочечного конечноэлементного представления этих узлов. При этом в качестве внешних стыковочных принимаются узлы свертки в «жесткий диск» узлов, лежащих на контакте патрубка (штуцера, фланца) и трубопровода.

Суперэлементный алгоритм основан на непосредственной конденсации уравнений движения и идеологически близок методу динамического синтеза подконструкций. Численное решение результирующей редуцированной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений находится по модифицированным неявным разностным схемам типа Ньюмарка с использованием значимой части собственных частот $[\Omega] = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ и форм $[\Phi]$ парциальных подсистем:

$$[\bar{M}]\{u_b\} + [\bar{C}]\{\dot{u}_b\} + [\bar{K}]\{u_b\} + \sum_0^t [G][\Omega] \int_0^t \text{SIN}[\Omega(t - \tau)][G]^T \{u_b(\tau)\} d\tau =$$

$$= \sum (\{\bar{F}(t)\} - [G][\Omega]^2 \{q(t)\}),$$

$$\{u_b(0)\} = \{u_{0b}\}, \{\dot{u}_b(0)\} = \{v_{0b}\}$$

$$[\bar{M}] = [M_{bb}] - [M_{bi}][M_{ii}]^{-1}[M_{ib}], [\bar{K}] = [K_{bb}] - [K_{bi}][K_{ii}]^{-1}[K_{ib}],$$

$$\{\bar{F}(t)\} = \{F_b(t)\} - [M_{bi}][M_{ii}]^{-1}\{F_i(t)\}, [G] = [K_{bi}][\Phi][\Omega]^{-2} - [M_{bi}][\Phi]$$

$$\{q\} = \{q(t)\} = \text{COS}[\Omega t][\Phi]^T [M_{ii}]\{\bar{u}_{0i}\} + [\Omega]^{-1} \text{SIN}[\Omega t][\Phi]^T [M_{ii}]\{v_{0i}\} +$$

$$+ [\Omega]^{-1} \text{SIN}[\Omega t] * [\Phi]^T \{F_i(t)\},$$

$$\{\bar{u}_{0i}\} = \{u_{0i}\} + [K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]\{u_{0b}\}, \{\bar{v}_{0i}\} = \{v_{0i}\} + [K_{ii}]^{-1}[K_{ib}]\{v_{0b}\}.$$

Ранее подобный подход с использованием ПК СТАДИО был успешно применен при суперэлементном анализе динамики блока приводов в составе многокомпонентной системы международной космической станции «Альфа» [2]. В [4] приведены показательные примеры расчета тонкостенного емкостного оборудования, для которого успешно применена как процедура интеграции в трубопроводную систему, так и уточненного конечноэлементного анализа НДС и прочности самого оборудования. В ближайшей перспективе – создание и наполнение «базы данных» типовых элементов трубопроводов, содержащие редуцированные матрицы влияния и вектора нагрузок.

3. Взаимодействие труб с грунтовым массивом для подземных трубопроводов тепловых сетей (бесканальной прокладки с пенополиуретановой изоляцией и полиэтиленовой оболочкой) и магистральных нефте- и газопроводов (подземных и в насыпях) рассматривается в рамках разработанной «инженерной» методики, базирующейся как на мировом опыте, так и на собственных результатах трехмерного конечноэлементного анализа с использованием нелинейной реологической модели грунта [2] (рис.1).

Сетка стержневых элементов (сечений), по необходимости существенно более густая, чем на надземной части, генерируется автоматически с необходимым дополнительным сгущением в зонах «возмущения»: тройников и развилки, поворотов, выходов на поверхность и др. Изоляция, компенсирующие подушки (при их наличии) и грунт моделируются распределенными по длине опорами, жесткость которых нелинейно зависит от величины и направления перемещений. На каждом шаге итераций эти эквивалентные «распределенные» опоры рассматриваются как упруго-подвижные с тремя линейно-упругими связями по локальным осям трубы: продольной, горизонтальной поперечной и вертикальной. Итерационная процедура завершается при установлении слабо меняющихся перемещений по направлению связей.

Реализованный алгоритм показал хорошую (как правило, до 20 итераций) сходимости для произвольных подземных трубопроводов, но не всегда обеспечивает установление решения для «смешанных» подземно-надземных трубопроводов как вследствие жесткостной контрастности, так и существенно различных вычислительных характеристик нелинейных опор, моделирующих взаимодействие с грунтом (подземные), и опор трения (надземные).

К сожалению, реальный трехмерный нелинейный механизм взаимодействия столь сложен, сильно зависит от не всегда известной истории нагружения и не полностью математически формализован (существует несколько конкурирующих моделей грунтов, оперирующих различным набором исходных параметров состояния и дающих, в ряде случаев, весьма отличные друг от друга результаты), что уложить все многообразие реальных процессов в «прокрустово ложе» упрощенной инженерной методики, используемой при массовых проектных расчетах – задача столь же благородная, сколь и не до конца достижимая.

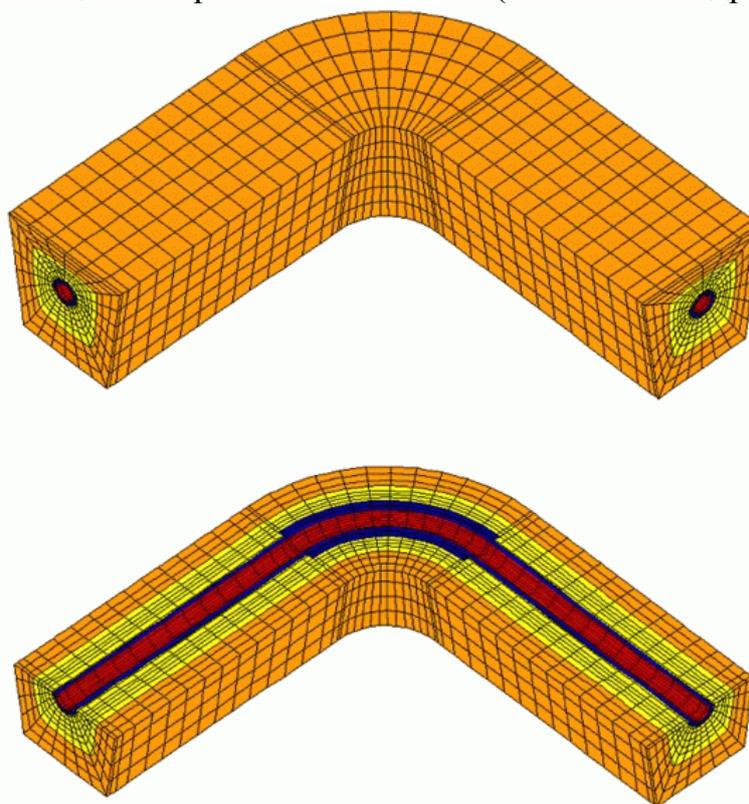
4. Решена задача поиска коллизий – пересечений, касаний и недопустимо близких расстояний (зазоров) труб. При этом учтена специфика моделирования трубопроводных систем (в частности, тройниковых соединений и патрубковых зон оборудования), что исключает из рассмотрения ложные коллизии.

Эффективная программная реализация и визуализация зон коллизий позволяет не только избежать не обнаруживаемых при массовом проектировании ошибок в расчетных моделях сильно разветвленных и (или) протяженных систем трубопроводов (по нашим данным, до 80-90% из них ранее содержало такие коллизии, см. рис.2), но и дополнить результирующие нормативные оценки статической, циклической и динамической прочности необходимыми критериями допустимости перемещений. Эта возможность является прерогативой именно программ расчета НДС, несмотря на наличие на рынке как специализированных

программ поиска коллизий, так и соответствующих функций в современных САПР.

Разработанный алгоритм естественным образом может и должен быть развит на поиск коллизий «труба-оборудование», «труба -строительная конструкция» и т.п.

5. Рассматриваются также проблемы (основная из которых – необходимость «интеллектуальной» доводки расчетных моделей, импортированной из других систем) и особенности реализации интерфейса с развитыми программными комплексами расчета трубопроводов (СТАРТ, CAESAR II) и специализированными САПР (CADWorx и др.)



Расчетное деформированное состояние при температурном нагружении

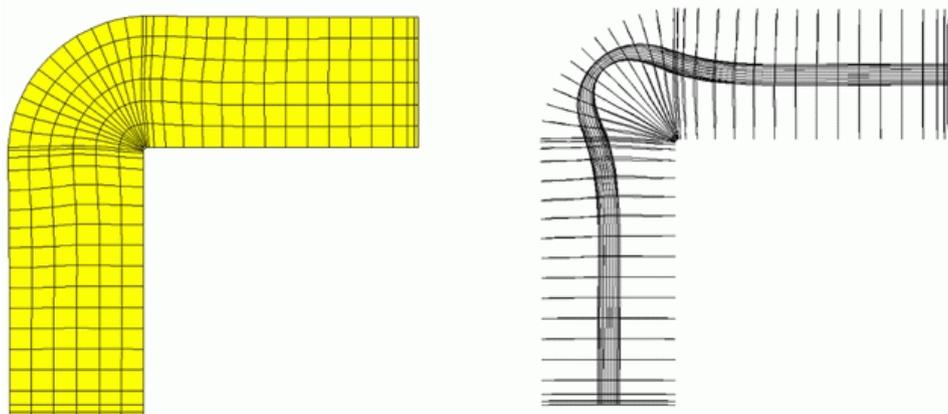


Рис.1. Трехмерная нелинейная конечноэлементная СТАДИО-модель системы «трубопровод – изоляция – компенсирующая подушка – грунт в траншее» (2001 г.)

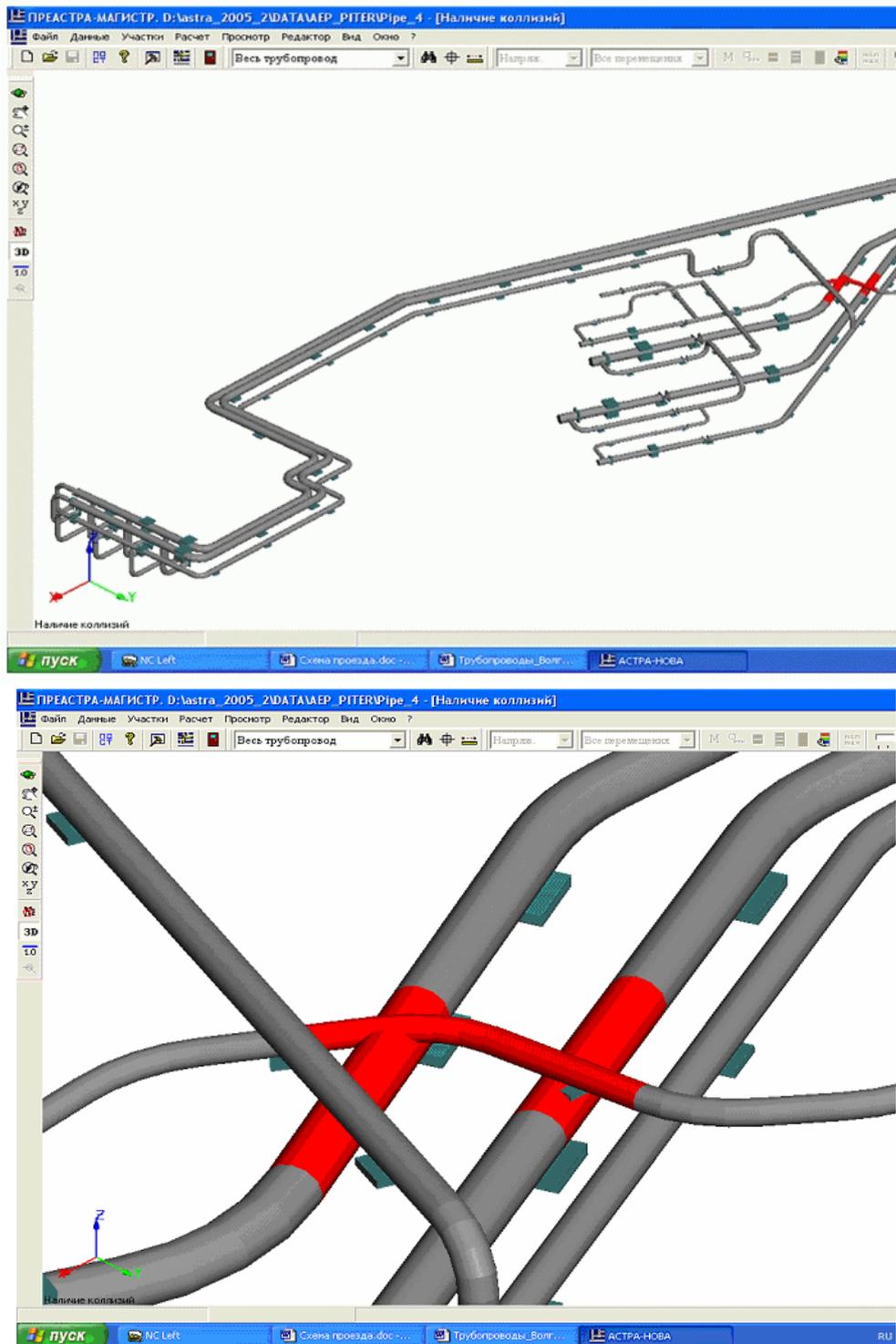


Рис.2. Определение коллизий в модели магистрального трубопровода (2004 г.)

6. Приводятся показательные примеры построения моделей и практических прочностных расчетов по ПК АСТРА-НОВА'2005 сложных трубопроводных систем, выполненных с применением изложенных разработок в ряде проектных и научно-исследовательских фирм.

Литература

1. Белостоцкий А.М., Воронова Г.А., Потапенко А.Л. «Семейство» программ АСТРА-НОВА для автоматизированных нормативно регламентированных расчетов на прочность трубопроводных систем атомных и тепловых установок и нефтехимических производств. Труды XVIII Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». ВЕМ&FEM-2000, С-Петербург, 2000, с. 72-76.
2. Аронзон А.Б., Белостоцкий А.М., Геча В.Я., Канунникова Е.А., Чамов И.К. Математическое моделирование динамики МКС «Альфа» с учетом упруго-инерционных характеристик несущих конструкций, солнечных батарей и больших перемещений механизмов Труды XVIII Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». ВЕМ&FEM-2000, С-Петербург, 2000, с. 23-28.
3. Белостоцкий А.М., Белый М.В., Рассказов Л.Н. Численные исследования напряженно-деформированного состояния систем «сооружение-основание» с учетом нелинейных реологических свойств грунтов. Труды XX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». ВЕМ&FEM-2003, С-Петербург, 2003.
4. Белостоцкий А.М., Мсхалая И.Ж., Пеньковой С.Б. КОМПЛЕКСНЫЙ РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОЧНОСТИ ОБОРУДОВАНИЯ АЭС. Труды XXI Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». ВЕМ&FEM-2005, С-Петербург, 2005.
5. SEN TC 107 (Draft Standart 12/96): Design, Calculation & Installation for Pre-insulated Bonded Pipes for District Heating.

КОМПЛЕКСНЫЙ РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОЧНОСТИ ОБОРУДОВАНИЯ АЭС

**Белостоцкий А.М., **Мсхалая И.Ж., **Пеньковой С.Б.
(*ЗАО НИЦ СтаДиО, Москва, Россия, **МГСУ, Москва, Россия)*

Предлагается конечно(супер)элементный подход для статических и динамических расчетов емкостного, гидромеханического и пр. оборудования АЭС с учетом значимых факторов, реализованный в ПК СТАДИО'2005. Делается подтвержденный реальной расчетной практикой вывод об эффективности комплексного анализа сложных пространственных оболочечно-стержневых систем в рамках единых моделей, учитывающих все зоны, определяющие прочность оборудования, и эффекты взаимодействия с присоединенными трубопроводами и (или) жидкостью.

COMPLEX STRESS-STRAIN CALCULATION AND STRENGT ANALYSIS OF NPP EQUIPMENT

**Belostotsky A.M., **Mshalaya I.G., **Penkovoii S.B.
(*StadyO Ltd, Moscow, Russia, **MGSU, Moscow, Russia)*

1. В отечественной практике статических и динамических расчетов напряженно-деформированного состояния (НДС) и прочности

оборудования АЭС (гидромеханического, емкостного и др.), к которому обоснованно предъявляются повышенные нормативные требования, до сего дня превалируют традиционные подходы «разделяй и властвуй». Даже при использовании МКЭ реальная комбинированная система емкостного оборудования «обечайка – крышки (днища) – патрубковые зоны – внутрикорпусные устройства – опорные стойки» разбивается на подсистемы, определяющие прочность всей конструкции, каждая из которых рассматривается отдельно. Понятно, что такие подходы страдают неточностью (особенно для динамических задач) и игнорируют современные достижения численных методов решения задач большой размерности.

Как показывает анализ, для «характерного» тонкостенного оборудования единая пространственная оболочечно-стержневая конечноэлементная модель, с необходимой подробностью воспроизводящая геометрию и НДС в зонах краевых эффектов, должна содержать до 25000-100000 узлов (до 150000-600000 степеней свободы). Задача вполне решаемая с вычислительной точки зрения, а при наличии эффективных сеточных генераторов и визуализаторов – еще и во вполне «комфортном» пользовательском режиме.

2. Матричное уравнение движения геометрически линейной системы (малые перемещения и деформации), взаимодействующей с несжимаемым водным бассейном/резервуаром, в форме метода перемещений

$$([M] + [M]_w)\{u(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + ([K] + [K_G])\{u(t)\} = \{F(t)\} + \{R(u, \dot{u})\} \quad (1)$$

$$[M]_w = \frac{1}{\rho_w} [S]^T [H]^{-1} [S], \quad S \in S_{sw} \cup S_{fw} \quad (2)$$

учитывает кинематические граничные условия и доопределяется начальными условиями (из решения статической задачи при $t=t_0$). Здесь $[M]$, $[C]$, $[K]$ и $[K_G]$ – симметричные блочно-редкозаполненные матрицы масс, демпфирования, линейной (начальной) и геометрической жесткости конечноэлементной модели (КЭМ) конструкции, $[M]_w$ и $[H]$ – матрицы присоединенных масс и акустической «жесткости» водного бассейна, t – время, «точка» означает дифференцирование по времени, $\{F(t)\}$ – вектор заданных статических и динамических нагрузок, $\{R(u, \dot{u})\}$ – вектор псевдонагрузок, моделирующий физически нелинейные эффекты, $\{u(t)\}$ – искомый вектор обобщенных динамических перемещений КЭМ. Приведенная общая динамическая постановка естественным образом сводится к важным частным задачам – статической, на собственные значения (собственные частоты и формы колебаний и критические числа и формы потери начальной устойчивости) и спектральной формулировки динамических задач – при соответствующем виде нагрузок и решений путем обнуления незначимых матриц.

Матрица присоединенных масс $[M]_w$ определяется из решения трехмерных задач гидродинамики для бассейна-резервуара с несжимаемой жидкостью (водой), моделируемого объемными изопараметрическими конечными элементами [1]. Строгий подход требует совпадения сетки узлов на границе контакта бассейна и обшивки затвора (резервуара и обечайки).

3. По актуальной версии ПК СТАДИО [1] выполнен цикл статических, на собственные значения и сейсмических (по линейно-спектральной теории) расчетов разнообразного оборудования АЭС «Куданкулам» (Индия):

- краны, эстакады с таями, сороудерживающие решетки (стержневые модели);

- ремонтные затворы (плоские скользящие с усилением ригелями, поверхностные и глубинные, одно-, двух- и трехсекционные) системы тепловодоснабжения с учетом влияния водных бассейнов (узлов сетки для бассейна до 30 000, для секции затвора – до 5 000, см. рис.1,2);

- воздухосборники различной емкости («цилиндрическая обечайка - эллиптические крышка – эллиптическое днище – люк – патрубки – опорные стойки») системы приготовления технологического воздуха (рис.3,4, узлов сетки оболочечных КЭ – до 25 000);

- баки растворов тринатрийфосфата («цилиндрическая обечайка – плоская крышка с люком – плоское днище – патрубки – опорные стойки») системы обеспечения водно-химического режима промконтуров (рис.3, узлов и КЭ – до 20 000).

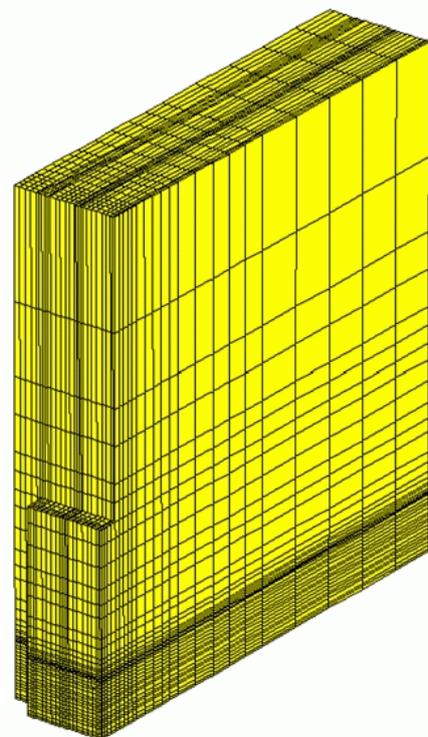
При построении КЭМ использовались возможности вновь разработанных генераторов сеток и конверторов из других программ.

4. В ходе исследований модифицирован и программно реализован в ПК СТАДИО алгоритм решения частичной проблемы собственных значений для эффективного учета заполненной матрицы присоединенных масс. Сопоставление результатов показывает, что влияние водного бассейна наиболее значимо сказывается на 1-й «общесистемной» форме колебаний нижней секции (снижение по отношению к «родственной» без воды – почти в 4 раза), меньше – на 2-й общесистемной (в 1,6 раза) и далее уменьшается (с 1,5 до 1,2 раз) для высших локальных и многоволновых форм. Эти расчетные данные соответствуют феноменологии, заложенной в принятую модель матрицы присоединенных масс бассейна, связывающей все «смоченные» узлы КЭМ обшивки, и отличаются от различных упрощенных несвязанных схем с присоединенными массами, при которых собственные частоты колебаний глубинного «мокрого» затвора падают неоправданно и примерно одинаково по всем формам.

Численными экспериментами также установлено, что сетку узлов на обшивке для определения матрицы присоединенной масс можно существенно разредить по сравнению таковой, необходимой для

воспроизведения больших градиентов напряжений в зонах краевых эффектов – до 3-4 слоев КЭ на «ячейку». Это позволяет многократно снизить требуемые вычислительные ресурсы при решении задач гидродинамики для определения $[M]_w$.

Общий вид бассейна (со стороны затвора и плоскости симметрии)



Зона затвора

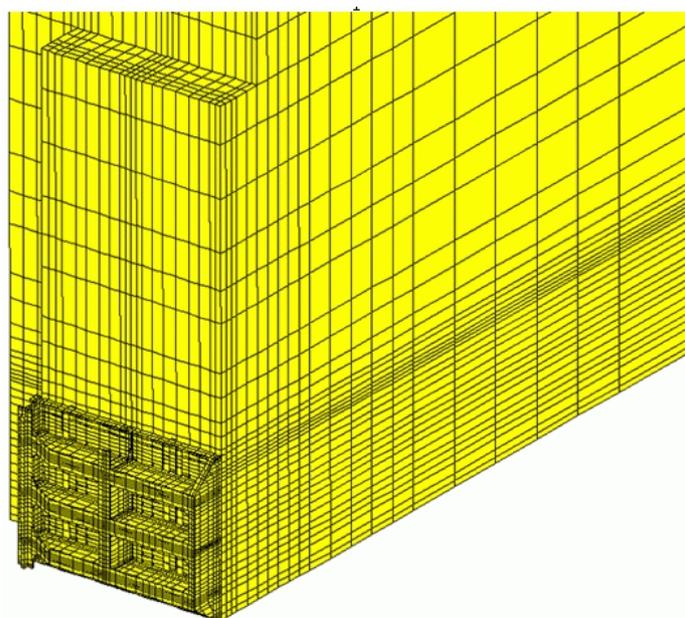
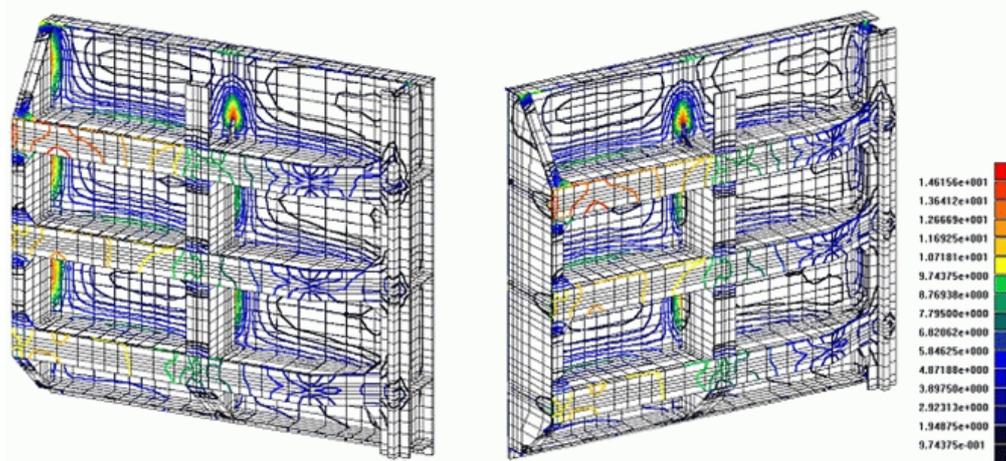
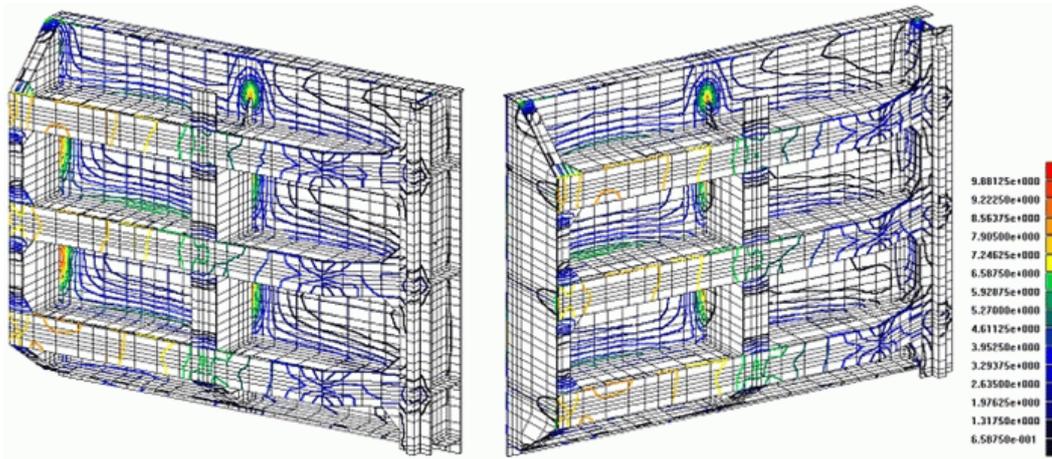


Рис. 1. Затвор 5,0-6,6-16,4 110КУ, нижняя секция. Конечноэлементная «гидродинамическая» модель бассейна с учетом симметрии.

Верхняя секция ($\sigma_{max}=15,6\text{МПа}$)



Средняя секция ($\sigma_{max}=10,7\text{МПа}$)



Нижняя секция ($\sigma_{max}=17,5\text{МПа}$)

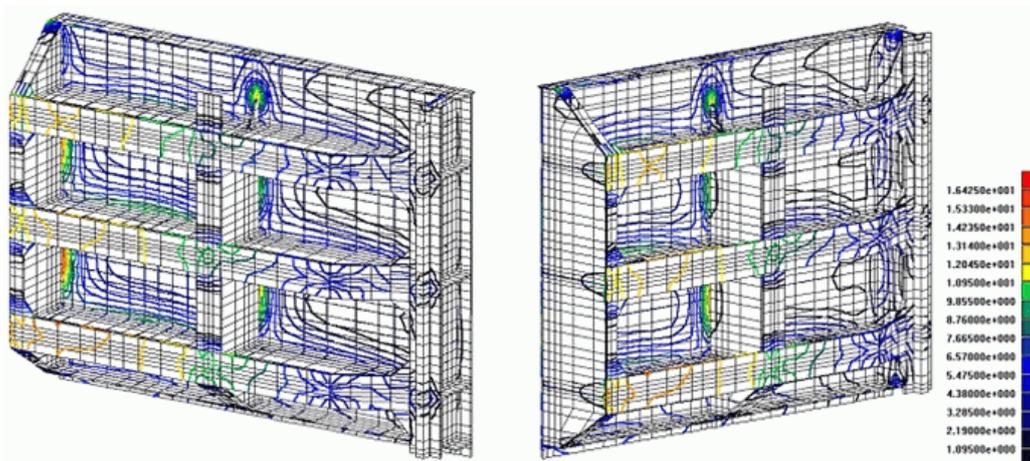
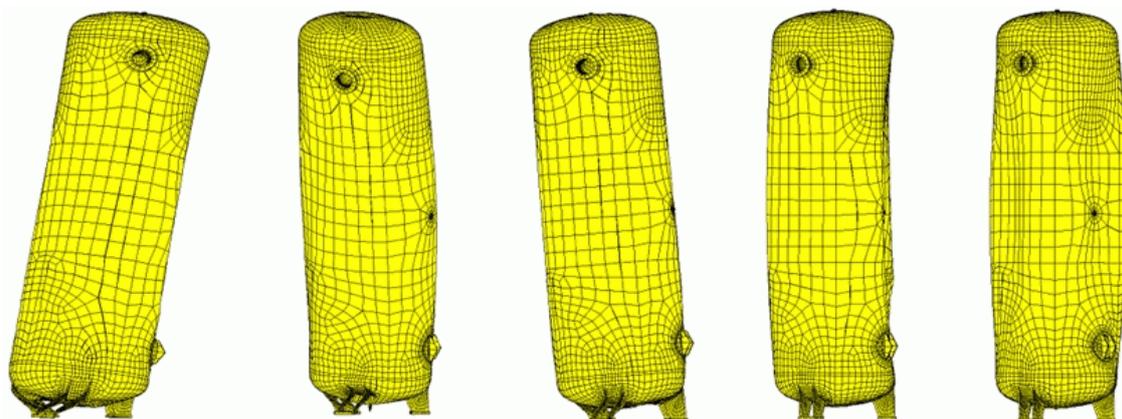


Рис. 2. Затвор 5,0-6,6-16,4 110КУ. Горизонтальное сейсмическое воздействие (7 баллов). Распределение горизонтальных нормальных напряжений.

5. Реальной расчетной практикой подтвержден вывод об эффективности статического и динамического анализа сложных пространственных оболочечно-стержневых систем оборудования АЭС в рамках единых конечно(супер)элементных моделей, учитывающих все критически важные зоны, определяющие прочность конструкций, и эффекты взаимодействия с жидкостью (рис.1-4). В рамках данного подхода естественным является также построение и использование редуцированных матриц жесткости и масс (Бемптона-Крейга) для адекватного учета в единой суперэлементной модели геометрико-жесткостных и инерционных свойств оборудования, работающих совместно с трубопроводами [2].

Воздухосборник 171КУ

$$f_1=16,94\text{Гц} \quad f_2=17,13\text{Гц} \quad f_3=18,76\text{Гц} \quad f_4=29,48\text{Гц} \quad f_5=36,16\text{Гц}$$



Бак раствора 179КУ

$$f_1=24,73\text{Гц} \quad f_2=25,36\text{Гц} \quad f_3=28,61\text{Гц} \quad f_4=34,71\text{Гц} \quad f_5=40,69\text{Гц}$$

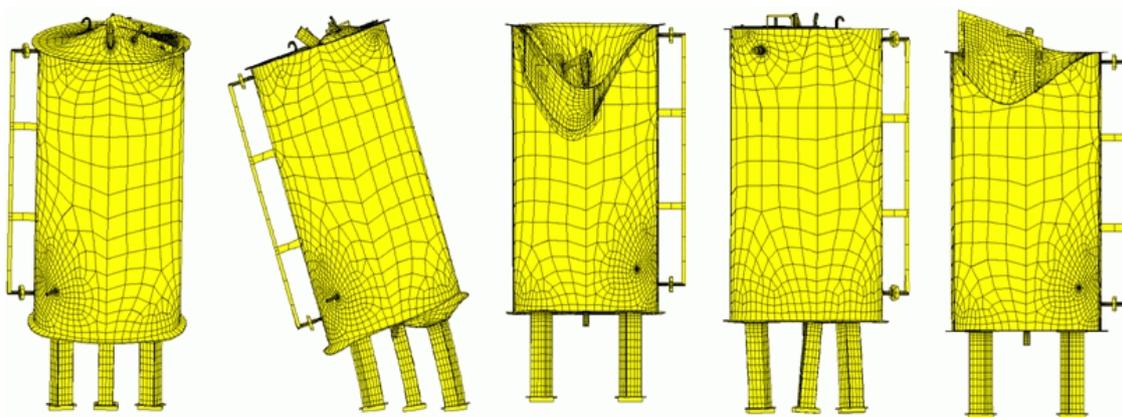
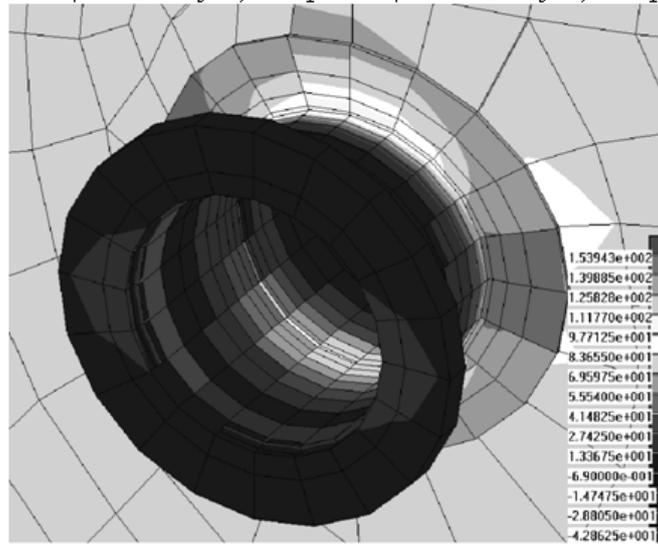
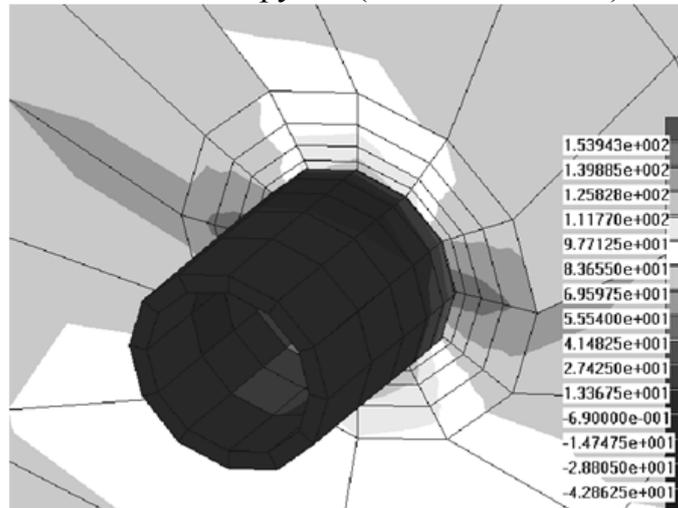


Рис. 3. Низшие собственные формы колебаний воздухосборника 171КУ и бака раствора 179КУ

Средний (вход воздуха) и верхний (выход воздуха) патрубки



Нижний патрубок (слив конденсата)



Зона опоры

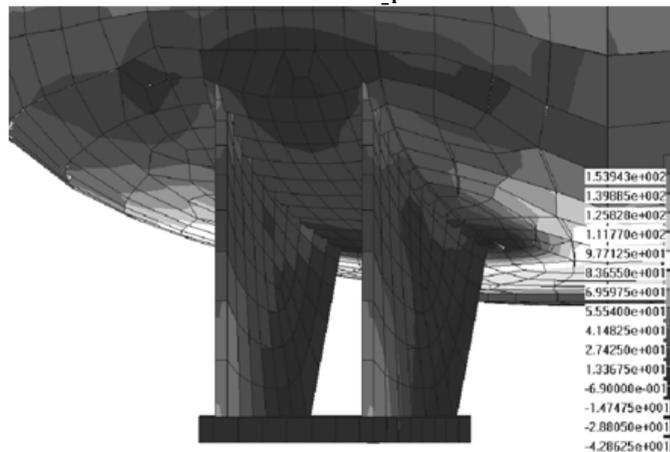


Рис. 4. Воздухосборник 171КУ. Особое сочетание нагрузок (вес+давление+сеймика).

Зоны краевых эффектов. Изополя главных расчетных напряжений σ_1

Литература

1. Белостоцкий А.М., Белый М.В. Суперэлементные алгоритмы решения пространственных нелинейных статических и динамических задач большой размерности. Реализация в программном комплексе СТАДИО и опыт расчетных исследований. Труды XVIII Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». ВЕМ&FEM-2000, С-Петербург, 2000, с. 65-69.
2. Белостоцкий А.М., Воронова Г.А., Потапенко А.Л., Клепец О.Ю. Современные численные методы и САПР-технологии в прочностных расчетах трубопроводных систем. Программный комплекс АСТРА-НОВА'2005. Труды XXI Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов». ВЕМ&FEM-2005, С-Петербург, 2005.

РАСЧЕТ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ КОНСОЛИ

*Белубекян М.В., Саноян Ю.Г.
(Институт Механики НАН РА)*

Приводится расчет изгиба консольной пластины, находящейся при симметричных относительно ее оси следующих воздействиях: равномерно распределенной нагрузки по площади некоторого прямоугольника, а так же произвольных моментов сил и поперечных сил приложенных к боковым не заземленным граням консоли.

CALCULATION OF CANTILEVER PLATE BENDING

*Belubekyan M.W., Sanoyan Yu.G.
(Institute of Mechanics of NAS Armenia, Yerevan)*

Calculation of deflection is obtained for rectangular cantilever plates subjected to loads simmetrical to cantilever axe: a) uniform normal pressure over the some rectangular on the upper surface of the plate, and b) any distributed bending moment and shearing forces and along the free edges.

Математически строгая теория расчета консольной пластины, представляет собой одну из труднейших математических задач, для которой до сих пор получены решения только для отдельных простейших случаев приложения нагрузки к поверхности консоли, либо к одной из ее граней [1-3].

В настоящей работе представлен расчет пластины-консоли для более общего случая. Пластина находится под воздействием следующих, симметричных относительно оси симметрии консоли нагрузок: равномерная нагрузка интенсивности $Q(x,y)$ приложена к прямоугольному участку поверхности пластины, к стороне противоположной закрепленной стороне приложены момент $M_x(y)$ и поперечная сила $N_x(y)$, а к двум противоположным боковым граням равные моменты $M_y(x)$ и равные поперечные силы $N_y(x)$.

Упругие характеристики консоли определены на основе теории Киргофа с помощью бигармонического уравнения с правой частью,

которое, для прямоугольной системы координат с осью x , направленной вдоль оси симметрии консоли, и осью y вдоль заземленной грани, имеет вид:

$$\Delta^2 w(x, y) = Q(x, y) / D \quad (1)$$

и решается для краевых условий

$$w(0, y) = 0, \quad \partial w(x, y) / \partial x|_{x=0} = 0, \quad -d \leq y \leq d \quad (2)$$

$$-D \left(\partial^2 w(x, y) / \partial x^2 \Big|_{x=a} + \nu \partial^2 w(x, y) / \partial y^2 \Big|_{x=a} \right) = M_x(y), \quad -d \leq y \leq d \quad (3)$$

$$-D \left(\partial^3 w(x, y) / \partial x^3 \Big|_{x=a} + (2 - \nu) \partial^3 w(x, y) / \partial x \partial y^2 \Big|_{x=a} \right) = N_x(y), \quad -d \leq y \leq d \quad (4)$$

$$-D \left(\partial^2 w(x, y) / \partial y^2 \Big|_{y=\pm d} + \nu \partial^2 w(x, y) / \partial x^2 \Big|_{y=\pm d} \right) = M_y(x), \quad -a \leq x \leq a \quad (5)$$

$$-D \left(\partial^3 w(x, y) / \partial y^3 \Big|_{y=\pm d} + (2 - \nu) \partial^3 w(x, y) / \partial y \partial x^2 \Big|_{y=\pm d} \right) = N_y(x), \quad -a \leq x \leq a \quad (6)$$

где a - размер пластины вдоль оси x , $2d$ - вдоль оси y , D - изгибная жесткость, ν - коэффициент Пуассона, Δ - оператор Лапласа.

Исходя из краевых условий решение найдено разложением функции перемещения в ряд Фурье в следующем виде:

$$w(x, y) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{ch(\lambda_n x)}{ch(\lambda_n a)} \left[A_n (th(\lambda_n x) - g_n^1 x) + B_n x (th(\lambda_n x) - g_n^2) + E_n th(\lambda_n x) \right] \cos(\lambda_n y) + \right. \\ & \left. \frac{ch(\chi_n y)}{ch(\chi_n d)} \left[C_n (y \chi_n (\nu - 1) th(\chi_n d) th(\chi_n y) + \chi_n d (1 - \nu) - (1 + \nu) th(\chi_n d)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + D_n \right] \sin(\chi_n x) \right\} + F_3 x^3 + F_2 x^2 + F_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n^0}{\chi_n^4} \sin(\chi_n x) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{n,m}}{(\chi_m^2 + \lambda_n^2)^2} \sin(\chi_m x) \cos(\lambda_n y) \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$g_n^1 = \frac{\lambda_n a (\nu - 1) th(\lambda_n a)}{\lambda_n a (\nu - 1) - 2 th(\lambda_n a)}, \quad g_n^2 = \frac{\lambda_n a (\nu - 1) th(\lambda_n a) - 2}{\lambda_n a (\nu - 1) - 2 th(\lambda_n a)},$$

$$\lambda_n = \pi n / d, \quad \chi_n = \pi (2n - 1) / 2a$$

В этом решении полином и первая сумма являются решением соответствующего однородного уравнения, а последние две суммы представляют частное решение уравнения (1), при этом функция нагрузки разложена в ряд Фурье. Коэффициенты при неизвестных подобраны

таким образом, что функция $w(x,y)$ удовлетворяет условию симметрии относительно оси y , тождественна равна нулю при $x=0$ и позволяет непосредственно определить неизвестные коэффициенты разложения E_n и D_n из условий (4) и (6). Последнее обстоятельство позволяет снизить число неизвестных коэффициентов в редуцированной линейной системе а уравнений до $3N$ (N -число членов разложения в ряд Фурье).

Решение системы уравнений для определения неизвестных коэффициентов ряда Фурье, построение графиков и таблиц осуществлялось с помощью систем компьютерной математики. В приведенной ниже таблице приведены результаты расчета прогибов свободного края прямоугольной консоли (противоположного заземленному краю) и, результаты аналогичных вычислений приведенных в работе [4], под действием равномерной нагрузки приложенной ко всей ее поверхности, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона равном 0.3.

y/a	0.00	0.125	0.250	0.375	0.500
Chang	$w=0.13102q(2a)^4/D$	0.13091	0.13056	0.12998	0.12933
F.E.M	0.12905	0.12892	0.12851	0.12788	0.12708
Lee, Lam	0.1270	0.1268	0.1264	0.1258	0.1252
present	0.129076	0.128948	0.128571	0.127976	0.12723

Полученное общее решение может быть использовано в задачах по изгибу пластин, в которых перемещения вдоль ее плоскости меняются по толщине. Во многих случаях изгиб в такой пластине может быть имитирован корректировкой его упругих характеристик и приложением к краям соответствующих моментов сил и поперечных сил. Ниже приведены два примера решения подобных задач для консольных пластин.

1.Изгиб консоли в температурном поле. Температура в пластине одинакова вдоль ее плоскости, но линейно изменяется по толщине. В работе [5] показано, что для определения изгиба пластин по формуле (7) достаточно в краевых условиях (3-6) моменты сил и поперечные силы приравнять к следующим значениям:

$$M_x(y)=\alpha(1+\nu)\Delta\vartheta/2h, N_x(y)=0, M_y(x)=\alpha(1+\nu)\Delta\vartheta/2h, N_y(x)=0,$$

где α -коэффициент линейного расширения, $\Delta\vartheta$ - разность температур между верхней и нижней поверхностями пластины, h - ее толщина. Типичные графики зависимостей изгиба оси симметрии консоли и ее боковых граней показаны на рис.1.

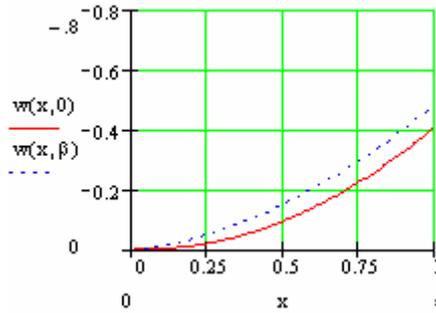


Рис.1.

2. Биморфная пластина в электрическом поле, приложенном перпендикулярно ее поверхности. Эквивалентные упругие характеристики пластины в этом случае [6] равны:

$$D = \frac{2h^3}{3} \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right), \nu = \left(C_{12} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right) \left(C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} \right)^{-1}, S = e_{31} \left(1 - \frac{C_{13}}{C_{33}} \right),$$

а краевые условия необходимо задать в следующем виде:

$$M_x(y) = \beta, N_x(y) = 0, M_y(x) = \beta, N_y(x) = 0,$$

$$\text{где } \beta = \frac{h_1 h_2 a^2}{2(h_1 + h_2) D} S E_0$$

h_1 - толщина верхнего слоя, h_2 - толщина нижнего слоя, E_0 - напряженность электрического поля. Графики зависимостей изгиба оси симметрии биморфной консоли и ее боковых граней показаны на рис. 2. Кривые рассчитаны для пластины с одинаковыми толщинами составляющих ее слоев при общей толщине 0.1 mm и 1 mm и моментов приложенных к ее граням $M = 0.1 \text{ kg}$.

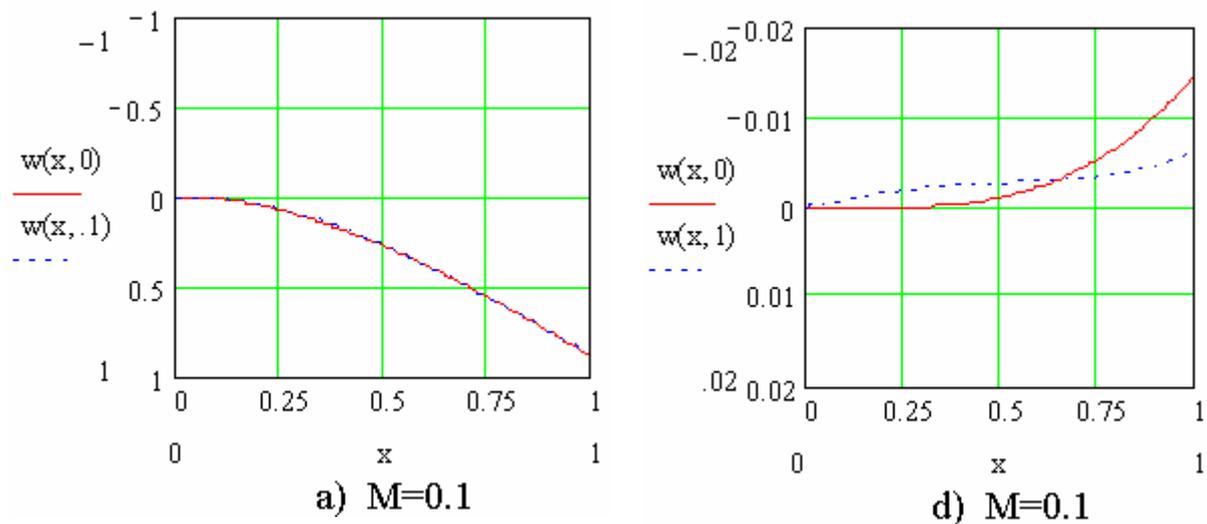


Рис.2.

Литература

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М. Наука, 1987. с. 360.
2. Баблоян А.А., Мкртчян А.М. Решение плоской смешанной задачи для прямоугольника. Изв. АН Арм ССР. Механика. т.25, No. 2, с.3-14.
3. Белубекян М.В., Саноян Ю.Г. Расчет изгиба пластины-консоли. Изв. НАН Армении, Механика 57, No. 3, стр.11-17.
4. Lee P.C.Y., Lam C.S. Stresses in Rectangular Cantilever Cristal Plates under Transverse Loading. Int. Solids Structures. Vol.19, No.1, pp.55-66, 1983.
5. Belubekyan M., K.Ghazaryan, Yu.Sanoyan. Thermalelastik Plate Bending under of Temperature along its Thickness. Proceeding of The Sixth International Congress on Thermal Stresses, TS2005 26-29 May 2005, Vienna University of Texnology, Vienna, Austria.
6. Sargsyan M., Belubekyan M., Sanoyan Yu. Tense Distorted Condition of Bimorphous Piezoelectric Console Plate. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium Technische Universitat Ilmenau 19.-23. September 2005.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО И ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ АРМОГРУНТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Бережной Д.В., Малкин С.А.

(Казанский государственный университет, Казань, Россия)

INVESTIGATION OF STRESS-STRAIN AND LIMITED STATE OF REINFORCED GROUND STRUCTURES

Berezhnoi D.V., Malkin S.A.

(Kazan State University, Kazan, Russia)

Представлена методика расчета напряженно-деформированного и предельного состояния грунтовых массивов, армированных высокопрочными геотекстилями, на основе МКЭ. Исследовано влияние механических характеристик геотекстилей, способов их укладки, взаимодействия их друг с другом и с грунтом на устойчивость грунтовых насыпей повышенной крутизны.

При строительстве подпорных стенок и насыпей повышенной крутизны, армировании слабых оснований, берегоукреплении в последнее время стали часто использовать тканые геотекстили. Обладая высокой прочностью при небольшом удлинении, высокой стойкостью к ползучести, отличными контактными характеристиками с различными типами грунтов, простой технологией укладки, они во многих случаях позволяют сократить затраты на строительство.

Целью настоящей работы является исследование напряженно-деформированного и предельного состояния армированной насыпи, взаимодействующей с деформируемым дорожным полотном.

Геометрически эта конструкция представляет собой длинную насыпь постоянного поперечного сечения, находящуюся под действием собственного веса, веса дорожного покрытия, а также под воздействием регламентированных строительными нормами и правилами (СНиПами) нагрузок. Главной особенностью исследуемой конструкции является то обстоятельство, что сооружается подобная насыпь из отдельных слоев грунта, частично заключенных в тканых геотекстилях.

Для адекватной оценки напряженно-деформированного состояния армированной насыпи требуется учет влияния фильтрующих грунтовых вод. В настоящей работе предлагается методика конечно-элементного расчета водонасыщенной пористой среды, взаимодействующей с деформируемыми конструкциями.

Система вариационных разрешающих уравнений консолидации квазидвухфазных грунтовых сред

$$\sum_{\alpha} \left(\int_{S^{(\alpha)}} \sigma_{ij}^{tot} \delta \varepsilon_{ij}^{sk} dV + \int_{S^{(\alpha)}} \delta_{i2} g \rho \delta \vartheta_i^{sk} dV \right) - \int_{L_{\sigma}} \bar{p}_i^n \delta \vartheta_i^{sk} dS = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{\alpha} \int_{S^{\alpha}} k_{\phi}^w \left(\delta_{i2} + \frac{\delta_{ij} P_{,j}^w}{g \rho^w} \right) \delta P_{,i}^w dV - \int_{L_{P_n}} k_{\phi}^w \bar{H}_{,n}^w \delta P^w dS = 0 \quad (2)$$

получена на основе Эйлера подхода к описанию движения [1]. Принцип Терцаги определяет связь между напряжениями в виде

$$\sigma_{ij}^{tot} = \sigma_{ij}^{ef} - \delta_{ij} P^w. \quad (3)$$

Закон фильтрации записывается по отношению к разности приведенных скоростей жидкости и скелета грунта в форме Дарси-Герсеванова. Таким образом, для компонент массовых сил Жуковского G_i^w , обусловленных сопротивлением движению жидкости при течении ее в пористой среде, имеем

$$G_i^w = -\rho^w g \frac{m_w}{k_{\phi}^w} (\dot{\vartheta}_i^w - \dot{\vartheta}_i^{sk}). \quad (4)$$

Расчет проводится на основе изопараметрических линейных конечных элементов сплошной среды, в качестве узловых неизвестных которых выбраны декартовы проекции вектора перемещений скелета грунта и поровое давление фильтрующей жидкости.

Аппроксимации вектора перемещений $\vec{\vartheta}$ и порового давления P^w представим в виде

$$\begin{aligned} \{\vartheta\} &= [\Psi(\bar{x})] \left\{ \vartheta^m \right\} \\ P^w &= \{\psi(\bar{x})\}^T \left\{ p^m \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

В результате получим разрешающую систему матричных уравнений для всего объема грунта вида:

$$\begin{aligned} [K]\{u\} - [C]\{p\} &= \{f\}, \\ [H]\{p\} &= \{\varphi\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\{u\}$ и $\{p\}$ - вектор узловых перемещений и вектор узловых значений порового давления в узлах для всего грунта.

Для оценки несущей способности водонасыщенной пористой среды на основе конечно-элементного анализа реализуется теория предельного состояния Мизеса-Боткина, использующая эффективные напряжения в скелете грунта. Используется условия прочности Мизеса-Боткина, как задание предельной поверхности в виде

$$\tau_i = c^* + \sigma_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi^*, \quad (7)$$

где $\tau_i = \sigma_i / \sqrt{3}$ - интенсивность касательных напряжений, σ_0 - среднее напряжение, φ^* - угол трения на октаэдрической площадке, c^* - предельное сопротивление чистому сдвигу.

Наибольшее распространение при решении физически нелинейных задач методом конечных элементов получила итерационная процедура, известная как “метод начальных напряжений”. В соответствии с ней на каждом шаге итерации формулируется линейная задача и найденные напряжения оцениваются по соотношениям предельного состояния. Если материал не достиг его, то считается, что напряженное состояние найдено. Если материал вышел в предельное состояние, то определяются “истинные” напряжения и “дополнительные”, которые в совокупности равны найденным, из решения линейной задачи. Далее считается, что “дополнительные” напряжения являются неуравновешенными внутренними усилиями, и на следующем шаге итерации они принимаются как внешние силы.

Принимая соотношение закона Гука в форме

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_0 = D_{ijmn}\varepsilon_{mn}, \quad (8)$$

где ε_0 - первый инвариант тензора деформаций, G - модуль сдвига, λ - коэффициент Ламе (механические характеристики), для компонент упругопластической матрицы получим выражение

$$D_{kijmn}^{ep} = D_{kijmn} - \frac{\left(\frac{G}{\tau_i} S_{kj} + \delta_{kj} K \operatorname{tg} \varphi^* \right) \left(\frac{G}{\tau_i} \sum_{m,n} S_{mn} \varepsilon_{mn} + \varepsilon_0 3K \operatorname{tg} \varphi^* \right)}{G + K \operatorname{tg}^2 \varphi^*}, \quad (9)$$

где S_{kj} - компоненты девиатора тензора напряжений, K - модуль всестороннего сжатия. Тогда “истинные” напряжения вычисляются следующим образом

$$\{\sigma_u^{k+1}\} = \{\sigma_u^{(k)}\} + [D_{ep}^{(k+1)}] \{\Delta \varepsilon^{(k+1)}\}, \quad (10)$$

а “дополнительные” – определяются как

$$\{\sigma_\sigma^{(k+1)}\} = \{\sigma^{(k+1)}\} - \{\sigma_u^{k+1}\}. \quad (11)$$

Условие остановки итерационного процесса формулируется как ограничение на приращение перемещений

$$\frac{\|\Delta v^{(k+1)}\|}{\|v^{(k+1)}\|} \leq \varepsilon ps. \quad (12)$$

Армирующие геотекстили, в качестве которых выбирался геолон (GEOLON), моделировались одномерными конечными элементами, работающими только на растяжение. Механизм взаимодействия тканых геотекстилей с грунтом моделируется в рамках механики сплошной среды, т.е. при представлении контактного слоя в виде единого материала, обладающего специфическими свойствами.

На рис.1 схематично изображено поперечное сечение части расчетной области. Рисунки 2 и 3 иллюстрируют распределение интенсивности пластических деформаций (в зоне их максимального значения) для разной длины армирующего геотекстиля. Результаты приведены для сухих грунтов.

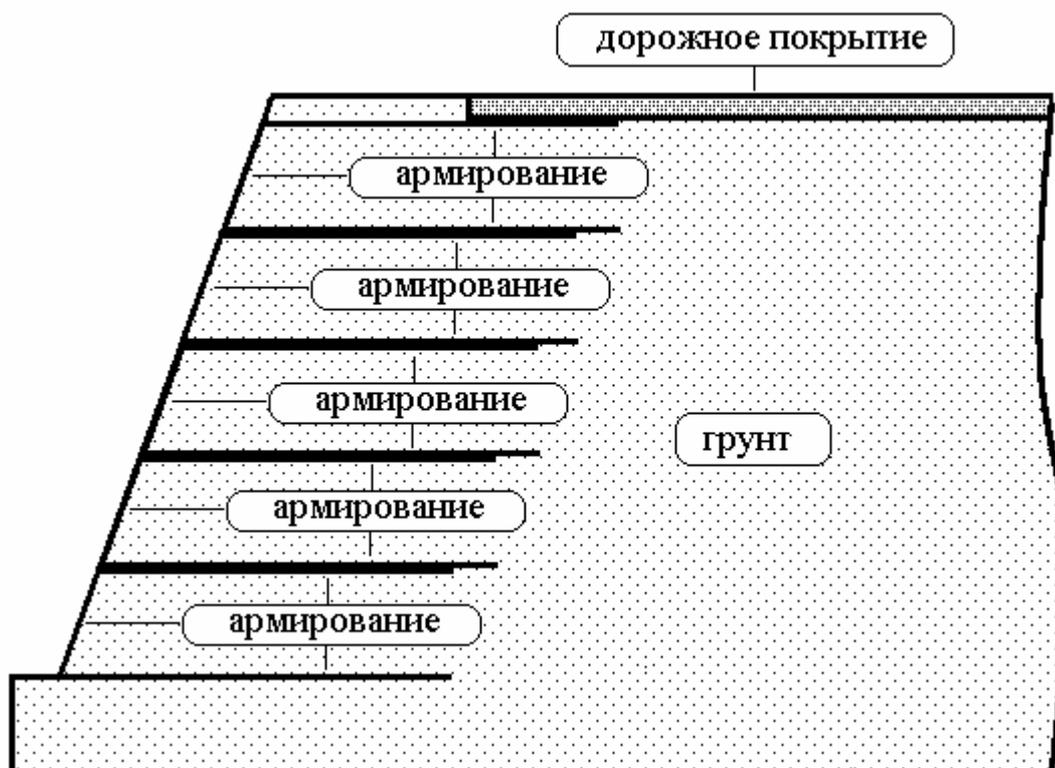


Рис.1.

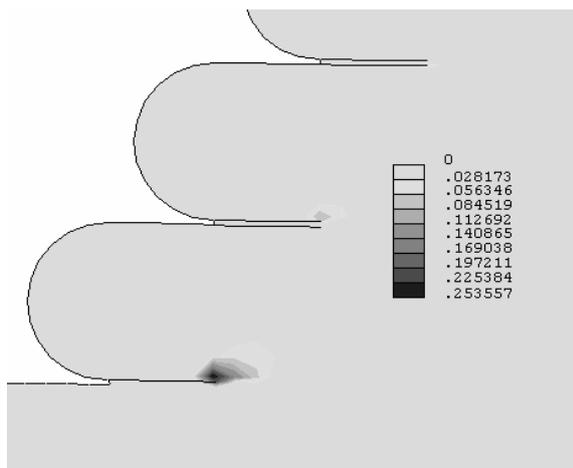


Рис.2.

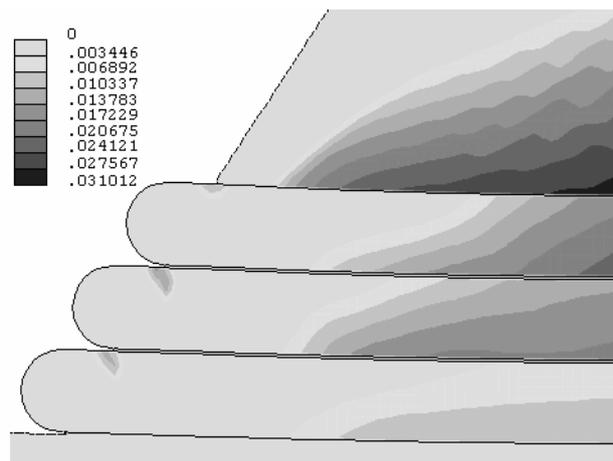


Рис.3.

Литература

1. Бережной Д.В., Голованов А.И., Паймушин В.Н., Сидоров И.Н., Клементьев Г.А. Исследование напряженно-деформированного и предельного состояния сухих и водонасыщенных грунтов деформаций // ВЕМ&FEM-2001. Труды XIX международной конференции “Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов”. Т.2. - С.Петербург, 2001. - С.82-86.

УДК 539.3+519.6+620.17

ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА, СЖАТОГО В ДИАМЕТРАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

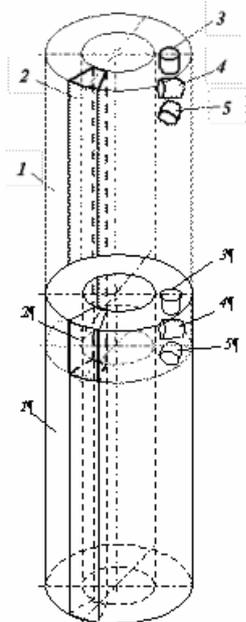
**Березюк А.И., *Ровный С.И., *Проничев М.В., **Тутнов Ал.А.,
Тутнов Ан.А., **Алексеев Е.Е., *Синицын Е.Н.
(*ФГУП “ПО “Маяк”, г. Озерск Челябинской обл., Россия,
ФГУ РНЦ КИ, г. Москва, Россия, *ИЦП МАЭ, г. Москва, Россия)*

INVESTIGATION OF LOW ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF HOLLOW CYLINDER SQUEEZED IN CENTERLINE PLANE

**Berezyuk A.I., *Rovny S.I., *Pronichev M.V., **Tutnov Al.A.,
Tutnov An.A., **Alekseev E.E., *Sinityn E.N.
(*“Mayak” PA, Ozyorsk, Chelyabinsk region, Russia,
RSC Kurchatov Institute, Moscow, Russia, *ICP, Moscow, Russia)*

Представлен сопоставительный анализ экспериментальных данных и результатов расчета методом конечных элементов малой упругопластической деформации полого цилиндра, сжатого в диаметральной плоскости равномерно распределенной по образующей

наружной цилиндрической поверхности нагрузкой. В расчетах использовались физико-механические характеристики материала, которые были экспериментально определены при испытаниях образцов.



- 1- труба из стали 12Х18Н10Т;
- 2- полосовой сегментный образец, вырезанный в осевом направлении трубы для исследования упругопластических свойств материала при растяжении (количество - 3 шт.);
- 3- цилиндрический образец, вырезанный в осевом направлении трубы для исследования пластических свойств материала при сжатии (количество - 5 шт.);
- 4- цилиндрический образец, вырезанный в радиальном направлении трубы для исследования пластических свойств материала при сжатии (количество - 5 шт.);
- 5- цилиндрический образец, вырезанный в окружном направлении трубы для исследования пластических свойств материала при сжатии (количество - 5 шт.).

Рисунок 1. Образцы для определения упругопластических свойств стали 12Х18Н10Т

В качестве заготовки для изготовления образцов полого цилиндра использовалась труба из стали 12Х18Н10Т наружным диаметром 76 мм и толщиной стенки 5 мм. Для определения упругопластических свойств конструкционного материала из этой же трубы были вырезаны три полосовых сегментных образца и пятнадцать цилиндрических образцов (рис. 1).

Таблица 1 - Диаграмма напряжений для стали 12Х18Н10Т

Напряжение, МПа	0	257,6	275,2	288,4	301,5	314,7	327,9	341,1	369,0
Линейная деформация, 10^{-3}	0	1,3	1,8	2,4	3,1	4,2	5,4	7,1	12,0

При упругопластическом растяжении на испытательной машине трех полосовых сегментных образцов была определена диаграмма напряжений [1], характеризующая свойства материала (Таблица 1). Полученная для стали 12Х18Н10Т диаграмма напряжений состоит из двух участков: линейного при напряжении от 0 до 257,6 МПа и нелинейного при напряжении свыше 257,6 МПа. Напряжение, равное $(257,6 \pm 1,7)$ МПа, соответствует среднему арифметическому значению предела

пропорциональности σ_{nc} для стали 12X18H10T в осевом направлении трубы. Для приведенной диаграммы, согласно статистической обработке результатов испытаний, можно ожидать, что наибольшая при вероятности 0,997 ошибка отдельных измерений напряжений не превзойдет $\pm 8,7$ МПа на упругом участке и $\pm 23,7$ МПа на пластическом участке.

Среднее арифметическое значение экспериментально измеренного на полосовых сегментных образцах в области малых упругопластических деформаций коэффициента нормальной анизотропии, равного отношению окружной деформации (сужение по ширине) к радиальной деформации (утонение по толщине), составило: $k_{норм} = 0,98 \pm 0,01$. Измерение ширины и толщины образцов осуществлялось в пяти точках по длине образцов с помощью индикатора часового типа с ценой деления 0,001 мм.

Исследование пластических свойств стали 12X18H10T в радиальном, окружном и осевом направлении трубы выполнялись на цилиндрических образцах диаметром и высотой по $(4,9 \pm 0,5)$ мм, которые сжимались по высоте на испытательной машине. До приложения нагрузки, а также после ее снятия измерялись диаметр и высота образцов. Получены следующие результаты (рис. 2):

среднее арифметическое значение предела пропорциональности стали 12X18H10T на сжатие примерно одинаково в радиальном, окружном и осевом направлениях трубы, и составило соответственно $(258,7 \pm 1,9)$, $(260,2 \pm 1,1)$, $(259,7 \pm 2,8)$ МПа (наибольшая при вероятности 0,997 ошибка отдельных измерений: $\pm 11,2$ МПа – радиальное направление, $\pm 6,4$ МПа – окружное направление, $\pm 16,5$ МПа – осевое направление);

значения пределов пропорциональности стали 12X18H10T при растяжении и сжатии в осевом направлении трубы достаточно хорошо совпадают между собой: $(257,6 \pm 1,7)$ МПа – при растяжении и $(259,7 \pm 2,8)$ МПа – при сжатии;

в пластической области деформирования максимальное относительное отклонение среднего арифметического значения $(\sigma - \sigma_{nc})$ при растяжении и сжатии материала в осевом направлении трубы составило 6 %;

в пластической области деформирования максимальное относительное отклонение среднего арифметического значения $(\sigma - \sigma_{nc})$ на диаграммах напряжений при сжатии материала в радиальном, окружном и осевом направлении трубы составило 9 %.

Проведенные исследования пластических свойств стали 12X18H10T на растяжение и сжатие в области малых пластических деформаций показали их эквивалентность в радиальном, окружном и осевом направлениях тубы и позволили рассматривать в расчетах материал как пластически изотропный.

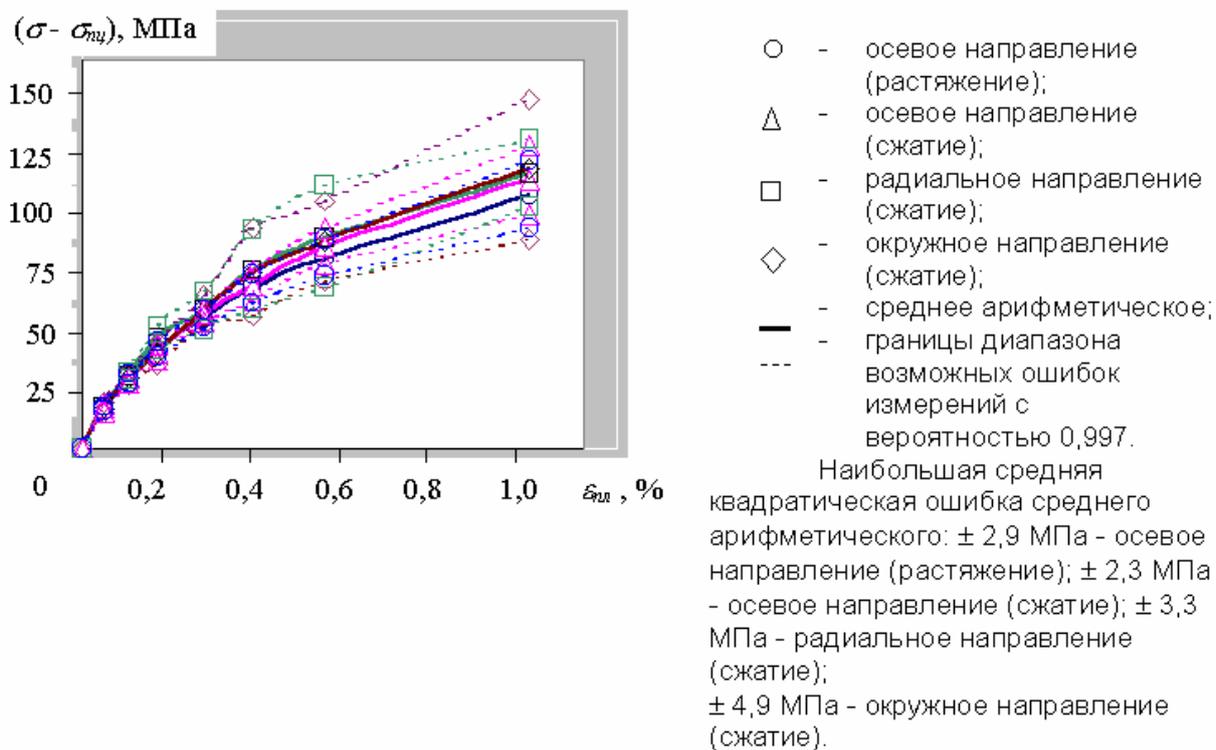


Рисунок 2. Диаграмма напряжений в пластической области деформирования

Среднее арифметическое значение скорости распространения продольных звуковых волн с частотой 10 МГц в радиальном направлении трубы по 20-ти измерениям составило (5865 ± 3) м/с. При этом разброс экспериментальных данных составил менее 1%. Измерение скорости звуковых колебаний производилось толщиномером DME DL фирмы Krautkramer – Branson на четырех образцах полого цилиндра. Плотность стали 12X18H10T была определена на установке Shimadzu методом гидростатического взвешивания в воде при температуре 22 °С. Среднее арифметическое значение плотности материала по пяти измерениям составило 7910 кг/м³.

Измерения скорости звуковых волн и плотности позволили определить модуль упругости материала в радиальном направлении трубы, который составил: $E_r = 205$ ГПа.

Относительное отклонение среднего арифметического значения скорости распространения продольных звуковых волн в цилиндрических образцах, вырезанных в радиальном и окружном направлении трубы, составило порядка 0,1 %. На основании данных измерений полой цилиндр в расчетах рассматривался как твердое тело, обладающее эквивалентностью упругих констант в радиальном и окружном направлении.

Экспериментальное сжатие полого цилиндра, проводилось на испытательной машине. Скорость перемещения активного захвата составляла 0,1 мм/мин, верхний предел диапазона измерения нагрузки 5

кН, предел допускаемой абсолютной погрешности тензорезисторного измерения нагрузки ± 10 Н, предел допускаемой абсолютной погрешности измерения перемещения захвата $\pm 0,005$ мм.

Схема нагружения полого цилиндра представлена на рис. 3. Для создания в поперечном сечении образца воздействия типа сосредоточенной силы были изготовлены призмы из стали Ст45 с шириной контактной зоны 2 мм в вершине. Образец устанавливался на призмы, закрепленные на двух опорных площадках реверсора: нижняя площадка – неподвижная, а верхняя, соединяемая с активным захватом испытательной машины – подвижная в вертикальном направлении. Соосность приложения в вертикальной плоскости нагрузки контролировалась отвесом.

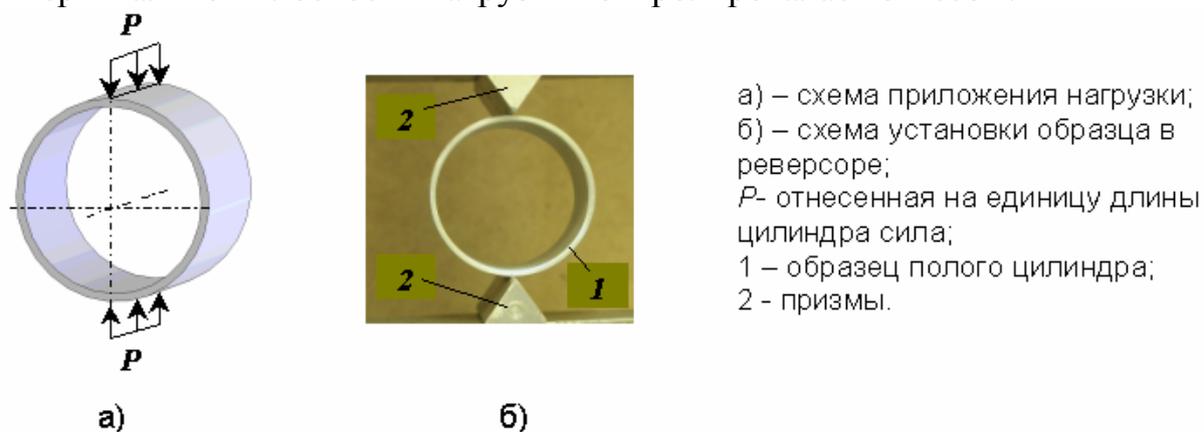


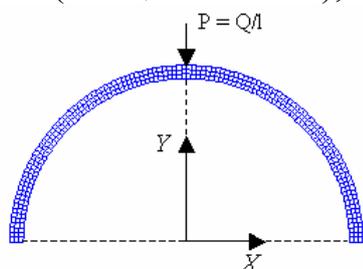
Рисунок 3. Схема нагружения полого цилиндра

Использование призм, плотно контактирующих с образцом, препятствовало изгибу образующей наружной цилиндрической поверхности, повороту и свободному перемещению торцов вдоль продольной оси полого цилиндра в процессе его сжатия. Отсутствие осевого перемещения торцов друг относительно друга и сохранение ими плоскостности было инструментально зафиксировано в экспериментах с помощью часового индикатора с ценой деления 0,001 мм. На основании этого было выдвинуто предположение и принято в расчетах при моделировании граничных условий допущение, что нагружаемый в описанном эксперименте образец испытывает плоскую деформацию.

Материалы исследований упругой области плоской деформации трех образцов полого цилиндра, сопоставительный анализ экспериментальных данных с результатами аналитического решения, предложенного С.П. Тимошенко [2], а так же результатами расчета методом конечных элементов по программам CAN (разработка ИЦП МАЭ) и УЗОР – 1 (разработка ФГУ РНЦ КИ) изложены в работе [3]. Расчеты выполнялись в допущении о совершенстве геометрии тела и изотропии упругих свойств конструкционного материала. Относительное отклонение от эксперимента расчетного изменения диаметра полого цилиндра в плоскости приложения нагрузки и плоскости, перпендикулярной плоскости приложения нагрузки,

составило от 2 % до 10 %. При этом было отмечено, что на величину отклонения существенное влияние оказывают неправильности геометрической формы.

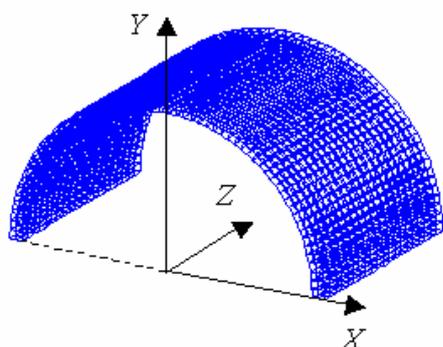
Для получения диаграммы малого упругопластического деформирования был изготовлен образец со следующими геометрическими размерами: $75,400 \pm 0,005$ мм (наружный диаметр), $2,850 \pm 0,05$ мм (толщина стенки), $49,55 \pm 0,05$ мм (длина).



Граничные условия:
 1) $UX = 0$ для узлов с координатой $X=0$;
 2) $UY = 0$ для узлов с координатой $Y=0$;
 Q – прикладываемая к образцу длиной l сжимающая нагрузка, Н

Рисунок 4. Двумерная модель

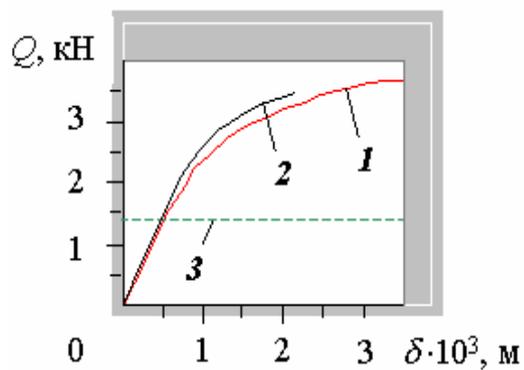
Конечно-элементные модели для расчета плоской деформации сжимаемого в диаметральной плоскости полого цилиндра представлены на рис. 4 и рис. 5. Для построения двумерной модели использовался плоский восьмиузловой элемент с двумя степенями свободы в каждом узле, разрешающими перемещения UX , UY по осям X и Y соответственно. Трехмерная объемная модель состоит из объемных двадцатиузловых элементов с тремя степенями свободы в каждом узле, разрешающими перемещения UX , UY , UZ по осям X , Y и Z .



Граничные условия и нагрузки:
 1) $UX = 0$ для узлов в плоскости YZ ;
 2) $UY = 0$ для узлов в плоскости XZ ;
 3) $UZ = 0$ для узлов поперечных торцов полукольца.
 Прикладываемая нагрузка:
 F_{yi} – силы в узлах с координатами $X = 0$; $Y = b$;
 b – наружный радиус;
 $\sum F_{yi} = -Q$

Рисунок 5. Трехмерная объемная модель

Экспериментальная и расчетная диаграммы малого упругопластического деформирования полого цилиндра в плоскости приложения сжимающей нагрузки представлена на рис. 6. Относительное отклонение расчетных величин от экспериментальных данных составило порядка 2 % в упругой области и порядка 15 % в упругопластической области деформирования.



1 – экспериментальная кривая;
 2 – расчетная кривая;
 3 - нагрузка $Q = 1397,9 \text{ Н}$, при превышении которой экспериментальная кривая деформирования становится нелинейной
 δ - уменьшение диаметра образца в плоскости приложения сжимающей нагрузки.

Рисунок 6. Диаграмма упругопластического деформирования полого цилиндра

Численные расчетно-экспериментальные значения упругопластического изменения наружного диаметра образца в плоскости приложения сжимающей нагрузки представлены в табл. 2. В качестве исходных данных в расчетах методом конечных элементов использовалась экспериментальная диаграмма напряжений (см. табл. 1). Критерий появления пластических деформаций задавался в расчетах в соответствии с гипотезой Треска – Сен-Венана [4].

Конфигурация тела сжатого образца, в котором проявились остаточные пластические деформации, показана на рис. 7. Проекция наружной поверхности на плоскость, перпендикулярную ее продольной оси, представлявшая первоначально окружность, приняла форму овала. При небольших пластических деформациях овал имеет эллипсообразную форму.

Таблица 2. Координаты точек диаграммы деформирования

$Q, \text{ кН (кгс)}$		1,3979 (142,5)	1,4715 (150)	1,962 (200)	2,4525 (250)	2,943 (300)	3,4335 (350)
$\delta \cdot 10^4, \text{ м}$	эксперимент	$4,75 \pm 0,05$	$5,14 \pm 0,05$	$7,34 \pm 0,05$	$10,49 \pm 0,05$	$15,02 \pm 0,05$	$24,03 \pm 0,05$
	двумерная модель (CAN)	4,65	4,90	6,63	9,01	12,83	20,69
	трехмерная объемная модель (CAN)	4,66	4,90	6,55	9,12	12,74	21,42
	трехмерная объемная модель (УЗОР-1)	4,74	4,92	6,65	9,06	13,04	20,33



Рисунок 7. Сдеформированный образец

При сжатии образца полого цилиндра нагрузкой $Q = 1397,9$ Н, которая соответствует началу появления на диаграмме (см. рис. 6) нелинейных деформаций, рассчитанная в соответствии с теорией максимальных касательных напряжений [4] величина максимального эквивалентного напряжения составила:

- 244,3 МПа (аналитическое решение);
- 243,7 МПа (двумерная модель, программа CAN);
- 243,0 МПа (трехмерная модель, программа CAN);
- 246,0 МПа (трехмерная модель, программа УЗОР-1).

Относительное отклонение рассчитанных величин от предела пропорциональности, полученного при испытании сегментных образцов, составило порядка 5 %.

Результаты выполненных расчетно-экспериментальных исследований представляют интерес для проверки работы программных средств, применяемых в расчетах на прочность.

Литература

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. - 734 с.
2. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. - М.: Наука, 1975. – 704 с.
3. Березюк А.И., Ровный С.И., Тутнов А.А. и др. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния сжатого в диаметральной плоскости полого цилиндра. // Труды третьей Российской конференции «Методы и программное обеспечение расчетов на прочность». 2004. Сборник тезисов. С.31.
4. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Издание десятое, переработанное и дополненное. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 591 с.

ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНОГО РОСТА МИКРОТРЕЩИН ПРИ МНОГОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

*Берендеев Н.Н., *Любимов А.К.

(*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижегород, Россия)

THE DESCRIPTION OF UNCONTINUOUS GROWTH OF MICROCRACK UNDER HIGH-CYCLIC FATIGUE WITH USING OF THE STRUCTURAL MODEL OF DAMAGE ACCUMULATION

*Berendeyev N.N., *Lyubimov A.K.

(*Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russia)

1. Введение. В настоящее время при изучении процесса многоцикловой усталости принято выделять три стадии [1]: зарождения микротрещин, роста микротрещин до размеров макротрещин и распространение макротрещин до разрушения. Представляет интерес построение модели накопления повреждений, которая позволяла бы описывать все три приведенные выше стадии. При описании поведения микротрещин применяют два основных подхода. В первом для моделирования роста изучаемых трещин используются зависимости, полученные для макротрещин, базирующиеся на учете явления закрытия трещины в моделях нелинейно-упругой механики разрушения (R.O. Ritchie [2], Newman Jr. [3]). Указанные модели могут быть применены только в случае, если изучаемая микротрещина расположена в области концентратора напряжений [2]. Во втором при моделировании микротрещин используются положения континуальной теории дефектов (Sivellano [4], Melin [5], Панин [6]).

2. Модель зарождения микротрещины в зерне материала. В работах [7, 8] авторами была предложена модель накопления повреждений на стадии роста микротрещины в зерне материала от двух систем скольжения. При этом предполагалось, что материал является поликристаллическим, а зарождающаяся микротрещина – транскристаллитная [7]. Также было принято, что процесс накопления повреждений в каждой из систем скольжения происходит независимо от другой системы скольжения и описывается следующим уравнением [8]

$$\frac{d\psi_j}{dN} = \frac{1}{\varepsilon_p^*} \Delta\varepsilon_{p0} \exp\left\{-\frac{\Delta F_f}{kT} \left(1 - \frac{\sigma_a^j + \phi I_1(\sigma_m)}{\sigma_{цт}}\right)\right\} H\left(\sigma_a^j + \phi I_1(\sigma_m) - \sigma_{цт}\right), (1)$$

где $j = \alpha, \beta$ - индекс системы скольжения, $\sigma_a^\alpha = |\sigma_{1a} - \sigma_{3a}| \sin 2\alpha$, $\sigma_a^\beta = |\sigma_{1a} - \sigma_{3a}| \cos 2\alpha$, где σ_{1a}, σ_{3a} - первое и третье главное

напряжение тензора амплитуд внешних напряжений, ΔF_f – энергия активации процесса циклической микропластичности [7]; $\sigma_{цт}$ – циклический предел текучести [1, 10]; k – постоянная Больцмана; T – комнатная температура; H – функция Хевисайда; σ_m – тензор средних напряжений цикла; $I_1(\sigma)$ – первый инвариант тензора напряжений; $\Delta \varepsilon_{p0}$ – накопленная за цикл на границе зерна величина микропластической деформации при амплитуде напряжения, равной циклическому пределу текучести; ε_p^* – критическая величина микропластической деформации, соответствующая зарождению микротрещины на границе зерна материала, определяемая по формуле [7]

$$\varepsilon_p^* = \frac{1}{\kappa} \sqrt{4\gamma\pi(1-\nu)/Gd^{-1/2}}, \quad (2)$$

где d – характерный размер зерна материала, γ – поверхностная энергия [1], κ – коэффициент учета аккомодационных процессов при деформировании; φ – коэффициент учета влияния асимметрии цикла нагружения [7]. Длина образующейся микротрещины l_0 равна половине характерного размера зерна материала. Была выбрана свертка для указанных мер повреждений в виде максимальной из них [8] $\psi = \max\{\psi_\alpha, \psi_\beta\}$.

В работе [9] была с использованием модели (1) и соотношения (2) была получена функция распределения длин зарождающихся микротрещин в опасном сечении, содержащем n зерен, которая имела вид

$$F_{l_0}(l_0) = \exp\left(-\frac{1}{b} \exp\left\{-\gamma_n \left(\frac{l_0 - \bar{l}_0}{\Delta_{l_0}} - \tilde{\gamma}_n\right)\right\}\right), \quad (3)$$

где $\gamma_n = \sqrt{2 \ln n}$, $\tilde{\gamma}_n = \sqrt{2 \ln n} - (\ln \ln n + \ln(4\pi)) / (2\sqrt{\ln n})$,

$$b = \Phi(\bar{l}_0 / \Delta_{l_0}), \quad \bar{l}_0 = 0,5\bar{d}, \quad \Delta_{l_0} = 0,5\Delta_d, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-0,5t^2) dt,$$

\bar{d} – математическое ожидание характерного размера зерна материала, Δ_d – среднее квадратичное отклонение характерного размера зерна материала.

3. Модель накопления повреждений на стадии роста микротрещины. Согласно экспериментальным данным [1 – 3] ход процесса роста трещины является дискретным. Введем ряд гипотез, на основании которых построим модель накопления повреждений: (а) рост трещины является скачкообразным; (б) перед кончиком растущей трещины образуется зона пластичности; (в) зерно материала либо целиком принадлежит зоне пластичности, либо целиком не принадлежит зоне

пластичности [11]; (г) при моделировании поля напряжений в окрестности кончика трещины используется аналогия между трещиной и стенкой дислокаций [11]; (д) единичный акт увеличения длины трещины состоит из двух стадий: стадии накопления повреждений до образования микротрещины в некотором зерне, лежащем на внешней границе зоны пластичности, и слияние образовавшейся и существующей трещин входе последующей четверти цикла нагружения; (е) на первой стадии единичного акта увеличения длины трещины процесс накопления повреждения предполагается как сумма процессов накопления повреждений, обусловленных внешним полем напряжений и внутренним локальным полем напряжений, определяемым наличием трещины. Без ограничения общности можно предположить, что в зернах материала превалирует система скольжения α .

Рассмотрим $i+1$ -ый этап роста трещины. Согласно введенным выше предположениям приращение длины трещины на данном этапе определяется зависимостью

$$\Delta l_{i+1} = l_{pli} + d/2, \quad (4)$$

где l_{pli} – радиус зоны пластичности перед кончиком трещины. С учетом предположений (г) и (в) выражение для радиуса зоны пластичности примет вид

$$l_{pi} = \left(\left[2L_i \left(\sigma_{max}^\alpha / 2\sigma_T \right)^2 / d \right] + 1 \right) d, \quad (5)$$

где σ_{max}^α , σ_{min}^α – максимальное и минимальное эквивалентное напряжение внешнего цикла нагружения, σ_T – предел текучести материала, $[x]$ – функция целая часть числа x , $L_i = l_i/4$, l_i – длина трещины после i -ого этапа роста трещины.

Согласно гипотезе (е) накопленная на границе зерна за цикл нагружения микропластическая деформация при длине трещины l_i будет определяться по формуле

$$\Delta \varepsilon_p^i = \Delta \varepsilon_p^{int i} + \Delta \varepsilon_p^{ext i}, \quad (6)$$

где

$$\Delta \varepsilon_p^{int i} = \Delta \varepsilon_{p0} \exp \left\{ - \frac{\Delta F f}{kT} \left(1 - \frac{\sigma_{ai}^{int} + \phi I_1(\sigma_{mi}^{int})}{\sigma_{цт}} \right) \right\} H \left(\sigma_{ai}^{int} + \phi I_1(\sigma_{mi}^{int}) - \sigma_{цт} \right), \quad (7)$$

$$\Delta \varepsilon_p^{ext i} = \Delta \varepsilon_{p0} \exp \left\{ - \frac{\Delta F f}{kT} \left(1 - \frac{\sigma_a^\alpha + \phi I_1(\sigma_m)}{\sigma_{цт}} \right) \right\} H \left(\sigma_a^\alpha + \phi I_1(\sigma_m) - \sigma_{цт} \right)$$

где с учетом выражения для поля напряжений перед стенкой дислокаций [11]

$$\sigma_{ai}^{int} = \left(\sigma_{max}^{\alpha} - H \left(\sigma_{min}^{\alpha} \right) \right) \sqrt{2L_i} / \left(2\sqrt{l_{pi}} \right), \quad \sigma_{mi}^{int} = \left(\sigma_{max}^{\alpha} + \sigma_{min}^{\alpha} \right) \sqrt{2L_i} / \left(2\sqrt{l_{pi}} \right),$$

Число циклов протекания $i+1$ -ого этапа роста трещины будет определяться по формуле

$$N_{pr i+1} = \varepsilon_p^* / \Delta \varepsilon_p^i. \quad (8)$$

Среднее значение скорости роста трещины на $i+1$ -ом этапе равняется

$$\left(\frac{dl}{dN} \right)_{i+1} = 2 \frac{l_{pi} + d/2}{N_{pr i+1}}. \quad (9)$$

При применении формул (4) – (9), описывающих модель накопления повреждений на стадии роста микротрещины при многоциклового усталости, не требуется дополнительных констант по сравнению с константами в модели накопления повреждений на стадии зарождения микротрещины [7, 8].

Для возможности описания моделью (4) – (9) случайных явлений, возникающих в ходе роста трещины, предположим, размер зерна, лежащего на границе зоны пластичности, является случайной величиной с усеченным нормальным распределением [9]. Тогда в формулах (2), (4) и (9) величина d является случайной.

4. Численное моделирование. При проведении численного моделирования будут рассмотрены сталь 45 [10] и титановый сплав Ti-6Al-4V [12]. Механические характеристики данных материалов приведены в таблице 1. Структура стали 45 состояла из зерен с математическим ожиданием характерного размера зерна $\bar{d} = 30$ мкм и среднеквадратичным отклонением $\Delta_d = 10$ мкм [10]. Структура Ti-6Al-4V состояла из α зерен и пластинчатых $\alpha + \beta$ колоний [12]. Характерный размер $\alpha + \beta$ колонии $d_{\alpha\beta} = 20$ мкм [12]. Толщина пластины в колонии $d_{\alpha\beta}^h = 1$ мкм [12]. В таблице 2 приведены параметры модели для рассматриваемых материалов.

Таблица 1

	E , ГПа	ν	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_b , МПа	γ , Дж/м ²
Сталь 45	200	0,3	316	580	1,3
Ti-6Al-4V	110	0,33	915	965	1,06

Таблица 2

	σ_{-1} , МПа	$\sigma_{цт}$, МПа	$\Delta F_f \cdot 10^{20}$, Дж	$\Delta \varepsilon_{p0}$	φ
Сталь 45	210	139	3,78	$3 \cdot 10^{-8}$	0,3
Ti-6Al-4V	-	275	4,49	$1 \cdot 10^{-9}$	0,2

На рис. 1 представлены зависимости скорости роста микротрещины от длины микротрещины в сплаве Ti-6Al-4V в случае нагружения с

максимальным напряжением цикла $\sigma_{\max} = 500$ МПа при коэффициенте асимметрии $R = 0,1$. Кривая 1 на рассматриваемом рисунке соответствует экспериментальным данным из работы [12]. Кривая 2 получена на основании соотношений (9) – (14).

На рис. 2 представлены зависимости скорости роста микротрещины от длины микротрещины для сплава Ti-6Al-4V в случае симметричного цикла нагружения, полученные с использованием разработанной модели, при различных значениях амплитуды напряжений: 1 – 275 МПа, 2 – 450 МПа, 3 – 500 МПа, 4 – 600 МПа. Аналогичные зависимости для стали 45 приведены на рис. 3, где 1 – 139 МПа, 2 – 150 МПа, 3 – 190 МПа, 4 – 210 МПа, 5 – 250 МПа.

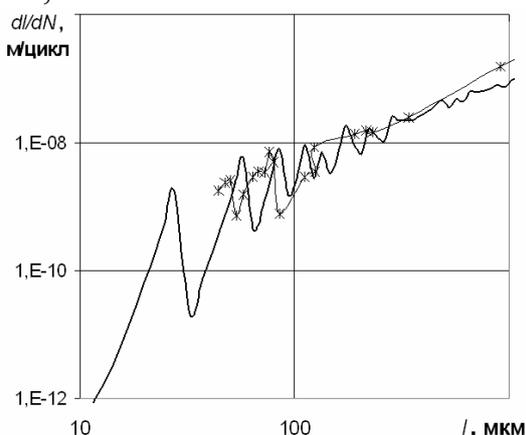


Рис. 1.

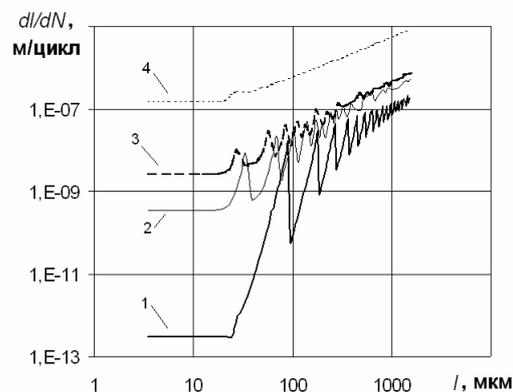


Рис. 2.

На рис. 4 приведены экспериментальные [10] и теоретические (на основании предложенной модели) значения коэффициента вариации усталостной долговечности для стали 45.

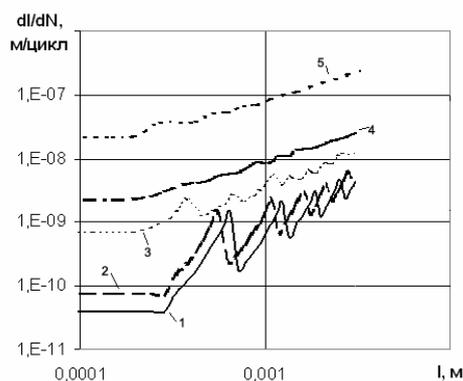


Рис. 3.

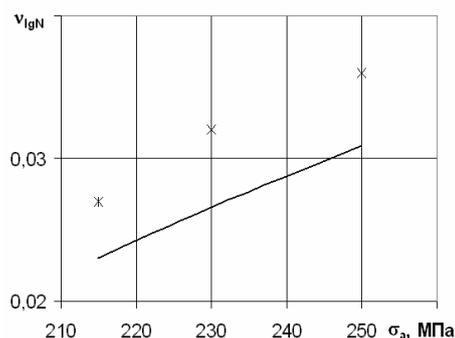


Рис. 4.

5. Анализ полученных результатов. Базируясь на анализе графиков, приведенных на рис.1 можно сделать вывод о том, что разработанная модель накопления повреждений достаточно хорошо описывает экспериментальные данные: характер поведения рассматриваемых

расчетных и экспериментальных зависимостей совпадет, диапазон изменения скоростей роста микротрещин в области приведенных длин трещин совпадает. Расхождения в скоростях роста микротрещин начинают наблюдаться после достижения трещиной длины 300 мкм. Данная длина микротрещины для рассматриваемого материала соответствует области макротрещин. Полученная в работе модель строилась для области микротрещин.

Из результатов, приведенных на рис. 2, 3, следует, что согласно разработанной модели накопления повреждений с повышением уровня амплитуды напряжений происходит сглаживание графика зависимости скорость роста микротрещины от длины микротрещины. Данная зависимость соответствует экспериментальным данным, приведенным в работе [13]. Причем согласно рис. 3 характер поведения кривых роста трещины меняется при уровне напряжений 210 МПа, которое соответствует пределу усталости стали.

Согласно данным, приведенным на рис. 4, зависимость коэффициента вариации усталостной долговечности полученная с использованием модели достаточно хорошо качественно описывает экспериментальные данные.

6. Заключение. В работе построена структурная модель накопления повреждений дискретного роста микротрещины при многоцикловой усталости, базирующаяся на положениях континуальной теории дефектов. Проведенное численное моделирование и сравнение его с результатами экспериментов показало, что полученная модель позволяет достаточно хорошо моделировать стадию роста микротрещины в случае отсутствия концентратора напряжений.

Литература

1. Иванова В.С., Терентьев В.Ф. Природа усталости металлов. М.: Металлургия, 1975.
2. Peters J.O., Ritchie R.O. Foreign-object damage and high-cycle fatigue of Ti-6Al-4V// Material science and engineering A. 2001. Vol. 4, № 2. p. 597 – 601.
3. Fatigue analyse under constant- and variable-amplitude loading using small-crack theory: tech. report/ NASA, J.C. Newman Jr., E.P. Phillips, R.A. Everett Jr. – TM-1999-209329 ARL-TR-2001. - Lingley, 1999. 27 p.
4. Sevillano J. Gil. The effective threshold for fatigue crack propagation: A Plastic size effect// Scripta materialia. 2001. Vol. 44. p. 2661 – 2665.
5. Bjerken C., Melin S. A tool to model short crack fatigue growth using a discrete dislocation formulation// International journal of fatigue. 2003. Vol. 25. p. 559 – 566.
6. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов/под ред. В.Е. Панина. Новосибирск: Наука, 1995. – т. 1. – 298 с.
7. Любимов А.К., Берендеев Н.Н., Чувильдеев В.Н. Структурная модель, описывающая зарождение трещины// Изв. АИИ РФ. 2001. Юб. том. С. 181 – 199.
8. Berendeyev N.N., Lyubimov A.K. The description of stage of a microcrack origin under biaxial high cycle fatigue in Ti – 6Al – 4V alloy// Тез. докл. 20-ой междунар. конф. Математическое моделирование в механике деформируемых твердых тел и

- конструкций. Методы граничных и конечных элементов. С.-Петербург, 24-26 сентября 2003. СПб. Т.1, с. 40-41.
9. Берендеев Н.Н., Зорин В.А., Любимов А.К. Получение качественных оценок функции распределения усталостной долговечности с использованием двухстадийной модели накопления повреждений// Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика. Вып. 1(6). 2004. с.169 – 176.
 10. Трошенко В.Т. Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. Киев: Наукова думка, 1981. 344 с.
 11. Физическое материаловедение/Физико-механические свойства материалов и сплавов: Сб. ст. под ред. Р.У. Кана. М.: Металлургия, 1987. Т.3. 663с.
 12. Peters J.O., Boyce B.L., Chen X. and etc. On application of the Kitagawa-Takahashi diagram to foreign-object damage and high-cycle fatigue// Engineering Fracture Mechanics. 2002. Vol. 69. p. 1425 – 1446.
 13. Ostash O.P., Panasyuk V.V. A unified approach to fatigue macrocrack initiation and propagation// International Journal of Fatigue. 2003. Vol. 25, P. 703-708.

ИССЛЕДОВАНИЕ ИСКАЖЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ КОНСТРУКЦИИ, ВНОСИМЫХ ТЕРМОПАРНЫМ ДАТЧИКОМ

**Боровкова Т.В., *Елисеев В.Н., **Лопухов И.И.
(*МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия,
**НПО машиностроения, г. Реутов, Россия)*

THE INVESTIGATION OF TEMPERATURE FIELD DERIVATIONS CAUSED A THERMOCOUPLE SENSOR

**Borovkova T.V., *Eliseev V.N., **Lopukhov I.I.
(*Moscow State Technical University n. a. Bauman, Moscow, Russia,
**NPO Mashinostroyeniya, Reutov, Russia)*

Применение термопар при проведении теплопрочностных испытаний в качестве температурных датчиков может внести существенную погрешность в результаты измерений. Доклад посвящен созданию конечно-элементной (КЭ) модели и исследованию с ее помощью нестационарных тепловых процессов в образце материала с установленной в нем термопарой. Выявлены зависимости погрешности измерения температуры от различных факторов и оценена погрешность применения упрощенной модели термопары в тепловых расчетах.

Применение термопар при проведении теплопрочностных испытаний в качестве температурных датчиков может внести существенную погрешность в результаты измерений. Во многих работах ([1]-[3]) подробно исследована методическая погрешность измерения температуры (разность значений температуры в центре спая термодатчика и в соответствующей точке образца, в котором термопара отсутствует), связанная с нелинейными теплофизическими свойствами, влиянием полупрозрачности материала и т.д. Стоит особо выделить обширное и подробное исследование методических погрешностей, возникающих в

тонкостенной металлической конструкции от установки на ее поверхность привариваемых и приклеиваемых термопарных датчиков [4]. Однако в конструкции современных летательных аппаратов находят все большее применение композиционные, керамические материалы, теплопроводность которых в несколько раз меньше аналогичных показателей для металлов. При теплопрочностных испытаниях таких конструкций требуется учитывать непостоянство температуры по толщине образца и особенности установки термопар.

В данном докладе приведены результаты исследования влияния методической погрешности, возникающей при определении температурного поля контактным датчиком, установленным внутрь образца исследуемого материала.

Объект исследования (рис. 1) представляет собой прямоугольный образец теплозащитного материала марки ТП-ФС с прямоугольным пазом $0,6 \times 0,6$ мм, длиной 3 мм. В него помещают термопару типа хромель-алюмель диаметром 0,2 мм, после чего паз заполняют веществом, служащим для фиксации термопары внутри образца. После этого верхняя поверхность образца покрывается клеевым составом и лаком, обеспечивающим требуемую степень черноты поверхности. При испытании такой системы на стенде радиационного нагрева образец помещается в теплоизоляцию.

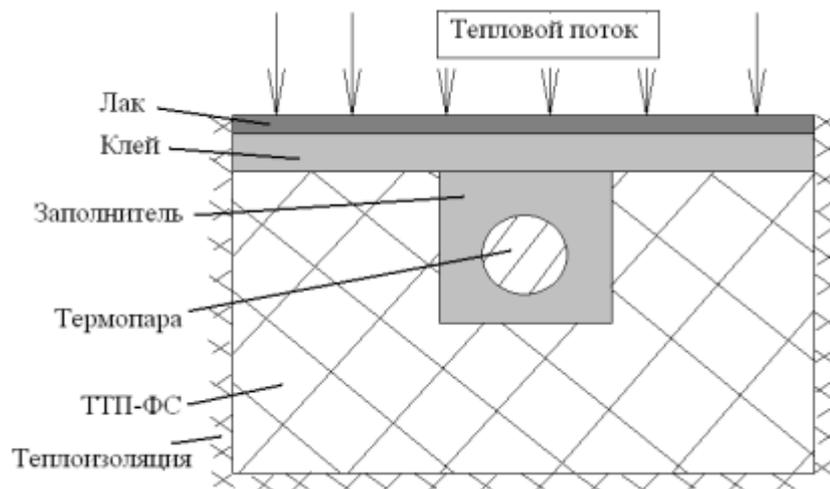


Рис. 1. Объект исследования

Задача исследования состояла в одновременном учете распределения температур по длине и глубине паза, отвода тепла по термоэлектродам, влияния на методическую погрешность материала термопары и смещения спая от центра паза. Особую трудность при создании модели представляло соотношение между собой характерных размеров термопары и образца материала. При расчете, для соблюдения этих условий, требовалось определять динамическое трехмерное температурное поле конструкции.

Конечно-элементная модель, созданная с помощью программного пакета Nastran, представляет собой параллелепипед, моделирующий $\frac{1}{4}$ часть системы образец – датчик (рис. 2).

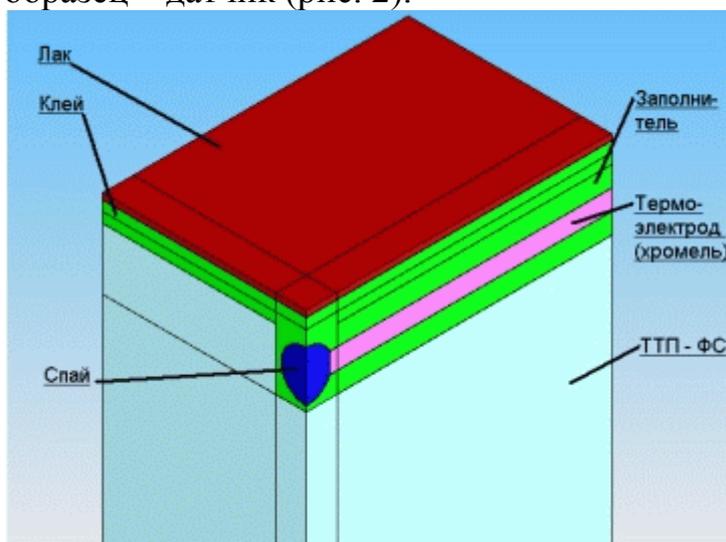


Рис.2. Модель образца материала с установленной в нем термопарой

Термопара является совокупностью отдельных конструктивных элементов со своими теплофизическими свойствами: термоэлектроды представлены цилиндрическими балками, имеющими идеальный контакт со сферой, моделирующей спай термопары.

В модели используются КЭ в виде тетраэдров (рис. 3). Ввиду различия более чем на порядок характерных размеров образца и термопары, сетка имеет сгущения в месте установки термопар (см. рис. 3), чтобы обеспечить требуемую точность расчета при разумных затратах машинного времени.

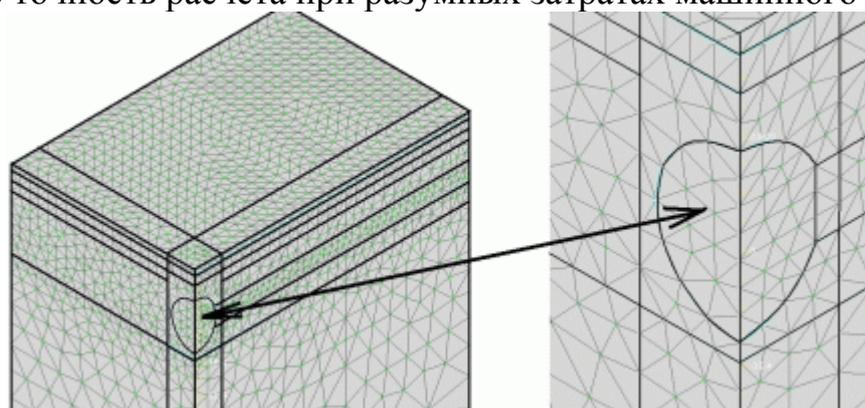


Рис. 3. КЭ сетка системы образец-датчик, увеличенное изображение спая термопары

Для целей исследования были созданы три различных КЭ модели, первая из которых моделирует температурное поле в образце без термопары (рис. 4а), а две другие отличаются расположением термодатчика в пазу (рис. 4б и 4в).

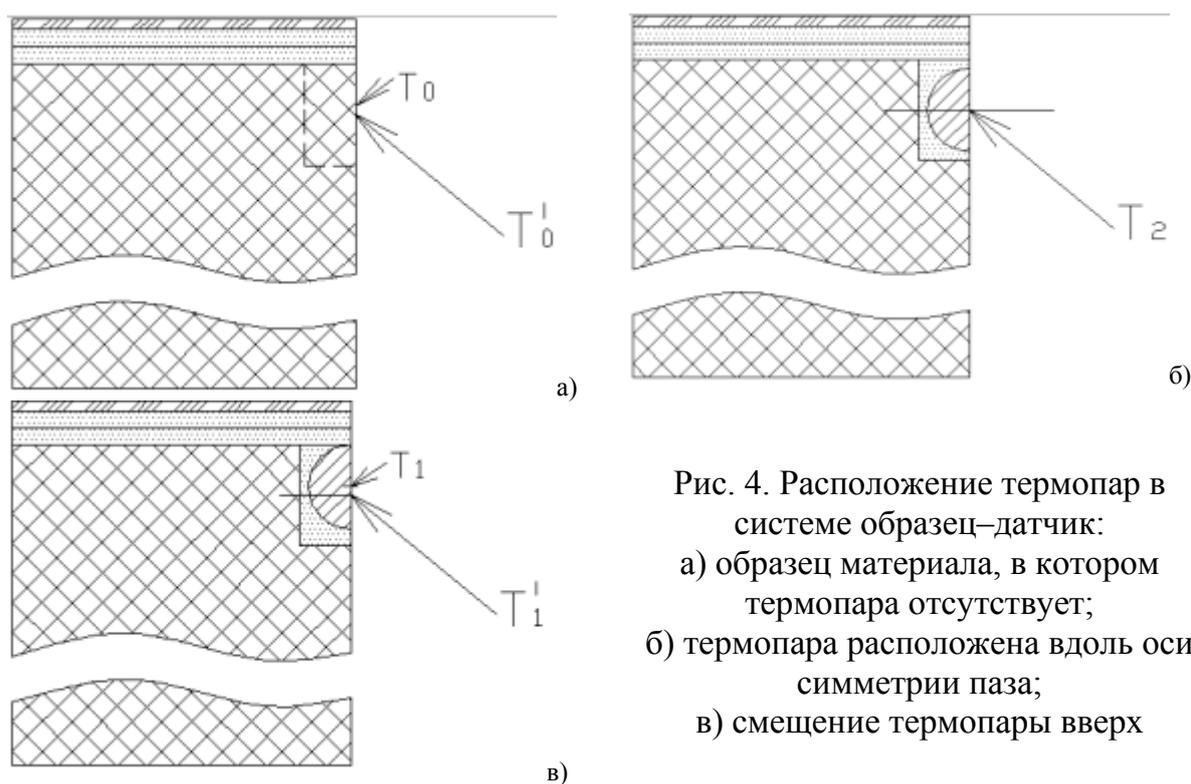


Рис. 4. Расположение термопар в системе образец–датчик:
 а) образец материала, в котором термопара отсутствует;
 б) термопара расположена вдоль оси симметрии паза;
 в) смещение термопары вверх

В качестве граничных и начальных условий примем следующие: начальная температура 293 К, тепловой поток на верхнюю торцевую поверхность $q = const$, на всех остальных поверхностях $q = 0$, начальный шаг по времени 0,1 с.

Оценка погрешности расчета, вносимой КЭ сеткой. Исследование с помощью МКЭ вносит свою погрешность в результаты расчета, связанную с невозможностью точной аппроксимации сферы и цилиндра - криволинейных поверхностей второго порядка. Для оценки погрешности, вносимой сеткой, в КЭ модели материалы элементов, моделирующих спай термопары, термоэлектроды и вещество, заполняющее паз, заменяют материалом образца. В этом случае расхождение значений температур в центре спаия термодатчика и в соответствующей точке образца при отсутствии датчика обусловлено только различием КЭ сеток моделей.

Влияние инородного тела (термопары) на температурное поле образца при учете излучения с верхней торцевой поверхности. Исследование проводилось для условий нагрева постоянным тепловым потоком $q = 1000$ Вт/м². Расчет без учета излучения показал, что установка в образец инородного тела – термопары приводит к искажению температурного поля, которое к 120 секунде составит $\Delta T_{02} = T'_0 - T_2 = 7,11 \pm 0,01$ К (рис. 5). Слагаемое $\pm 0,01$ представляет собой погрешность расчета, вносимую КЭ сеткой. При учете излучения ($\epsilon = 0,9$) с поверхности системы образец – датчик, график $\Delta T_{02}(t)$ будет иметь максимум, после прохождения которого методическая погрешность начинает снижаться (см. рис. 5).

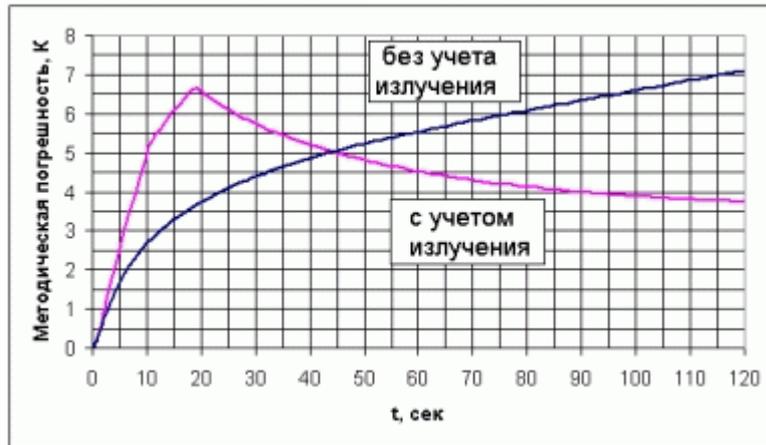


Рис. 5. Зависимость методической погрешности ΔT_{02} от времени с учетом излучения с поверхности системы образец – датчик

Проверка возможности использования упрощенной модели термопары. При использовании таких методов расчета, как метод элементарных балансов, аналитические методы и т.д., создание модели термопары в виде сферического спая и цилиндрических термоэлектродов может оказаться затруднительным. Было рассмотрено два варианта упрощения модели датчика – цилиндрическая балка (радиус балки равен радиусу термоэлектрода) и балка с квадратным сечением (площадь наружной поверхности балки и термоэлектрода равны). Получены следующие результаты расчета:

цилиндрическая балка: $\Delta T_{02} = T'_0 - T_2 = 6,73 \pm 0,01$ К,

балка с квадратным сечением: $\Delta T_{02} = T'_0 - T_2 = 6,68 \pm 0,01$ К,

цилиндрическая балка со спаем: $\Delta T_{02} = T'_0 - T_2 = 7,11 \pm 0,01$ К.

Можно заключить, что применение упрощенных моделей термопар при расчетах оправданно: отклонение полученного значения методической погрешности от вычисленного по модели с более высоким уровнем детализации не превышает 0,5 К.

Оценка влияния неточности установки термопары. В реальном эксперименте не всегда удается расположить термопару так, чтобы ее ось симметрии совпадала с центральной осью паза в образце. Для выявления влияния неточности установки термопары погрешность оценивалась по формуле: $\Delta T_{21} = T_2 - T'_1$. Были проведены вычислительные эксперименты в которых плотность теплового потока принимала значения 1000, 1500, 2000, 2500 Вт/м² (рис. 6).

Полученные результаты свидетельствуют, что при проведении натуральных экспериментов в условиях рассмотренных тепловых потоков ($q = 1000 \div 2500$ Вт/м²) неточностью установки термопары можно пренебречь, т.к. для датчиков этого типа при температурах до 400 °С допустимое отклонение составляет 4°С.

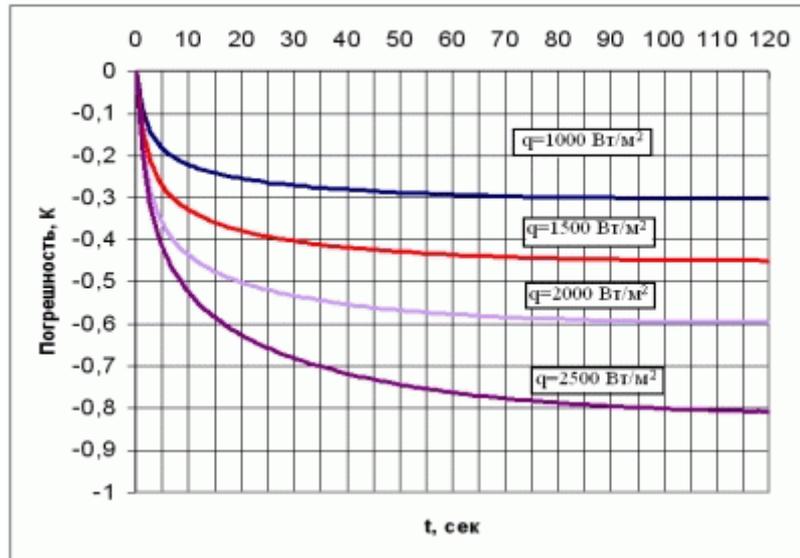


Рис. 6. График зависимости погрешности ΔT_{2I} от времени

Влияние материала термоэлектродов. Для измерения средних температур, создаваемых в образце тепловым потоком плотностью 1000 Вт/м^2 используют стандартные термопары следующих типов: хромель – алюмель, хромель – копель, медь – копель. Результаты исследования влияния теплофизических свойств термоэлектродов на величину методической погрешности сведены в таблицу:

Температуры для различных материалов термоэлектродов

T, К	Термопара хромель-алюмель		Термопара хромель - копель		Термопара медь - копель	
	Хромель	Алюмель	Хромель	Копель	Медь	Копель
T'_0	351,47	351,47	351,47	351,47	351,4726	351,47
T_2	344,36	344,49	344,63	344,69	344,71	344,71
ΔT_{02}	7,11	6,98	6,84	6,78	6,76	6,77

Поскольку материал термоэлектрода незначительно влияет на методическую погрешность, то рассмотрение вместо целостной модели ее $1/4$ части оправдано.

Влияние величины плотности поглощенного теплового потока. Выявлена линейная зависимость методической погрешности от величины постоянного теплового потока, прикладываемого к поверхности образца материала (рис. 7).

В ходе исследования искажений температурного поля конструкции, вносимых термопарным датчиком, были созданы КЭ модели, отражающие сложную форму термопары, учтено различие теплофизических свойств ее термоэлектродов, наличие спая, слоев лакокрасочного покрытия, клея и

заполнителя. Проведенный анализ методической погрешности позволяет повысить точность определения уровня нагрева образца материала для неметаллических конструкций под действием теплового потока на 5 - 15 % в зависимости от условий эксперимента.

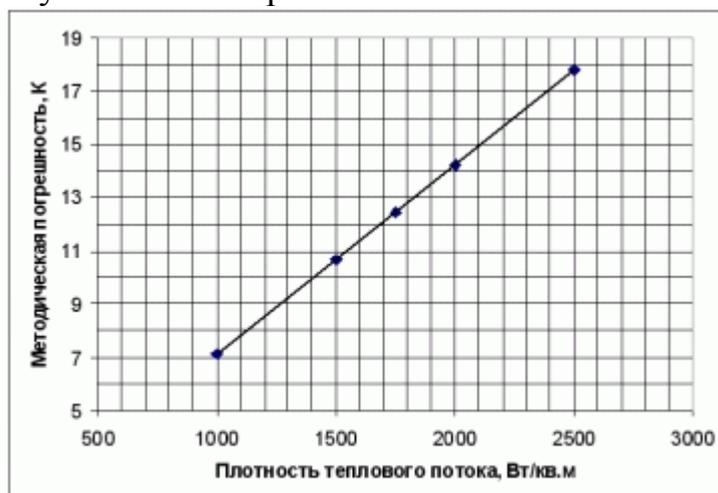


Рис. 7. Зависимость методической погрешности $\Delta T_{02} = T'_0 - T_2$ от величины теплового потока

Литература

1. Елисеев В.Н., Воротников В.И., Товстоног В.А., Соловов В.А. Оценка погрешности измерения поверхностной температуры полупрозрачного материала контактным датчиком// ИВУЗ, Машиностроение. 1981. №11, с. 77-81.
2. Ярышев Н.А. Теоретические основы измерения нестационарной температуры. Л.: Энергоатомиздат. 1990.
3. Reznik S.V., Prosuntsov P.V., Mikhalev A.M. and Kalinin D.Yu. Identification of Radiative and Conductive Heat Transfer Parameters at Presence of Errors in Initial Data//Inverse Problems and Experimental Design in Thermal and Mechanical Engineering. Proc. Eurotherm Seminar 68. 2001. pp. 293-300
4. Баранов А.Н., Давыдова В.В., Попова Т.А. и др. Методические погрешности измерения термодатчиками температуры тонкостенной металлической конструкции// Труды ЦАГИ. 2002. Вып. 2658.

ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОМ СФЕРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ

Бригадирова Т.Е., Медведский А.Л., Московский авиационный институт (ГТУ) Москва, Россия

1. Постановка задачи. Исследуются задачи дифракции плоской акустической волны на упругой неоднородной трансверсально-изотропной толстостенной сфере, помещенной в акустическую среду с параметрами ρ_0, c_0 и заполненной идеальной жидкостью с параметрами ρ_1, c_1 (частным случаем является сплошная сфера). Задача решается в осесимметричной постановке. Сфера характеризуется внутренним радиусом r_1 и внешним

$r_2 = R = 1$. Материал рассматриваемой толстостенной сферы является неоднородным и функционально-градиентным. В частности предполагается, что модули упругости и коэффициенты Пуассона материала $E(r), E_1(r), G_1(r), \nu(r), \nu_1(r)$ сферы зависят от радиальной координаты r и соответствуют трансверсально-изотропному случаю. В начальный момент времени среда находится в невозмущенном состоянии, а фронт плоской волны касается сферы в точке A .

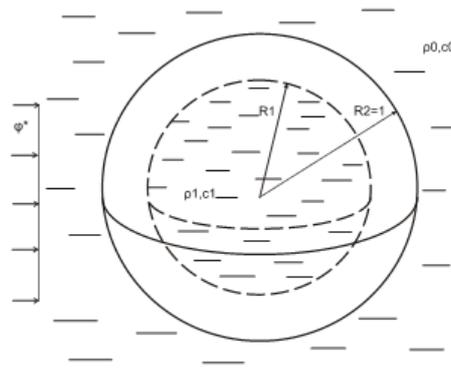


Рис.1.

Задача решается в безразмерном виде, при этом все линейные размеры отнесены к внешнему радиусу R , упругие постоянные и компоненты тензора к $E_* = E(R)$.

Задача решается в сферической системе координат $Or\theta\varphi$, начало которой совпадает с центром сферы.

Уравнения движения акустической среды в потенциалах, соответственно для внешней и внутренней сред, имеют вид (индекс 0 – соответствует внешней акустической среде, 1 – внутренней акустической среде) [1].

$$c_i^2 \Delta \varphi_i = \ddot{\varphi}_i, p_i = -\rho_i \dot{\varphi}_i, \vec{v}_i = \text{grad} \varphi_i, (i = 0, 1) \quad (1)$$

Неоднородная трансверсально-изотропная сфера описывается следующими зависимостями:

– уравнения движения в сферической системе координат в напряжениях:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \text{ctg} \theta) = \rho(r) \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \text{ctg} \theta + 3\sigma_{r\theta}}{r} = \rho(r) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}.$$

– соотношения Коши:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r} + \operatorname{ctg}\theta \frac{u_\theta}{r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right].\end{aligned}\quad (3)$$

– закон Гука для рассматриваемой трансверсально-изотропной упругой среды:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu_1 \frac{\sigma_{rr}}{E_1}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= -\nu \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{E} + \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu_1 \frac{\sigma_{rr}}{E_1}, \\ \varepsilon_{rr} &= -\nu_2 \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{E} - \nu_2 \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} + \frac{\sigma_{rr}}{E_1}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{\sigma_{r\theta}}{2G_1},\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}E &= E(r), \quad E_1 = E_1(r), \quad G_1 = G_1(r), \quad \nu_1 E(r) = \nu_2 E_1(r), \\ \alpha &= \frac{1-\nu}{\mu}, \quad \beta = \frac{\nu_2}{\mu}, \quad \gamma = \frac{1-\nu_1\nu_2}{\mu(1+\nu)}, \quad \eta = \frac{\nu + \nu_1\nu_2}{\mu(1+\nu)}, \quad \mu = 1 - \nu - 2\nu_1\nu_2,\end{aligned}$$

ν, ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона.

На границе соприкосновения двух сред задаются условия контакта:

– на внешней поверхности сферы:

$$v_{0r}^* \Big|_{r=1} + v_{0r} \Big|_{r=1} = \dot{u}_r \Big|_{r=1} \quad (5)$$

$$p_0^* \Big|_{r=1} + p_0 \Big|_{r=1} = \sigma_{rr} \Big|_{r=1} \quad (6)$$

$$\sigma_{r\theta} \Big|_{r=1} = 0 \quad (7)$$

где v_{0r}^* – радиальная компонента вектора скорости в падающей волне, v_{0r} – радиальная компонента вектора скорости в отраженной и излученной волнах;

– на внутренней поверхности сферы:

$$\dot{u}_r \Big|_{r=r_1} = v_{1r} \Big|_{r=r_1} \quad (8)$$

$$p_1 \Big|_{r=r_1} = \sigma_{rr} \Big|_{r=r_1} \quad (9)$$

$$\sigma_{r\theta} \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (10)$$

2. Расширенная постановка задачи. В работе рассмотрены задачи дифракции как гармонических, так и нестационарных волн на сферическом неоднородном включении. Для гармонического случая, справедливо следующее представление [2]:

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \Phi_i(r, \theta) e^{i\omega t}, \quad p_i = P_i(r, \theta) e^{i\omega t}, \quad u_r = U_r(r, \theta) e^{i\omega t}, \quad u_\theta = U_\theta(r, \theta) e^{i\omega t}, \\ \vec{v}_i &= \vec{V}_i(r, \theta) e^{i\omega t}, \quad \vec{v}_0^* = \vec{V}_0^*(r, \theta) e^{i\omega t}, \quad p_0^* = P_0^*(r, \theta) e^{i\omega t} \quad (i=0,1) \end{aligned} \quad (11)$$

где ω - круговая частота.

В этом случае уравнения движения акустической среды (1) представляются следующим образом:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta} \right) + k_i^2 \Phi_i = 0 \quad (12)$$

$$P_i = -\rho_i i\omega \Phi_i, \quad V_{ir} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial r}, \quad V_{i\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}, \quad k_i^2 = \omega^2 c_i^{-2}$$

На бесконечности задаются условия Зоммерфельда [2]:

$$\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + i\omega \Phi_0 \right) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad r \rightarrow \infty \quad (13)$$

Граничные условия контакта с учетом представления (11) примут вид:

– на внешней поверхности сферы:

$$V_{0r}^* \Big|_{r=r_1} + V_{0r} \Big|_{r=r_1} = i\omega U_r \Big|_{r=r_1} \quad (14)$$

$$P_0^* \Big|_{r=r_1} + P_0 \Big|_{r=r_1} = \sigma_{rr} \Big|_{r=r_1} \quad (15)$$

$$\sigma_{r\theta} \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (16)$$

– на внутренней поверхности сферы:

$$i\omega U_r \Big|_{r=r_1} = V_{1r} \Big|_{r=r_1} \quad (17)$$

$$P_1 \Big|_{r=r_1} = \sigma_{rr} \Big|_{r=r_1} \quad (18)$$

$$\sigma_{r\theta} \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (19)$$

Для нестационарной задачи используются соотношения (1) – (4) и граничные условия (5) – (10). Также в начальный момент времени $t=0$ среда находится в невозмущенном состоянии, что соответствует нулевым начальным условиям:

$$\varphi_0 \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_0 \Big|_{t=0} = \varphi_1 \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_1 \Big|_{t=0} = 0 \quad (20)$$

$$u_r \Big|_{t=0} = u_\theta \Big|_{t=0} = \dot{u}_r \Big|_{t=0} = \dot{u}_\theta \Big|_{t=0} = 0$$

Для акустической среды также ставятся условия ограниченности решения на бесконечности и в нуле:

$$\varphi_0(r, \theta, t) = O(1), \quad r \rightarrow \infty \quad (21)$$

$$\varphi_1(r, \theta, t) = o(1), \quad r \rightarrow 0$$

3. Метод неполного разделения переменных. Для решения поставленной задачи дифракции применяется метод неполного разделения переменных Фурье [2]. Представим искомые функции в виде разложений по ортогональным полиномам Лежандра [3]:

$$u_r(r, \theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(r, \tau) P_n(\cos \theta), \quad (22)$$

$$u_{\theta}(r, \theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(r, \tau) \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(r, \tau) P_n'(\cos \theta),$$

$$\sigma_{rr}(r, \theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rrn}(r, \tau) P_n(\cos \theta), \quad (23)$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{r\theta n}(r, \tau) P_n(\cos \theta).$$

$$\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \varphi_{ni}(r, t) \quad p_i = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) p_{ni}(r, t)$$

$$v_{ir} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) v_{irn}(r, t) \quad v_{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(\cos \theta) v_{i\theta n}(r, t) \quad (24)$$

$$v_{0r}^* = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) v_{0rn}^*(r, t) \quad p_0^* = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) p_{0n}^*(r, t)$$

$$i = 0, 1$$

Для коэффициентов рядов σ_{rrn} и $\sigma_{r\theta n}$ из (3) – (4) получим следующие соотношения:

$$\sigma_{rrn} = \alpha E_1(r) u'_{1n}(r, \tau) + \beta \frac{E_1(r)}{r} [2u_{1n}(r, \tau) - n_1 u_{2n}(r, \tau)], \quad (25)$$

$$\sigma_{r\theta n} = \frac{G_1(r)}{r} [u_{1n}(r, \tau) + r u'_{2n}(r, \tau) - u_{2n}(r, \tau)],$$

Далее введем дифференциальные операторы $L_i(u_{1n}, u_{2n})$, соответствующие коэффициентам рядов (25):

$$L_1(u, v) = \alpha E_1(r) u' + \beta \frac{E_1(r)}{r} [2u - n_1 v], \quad (26)$$

$$L_2(u, v) = \frac{G_1(r)}{r} [u + r v' - v]$$

Тогда представления (25) примут вид:

$$\sigma_{rrn} = L_1(u_{1n}, u_{2n}), \quad \sigma_{r\theta n} = L_2(u_{1n}, u_{2n}) \quad (27)$$

4. Постановка задачи относительно коэффициентов рядов. Используя разложения (22) – (24), получим следующие задачи относительно коэффициентов рядов.

1) Дифракция гармонических волн

– уравнения движения акустической среды

$$\Phi_{in}'' + \frac{2}{r} \Phi_{in}' - n_1 \frac{\Phi_{in}}{r^2} + k_i^2 \Phi_{in} = 0$$

$$P_{in} = -i\omega\rho_i\Phi_{in} \quad (28)$$

$$V_{irn} = \Phi'_{in} \quad V_{i\theta n} = \frac{\Phi_{in}}{r}$$

– уравнения движения сферы

при $n = 0$:

$$a_{12}u_{10}'' + a_{11}u_{10}' + a_0u_{10} = -\omega^2\rho\ddot{u}_{10}, \quad u_{20} \equiv 0 \quad (29)$$

при $n \in \mathbb{N}$

$$a_{12}u_{1n}'' + a_{11}u_{1n}' + a_{10}u_{1n} + b_{11}u_{2n}' + b_{10}u_{2n} = -\omega^2\rho u_{1n}, \quad (30)$$

$$b_{22}u_{2n}'' + b_{21}u_{2n}' + b_{20}u_{2n} + a_{21}u_{1n}' + a_{20}u_{1n} = -\omega^2\rho u_{2n},$$

где

$$a_0(r) = \frac{1}{r^2} \left[2\beta \left(rE_1'(r) + E_1(r) \right) - 2(\gamma + \eta)E(r) \right],$$

$$a_{12}(r) = \alpha E_1(r), \quad a_{11}(r) = \alpha \left[E_1'(r) + \frac{2E_1(r)}{r} \right],$$

$$a_{10}(r) = a_0(r) - \frac{n_1 G_1(r)}{r^2},$$

$$b_{11}(r) = -\frac{n_1}{r} \left[\beta E_1(r) + G_1(r) \right], \quad (31)$$

$$b_{10}(r) = \frac{n_1}{r^2} \left[G_1(r) + (\gamma + \eta)E(r) - \beta \left(rE_1'(r) + E_1(r) \right) \right],$$

$$b_{22}(r) = G_1(r), \quad b_{21}(r) = \left[G_1'(r) + \frac{2G_1(r)}{r} \right],$$

$$b_{20}(r) = -\frac{1}{r^2} \left[rG_1'(r) + 2G_1(r) + E(r)(n_1\gamma - \gamma + \eta) \right],$$

$$a_{21}(r) = \frac{1}{r} \left[G_1(r) + \beta E_1(r) \right], \quad a_{20}(r) = \frac{1}{r^2} \left[rG_1'(r) + 2G_1(r) + E(r)(\gamma + \eta) \right],$$

где $n_1 = n(n+1)$.

– условие Зоммерфельда на бесконечности и в нуле:

$$\left(\Phi'_{0n} + i\omega\Phi_{0n} \right) = o\left(\frac{1}{r} \right) \quad r \rightarrow \infty \quad \Phi_{1n}(r) = o(1) \quad r \rightarrow 0 \quad (32)$$

– условия контакта

$$V_{0rn}^* \Big|_{r=1} + V_{0rn} \Big|_{r=1} = i\omega U_{1n} \Big|_{r=1}$$

$$P_{0n}^* \Big|_{r=1} + P_{0n} \Big|_{r=1} = \sigma_{rm} \Big|_{r=1} \quad (33)$$

$$\sigma_{r\theta n} \Big|_{r=1} = 0$$

$$\begin{aligned}
i\omega U_{rn} \Big|_{r=r_1} &= V_{1rn} \Big|_{r=r_1} \\
P_{1n} \Big|_{r=r_1} &= \sigma_{rrn} \Big|_{r=r_1} \\
\sigma_{r\theta n} \Big|_{r=r_1} &= 0
\end{aligned} \tag{34}$$

2) Дифракция нестационарных волн.

– уравнения движения акустической среды

$$\begin{aligned}
\varphi_{in}'' + \frac{2}{r} \varphi_{in}' - n_1 \frac{\varphi_{in}}{r^2} &= c_i^{-2} \ddot{\varphi}_{in} \\
p_{in} &= -\rho_i \frac{\partial \varphi_{in}}{\partial \tau}
\end{aligned} \tag{35}$$

$$v_{irn}(r, t) = \varphi_{in}' \quad v_{i\theta n}(r, t) = \frac{\varphi_{in}}{r}$$

– уравнения движения сплошной среды

$$\begin{aligned}
a_{12} u_{1n}'' + a_{11} u_{1n}' + a_{10} u_{1n} + b_{11} u_{2n}' + b_{10} u_{2n} &= \rho \ddot{u}_{1n}, \\
b_{22} u_{2n}'' + b_{21} u_{2n}' + b_{20} u_{2n} + a_{21} u_{1n}' + a_{20} u_{1n} &= \rho \ddot{u}_{2n},
\end{aligned} \tag{36}$$

– условие ограниченности решения на бесконечности и в нуле

$$\varphi_{0n}(r, \tau) = O(1), \quad r \rightarrow \infty; \quad \varphi_{1n}(r, \tau) = o(1), \quad r \rightarrow 0 \tag{37}$$

– начальные условия:

$$\begin{aligned}
\varphi_{0n} \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_{0n} \Big|_{t=0} = \varphi_{1n} \Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_{1n} \Big|_{t=0} &= 0 \\
u_{1n} \Big|_{t=0} = u_{2n} \Big|_{t=0} = \dot{u}_{1n} \Big|_{t=0} = \dot{u}_{2n} \Big|_{t=0} &= 0
\end{aligned} \tag{38}$$

– условия контакта

$$\begin{aligned}
v_{0rn}^* \Big|_{r=1} + v_{0rn} \Big|_{r=1} &= \dot{u}_{1n} \Big|_{r=1} \\
p_{0n}^* \Big|_{r=1} + p_{0n} \Big|_{r=1} &= \sigma_{rrn} \Big|_{r=1}
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta n} \Big|_{r=1} &= 0 \\
\dot{u}_{1n} \Big|_{r=r_1} &= v_{1rn} \Big|_{r=r_1} \\
p_{1n} \Big|_{r=r_1} &= \sigma_{rrn} \Big|_{r=r_1} \\
\sigma_{r\theta n} \Big|_{r=r_1} &= 0
\end{aligned} \tag{40}$$

Далее воспользуемся некоторыми аналитическими решениями задач дифракции акустических волн на сферических включениях [1,2]. Это позволит свести задачу дифракции на неоднородном включении к решению краевой (гармоническая волна) или начально-краевой (нестационарная волна) задач для систем дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами.

5. Дифракция гармонической волны. Сведем решение задачи дифракции гармонической волны к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными

коэффициентами (30) со специальным видом краевых условий, учитывающих влияние как внешней, так и внутренней акустических сред.

Общее решение дифференциального уравнения для внешней среды (28), удовлетворяющее условиям на бесконечности (32) имеет вид [2]:

$$\Phi_{0n} = A_n^{(0)} h_n(k_0 r), \quad (41)$$

где $h_n(z)$ – сферические функции Ханкеля I рода [3], $A_n^{(0)}$ – константы интегрирования.

Из первого граничного условия на внешней поверхности сферы (39) найдем константы интегрирования $A_n^{(0)}$:

$$A_n^{(0)} = M_n^{-1} \left(i\omega U_{1n}|_{r=1} - V_{0rn}^*|_{r=1} \right), \quad M_n = k_0 \left(nk_0 h_n(k_0) - h_{n+1}(k_0) \right) \quad (42)$$

Учитывая второе соотношение (28), найдем давление во внешней среде:

$$P_{0n} = -i\omega \rho_0 M_n^{-1} \left(i\omega U_{1n}|_{r=1} - V_{0rn}^*|_{r=1} \right) h_n(k_0 r) \quad (43)$$

Следовательно, второе граничное условие в (39) примет вид:

$$P_{0n}^*|_{r=1} - i\omega \rho_0 \left(i\omega U_{1n}|_{r=1} - V_{0rn}^*|_{r=1} \right) h_n(k_0) M_n^{-1} = L_{1n}(u_{1n}, u_{2n})|_{r=1} \quad (44)$$

$$L_{2n}(u_{1n}, u_{2n})|_{r=1} = 0 \quad (45)$$

Для внутренней среды решение дифференциального уравнения (28) с учетом условия ограниченности решения в нуле (32) имеет вид [2]

$$\Phi_{1n} = A_n^{(1)} j_n(k_1 r) \quad (46)$$

где $j_n(z)$ – сферические функции Бесселя, $A_n^{(1)}$ – константы интегрирования.

Из первого граничного условия на внутренней поверхности сферы (34) найдем константы интегрирования $A_n^{(1)}$:

$$A_n^{(1)} = N_n^{-1}(r_1) i\omega U_{1n}|_{r=r_1}, \quad N_n(r) = j_n'(k_1 r) \quad (47)$$

Учитывая второе соотношение (28), найдем давление во внешней среде с учетом (47):

$$P_{1n} = \rho_1 \omega^2 U_{1n}|_{r=r_1} N_n^{-1}(r_1) j_n(k_1 r) \quad (48)$$

Тогда, второе граничное условие в (40) примет вид:

$$\rho_1 \omega^2 U_{1n}|_{r=r_1} N_n^{-1}(r_1) j_n(k_1 r_1) = L_{1n}(u_{1n}, u_{2n})|_{r=r_1} \quad (49)$$

$$L_{2n}(u_{1n}, u_{2n})|_{r=r_1} = 0 \quad (50)$$

Для нахождения напряженно-деформированного состояния, возникающего в сферическом слое, сведем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (30) к системе уравнений первого порядка, для этого введем новые переменные

$$v_{1n} = u'_{1n} \quad v_{2n} = u'_{2n} \quad (51)$$

Полученную систему представим в матричном виде:

$$\mathbf{R}(r) \frac{d\mathbf{U}}{dr} + \mathbf{M}(r) \mathbf{U} = 0, \quad (52)$$

где $\mathbf{U} = (u_{1n} \quad u_{2n} \quad v_{1n} \quad v_{2n})^T$, $\mathbf{R}(r) = (r_{ij})_{4 \times 4}$, $\mathbf{M}(r) = (m_{ij})_{4 \times 4}$.

Ниже приведены только ненулевые компоненты матриц $\mathbf{R}(r)$ и $\mathbf{M}(r)$.

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1, & r_{22} &= 1, & r_{33} &= a_{12}(r), & r_{44} &= b_{22}(r), & m_{13} &= -1, & m_{24} &= -1, \\ m_{31} &= a_{10}(r) + \rho\omega^2, & m_{32} &= b_{10}(r), & m_{33} &= a_{11}(r), & m_{34} &= b_{11}(r), \\ m_{41} &= a_{20}(r), & m_{42} &= b_{20}(r) + \rho\omega^2, & m_{43} &= a_{21}(r), & m_{44} &= b_{21}(r). \end{aligned}$$

Таким образом, решение гармонической задачи сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (52) с граничными условиями (44) – (45) и (49) – (50).

6. Дифракция нестационарной волны. Сведем решение задачи дифракции нестационарной волны на неоднородном сферическом препятствии к начально-краевой задаче для системы уравнений в частных производных с интегральным граничным оператором. Для этого используем аналитические решения для акустической среды в сферической системе координат [1].

Применим к соотношениям (35) и (40) преобразование Лапласа по времени τ (s – параметр преобразования, трансформанты обозначены чертой над соответствующими функциями).

$$\bar{\varphi}_{0n}'' + \frac{2}{r} \bar{\varphi}_{0n}' - \left(\frac{n_1}{r^2} + c_0^{-2} s^2 \right) \bar{\varphi}_{0n} = 0 \quad (53)$$

Общее решение уравнения (53) с учетом ограниченности (37) имеет вид:

$$\bar{\varphi}_{0n}(r, s) = C_n^{(0)}(s) r^{-1/2} K_{n+1/2}(s r c_0^{-1}) \quad (55)$$

где $K_{n+1/2}(z)$ - модифицированные функции Бесселя второго рода [3].

Найдем трансформанту компоненты вектора скорости $\bar{v}_{0rn} = \bar{\varphi}_{0n}'$:

$$\bar{v}_{0rn} = C_n^{(0)}(s) \left(r^{-1/2} K_{n+1/2}(s r c_0^{-1}) \right)' = C_n^{(0)} F_n^{(0)}(r, s), \quad (56)$$

где

$$F_n^{(0)}(r, s) = r^{-3/2} \left(n K_{n+1/2}(r s c_0^{-1}) - r s c_0^{-1} K_{n+3/2}(r s c_0^{-1}) \right) \quad (57)$$

Подставляя выражение (56) в первое граничное условие (39), записанное в изображениях, найдем константу $C_n^{(0)}$:

$$C_n^{(0)}(s) = \frac{1}{F_n^{(0)}(1, s)} \left[s \bar{u}_{1n}(1, s) - \bar{v}_{0rn}^*(1, s) \right], \quad (58)$$

Следовательно, из (35) для трансформанты давления \bar{p}_{0n} получим следующее выражение:

$$\bar{p}_{0n}(r, s) = -\rho_0 s \bar{\varphi}_{0n}(r, s) = -\frac{\rho_0 s r^{-1/2} K_{n+1/2}(s r c_0^{-1})}{F_n^{(0)}(1, s)} [s \bar{u}_{1n}(1, s) - \bar{v}_{0rn}^*(1, s)] \quad (59)$$

Далее для трансформанты давления (59) введем следующие переходные функции:

$$\bar{G}_{n0}^{(1)}(r, s) = -\frac{\rho_0 s^2 r^{-1/2} K_{n+1/2}(s r c_0^{-1})}{F_n^{(0)}(1, s)}, \quad \bar{G}_{n0}^{(2)}(r, s) = \frac{\rho_0 s r^{-1/2} K_{n+1/2}(s r c_0^{-1})}{F_n^{(0)}(1, s)}, \quad (60)$$

Тогда для давления в пространстве оригиналов получим [1]:

$$p_{0n}(r, \tau) = \int_0^\tau u_{1n}(1, t) G_{n0}^{(1)}(r, \tau - t) dt + \int_0^\tau v_{0rn}^*(1, t) G_{n0}^{(2)}(r, \tau - t) dt \quad (61)$$

Оригиналы переходных функций $G_{n0}^{(k)}$, ($k=1,2$) определяются с помощью теории вычетов, так как в пространстве изображений $\bar{G}_{n0}^{(k)}$ являются дробно-рациональными функциями относительно параметра преобразования s [1].

В частности, на поверхности сферы будем иметь следующие граничные условия интегрального вида:

$$p_{0n}^*(1, \tau) + \int_0^\tau u_{1n}(1, t) G_{n0}^{(1)}(1, \tau - t) dt + \int_0^\tau v_{0rn}^*(1, t) G_{n0}^{(2)}(1, \tau - t) dt = L_1(u_{1n}, u_{2n})|_{r=1} \quad (62)$$

$$\sigma_{r\theta n}|_{r=1} = L_2(u_{1n}, u_{2n})|_{r=1} = 0$$

Аналогично получим интегральные граничные условия на внутренней поверхности сферы.

Ограниченное в нуле решение уравнения (53) имеет вид:

$$\bar{\varphi}_{1n}(r, s) = C_n^{(1)}(s) r^{-1/2} I_{n+1/2}(r s c_0^{-1}), \quad (63)$$

где $I_{n+1/2}(z)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода [3].

Для константы $C_n^{(1)}(s)$ из первого граничного условия (40) получим следующее выражение:

$$C_n^{(1)}(s) = \frac{s \bar{u}_{1n}(r_1, s)}{D_n(r_1, s)}, \quad (64)$$

$$\text{где: } D_n(r, s) = r^{-3/2} \left(n I_{n+1/2}(r s c_1^{-1}) + s r c_1^{-1} I_{n+3/2}(r s c_1^{-1}) \right) \quad (65)$$

Тогда для давления p_{1n} в пространстве оригиналов получим выражение, аналогичное (61):

$$p_{1n}(r, \tau) = \int_0^\tau u_{1n}(r_1, t) G_{n1}(r, \tau - t) dt \quad (66)$$

где трансформанта переходной функции $G_{n1}(r, \tau)$ имеет вид:

$$\bar{G}_{n1}(r, s) = -\frac{\rho_1 s^2 r^{-1/2}}{D_n(r_1, s)} I_{n+1/2}(s r c_1^{-1}). \quad (67)$$

Оригинал выражения (67) также находится с помощью теории вычетов.

В итоге на внутренней поверхности сферы будем также иметь граничные условия интегрального вида:

$$\int_0^\tau u_{1n}(r_1, t) G_{n0}(r_1, \tau - t) dt = L_1(u_{1n}, u_{2n}) \Big|_{r=r_1} \quad (68)$$

$$\sigma_{r\theta n} \Big|_{r=r_1} = L_2(u_{1n}, u_{2n}) \Big|_{r=r_1} = 0$$

Введением новых переменных

$$w_{1n} = \dot{u}_{1n} \quad w_{2n} = \dot{u}_{2n} \quad v_{1n} = u'_{1n} \quad v_{2n} = u'_{2n}, \quad (69)$$

соотношения (36) приводятся к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с переменными коэффициентами, которую запишем в матричном виде:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \mathbf{R}(r) \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial r} + \mathbf{M}(r) \bar{\mathbf{U}} = 0, \quad (70)$$

где $\mathbf{U} = (u_{1n} \ u_{2n} \ w_{1n} \ w_{2n} \ v_{1n} \ v_{2n})^T$, $\mathbf{R}(r) = (r_{ij})_{6 \times 6}$, $\mathbf{M}(r) = (m_{ij})_{6 \times 6}$.

Приведем только ненулевые компоненты матриц \mathbf{R} и \mathbf{M} :

$$r_{35} = \rho(r)^{-1}, \quad r_{46} = \rho(r)^{-1}, \quad r_{53} = a_{12}(r), \quad r_{64} = b_{22}(r),$$

$$m_{12} = -1, \quad m_{25} = \rho^{-1}, \quad m_{51} = a_{10}(r), \quad m_{52} = b_{10}(r), \quad m_{53} = a_{11}(r),$$

$$m_{54} = b_{11}(r), \quad m_{61} = b_{20}(r), \quad m_{62} = a_{20}(r), \quad m_{63} = b_{21}(r), \quad m_{64} = a_{21}(r).$$

Таким образом, получили начально-краевую задачу для системы (70), с граничными условиями (62) и (68) и следующими однородными начальными условиями:

$$\mathbf{U} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (71)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00042).

Литература

1. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.:Наука, - 1990. – 260 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – Киев: Наукова думка, - 1978. – 303 с.
3. Справочник по специальным функциям. Под. ред. Абрамовица М., Стиган И. – М.:Наука, 1979. – 830 с.

РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ СУДОРЕМОНТНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ КАК СОСТАВНОЙ ЧАСТИ ВИРТУАЛЬНОГО СРП

Вайнер-Прима Д.А., Быстрицкий В.В. (ГМТУ)

В течение последнего десятилетия целенаправленные усилия судовладельцев, НИИ и ЦКБ-проектантов, судостроительных и судоремонтных предприятий привели к тому, что методы и средства информационной поддержки жизненного цикла судов нашли своё отражение в концепции CALS (Continuous Acquisition and Life-Cycle Support)- или ИПИ-технологий (информационная поддержка изделий). В связи с этим процессы проектирования, технологической подготовки производства и постройки судов, реализуемые в рамках CALS-технологий, потребовали организации единого информационного пространства, которое должно объединять автоматизированные системы, предназначенные для решения различных задач инженерной деятельности (проектирования, конструирования, инженерного анализа, технологической подготовки производства, управления документами и проектами), планирования и управления производством и ресурсами предприятия. В единый процесс вовлекается множество судовладельцев, проектно-конструкторских, судостроительных, судоремонтных и иных организаций и предприятий с удаленным доступом к информации, прямой передачей информации от одной организации к другой и т.д.

Расширение международной кооперации при постройке и особенно при ремонтах, модернизациях, переоборудованиях и технических обслуживании судов приводит к необходимости использования комплексных информационных систем на всех этапах жизненного цикла судна любого назначения. В соответствии с международным стандартом ИСО 9000 к числу этих этапов относятся в первую очередь проектирование и\или разработка технических требований к создаваемой продукции, материально-техническое обеспечение производства, подготовка и разработка технологических процессов, производство, монтаж, контроль, проведение испытаний и обследований, эксплуатация, техпомощь при техническом обслуживании, утилизация по завершении функционального использования судна или судовых технических средств.

Предприятия, владеющие современными CALS-технологиями, получают возможность участвовать в международной кооперации разделения труда, становятся более конкурентоспособными. Важной особенностью информационной поддержки жизненного цикла является организация обмена данными между автоматизированными системами, участвующими в процессах проектирования, постройки, эксплуатации и утилизации судов. В каждой из них создается своя специфическая информация о судне. Совокупность множества моделей создает

интегрированное целостное описание судна, которое сопровождает его на всем протяжении жизненного цикла.

В то же время предприятия, отвечающие на каждом из этапов жизненного цикла судна за проектирование, постройку, эксплуатацию, ТО и ремонты, утилизацию такого сложного инженерного сооружения, как судно, обычно занимаются решением огромного числа организационно-производственных вопросов создания и поддержания его состояния в соответствии с функциональным назначением. Кроме того, производством количества деталей, узлов и оборудования судов и плавтехсредств заняты тысячи других предприятий нередко различных стран. В условиях жесткой конкурентной борьбы при распределении заказов побеждает то предприятие, которое, используя передовые технологии, готово предложить более выгодные условия сотрудничества, ускорить проектирование, постройку, ремонт, модернизацию или переоборудование, поставку судовых технических средств и обеспечить необходимое качество работ.

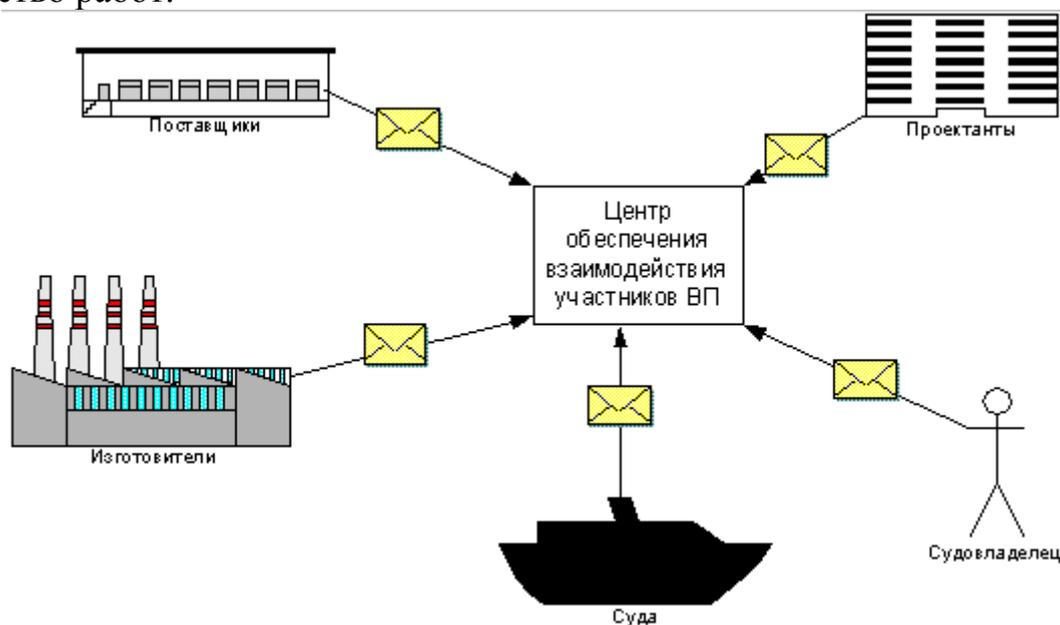


Рисунок 1. Принципы функционирования виртуального предприятия.

Одной из реализаций идеологии ИПИ является концепция виртуального предприятия, выстраивающего временную сеть заказчиков, исполнителей и поставщиков услуг и обеспечивающего информационное взаимодействие и объединение предприятий и организаций, участвующих в жизненном цикле продукции, в данном случае – судна. Виртуальное предприятие (см. рис. 1), занимающееся ремонтом и техническим обслуживанием судов, должно представлять собой сетевую, компьютерно интегрированную межорганизационную структуру, объединяющую многообразные неоднородные ресурсы, расположенные в различных местах, и создаваемую на ограниченный период, главная цель которой –

наиболее выгодное удовлетворение потребностей заказчика-судовладельца.

С включением заказчиков, проектантов, исполнителей и множество различных других организаций в единую открытую сеть границы между этими взаимодействующими организациями становятся подвижными, нечеткими и прозрачными. Таким образом, важнейшей характеристикой виртуальной судоремонтной организации является гибкая, адаптивная, динамичная сетевая структура, создаваемая путем информационной интеграции различных ресурсных сред партнеров. Задача формирования такой виртуальной метаорганизации – в создании структуры предприятий и организаций, вся деятельность которых сводится к выполнению техобслуживания и ремонта судна в установленные сроки, с заданным качеством и за приемлемую для заказчика стоимость работ.

Принцип действия виртуального предприятия при выполнении задач судоремонта может быть следующим. Имеется три роли объектов:

- клиент, получающий услуги;
- организация, предоставляющая услуги
- координатор, регулирующий предоставление услуг.

Для задачи судоремонта, эти роли реализуются в следующих организационных объектах:

- клиент – судно, нуждающееся в ремонте;
- организация – судоремонтное предприятие (СРП), способное отремонтировать судно;
- координатор – судовладелец, выбирающий СРП для судна.

Судовладелец координирует взаимодействие судна и СРП, т.е. является связующим звеном между ними. Судовладелец при выборе СРП для судна должен получить информацию как о судне, подлежащем ремонту, так и СРП, предлагающем свои услуги. Для автоматизации процессов получения данных и принятия решения эта информация должна поступать в стандартизированном виде. В качестве основы для такого стандарта предлагается формат XML [1]. В итоге, для функционирования виртуального СРП (ВСРП), решающего задачи организации судоремонта, необходимы следующие информационные объекты:

- информационная модель (ИМ) судна, согласно которой выбираются оказываемые услуги, а также параметры этих услуг;
- ИМ СРП, определяющая предлагаемые услуги;
- программное обеспечение центра принятия решений (ЦПР), которое выберет СРП для каждого судна, согласно определенным критериям.

Согласно вышеприведенному списку следует, что одной из функций ВСРП является управление автоматизированным тендером для предприятий, предлагающих свои услуги на том или ином этапе выполнения работ.

Первоочередные задачи ЦПР ВСРП следующие:

- поиск одного или нескольких предприятий, способных выполнить конкретный ремонт данного судна;
- ранжирование найденных предприятий по ряду важнейших критериев (например, время перехода судна до потенциального СРП, ориентировочная стоимость выполнения работ, их продолжительность и т.д.);
- выбор головного СРП на базе интегрального критерия, определяющего целесообразность проведения работ на данном СРП для заказчика-судовладельца.

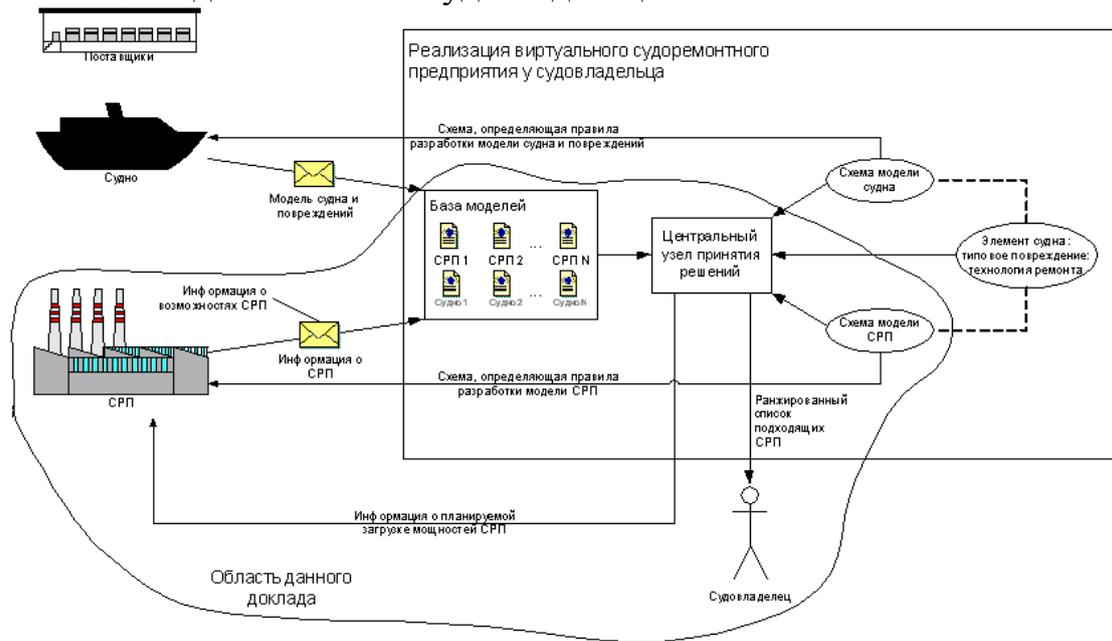


Рисунок 2. Концептуальная схема виртуального СРП.

В рассматриваемом примере (см. рис. 2) система обеспечения взаимодействия между участниками ВСРП располагается у судовладельца. Эта информационная система состоит из базы ИМ, программного средства принятия решений и схем-XSD, регламентирующих формат информации поступающей от судна и от СРП. В этой системе также хранится ИМ, сопоставляющая типовые работы TOP по элементам судна с типовыми ресурсами СРП.

Технические службы нескольких СРП отправляют информацию о своих предприятиях в виде ИМ СРП. Эти ИМ вместе с ИМ судов собираются в базе ИМ у судовладельца. Судовладелец от ЦПР получает ранжированный список предпочтительных СРП по каждому судну. По команде судовладельца в выбранное СРП поступает автоматически сформированный файл проекта ремонта судна.

Задача данной статьи – рассмотреть состав и структуру ИМ СРП в ВСРП.

Для реализации перечисленных задач ЦПР ВСРП, каждое СРП, участвующее в ВСРП, должно разработать формализованную информационную модель, включающую:

- географические координаты СРП;
- перечень технологического оборудования и сооружений;
- технологические параметры этого оборудования;
- информацию о загрузке этого оборудования;
- стоимость использования данного оборудования.

В настоящее время большинство СРП используют автоматизированные системы класса ERP (Enterprise Resource Planning – управление ресурсами предприятия) [2]. В этих системах хранится информация, которая должна быть в ИМ СРП. В качестве упрощенного аналога таких систем можно рассмотреть MS Project, как наиболее простое и распространенное средство управления проектами и ресурсами.

Рабочие данные в MS Project разнесены по нескольким файлам (см. Рисунок 3):

- Один файл ресурсов СРП;
- Множество файлов проектов СРП.

Очевидно, что информация о ресурсах СРП в MS Project хранится централизованно. Такой принцип хранения информации позволяет избежать назначения одного ресурса (напр., дока) на несколько проектов по ремонту судов.

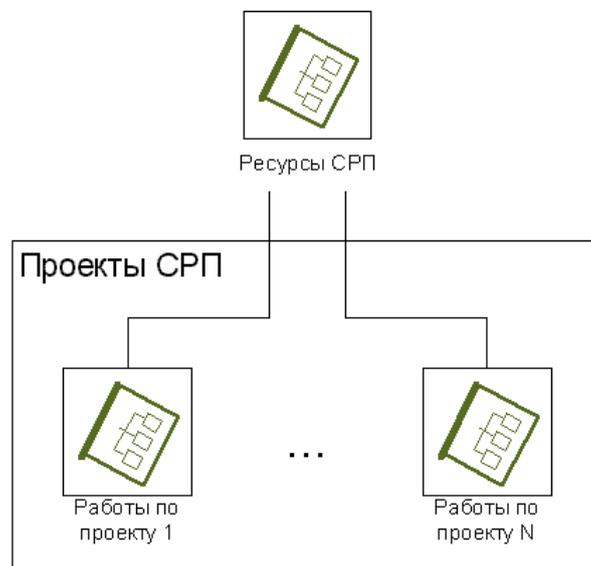


Рисунок 3. Организация информации о СРП в программе MS Project.

Файл ресурсов MS Project удовлетворяет требованиям к составу ИМ СРП и поэтому может служить источником данных для нее. В то же время, MS Project имеет возможность выгружать информацию о ресурсах и работах в обменный файл XML. Исходя из этого, считается целесообразным в качестве стандарта ИМ СРП использовать обменный файл XML программы MS Project.

Литература

1. <http://www.w3.org/XML/>;
2. <http://www.citforum.ru/consulting/ERP/>.

УДК 539.3

ШАРНИРНО ОПЕРТАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНКА С КОЛОННАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ

*Видюшенков С.А., Опякин В.С., Рындин И.П., Соколов Е.В.
(Санкт-Петербургский институт машиностроения)*

Строится разрешающее дифференциальное уравнение для прямоугольной пластинки, поддерживаемой несколькими колоннами с учетом действия на нее равномерного давления и сосредоточенных сил и моментов в месте контакта пластинки с колоннами. Решение строится для пластинки, шарнирно опертой по контуру.

HINGE LEANED ALONG ALL OUTLINE RECTANGULAR PLATE SUPPORTED BY SEVERAL COLUMNS WITH ACTION ON IT OF UNIFORM PRESSURE

*Vidyushenkov S.A., Opyakin V.S., Rindin I.P., Socolov E.V.
(St.-Petersburg institute of Machine-building, Russia)*

The different equation for rectangular plate is constructed. This plate is supported by several columns with accountion of action on it uniform pressure and consentrated forces and moments at the places of connection of plate with columns. Solution is constructed for plate hinge leaned along all outline.

Рассмотрим случай шарнирно опертой по контуру прямоугольной пластинки, поддерживаемой четырьмя симметрично расположенными одинаковыми колоннами. При этом будем считать, что пластинка находится под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис.1).

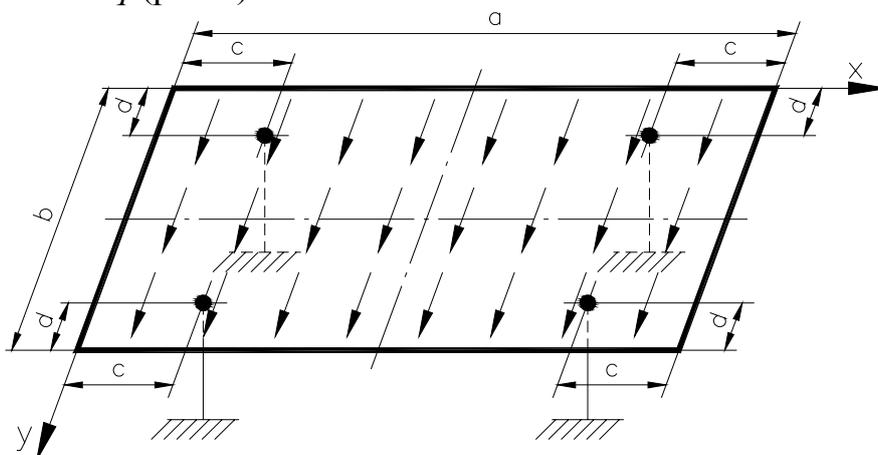


Рис.1. Схема пластинки с четырьмя колоннами

В работе [1] показано, что в местах расположения колонн за счет их взаимодействия с пластинкой возникают вертикальные реакции V и реактивные моменты M_x и M_y .

Так как колонны расположены симметрично относительно продольной и поперечной осей пластинки, то реакции V равны:

$$V = \frac{q}{4} ab. \quad (1)$$

В то же время реактивные моменты M_x и M_y во всех опорах также равны, но могут быть определены только из условий совместного деформирования пластинки и колонн. По этой причине данная задача является два раза статически неопределимой и неизвестными силовыми факторами в ней являются моменты M_x и M_y . Следовательно для решения задачи необходимо знать не только цилиндрическую жесткость пластинки D , но и жесткость на сжатие EF и изгиб EJ .

В соответствии с [1] исходное расчетное дифференциальное уравнение для такой пластинки запишется в форме:

$$D\nabla^4 W = q + \phi_1(V) + \phi_2(M_x) + \phi_3(M_y), \quad (2)$$

где

$$\phi_1(V) = -\frac{q}{4} ab \{ \delta(x-c)\delta(y-d) + \delta(x-c)\delta[y-(b-d)] + \delta[x-(a-c)]\delta(y-d) + \delta[x-(a-c)]\delta[y-(b-d)] \};$$

$$\phi_2(M_x) = M_x \{ -\delta'(x-c)\delta(y-d) - \delta'(x-c)\delta[y-(b-d)] + \delta'[x-(a-c)]\delta(y-d) + \delta'[x-(a-c)]\delta[y-(b-d)] \};$$

$$\phi_3(M_y) = M_y \{ -\delta(x-c)\delta'(y-d) - \delta(x-c)\delta'[y-(b-d)] + \delta[x-(a-c)]\delta'(y-d) + \delta[x-(a-c)]\delta'[y-(b-d)] \},$$

где $\nabla^4 W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}$ – бигармонический дифференциальный

оператор в декартовых координатах; W – прогиб пластинки; $\delta'_x(x)$ и $\delta'_y(y)$ – производные от дельта-функций по x и y соответственно.

Как известно [2] для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по контуру граничные условия имеют следующий вид:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=a \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \text{ и при } y=0 \text{ и } y=b \quad W = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

Таким граничным условиям удовлетворяет прогиб пластинки, представленный в такой форме:

$$W(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (3)$$

где коэффициенты A_{mn} определяются в процессе решения задачи.

В то же время правую часть уравнения (2) необходимо разложить в двойной тригонометрический ряд Фурье по синусам и учесть при определении коэффициентов Фурье фильтрующие свойства дельта-функции и их первых производных

$$\begin{cases} \varphi(x)\delta(x-\alpha) = \varphi(\alpha)\delta(x-\alpha); \\ \varphi(x)\delta'_x(x-\alpha) = \varphi(\alpha)\delta'(x-\alpha) - \varphi'(\alpha)\delta(x-\alpha); \\ f(y)\delta(y-\beta) = f(\beta)\delta(y-\beta); \\ f(y)\delta'_y(y-\beta) = f(\beta)\delta'(y-\beta) - f'(\beta)\delta(y-\beta); \end{cases} \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ и $f(y)$ – функции, непрерывные на рассматриваемом промежутке интегрирования.

Подставляя значения прогиба $W(x, y)$, определяемое формулой (3), в левую часть уравнения (2) и раскладывая при этом его правую часть в ряд Фурье по синусам $\sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$, получим

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [B_{mn}q + C_{mn}V + D_{mn}M_x + E_{mn}M_y] \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (5)$$

где $B_{mn} = \frac{4ab}{\pi^2 mn}$ при m и n нечетных;

$$C_{mn} = -4 \sin \frac{m\pi}{a} c \sin \frac{n\pi}{b} d \text{ при } m \text{ и } n \text{ нечетных};$$

$$D_{mn} = -4 \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} c \sin \frac{n\pi}{b} d \text{ при } m \text{ и } n \text{ нечетных};$$

$$E_{mn} = -4 \frac{m\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} c \cos \frac{n\pi}{b} d \text{ при } m \text{ и } n \text{ нечетных}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях $\sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$ найдем величины коэффициентов A_{mn} . Они равны

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 ab} (B_{mn}q + C_{mn}V + D_{mn}M_x + E_{mn}M_y). \quad (6)$$

$(m = 1, 3, 5, \dots)$

Коэффициент A_{mn} можно преобразовать к такому виду:

$$A_{mn} = \frac{16qa^4}{D\pi^6 \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \cdot \frac{1}{mn} Q_{mn}, \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (7)$$

где

$$Q_{mn} = 1 - \frac{\pi^2}{4} mn \sin \frac{m\pi}{a} c \sin \frac{n\pi}{b} d - \frac{\pi^3}{a^2 b} m^2 n \cos \frac{m\pi}{a} c \sin \frac{n\pi}{b} d \frac{M_x}{q} -$$

$$- \frac{\pi^3}{ab^2} mn^2 \sin \frac{m\pi}{a} c \cos \frac{n\pi}{b} d \frac{M_y}{q}.$$

Следовательно, прогиб пластинки W можно переписать в таком виде:

$$W(x, y) = \frac{16qa^4}{D\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{mn}}{mn} \frac{1}{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y. \quad (8)$$

Для дальнейшего решения необходимо знать аналитические зависимости для углов поворота и изгибающих моментов. Так, углы поворота пластинки в направлении оси $x - V^x$ и в направлении оси $y - V^y$ определяются по формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} V^x = \frac{\delta W}{\delta x} = \frac{16qa^3}{D\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{mn}}{n} \frac{1}{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y. \\ V^y = \frac{\delta W}{\delta y} = \frac{16qa^3}{D\pi^5} \left(\frac{a}{b} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{mn}}{m} \frac{1}{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \end{array} \right. \quad (9)$$

$(m = 1, 3, 5, \dots)$

В то же время изгибающие моменты M_x и M_y записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
M_x^u &= -D \left(\frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \nu \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right) = \\
&= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{mn}}{mn} \frac{\left(m^2 + \nu n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)}{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \\
M_y^u &= -D \left(\nu \frac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 W}{\delta y^2} \right) = \\
&= \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{mn}}{mn} \frac{\left(\nu m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)}{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (10)
\end{aligned}$$

Величины реактивных моментов M_x и M_y могут быть найдены из условий равенства углов поворота пластинки и каждой из колонн в месте их соединения. Так как колонны расположены симметрично относительно продольной и поперечной оси пластинки, эти условия могут быть составлены только для одной произвольно выбранной колонны. В данном случае эти условия составим для колонны с координатами $x = c$ и $y = d$.

$$V^x(c, d) = V_K^x = \frac{M_x l}{EJ_x}; \quad V^y(c, d) = V_K^y = \frac{M_y l}{EJ_y}, \quad (11)$$

где V_K^x и V_K^y – углы наклона колонны в направлении осей x и y ;

EJ_x и EJ_y – жесткости колонн относительно осей x и y .

При составлении уравнений для определения реактивных моментов M_x и M_y для каждого из возможных вариантов значений m и n используем соотношения (9), в которых нужно положить $x = c$ и $y = d$ и из коэффициента Q_{mn} выделить слагаемые, содержащие значения M_x и M_y .

Тогда получим

$$\begin{cases} A_{11}M_x + B_{12}M_y = C_1q; \\ A_{21}M_x + B_{22}M_y = C_2q; \end{cases} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (12)$$

$$\text{где } A_{11} = \frac{16}{D\pi^2} \left(\frac{a}{b}\right) \frac{m^2}{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \cos^2 \frac{m\pi}{a} c \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{b} d + \frac{l}{EJ_x};$$

$$B_{12} = \frac{16}{D\pi^2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{mn}{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} c \cdot \cos \frac{m\pi}{a} c \cdot \cos \frac{n\pi}{b} d \cdot \sin \frac{n\pi}{b} d;$$

$$A_{21} = \frac{16}{D\pi^2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{mn}{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} c \cdot \cos \frac{m\pi}{a} c \cdot \cos \frac{n\pi}{b} d \cdot \sin \frac{n\pi}{b} d;$$

$$B_{22} = \frac{16}{D\pi^2} \left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{n^2}{\left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin^2 \frac{m\pi}{a} c \cdot \cos^2 \frac{n\pi}{b} d + \frac{l}{EJ_y};$$

$$C_1 = \frac{16a^3}{D\pi^5} \frac{1 - \frac{\pi^2}{4} mn \cdot \sin \frac{m\pi}{a} c \cdot \sin \frac{n\pi}{b} d}{n \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \cos \frac{m\pi}{a} c \cdot \sin \frac{n\pi}{b} d;$$

$$C_2 = \frac{16a^3}{D\pi^5} \left(\frac{a}{b}\right) \frac{1 - \frac{\pi^2}{4} mn \cdot \sin \frac{m\pi}{a} c \cdot \sin \frac{n\pi}{b} d}{m \left(m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi}{a} c \cdot \cos \frac{n\pi}{b} d.$$

Найденные для каждой из гармоник значения M_x и M_y в местах расположения колонн подставляются в уравнение для определения прогибов и изгибающих моментов. В заключении производится суммирование всех составляющих прогиба и изгибающих моментов и дается анализ полученных результатов.

Литература

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
2. Соколов Е. В., Опякин В. С. Постановка задачи по определению напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластинки, расположенной на нескольких колоннах // Диагностика, эксплуатация, ремонт, восстановление, модернизация оборудования. Современные технологии: Сборник докладов 3-й

ПОВРЕЖДЕНИЕ МАТЕРИАЛА ПРИ ИЗГИБЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Власов Н.М., Федик И.И.

*Научно-исследовательский институт Научно-производственное
объединение "Луч", 142100 г. Подольск Московской области,
Железнодорожная 24, Россия*

Обсуждается влияние поля напряжений при изгибе цилиндрической оболочки на кинетику роста гидридной фазы. Результаты математического моделирования привлекаются для объяснения водородного охрупчивания сплавов на основе циркония.

DAMAGE TO MATERIAL AT CYLINDRICAL CLADDING BENDING

Vlasov N.M., Fedik I.I.

*Scientific Research Institute Scientific Industrial Association "Luch",
Zheleznodorozhnaya 24, Podolsk, Russia, 142100,*

Stress field influence at cylindrical cladding bending on the kinetics of growing hydride phase is discussed. Mathematical modelling results are used to explain hydrogen embrittlement of alloys based on zirconium.

Элементы конструкций энергетических установок работают при высоких температурах. Это приводит к интенсивному протеканию диффузионных процессов. Последние чувствительны к уровню и характеру распределения напряжений различной физической природы: температурных, остаточных, в окрестности структурных дефектов. В поле внутренних напряжений происходит расслоение твердого раствора и образование выделений новой фазы. Кинетика формирования неоднородной структуры при наличии остаточных напряжений в цилиндрической оболочке рассмотрена в работах [1,2]. Напряжения в элементах конструкций возникают и при действии механических нагрузок. К числу последних принадлежат изгиб, растяжение, сжатие, сдвиг. Так, например, изгибу подвергаются вогнутости трубопроводов или оболочек тепловыделяющих элементов при внутреннем давлении. Сечение стенки трубопровода или оболочки в окрестности вогнутости находится под действием изгибающего момента. В качестве упругой модели подобных систем приемлем чистый изгиб кривых брусьев [3].

Кривой брус постоянного сечения изгибается моментами в плоскости кривизны. Компоненты тензора напряжений (плоское напряженное состояние) определяются соотношениями [3]

$$\sigma_{rr} = -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2 \right), \quad (1)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0,$$

где a и b – внутренний и внешний радиусы бруса, M – изгибающий момент, N – постоянная. Величина N зависит от геометрических размеров бруса и определяется из выражения

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2.$$

Первый инвариант тензора напряжений логарифмически зависит от радиальной координаты

$$\sigma_{\ell\ell} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = -\frac{4M}{N} \left(b^2 - a^2 + 2b^2 \ln \frac{r}{b} - 2a^2 \ln \frac{r}{a} \right). \quad (2)$$

Такая зависимость позволяет получить точное аналитическое решение уравнения диффузии в поле сил. Неоднородное поле напряжений вызывает диффузионную миграцию атомов примеси разного сорта (эффект Горского).

Потенциал взаимодействия атома примеси с полем напряжений при изгибе бруса находится из выражения

$$V = -\frac{\sigma_{\ell\ell}}{3} \delta v, \quad (3)$$

где δv - изменение объема кристалла при размещении атома примеси. Если легирующая примесь увеличивает параметр кристаллической решетки, то $\delta v > 0$. Противоположный случай (примесь уменьшает параметр решетки) соответствует $\delta v < 0$. Для $\sigma_{\ell\ell} > 0$ (напряжение растяжения) и $\delta v > 0$ потенциал V принимает отрицательное значение. При $\sigma_{\ell\ell} < 0$ и $\delta v > 0$ потенциал V принимает положительное значение. Легирующие элементы большого атомного радиуса притягиваются к области растягивающих напряжений и вытесняются из области напряжений сжатия.

Диффузионная миграция атомов примеси при изгибе бруса описывается нестационарным уравнением диффузии в поле потенциала V при соответствующих начальном и граничных условиях (полярная система координат) [4]:

$$\frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = \Delta C + \frac{\nabla(C\nabla V)}{kT}, \quad a < r < b, \quad (4)$$

$$C(r, 0) = C_0, \quad (C(a, t) = C_p^1, \quad C(b, t) = C_p^2,$$

где D – коэффициент диффузии атомов примеси, C_0 – средняя концентрация атомов примеси, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, C_p^1 и C_p^2 – равновесные концентрации атомов примеси на границах области. Физический смысл начального и граничных условий для

задачи (4) вполне очевиден. В начальный момент времени концентрация атомов примеси во всей области постоянная и равна средней концентрации. Условия на границах области означают, что там мгновенно устанавливается равновесная концентрация атомов примеси и далее остается постоянной в процессе диффузии. Из уравнения диффузии (4) видно, что миграция атомов примеси пропорциональна градиенту потенциала V . Это означает, что постоянные в соотношении для σ_{ll} не оказывают влияния на процесс диффузии. Равновесные же концентрации примесных атомов на границах зависят и от постоянных соотношения (2). Используя выражение для σ_{ll} , после несложных преобразований получим более простой вариант задачи (4)

$$\frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1+\alpha}{r} \frac{\partial C}{\partial r}, \quad a < r < b,$$

$$C(r, 0) = C_0, \quad (C(a, t) = C_p^1, \quad C(b, t) = C_p^2). \quad (5)$$

Безразмерный параметр задачи α определяет отношение энергии связи атома примеси с полем напряжений кристалла к энергии теплового движения

$$\alpha = - \frac{8 M \cdot (b^2 - a^2) \delta v}{3 N \cdot kT}. \quad (6)$$

Все обозначения соответствуют принятым ранее. При выполнении математических преобразований использовано $\Delta \sigma_{ll} = 0$, так как σ_{ll} - гармоническая функция. Безразмерное значение α обеспечивается тем, что в принятой упругой модели рассматривается момент на единицу длины, то есть $[M] = H$ (размерность приложенного момента на единицу длины бруса соответствует размерности силы). Это замечание относится и к размерности компонент тензора напряжений. Величина α определяет вклад поля напряжений в характер протекания диффузионного процесса. Если $|\alpha| \ll 1$, то поле напряжений в принятой упругой модели является слабым возмущением диффузионного потока атомов примеси. При $|\alpha| \gg 1$ основной вклад в процесс диффузии дает поле напряжений при изгибе кристалла. Для $|\alpha| \approx 1$ диффузионные потоки атомов примеси вследствие градиентов концентрации и потенциала V сопоставимы. Оценим величину α для сплава Zr-Sn. Сплавы на основе циркония находят применение в качестве материала оболочек тепловыделяющих элементов ядерных реакторов. Это обусловлено удачным сочетанием физико-механических свойств и низким сечением поглощения тепловых нейтронов. В процессе эксплуатации возможно расслоение твердого раствора с изменением свойств материала. Для $a = 10^{-2}$ м, $b = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м, $M = 0,5 \cdot 10^3$ Н, $N = 0,57 \cdot 10^8$ м⁴, $\delta v = 5,57 \cdot 10^{-30}$ м³, $kT = 1,38 \cdot 10^{-20}$ Дж имеем $\alpha = -1,16$. Разумеется, приведенные характеристики носят условный характер.

Они использованы для иллюстрации влияния поля напряжений при изгибе бруса на кинетику расслоения твердого раствора. Величина $M=0,5 \cdot 10^3$ Н для принятой геометрии бруса приводит к следующему значению напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на внутренней границе: $\sigma_{\theta\theta} = 20$ МПа при $r=a$. Такое значение является вполне разумным. Далее для безразмерного параметра принимаем $\alpha=-1$. Принятое значение безразмерного параметра упрощает задачу (5)

$$\frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2}, \quad a < r < b,$$

$$C(r,0) = C_0, \quad (C(a,t) = C_p^1, \quad C(b,t) = C_p^2). \quad (7)$$

Поле напряжений для принятого значения безразмерного параметра изменяет симметрию уравнения диффузии. Диффузионный процесс в кривом буре (полярная система координат) протекает по закону плоской симметрии. Преобразование координатной зависимости увеличивает скорость изменения концентрации атомов примеси. Математически это непосредственно вытекает из вида уравнения диффузии. В самом деле, при $\frac{\partial C}{\partial r} < 0$ скорость изменения концентрации примесей $\frac{\partial C}{\partial t}$ в уравнении (7) больше по отношению к уравнению (5). Физическая сущность ускорения кинетики процесса обусловлена влиянием возникающих напряжений при изгибе бруса. При этом напряжения сжатия вытесняют примеси большого атомного радиуса, а растягивающие напряжения ускоряют их миграцию на границу максимального значения последних. Для принятой упругой модели конечным результатом такого процесса является установление равновесной концентрации легирующих элементов по радиусу бруса. Зависимость концентрационного поля от времени находится из решения задачи (7) и имеет вид

$$C - C_0 = \frac{b(C_p^1 - C_0) - a(C_p^2 - C_0) + r(C_p^2 - C_p^1)}{b - a} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[(-1)^n (C_p^2 - C_0) - (C_p^1 - C_0) \right] \cdot \sin \frac{\pi n(r-a)}{b-a} \exp \left(- \frac{\pi^2 n^2 D t}{(b-a)^2} \right). \quad (8)$$

Это соотношение содержит равновесные значения концентраций на внутренней и внешней границах кривого бурса. Их величины определяются обычным образом согласно соотношению

$$C = C_0 \exp \left(- \frac{\sigma_{\ell\ell}}{3kT} \delta v \right), \quad (9)$$

где $\sigma_{\ell\ell}$ принимает соответствующее значение на границах области

$$\sigma_{\ell\ell}|_{r=a} = - \frac{4M}{N} \left(b^2 - a^2 + 2b^2 \ln \frac{a}{b} \right),$$

$$\sigma_{II}|_{r=b} = -\frac{4M}{N} \left(b^2 - a^2 + 2a^2 \ln \frac{b}{a} \right). \quad (10)$$

Видно, что равновесная концентрация атомов примеси на внутренней границе бруса превышает среднюю концентрацию примесных атомов. Это обусловлено наличием растягивающих напряжений. На внешней границе бруса за счет напряжений сжатия наблюдают противоположный эффект – равновесная концентрация атомов примеси ниже своего среднего значения.

Характерный размер зародыша новой фазы обычно существенно меньше размера бруса в радиальном направлении. Поэтому при описании кинетики роста новой фазы диффузионные процессы рассматривают в неограниченной матрице. На перемещающейся границе выделения концентрации атомов примеси меняется скачкообразно: $C=C_1$ для новой фазы и $C=C_2$ в окружающей матрице. При этом выполняются следующие неравенства: $C_1 > C_2$, $C_2 < C_0$, где C_0 – средняя концентрация атомов примеси. В рамках принятой модели новая фаза формируется на внутренней поверхности бруса. Это обусловлено напряжениями растяжения и наличием примесей большого атомного радиуса. В качестве примера достаточно упомянуть образование гидридных фаз в сплавах циркония. Водород образуется при протекании парациркониевой реакции и достаточно быстро мигрирует в оболочку тепловыделяющего элемента.

При температурах до 350°C водород находится в виде твердого раствора. При понижении температуры образуются зародыши гидрида. Их дальнейший рост происходит за счет диффузии атомов водорода.

Кинетика диффузионного роста новой фазы (после образования зародыша) в окрестности внутренней поверхности бруса математически формулируется следующим образом

$$\frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1+\alpha}{r} \frac{\partial C}{\partial r},$$

$$C(R,t)=C_2, \quad C(r,0)=C_0, \quad (r \geq R_0); \quad C(\infty,t)=C_0, \quad (11)$$

$$(C_1 - C_2) \frac{dR}{dt} = D \left(\left| \frac{\partial C}{\partial r} \right| + \left| \frac{C\alpha}{r} \right| \right)_{r=R};$$

где $R_0 > a$ – радиус зародыша новой фазы, R – текущий радиус новой фазы. С учетом $\alpha = -1$ задача (11) принимает более простой вид

$$\frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial r^2},$$

$$C(R,t)=C_2, \quad C(r,0)=C_0, \quad (r \geq R_0); \quad C(\infty,t)=C_0, \quad (12)$$

$$(C_1 - C_2) \frac{dR}{dt} = D \left(\frac{\partial C}{\partial r} + \frac{C}{r} \right)_{r=R}.$$

Далее рассмотрим случай, когда рост новой фазы лимитируется диффузионным подводом примесных атомов. Изменение радиуса выделения подчиняется закону $R(t) = \beta\sqrt{Dt}$, где β - безразмерный параметр задачи. Его значение определяется из уравнения массового баланса на межфазной границе. С целью наглядности остановимся на приближении «неподвижной межфазной границы». Для определения параметра β получим квадратное уравнение

$$\beta^2 - \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{C_2 - C_0}{C_1 - C_0} \right| - \left| \frac{2C_2}{C_1 - C_2} \right| = 0. \quad (13)$$

Если в задаче (11) положить $\alpha=0$, то при одинаковых начальном и граничных условиях получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r}, \\ C(R,t) &= C_2, \quad C(r,0) = C_0, \quad (r \geq R_0); \quad C(\infty,t) = C_0, \\ (C_1 - C_2) \frac{dR}{dt} &= D \left(\frac{\partial C}{\partial r} \right)_{r=R}. \end{aligned} \quad (14)$$

В данной постановке задачи поле напряжений бруса не учитывается. Записывая кинетику роста новой фазы в виде $R = \beta_1\sqrt{Dt}$, получим трансцендентное уравнение для определения безразмерного параметра β_1 [1]

$$\beta^2 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left| \frac{C_2 - C_0}{C_1 - C_0} \right| \cdot \frac{K_1 \left(\beta_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)}{K_0 \left(\beta_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)}, \quad (15)$$

где $K_0(x)$ и $K_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя второго рода нулевого и первого порядков соответственно. Решение уравнений (13) и (15) для произвольных значений концентрации выявляет вклад напряжений при изгибе бруса в кинетику процесса роста новой фазы. Сохраняя общность, положим $C_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ ат, $C_2 = 10^{-4}$ ат, $C_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ ат. Для этих значений концентрации получим [1]

$$\beta^2 - \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} - 1 = 0; \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{K_1 \left(\beta_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)}{K_0 \left(\beta_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)}. \quad (16)$$

Численное решение уравнений (16) дает $\beta=1.3$; $\beta_1=0.8$. Это означает, что поле напряжений при изгибе бруса увеличивает скорость роста зародыша новой фазы. Использование других значений концентрации сводится к изменению численных значений параметров β и β_1 . По мере

увеличения характерного размера новой фазы происходит обеднение твердого раствора. Скорость роста выделения замедляется. Кроме того, объемные изменения новой фазы сопровождаются появлением напряжений на межфазной границе. Последние изменяют кинетику диффузионного процесса. Однако при малых объемных изменениях новой фазы и на ранних стадиях процесса такое влияние можно не учитывать.

Литература

1. Власов Н.М., Федик И.И. Расслоение твердого раствора в поле остаточных напряжений // ДАН. 2002. Т. 382, №2, с. 186-189.
2. Власов Н.М., Федик И.И. Диффузия примесей внедрения через цилиндрическую оболочку с остаточными напряжениями // ДАН. 2002. Т. 384, №4, с.324-327.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Пер. с англ. М.: Наука, 1979.
4. Власов Н.М., Федик И.И. Массоперенос в поле напряжений при изгибе бруса // ДАН. 2003. Т. 391, №6, с.759-763.

ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ БЛАЗИУСА

Воронкова А.И., Прозорова Э.В.

(Санкт-Петербургский государственный университет)

Численно исследуется влияние малых возмущений вертикальной компоненты скорости на продольную скорость в модифицированной задаче Блазиуса с учетом влияния изменения момента количества движения в элементарном объеме. Методом малого параметра изучается взаимодействие нестационарного оператора и дисперсии.

INFLUENCE THE DISPERSION ON THE SMALL PERTURBATIONS OF VELOCITY IN THE BLASIOUS PROBLEM

Voronkova A.I., Prozorova E.V. (Saint-Petersburg State University)

It is numerically investigated the influence of the small perturbations of vertical velocity on profile of longitudinal velocity for the Blasius modified equation if variation of angular moment is considered. The method of the small parameter is used to study interaction of nonstationary and dispersion effects in the boundary layer.

Введение. Предыдущие работы были посвящены выводу уравнений механики сплошной среды с учетом изменения момента количества движения в элементарном объеме. Рассматривались бесструктурные частицы. Известно, что в случае разреженного газа уравнения Навье-Стокса и Больцмана можно вывести как из законов сохранения массы, импульса и энергии, так и из уравнений Гамильтона для системы материальных точек. Общим при выводе уравнений является выполнение следующих условий: мы интересуемся явлениями, в которых доминируют объемные эффекты и влиянием границ можно пренебречь. Одночастичная функция распределения определена так, что по крайней мере для

бесструктурных частиц выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии. При выводе уравнения Больцмана рассматривается случай замкнутой системы с бесконечно большим количеством частиц $N \rightarrow \infty$, бесконечно большим объемом $V \rightarrow \infty$, но с конечной средней плотностью. Явная зависимость плотности ρ определяется очень медленной (с точки зрения микроскопического масштаба времени) эволюцией одночастичной функции распределения f_1 . Быстрые флуктуации, к которым относятся изменения функции в процессе столкновения, во внимание не принимаются, рассматриваются бинарные столкновения и обратные столкновения описываются функцией распределения в той же точке. Последнее требование выполняется при малом изменении функции распределения на длине свободного пробега. Предположение о частном характере зависимости от времени многочастичной функции распределения через одночастичную выполняется при условии существенной разницы времен столкновения частиц и времени между столкновениями. Этим же определяется условие отсутствия корреляций. При выводе уравнения Навье-Стокса делаются дополнительные предположения о зависимости одночастичной функции распределения от времени и пространственных переменных через газодинамические макрофункции, что подчеркивает макрохарактер одночастичной функции распределения, и возможно только при ее малом изменении на макроразмерах. Метод построения уравнений Навье-Стокса из уравнения Больцмана для одночастичной функции распределения согласован с указанными предположением о малом изменении функции распределения. Однако к основным законам относится и закон сохранения момента количества движения. Модификация уравнений с целью учета этого закона была предложена в [1]. Некоторые следствия обсуждались в [2]. Здесь выполнено дальнейшее исследование возникающих новых процессов и уравнений.

Влияние дисперсии в разреженном газе. Ранее были получены модифицированные уравнения движения и неразрывности из модифицированного уравнения Больцмана. Найденная система уравнений в настоящее время дополнена уравнением сохранения энергии.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_i \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} \right) = 0, \quad \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho u_i u_j + P_{ij} + x_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i} \right) - \frac{X_i}{m} \rho = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + u_k P_{kj} + q_j \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(\frac{3}{2} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + u_k P_{kj} + q_j \right] = 0$$

Уравнение получено из модифицированного уравнения Больцмана с учетом изменения момента количества в объеме. Следовательно, учитывается влияние границы.

Здесь t – время, x_i – координаты, u_j – скорости, $\tilde{\nu}$ – вязкость, ρ – плотность, T – температура, q – тепловой поток, P_{ij} – тензор вязких давлений, X – сила.

Пренебрежение граничными условиями проявляется на больших расстояниях для неравновесных течений. Это следует из уравнения для s -частичной функции распределения (F_n) [3].

$$\begin{aligned} \frac{1}{V^s} \frac{\partial F_s}{\partial t} = & -\frac{1}{V^s} \sum_{i=1}^s \frac{P_i}{m} \frac{\partial F_s}{\partial r_i} + \frac{1}{2V^s} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (j \neq i)}}^s \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} \frac{\partial F_s}{\partial p_i} + \\ & + \frac{1}{V^{s+1}} \sum_{i=1}^s \int \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial p_i} dr_j dp_j - \\ & - \frac{1}{V^{s+1}} \sum_{j=s+1}^N \int \frac{p_j}{m} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial r_j} dr_j dp_j + \\ & + \frac{1}{V^{s+1}} \sum_{i=1}^s \int \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_j} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial p_j} dr_j dp_j + \\ & + \frac{1}{2V^{s+2}} \sum_{\substack{i,j=s+1 \\ (j \neq i)}}^s \int \frac{\partial \Phi(|r_i - r_j|)}{\partial r_i} \frac{\partial F_{s+2}(t, r_1, \dots, r_s, r_i, r_j, p_1, \dots, p_s, p_i, p_j)}{\partial p_i} dr_i dr_j dp_i dp_j \end{aligned}$$

Обычно предполагается, что

$$\text{при } |r_j| \rightarrow \infty \quad \frac{\partial}{\partial r_j} F_n \rightarrow 0, \quad |p_j| \rightarrow \infty \quad \frac{\partial}{\partial p_j} F_n \rightarrow 0.$$

Последние три слагаемых при указанных условиях обращаются в нуль. При отсутствии равновесия первая производная в нуль не обращается. Не будет она обращаться в нуль при неравновесном взаимодействии газа с поверхностью для конечных объемов в случае, например, вдуве газа с поверхности. Процентный вклад этого слагаемого будет значительным при больших характерных размерах процесса. Пока не ясно, как скажется слагаемое на граничных условиях. Кроме того, в случае нарушения равновесия нельзя считать частицы идентичными, также нельзя считать частицы идентичными в случае газа с внутренними степенями свободы. Следовательно, нарушается условие

$$\int \sum_{j=s+1}^N \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial r_i} \frac{\partial F_{s+1}(t, r_1, \dots, r_s, r_j, p_1, \dots, p_s, p_j)}{\partial p_i} dr_j dp_j \approx N \int \frac{\partial \Phi_{is+1}}{\partial r_i} \frac{\partial F_{s+1}}{\partial p_i} dr_{s+1} dp_{s+1}$$

Из сказанного следует, что для структурных частиц необходимо учитывать момент количества движения и записывать дополнительное уравнение для этой величины. Теорема об энтропии, так как ее вывод основывается на использовании свойств интеграла столкновений при предположениях, рассмотренных Н.Н. Боголюбовым, выполняется.

В механике сплошной среды пренебрежение близостью границы при записи уравнений приводит к отбрасыванию слагаемых, связанных с вращением элементарного объема. Градиент функции распределения в элементарном объеме создает вращение и с ним связано изменение момента количества движения. Обозначив мгновенный угол поворота элементарного объема жидкости через ω_i , получим уравнение $\dot{\omega}_i dJ_{i_a} = dL$ [4], где L – момент количества движения, J_{i_a} – момент инерции элементарного объема. Таким образом, обобщенный импульс следует написать в виде $p_i = c_i + \dot{\omega}_i \times \delta r_i$, где r_i , r_{i_a} – геометрический вектор и вектор центра тяжести элементарного объема. Без учета процессов внутри элементарного объема этим слагаемым пренебрегают.

Нестационарный пограничный слой. Малые времена.

Новое уравнение движения и старое уравнение неразрывности при обтекании цилиндра имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \tilde{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \tilde{\nu} = \frac{\mu}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Граничные и начальные условия

$$u = U_e(x), \quad v = 0, \quad y = 0, \quad t = 0; \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w, \quad y = 0;$$

$$u = U_e(x), \quad y \rightarrow \infty, \quad x > 0; \quad u = U_e(0), \quad x = 0.$$

Здесь t – время, x_i – координаты, u, v – скорости, $\tilde{\nu}$ – вязкость, ρ – плотность, U_e – скорость на внешней границе. Для малых времен пограничный слой тонок, скорость близка к U_e , μ – динамическая вязкость; v близко к 0. Воспользуемся теорией малых возмущений. Тогда мы получим в первом приближении необходимость решения следующей задачи

$$\tilde{\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \tilde{\nu} \frac{\partial}{\partial y} y \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0.$$

После введения новой функции и новой переменной

$$u_1 = U_e(x) f_1(\eta), \quad \eta = y / 2\sqrt{\tilde{\nu}t}$$

уравнение примет вид

$$f_1'' + \frac{d}{d\eta}(\eta f_1'') + 2\eta f_1' = 0.$$

Для выяснения влияния дисперсии разложим уравнение в ряд около поверхности. Первый член ряда будет иметь вид функции вероятности

$$f_{10} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta.$$

Следовательно, решение принимает классический вид для $\eta < 0.5$.

В общем случае нестационарный оператор в уравнении движения имеет вид $\frac{\partial}{\partial x_j} x_j \frac{\partial}{\partial t}$. Это следует из факта, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ имеет размерность силы.

Поэтому система уравнений в нестационарном случае

$$\frac{\partial}{\partial x_j} x_j \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tilde{v} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \tilde{v} = \frac{\mu}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Граничные условия остаются прежними. Вводя новую функцию $u_1 = U_e(x) f_1(\eta)$, $\eta = y/2\sqrt{\tilde{v}t}$

вместо системы уравнений получим уравнение

$$f_1'' + \frac{d}{d\eta}(\eta f_1'') + 2\eta f_1' + 2 \frac{d}{d\eta}(\eta^2 f_1') = 0$$

Непосредственно около стенки получается линейный профиль. Дальнейшее исследование связано с численным решением стационарной задачи с модифицированным уравнением неразрывности и определением влияния граничных условий.

Влияние граничных условий. В работах [5, 6] численно решались стационарные задачи пограничного слоя с учетом предложенной модификации уравнения движения и классического уравнения неразрывности. Рассматривались задача Блазиуса и задача Фокнера-Скен. В данном случае решалась система уравнений

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} y \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с базовыми граничными условиями

$$u = U_e(x), \quad v = 0, \quad y = 0, \quad t = 0;$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_w, \quad y = 0;$$

$$u = U_e(x), \quad y \rightarrow \infty, \quad x > 0; \quad u = U_e(0), \quad x = 0.$$

На верхней границе пограничного слоя изменялись вертикальная и горизонтальная компоненты скорости.

Изменение продольной компоненты скорости на малую величину не изменяло ее профиля внутри пограничного слоя. Изменение вертикальной скорости существенно сказывалось на профиле. Исходным граничным условием для v являлось значение, полученное при решении задачи Блазиуса или результат решения задачи третьего порядка (с дисперсией) с классическим уравнением неразрывности.

Важным полученным результатом, указанным ранее в работах [7, 8], является факт усиления роли вертикальной компоненты скорости на профиль продольной скорости внутри пограничного слоя при учете в уравнении неразрывности второй производной. Возмущение вертикальной скорости может привести к образованию перегибов профиля продольной скорости, что сказывается на его устойчивости. При решении системы использовались схемы первого и второго порядков на подробной сетке с целью изучения устойчивости счета. Результаты приведены ниже:

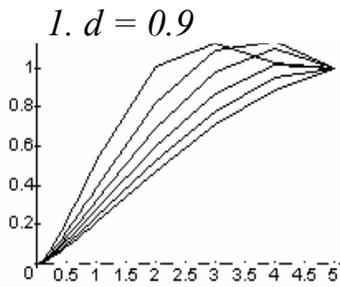


Рис.1

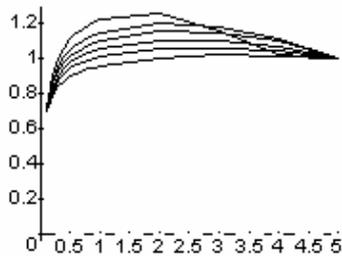


Рис.2

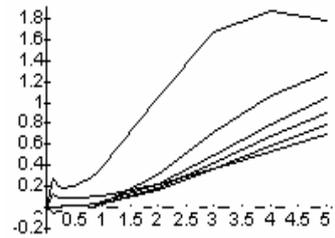


Рис.3

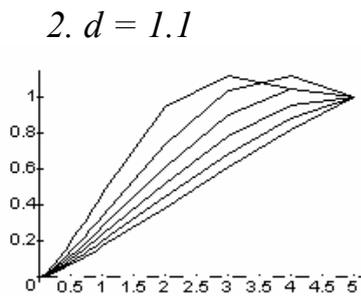


Рис.1

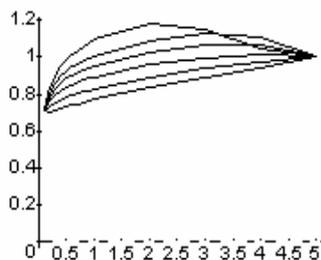


Рис.2

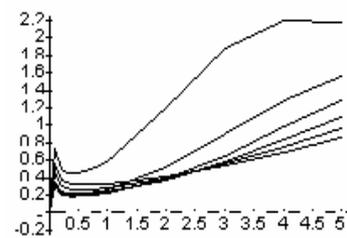


Рис.3

1. для задачи 2-го порядка вычисляются значения v на верхней границе, затем граничное v умножается на d , во 2-е уравнение добавляется член 2-

го порядка $(d(y*dv/dy)/dy)$ и решается новая задача с полученным граничным условием наверху

На рисунках: горизонтальная ось — переменная y , вертикальная ось — соответствующая безразмерная функция, различные кривые соответствуют слоям, расположенным вдоль пластины.

Параметр трения $\alpha = 0.332$.

1-й рис.— функция u , 2-й рис.— Отношение u к результату задачи с 3-й производной, 3-й рис.— функция v .

Коэффициент изменения граничного условия обозначен через d .

С помощью первоначального варианта для задачи 3-го порядка вычисляются значения v на верхней границе, затем граничное v умножается на d .

На рисунках различные кривые соответствуют слоям, расположенным вдоль пластины.

Параметр трения $\alpha = 0.332$.

1. $d = 0.9$

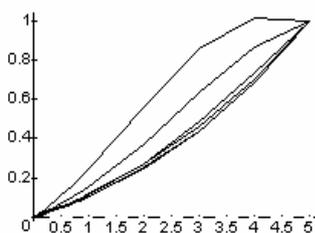


Рис.1

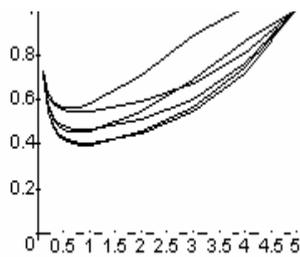


Рис.2

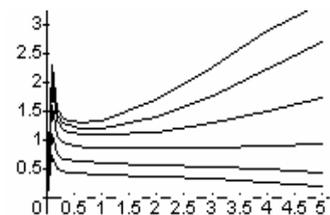


Рис.3

2. $d = 1.1$

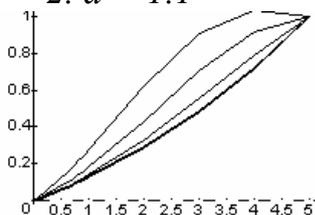


Рис.1

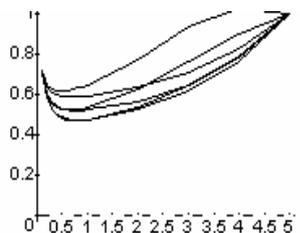


Рис.2

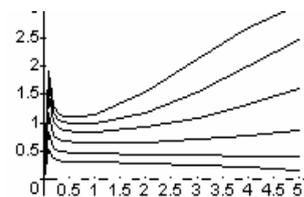


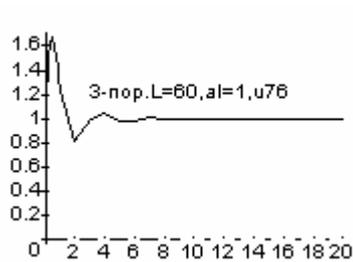
Рис.3

Кроме исследования влияния граничных условий на внешней границе пограничного слоя изучалось влияние граничных условий на поверхности. В заданных точках поверхности значение трения, определяемое из решения задачи Блазиуса, заменялось на постоянное значение. Цель этой части работы - изучение длины релаксационной зоны. Некоторые из результатов приведены ниже.

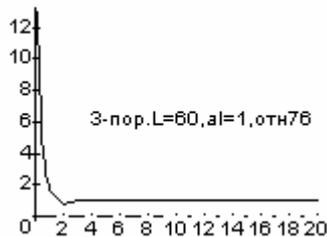
Рисунки, для определения смены условия.

$\alpha=1$, смена условия после 76-го слоя (различие 0.005)

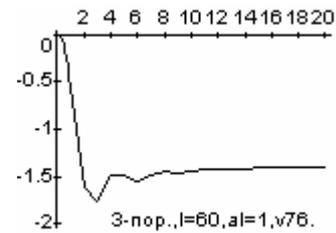
76-й слой



Функция u .

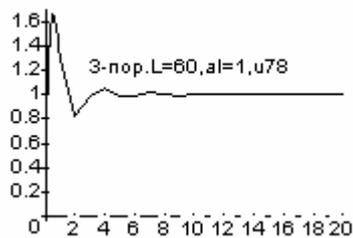


Отношение $u3$ к $u2$

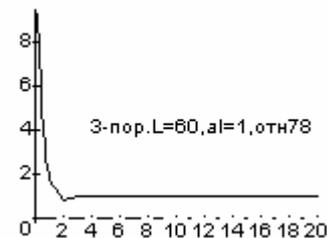


Функция v

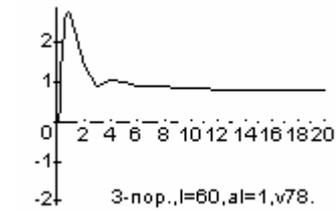
78-й слой



Функция u .

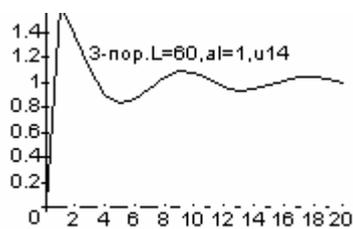


Отношение $u3$ к $u2$

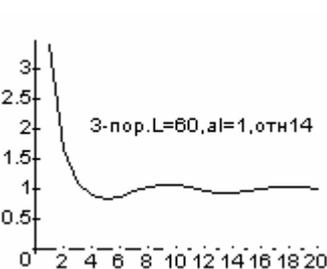


Функция v

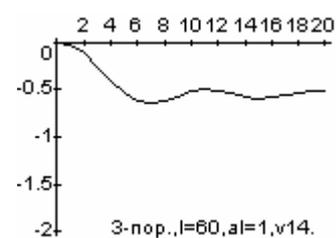
500-й слой



Функция u .



Отношение $u3$ к $u2$



Функция v

Литература

1. Prozorova E.V. Influence of dispersion in mechanics. Seventh International Workshop on Nondestructive testing and Computer Simulations in Science and Engineering. Proceedings of SPIE. V. 5400. 2003. pp. 212-219.
2. Прозорова Э.В. Влияние дисперсионных эффектов в задачах аэродинамики. Математическое моделирование. Т. 17. N 6. 2005. с.
3. Гуров К.П. Основания кинетической теории. – М.: Наука, 1966. 350с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Мир, 1974, 712 с
5. Воронкова А. И., Прозорова Э. В. Численное исследование задачи Фокнера-Скен с дисперсией. 4-ая международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях. М.: МАИ, 2002. с. 147.

6. Воронкова А.И., Прозорова Э.В. Численное исследование влияния дисперсионных эффектов в задачах пограничного слоя. Сборн. докл. конф. ВЕМ-FEM, т. 2. С.Петербург. 2001. с. 110 – 116.
7. Анфимов Н.А. Тепло- и массообмен в окрестности критической точки при вдуве и отсосе различных газов через поверхность тела. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1966
8. Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. – Екатеринбург: РАУО УрО РАН, 2001, 161с.

УДК 519.3:62:27

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СТОМАТОЛОГИИ

*Гаврюшин С.С. (Московский государственный технический университет
им. Н.Э.Баумана, Россия)*

FINITE-ELEMENT MODELING OF BIOMECHANICAL SYSTEMS IN STOMATOLOGY

Gavriushin S.S. (Bauman Moscow State Technical University, Russia)

Излагаются результаты применения метода конечных элементов методов для моделирования биомеханических объектов. Обсуждаются вопросы построения математических моделей с использованием возможностей компьютерной томографии. Приводятся результаты решения реальных задач анализа и синтеза стоматологических конструкций.

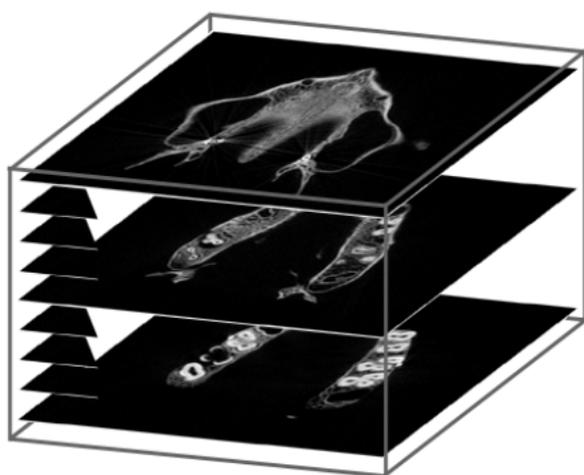
Методы математического моделирования, опирающиеся на возможности современной вычислительной техники и конечно-элементного анализа, активно используются для решения широкого ряда прикладных биомеханических проблем. Использование математического моделирования позволяет более глубоко проанализировать, а в ряде случаев и получить строго индивидуальную информацию об исследуемой протезной конструкции и о процессе ее взаимодействия с биологическими тканями зубочелюстной системы.

Комплексную биомеханическую модель зубочелюстной системы человека, взаимодействующей с той или иной ортопедической конструкцией, следует отнести к категории весьма сложных и ответственных моделей. Пионерские работы по математическому моделированию в имплантологии использовали для численного моделирования и анализа протезных конструкций относительно простые стержневые [1] или плоские [2,3] конечно-элементные модели. В работах [4,5,6] использовались поверхностные трехмерные модели челюсти, которые создавались вручную. При этом геометрическая информация определялась путем обмера гипсовых слепков с помощью специального измерительного устройства – параллелометра. В работе [7] было проведено экспериментальное комплексное изучения *in-vitro* особенностей

геометрического строения верхней челюсти. Полученная таким способом трехмерная модель позволила описать внутреннюю структуру челюсти – полости и границы раздела костной ткани на зоны кортикальной и губчатой кости. Однако, все вышеперечисленные способы не позволяли получить достоверное и строго индивидуальное описание *in-vivo* внутреннего строения костной ткани.

Данную задачу удалось решить, используя для построения индивидуальных моделей зубочелюстной системы пациента возможности компьютерной томографии. Геометрическая модель в виде послойного растрового изображения зуба служит основой для построения трехмерной твердотельной модели зубного ряда. На основе томографических срезов создавались растровые изображения контуров основных тканей зубочелюстной системы. В виртуальной графической среде осуществлялось масштабирование препаратов до реальных размеров и проводилась стратификация по третьей координате с заданным шагом.

а



б

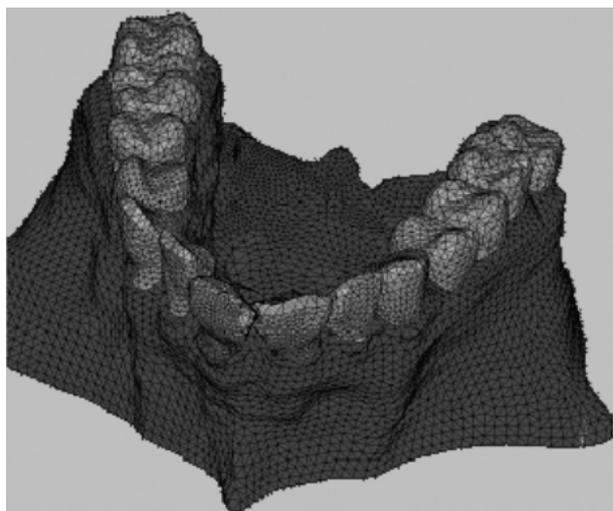


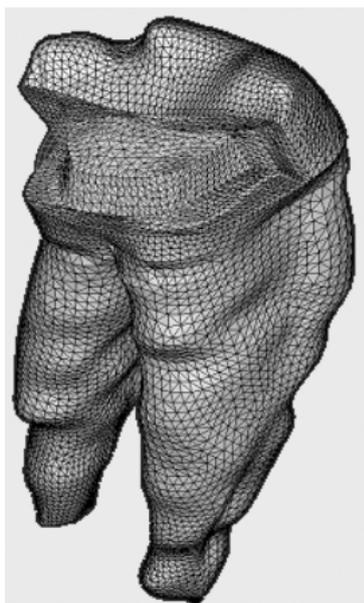
Рис. 1. Послойные растровые изображения челюсти, полученные с помощью компьютерного томографа (а). Конечно-элементная модель зубочелюстного ряда пациента (б).

С помощью пакета 3D-моделирования по соответствующим изолиниям были построены поверхности, ограничивающие кортикальный слой кости, спонгиозное вещество кости, зубной ряд и имплантаты. Файлы отдельных поверхностей модели были экспортированы в программу HYPERMESH, с помощью которой была осуществлена операция разбиения твердотельной модели на конечные элементы. Полученная конечно-элементная модель импортировалась в конечно-элементный пакет комплекс ANSYS 7.0. Полученная трехмерная модель с приемлемой точностью описывала внутреннюю структуру объекта. Разрешающая способность компьютерного томографирования позволила получить подробные модели

отдельных участков зубочелюстной системы, вплоть до отдельного зуба. С каждым материалом ассоциировались его физико-механические свойства.

Построенные таким образом модели использовались для последующего численного анализа [9]. Рассмотренная методика построения математических конечно-элементных моделей использовалась при численном моделировании различных стоматологических задач и клинических случаев.

а



б

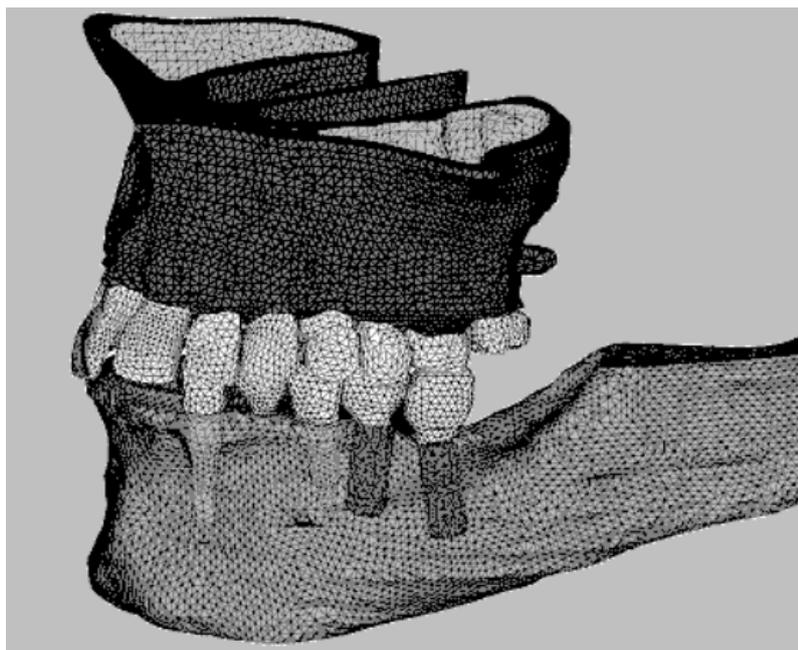


Рис. 2. Конечно-элементные модели реставрированного зуба (а) и зубочелюстного аппарата пациента (б), построенные на основе компьютерных томограмм.

Рассмотренная методика построения математических конечно-элементных моделей использовалась при численном моделировании различных стоматологических задач и клинических случаев. На рисунке 2 представлены: конечно-элементная модель отдельного реставрируемого зуба и полномасштабная конечно-элементная модель зубочелюстной системы, содержащая более 250 000 степеней свободы.

При численном моделировании наряду с построением геометрического образа протезной конструкции важную роль играют физико-механические свойства биологических тканей и материалов, а также способы адекватного описания процесса функционального нагружения протезной конструкции и законов распределения жевательных усилий между опорными тканями зубочелюстной системы.

Костная ткань является сложным композиционным веществом, имеющим включения как органических, так и неорганических материалов. Ее свойства зависят от многих факторов; возраста, пола, пищевого

рациона, уровня гормонов в организме и т.д., которые весьма сложно учесть при практических расчетах. При этом проблема достоверного описания процесса деформирования биологических тканей остается открытой. Первая в этом направлении попытка была предпринята Низом [10], предложившим считать кость композитным двухфазным материалом. Реологическая модель материала надкостницы была построена Седлиным [11] на основе обширных исследований образцов берцовой кости человека. Ряд моделей рассмотрен в работе [12]. В рамках проведенных исследований костная ткань в основном рассматривалась как однородный изотропный материал [13] с известными свойствами. При расчете предельных состояний в биомеханических системах используются различные критерии, основанные на той или иной теории прочности. В рамках данной работы в качестве основного критерия использовался критерий Хубера–Мизеса [13]. Вместе с тем отметим, что костные ткани различным образом сопротивляются сжатию и растяжению. Это влияние можно учесть используя теории прочности Мора [13]. В работе [3] вероятный запас прочности исследуемой биомеханической конструкции рекомендуется определять на основе теории разрушения Шлейхера-Надаи. Представляется интересным использовать модели, позволяющие учесть метаболические свойства костной ткани.

В качестве предельно допустимых нагрузок на имплантат при математическом моделировании принимались максимально допустимые нагрузки, которые могут быть переданы через имплантат на костную ткань без риска повреждения последней. Следует отметить, что контактное взаимодействие протезной конструкции с антагонистами представляет собой достаточно сложный процесс, происходящий во времени. Величина и направление нагрузки при жевании не остаются постоянными. Более того, при моделировании процесса жевания силовой способ нагружения зачастую не отражает основных особенностей процесса контактного взаимодействия. Поэтому, представляется целесообразным использовать более информативный кинематический способ нагружения конструкции. При кинематическом способе нагружения контакт численно моделируется посредством взаимного смещения жевательных поверхностей. При этом величина смещения определяется предварительно по интегральной величине жевательного усилия. Необходимо подчеркнуть, что использование кинематического способа нагружения снимает многие из поставленных ранее вопросов, поскольку, проанализировать кинематику движения челюстей в клинических условиях оказывается гораздо легче, чем проанализировать динамику изменения жевательных нагрузок.

Наличие в зубном ряду имплантатов и других элементов протезной супраструктуры, приводит к существенному изменению распределения нагрузки на опорные ткани по сравнению с нагрузкой на естественный зубной ряд. В работе [5], был проведен многофакторный численный

эксперимент, имевший целью выяснить влияние на величину допустимой нагрузки геометрических параметров, характеризующих соединение имплантат – костная ткань. Расчеты показали, что с увеличением угла наклона имплантата уровень максимальных напряжений существенно повышается, что приводит к снижению величины допустимой нагрузки. Анализируя влияние длины имплантата, выяснилось, что значительно более существенное влияние на величину допускаемой нагрузки, оказывает не длина имплантата, а толщина кортикального слоя, геометрия слоя и интегральная плотность костной ткани. Таким образом, при выборе длины имплантата в первую очередь следует учитывать данные о строении и распределении плотности костной ткани.

Пример 1. Конечно-элементное моделирование использовалось для поиска рационального плана лечения верхней челюсти. Модель протезной конструкции, опирающейся на два внутрикостных имплантата представлена на рис. 3(в). Расчеты показали, что для рационального варианта максимальное напряжение в кортикальной костной ткани при нагружении протеза силой 200 Н, не превышает 30 МПа., что соответствует коэффициенту запаса по прочности равному примерно 1,4.

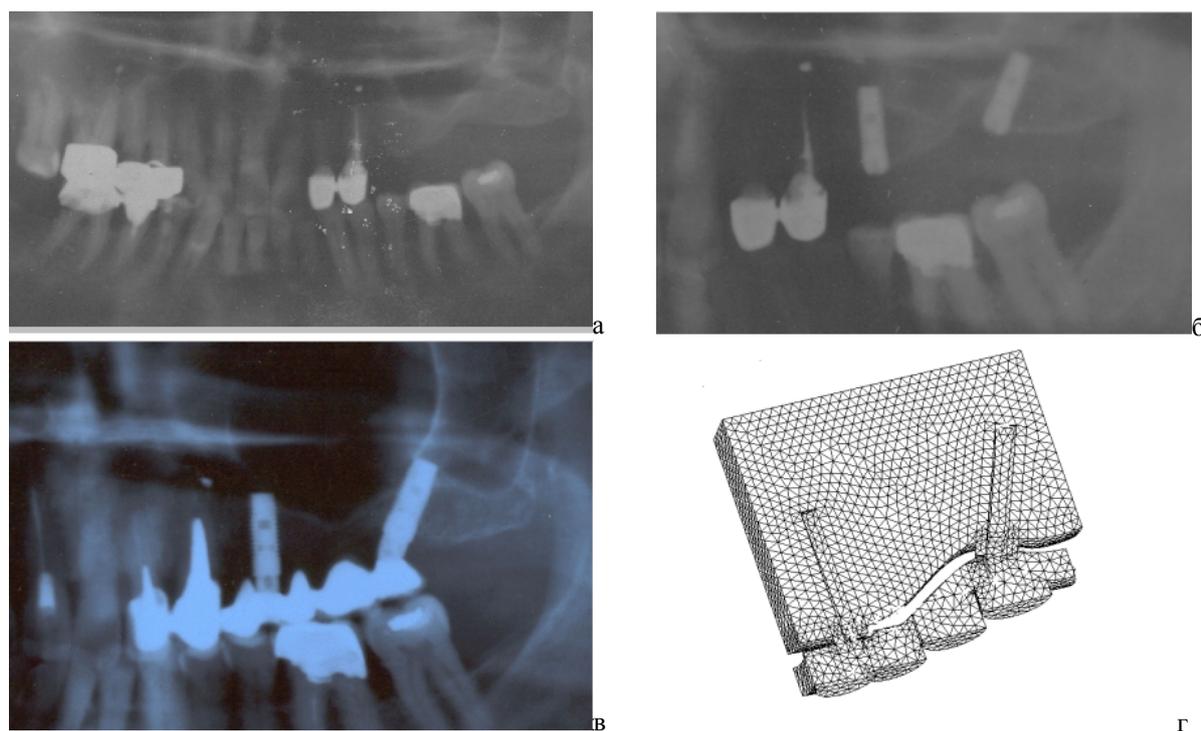


Рис. 3. Рентгеновские снимки челюсти: до лечения (а), после установки имплантатов (б) и после лечения (в). Конечно-элементная аппроксимация участка костной ткани и протезной конструкции (г).

Пример 2. Рассматривался процесс реставрации поврежденного зуба с использованием внутризубного армирования (см. рис. 2а). Целью реставрации являлось восстановление функциональных и косметических

характеристик зуба. При реставрации поврежденных зубов стояла задача максимально полного восстановлению жевательной эффективности, за эталон которой принималась жевательную эффективность, обеспечиваемая естественными зубными рядами. Математическая модель поврежденного зуба была построена с использованием компьютерной томографии в соответствии с вышеизложенной методикой. Поврежденный участок зуба был препарирован и подготовлен для установки внутризубного армирующего устройства – сетки. Композиционная пломба формировалась в два слоя, между которыми устанавливался армирующий элемент. Армирующий элемент фиксировался внутри конструкции, посредством заполнения соответствующих полостей и объемов композиционным материалом. В качестве граничных условий использовались кинематические условия, моделирующие кинематику жевательного процесса. Величины равнодействующих давления для каждого расчетного случая соответствовали физиологическим усилиям, действующим на интактный зуб. Методом конечных элементов был проведен Многовариантный КЭ анализ напряженно-деформированного состояния позволил выявить качественные и количественные закономерности изменения максимальных напряжений в зависимости от параметров армирования.

Накопленный опыт показывает, что математическое моделирование может быть успешно применено для анализа весьма широкого спектра биомеханических задач.

Литература

1. Матвеева А.И., Канатов В.А., Гаврюшин С.С. Математическое моделирование ортопедических конструкций с опорой на внутрикостные имплантаты // Стоматология, N4, 1991.– С.62-65.
2. Матвеева А.И., Канатов В.А., Гаврюшин С.С. Применение математического моделирования при совершенствовании ортопедического лечения концевых дефектов зубных рядов // Стоматология, N 1, 1990. - С.448-52.
3. Чумаченко Е.И., Арутюнов С.Д., Лебеденко И.Ю. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния зубных протезов. М.: Изд-во МГМСУ, 2003. – 271с
4. Матвеева А.И., Иванов А.Г., Гветадзе Р.Ш., Гаврюшин С.С., Карасев А.В. Повышение эффективности ортопедического лечения больных на основе математического моделирования перспективных конструкций имплантатов // Стоматология, т.76, N5, 1997. – С.44-48
5. Матвеева А.И., Иванов А.Г., Гветадзе Р.Ш., Гаврюшин С.С. Особенности применения внутрикостных имплантатов с интрамобильными элементами//Стоматология-1998-т.77, №5.-С.50-52
6. Лебеденко И.Ю., Перегудов А.Б., Хапилина Т.Э. Замковые крепления зубных протезов. М.: Молодая гвардия, 2001. – 160с.
7. Матвеева А.И., Борисов А.Г., Гаврюшин С.С. Планирование ортопедического лечения больных с дефектами зубных рядов верхней челюсти с использованием математических методов// Стоматология. 2002, том 81, № 5. – С.53-57.

8. ANSYS. Basic Analysis Procedures Guide. Rel. 5.3/ANSYS Inc. Houston, 1994
9. Гаврюшин С.С., Коровайцев А.В. Методы расчета элементов конструкций на ЭВМ: Учебное пособие. М.: Изд-во ВЗПИ, 1991. 160с.
10. Knees K.H. Knochenstruktur als Verbandau, № 4, Georg Thieme, Stuttgart, 1958.
11. Sedlin E.D. A Rheologic Model for Cortical Bone, Elanders Boktryckeri Aktiebolag, Guteborg, 1965, pp. 1-77.
12. Проблемы прочности в биомеханике. М. Высшая школа / ред. Образцов И.Ф. 1988.- 311с
13. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого тела. — М.: Наука, - 1979. - 744 с.

УДК 539.3:621.01

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С УПРАВЛЯЕМОЙ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

*Гаврюшин С.С. (Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана, Россия)*

MATHEMATICAL SIMULATION OF STRUCTURAL FLEXIBLE ELEMENTS WITH GUIDED ELASTIC DEFORMATION

Gavriushin S.S. (Bauman Moscow State Technical University, Russia)

Излагается численная методика и накопленный практический опыт в области математического моделирования функциональных элементов технических устройств, созданных на базе упруго деформируемых тонкостенных механических конструкций, реализующих принцип управляемой упругой деформации. Обсуждаются результаты анализа и синтеза реальных конструкций.

Достигнутые к настоящему времени успехи в области механики деформируемого твердого тела и численных методов анализа открыли возможность для создания на базе тонкостенных оболочечных конструкций новых более совершенных функциональных элементов технических устройств, которые могут одинаково успешно функционировать в вакууме, в сверхчистых или, наоборот, в агрессивных средах. Для достижения требуемых эксплуатационных характеристик в процессе численного моделирования и проектирования элемента требуется провести своеобразное *программирование* свойств будущей конструкции, при котором закладывается возможность реализации требуемых нелинейных деформационных процессов, в том числе процессов, происходящих посредством хлопков или перескоков. Такие элементы, получили в литературе [1,2,3] название *элементы управляемой упругой деформации*. Деформирование таких элементов может быть вызвано действием давления, температуры или происходить благодаря эффекту памяти формы.

Излагаемая методика расчета и проектирования элементов управляемой упругой деформации опирается на идею мультипараметрического подхода [4] при математическом моделировании на ЭВМ высоконелинейных

процессов. Для получения релейной характеристики, реализующей дискретный отклик на монотонное измерение внешнего воздействия, в проектируемый процесс деформирования тонкостенного оболочечного элемента закладывается эффект *упругого перескока*. При численном моделировании используется стратегия последовательного исследования однопараметрических нелинейных задач, принадлежащих многопараметрическому семейству в которое *погружена* анализируемая задача, что позволяет выйти на решение задачи численного синтеза конструкции. Алгоритм численного исследования основан на использовании метода продолжения решения по параметру в сочетании с приемом *смены подпространства управляющих параметров* [4].

Анализ рассматриваемых в работе упругих элементов проводится с помощью различных численных алгоритмов исследования разрешающих уравнений геометрически нелинейной лагранжевой теории тонких упругих стержней и оболочек. К особенностям записи определяющих соотношений, следует отнести целенаправленное введение в уравнения двух и более независимых (управляющих) параметров, определяющих нелинейный процесс деформирования. Параметры управления могут входить в описание геометрии элемента, свойств материала, условий закрепления, внешних термомеханических воздействия и т.д.

Совокупность всех решений для заданного числа $m+n$ внешних и внутренних параметров, интерпретируется как некоторая поверхность (гиперповерхность) равновесных состояний, построенная в евклидовом пространстве параметров R^{m+n} , а каждый однопараметрический процесс, как некоторая траектория на этой поверхности. Если в пространстве состояний удастся описать последовательные равновесные состояния системы при монотонном изменении только одной величины, то такие процессы трактуются как однопараметрические задачи. Анализ таких систем проводят с использованием дополнительного соотношения, содержащего независимую переменную λ – трактуемую как *параметр продолжения* [5]

Проекция поверхности равновесных состояний в подпространство управляющих параметров наряду с регулярными точками может иметь и особые точки, в которых малое изменение управляющих параметров может вызвать резкий переход системы в новое состояние - *бифуркацию* или *катастрофу*. Такие значения параметров управления называют - критическими, а частные случаи системы – *особыми* или *вырожденными*. Системы, описывающие реальные процессы зависят от параметров, которые не могут быть заданы абсолютно точно и, как правило, являются системами общего положения. При численном исследовании нелинейных задач важнейшим инструментом исследователя становятся методы продолжения. В процессе счета особые трудности возникают в окрестностях особых точек, в силу нарушения условия единственности

решений. В современной математике эта проблематика изучается в рамках направления, получившего название теория катастроф [6]. В случае однопараметрического семейства систем общего положения, могут иметь место неустранимые особенности только типа складки.

Процедура реализации счета при прохождении окрестности предельных точек предложена Н.В. Валишвили (1968) и известна как прием *смены параметра* [5]. Особенности коразмерности два и выше можно устранить посредством *шевеления* параметров системы, что принципиально позволяет выбрать траекторию процесса, проходящую мимо окрестностей таких особых точек. Обход производится с помощью приема численного счета названного нами *приемом смены подпространства управляющих параметров* [4]. Суть приема заключается в следующем: при подходе к окрестности особой точки следует перейти к другой однопараметрической системе, для которой проекция равновесной поверхности на ось параметра управления в рассматриваемом диапазоне его изменений не имеет особенностей коразмерности выше первой. Стратегия численного исследования представляет собой кусочно-гладкий процесс продолжения решения по параметру в пространстве состояний всех систем, причем на каждом гладком участке процесса, численный анализ сводится к решению однопараметрической задачи.

Приведенный далее пример проектирования термобиметаллического (ТБ) диска с дискретной характеристикой (см. Рис. 1а) дает представление о реализации алгоритма численного синтеза, основанного на использовании приема смены подпространства управляющих параметров.

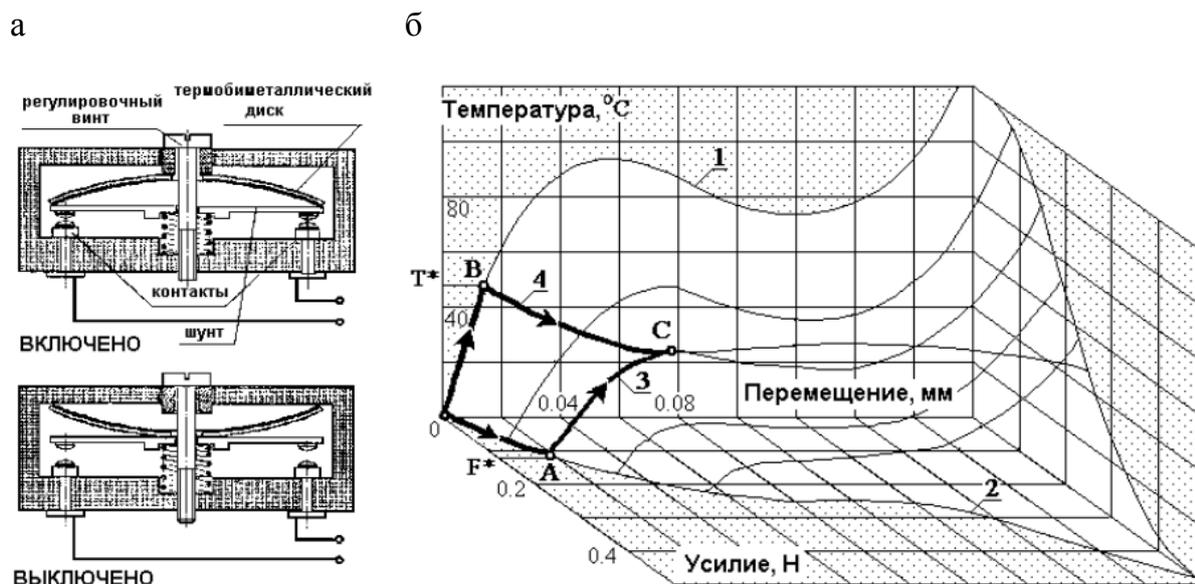


Рис. 1. Синтез термобиметаллического элемента с заданной температурой переключения.

Посредством предварительного механического нагружения, проводимого с помощью регулировочного винта, требуется произвести настройку ТБ диска на переключение при заданном значении температуры T^* . Независимыми параметрами являются температура и усилие предварительного поджатия ТБ элемента.

В недеформируемом состоянии купол прижимается к плоскости по внешнему периметру силой F , распределенной по контуру отверстия в вершине. Геометрические и физико-механические характеристики ТБ диска следующие: диаметр ТБ диска – 5 мм, радиус кривизны в недеформированном состоянии – 22,2 мм; толщина – 0,04 мм, диаметр центрального отверстия – 0,5 мм. Физико-механические характеристики материалов: $E_1=1.50 \times 10^5$ МПа, $E_2=1.35 \times 10^5$ МПа,

$$\mu_1 = \mu_2 = 0.3, \quad \alpha_1 = 1.0 \times 10^{-6} \text{ 1/C}^\circ, \quad \alpha_2 = 18.0 \times 10^{-6} \text{ 1/C}^\circ.$$

Результаты численного анализа представлены на рис. 1б в трехмерном пространстве: температура, усилие предварительного поджатия, прогиб в центральной точке элемента. Кривая 1 соответствует процессу деформирования ТБ диска при отсутствии предварительного поджатия. Кривая 2 соответствует силовому нагружению элемента при постоянной температуре. Кусочно-гладкие кривые 3 и 4 соответствуют сложному процессу деформирования. Прием смены пространства управляющих параметров был применен в точках A и B .

Для определения усилия предварительного поджатия, обеспечивающего срабатывание при заданной температуре, использовалась следующая стратегия решения задачи синтеза. На первой стадии процесса производилось нагружение конструкции температурой вдоль кривой 1 вплоть до достижения заданной температуры T^* . В точке B производилась смена параметра продолжения, и дальнейшее нагружение производилось по силе, пока не достигалась особая точка C , соответствующая предельной точке для зависимости перемещение – усилие. Усилие F , соответствующее этой точке, соответствовало искомому усилию предварительного поджатия F^* , обеспечивающему прощелкивание элемента при требуемой температуре T^* . Для контроля была решена задача по пути нагружения 3, которая показала идентичность полученных результатов с удовлетворительной погрешностью.

С помощью разработанной численной методики, реализованной в виде пакета прикладных программ, проведены исследования ряда перспективных конструкций, к которым следует отнести новые типы экологически чистых исполнительных механизмов, технических устройств и систем, не загрязняющих окружающую среду и минимизирующих вмешательство человека в природные экосистемы. В настоящее время прообразы будущих механизмов [1,7], так называемых *белых роботов*, используются для межоперационной транспортировки и

позиционирования полуфабрикатов изделий электронной техники при нанесении тонких пленок в условиях вакуума или сверхчистых сред.

Основным исполнительным элементом устройства является упруго-деформируемая тонкостенная оболочка известная как манометрическая пружина или пружина Бурдона. В традиционном исполнении угол поворота заслонки изменяется монотонно пропорционально давлению во внутренней полости манометрической пружины. Путем математического моделирования удалось создать такое поперечное сечение манометрической пружины [8], которое обеспечивает скачкообразное срабатывание устройства, обеспечивая требуемое перемещение заслонки за счет малого изменения давления в рабочей полости.

Следует признать, что в последние годы комплексные исследования специалистов-робототехников были связаны скорее с разработкой *интеллектуальных* систем, чем с принципиальным совершенствованием механической части робототехнического оборудования, что повлекло за собой относительное отставание в области создания исполнительных механических систем адекватных новым современным задачам. Предлагаемая стратегия численного исследования в определенной степени восполняет существующий пробел, связанный с недостаточной отработкой приемов численного анализа процессов нелинейного деформирования упругих конструкций и позволяет научно обоснованно назначать конструктивные и технологические параметры проектируемых технических устройств. На основе принципа управляемой упругой деформации могут быть созданы качественно новые конструкции мобильных мини и микро роботов специального назначения.



Рис. 2. Макет мини-робота, использующего перистальтический принцип движения.

На рис.2 представлен действующий макет эндовазального мини-робота, предназначенного для проведения медицинских операций в кровеносных сосудах [9]. Перистальтическое перемещение мини-робота осуществляется с помощью специально разработанной для этой цели конструкции с управляемой упругой деформацией.

Использование элементов управляемой упругой деформации, открывает перспективу создания новых типов механических и мехатронных устройств, исполнительных механизмов [10],

функциональных элементов микро- и нано - систем – сенсоров и актуаторов. Конструктивные особенности элементов обеспечивают их функционирование в вакууме, в сверхчистых или в агрессивных средах, допуская при этом возможность миниатюризации.

В заключение считаем нужным отметить, что использования принципа управляемой упругой деформации при проектировании технических систем, в том числе и в конструкциях роботов, позволит существенно повысить их функциональные возможности и выйти на новый технический уровень, отвечающий потребностям современного общества.

Литература

1. Александрова А.Т. Новые способы передачи и формирования движения в вакууме. - М.: Высшая школа, 1979. - 69с.
2. Гаврюшин С.С. Расчет и проектирование элементов технических устройств с управляемой упругой деформацией. Конструкторско-технологическая информатика -2000: Труды конгресса. В 2-х т.т. Т.1./IV международный конгресс. - М.: Изд-во "Станкин", 2000. с.133-135.
3. Гаврюшин С.С. Элементы управляемой упругой деформации для функциональных устройств робототехнического оборудования. В сб. «Экстремальная робототехника: Материалы XI науч.-техн. конф.», СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. с.277-282
4. Гаврюшин С.С. Численное моделирование и анализ процессов нелинейного деформирования гибких оболочек // Изв. АН СССР. МТТ, 1994. №1. – С.109-119.
5. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ.– М.: Машиностроение, 1976.-278 с.
6. Арнольд В.И. Теория катастроф. – М.: Наука, 1990. –128с.
7. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О. Нелинейные гибкие элементы в вакуумной технике и технологии. Математическое моделирование сложных технических систем // Тр. МГТУ им. Н.Э.Баумана №568. - Москва, 1995. – С.51-62
8. Патент СССР №1797699 Манометрическая трубчатая пружина / Гаврюшин С.С.–. №4942927/10, Заявл. 06.06.91, Оpubл. 23.02.93, Бюл. № 7.
9. Патент РФ № 2218191 Эндовазальный мини-робот / Г.В.Саврасов, А.В.Покровский, С.С.Гаврюшин, О.С.Нарайкин, А.С.Ющенко, В.И.Поспелов. - №200210938/14 ; Заявл. 11.04.2002.; Оpubл. 10.12.2003, Бюл. №34.
10. Гаврюшин С.С. Элементы управляемой упругой деформации для функциональных устройств робототехнического оборудования // Мехатроника, №5, 2000. –с 16-18.

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Геворкян Г.А. (Ереванский Государственный Университет
Архитектуры и Строительства)

Предлагается модификация метода конечных элементов, при котором решение задач изгиба пластин сводится к задачам квадратичного программирования.

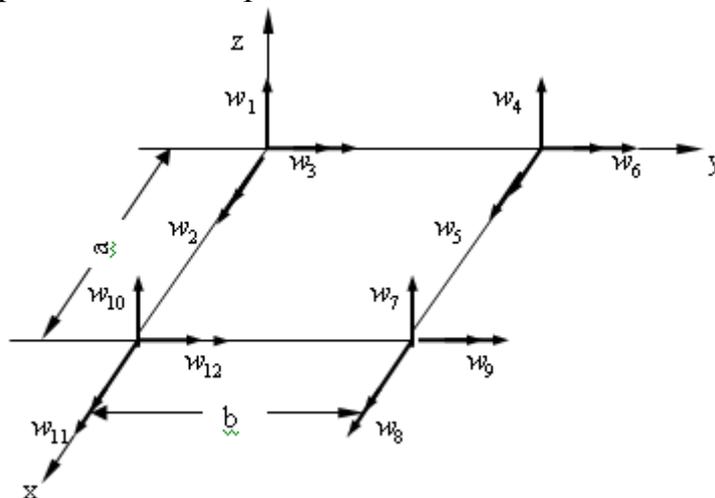
A MODIFIED FINAL ELEMENTS METHOD FOR PLATE PROBLEMS

Gevorgyan G.A.

(Yerevan State University of Architecture and Construction)

A modified final elements method is suggested where plate problems are reduced to quadratic programming ones.

Срединную плоскость пластины представим в виде совокупности $s \in N = \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ конечных элементов прямоугольной формы с узлами в угловых точках. Обозначим через $w_s = (w_1^s, w_2^s, \dots, w_{12}^s)^T$ – вектор узловых перемещений. Нумерация и положительные направления компонентов этого вектора приведены на фиг.1. Здесь вектором с двумя стрелками указано положительное направление поворота, связанное с движением штопора в направлении вектора



Фиг. 1.

Перемещения точек срединной поверхности элемента аппроксимируем следующим многочленом четвертого порядка, содержащим 12 неизвестных параметров:

$$w^s(x, y) = \sum_{i=1}^{12} w_i^s \Phi_i(x, y) \quad (1)$$

где $\Phi_i(x, y)$ - функции Эрмита [1].

Компоненты вектора перемещения $f_s = (w^s, \theta^s, \omega^s)^T$ внутри s -го элемента соответственно определяются формулой (1) и формулами

$$\theta^s(x, y) = \sum_{i=1}^{12} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial y}, \quad \omega^s(x, y) = - \sum_{i=1}^{12} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial x}$$

Общая потенциальная энергия изгиба s -го элемента определяется выражением [1]

$$\Omega^s = \frac{1}{2} w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s$$

где $k_s = \|k_{ij}^s\|$ матрица жесткости, $P_s = (P_1^s, P_2^s, \dots, P_{12}^s)^T$ - эквивалентный внешней нагрузке вектор узловых нагрузок [1].

Учитывая, что рассматриваемая область представлена в виде совокупности \bar{n} конечных элементов и исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы [3], для определения искомым векторов $w_s, s \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования

$$\min \left\{ \sum_{s=1}^{\bar{n}} \left(\frac{1}{2} w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s \right) \mid \text{условие совместности деформации, условие непрерывности напряжений, кинематические краевые условия} \right\} \quad (2)$$

Обозначим через $w = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, w_2^1, w_2^2, w_2^3, \dots, w_n^1, w_n^2, w_n^3)^T$ - вектор узловых перемещений, $P = (P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_2^1, P_2^2, P_2^3, \dots, P_n^1, P_n^2, P_n^3)^T$ - вектор узловых нагрузок, $K = \|K_{ij}\|$ - матрица жесткости для всей пластины, где n - общее число узлов пластины. Тогда, целевая функция задачи (2) примет вид

$$\Omega = \frac{1}{2} w^T K w - w^T P \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} & w_1^1 + K_{12}^{(0)} w_1^2 + K_{13}^{(0)} w_1^3 + K_{14}^{(0)} w_2^1 + K_{15}^{(0)} w_2^2 + \dots + \\ & + K_{1(3n-2)}^{(0)} w_n^1 + K_{1(3n-1)}^{(0)} w_n^2 + K_{1(3n)}^{(0)} w_n^3 = -r_1 \\ & w_1^2 + K_{23}^{(1)} w_1^3 + K_{24}^{(1)} w_2^1 + K_{25}^{(1)} w_2^2 + K_{26}^{(1)} w_2^3 + \dots + \\ & + K_{2(3n-2)}^{(1)} w_n^1 + K_{2(3n-1)}^{(1)} w_n^2 + K_{2(3n)}^{(1)} w_n^3 = -r_2 \\ & w_n^2 + K_{(3n-1)(3n)}^{(3n-2)} w_n^3 = -r_{3n-1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
r &= (r_1, r_2, \dots, r_{3n-1})^T; \\
K_{ii}^{(0)} &= -K_{ii}, i \in M = \{1, 2, \dots, 3n\}; \quad K_{1j}^{(0)} = -K_{1j}, j \in \{2, 3, \dots, 3n\} \\
K_{ij}^{(r)} &= -K_{ij}^{(r-1)} - K_{i(j-1)}^{(r-1)} K_{ij}^{(r-1)}, \\
r &\in \bar{M} = \{1, 2, \dots, 3n-1\}, i \in \{r, \dots, 3n\}, j \in \{r+1, \dots, 3n\} \\
d_{(3n)3n} &= K_{(3n)3n}^{(0)} - \sum_{i=1}^{3n-1} (K_{i(3n)}^{(3n)})^2
\end{aligned}$$

Подставив (4) в выражение (3), представим его в виде

$$\Omega = \frac{1}{2}(w^T D w + r^T I r) - w^T P$$

где $D = \|d_{ij}\|$ – диагональная матрица порядка $3n$; I – единичная матрица порядка $3n-1$;

Пусть $C = -P$ вектор-столбец порядка $3n$. Обозначим через $A = (A_1, A_2, \dots, A_{3n})$ матрицу коэффициентов системы уравнений (7), где $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{3n-1,j})^T, j \in \{1, 2, \dots, 3n\}$. Тогда, принимая во внимание, что r является вектором дополнительных переменных, взамен задачи (2) получим

$$\min \left\{ \frac{1}{2} w^T D w + C^T w \mid A w < 0, \text{ условие совместности деформации, условие непрерывности напряжений, кинематические краевые условия} \right\} \quad (5)$$

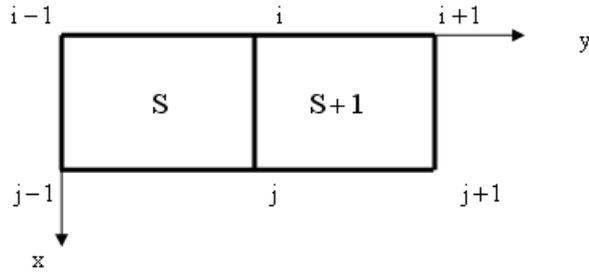
Как известно, функция поперечного смещения w^s , задаваемая формулой (1), обеспечивает непрерывность перемещения, но не обеспечивает совместности наклона нормали вдоль границы разделов элементов. Для обеспечения непрерывности на границах разделов элементов введем дополнительные точки и напишем условия непрерывности в смежном сечении вдоль границы разделов s -го и $(s+1)$ -го конечных элементов в этих точках, имеем

$$\omega^s\left(\frac{a}{2}, b\right) = \omega^s\left(\frac{a}{2}, 0\right); \quad \theta^s\left(a, \frac{b}{2}\right) = \theta^s\left(0, \frac{b}{2}\right) \quad (6)$$

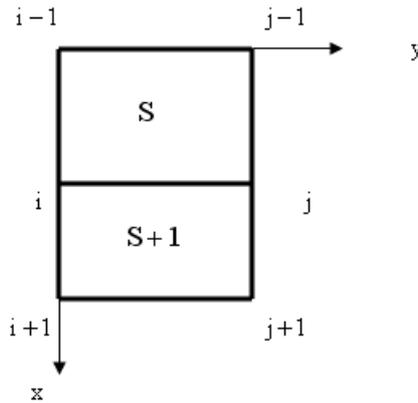
$$\omega^s\left(a, \frac{b}{2}\right) = \omega^s\left(0, \frac{b}{2}\right); \quad \theta^s\left(\frac{a}{2}, b\right) = \theta^s\left(\frac{a}{2}, 0\right) \quad (7)$$

Используя формулы (2) для смежных сечений ij , параллельных осям x и y (фиг. 2 и 3), получим, что условия непрерывности (6) тождественно удовлетворяются. Условия (7) примут вид

$$\begin{aligned}
-w_3^{i-1} + w_3^i - w_3^{i+1} + w_3^{j-1} - 2w_3^j + w_3^{j+1} &= 0 \\
-w_2^{i-1} + 2w_2^i - w_2^{i+1} + w_2^{j-1} - 2w_2^j + w_2^{j+1} &= 0
\end{aligned}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Обозначим через \bar{m} и \bar{m} - соответственно количество смежных сечений, параллельных осям x и y . Перепишем эти условия непрерывности в виде системы уравнений. Имеем

$$Hw = 0 \quad (8)$$

где H - матрица порядка $m \times 3n$, $m = \bar{m} + \bar{m}$.

Компоненты напряжений от изгиба в элементе пластины определяются формулами

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \tau_{xy} = -\frac{2Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

где ν - коэффициент Пуассона, E - модуль упругости, z - расстояние до срединной поверхности по толщине.

В общем случае в каждом узле $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ сходятся четыре конечных элемента. По формуле (9) определим напряжение в i -ом узле для всех четырех конечных элементов и, приравнявая их, находим узловые условия непрерывности напряжений. Принимая во внимание формулы (9),

легко увидеть, что взамен σ_x и σ_y , можно приравнять значения $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и

$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Тогда, соответственно для $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ и τ_{xy} , получим

$$\begin{aligned}
6w_1^i + 4bw_3^i - 6w_4^i + 4bw_6^i &= 0 & 6w_1^i + 4aw_2^i - 6w_4^i - 4aw_5^i &= 0 \\
6w_4^i - 4bw_6^i - 6w_7^i + 4bw_9^i &= 0, & 6w_4^i + 4aw_5^i - 6w_7^i + 4aw_8^i &= 0 \\
6w_7^i - 4bw_9^i - 6w_{10}^i - 4bw_{12}^i &= 0 & 6w_7^i - 4aw_8^i - 6w_{10}^i + 4aw_{11}^i &= 0
\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}
w_1^i + aw_2^i + bw_3^i + w_4^i + aw_5^i - bw_6^i &= 0 \\
w_4^i + aw_5^i - bw_6^i + w_7^i - aw_8^i - bw_9^i &= 0 \quad i \in N \\
w_7^i - aw_8^i - bw_9^i + w_{10}^i - aw_{11}^i + bw_{12}^i &= 0
\end{aligned}$$

(11)

Заметим, что вдоль границы разделов элементов обеспечивается непрерывность нормальных напряжений, но не обеспечивается совместность касательных напряжений. Условия непрерывности касательных напряжений в смежном сечении вдоль границы разделов s -го и $(s+1)$ -го конечных элементов зададим соотношениями

$$\tau_{xy}^s\left(\frac{a}{2}, b\right) = \tau_{xy}^{s+1}\left(\frac{a}{2}, 0\right); \quad \tau_{xy}^s\left(a, \frac{b}{2}\right) = \tau_{xy}^{s+1}\left(0, \frac{b}{2}\right)$$

Используя формулы (9) для смежных сечений ij , параллельных осям x и y (фигуры 2 и 3), получим

$$\begin{aligned}
2w_1^{i-1} + aw_2^{i-1} - 4w_1^i - 2aw_2^i + 2w_1^{i+1} + aw_2^{i+1} - \\
- 2w_1^{j-1} + aw_2^{j-1} + 4w_1^j - 2aw_2^j + 2w_1^{j+1} - aw_2^{j+1} &= 0
\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}
2w_1^{i-1} + bw_3^{i-1} - 4w_1^i - 2bw_3^i + 2w_1^{i+1} + bw_3^{i+1} - \\
- 2w_1^{j-1} + bw_3^{j-1} + 4w_1^j - 2bw_3^j - 2w_1^{j+1} + bw_3^{j+1} &= 0
\end{aligned}$$

(13)

Перепишем все условия (10)-(13) в виде системы уравнений, получим

$$Hw = 0$$

(14)

где H - матрица порядка $(3n+m) \times 3n$.

С учетом соотношений (8) и (14) задача (5) примет вид

$$\min \left\{ \frac{1}{2} w^T D w + C^T w \mid Aw < 0, \quad Hw = 0, \quad Hw = 0, \text{ кинематические краевые условия} \right\}$$

(15)

Алгоритм решения задачи (15) приведен в [2].

Литература

1. Амбарцумян А.В., Геворкян Г.А., Об одном методе конечных элементов для решения задач изгиба плит. Ереван: Известия НАН Армении, Механика, том 57, вып 1, 2004. с.26-34.
2. Геворкян Г. А., Механические модели и алгоритмы решения задач математического программирования. – Ереван; Из-во АН Армянской ССР, 1987. – 184 с.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. -940 с.

**ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ДАВЛЕНИЯ ЛЬДА НА
КОНСТРУКЦИИ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

*Глаговский В.Б., Кассирова Н.А., Дружинин М.А.
(ОАО "ВНИИ Гидротехники им. Б.Е. Веденеева",
Санкт - Петербург, Россия)*

**RESEARCH OF ICE PRESSURE BEING IN PROGRESS UPON
CONSTRUCTIONS OF HYDROENGINEERING STRUCTURES USING
FINITE ELEMENT METHOD**

*Glagovsky V.B., Kassirova N.A., Druzhinin M.A.
(The B.E. Vedeneev All-Russian Research Institute
of Hydraulic Engineering, Russia)*

Рассматриваются вопросы моделирования процесса силового взаимодействия ледовых полей с ограждающими конструкциями гидротехнических сооружений. Исследования проводятся на пространственных моделях методом конечных элементов с моделированием контактного взаимодействия льда с конструкцией, его разрушения.

1. Предмет исследований. Оценка величины давления ледяных полей на затворы судопропускных и водопропускных сооружений гидроэлектростанций на реках с зимним ледоставом, на конструкции нефтедобывающих платформ на шельфах северных морей и т.п. является достаточно серьезной проблемой.

Цель данных исследований - разработка метода оценки давления льда на сооружения с учетом контактного взаимодействия преграждающей конструкции и ледового поля, возможности разрушения льда, пространственного характера их деформирования.

Работа является первым этапом расчетных исследований, проводимых в настоящее время во ВНИИ Гидротехники им. Б.Е. Веденеева в лаборатории статики и динамики сооружений.

2. Постановка и метод исследований. Исследования выполняются методом конечных элементов с применением программных комплексов "LS-DYNA"[1] и "ANSYS"[2].

В расчетных моделях реализуется два вида нелинейности:

контактная нелинейность — совместное деформирование льда и конструкции при сжатии и отсутствии связи между контактирующими элементами системы при растяжении контакта.

материальная нелинейность — разрушение льда при превышении напряжениями его прочности, при этом разрушение моделируется ликвидацией соответствующих элементов.

Задача рассматривается как динамическая, а разрушение как прогрессирующий процесс от момента соприкосновения льда с сооружением до развития установившегося состояния. Влияние скорости деформаций на механические свойства льда на данном этапе исследований не рассматривается.

Начальные условия задаются скоростью дрейфа льда V_0 . После удара льда о преграду происходит процесс деформирования системы ледовое поле - конструкция и далее откат льдины, т.е. изменение направления скорости.

В данной работе не рассматривается наваливание льда на конструкцию под дальнейшим воздействием на него течения воды и ветра.

Многочисленные исследования поведения льда под силовым воздействием свидетельствуют о возможности разных видов поведения льда под нагрузкой и различных разрушающих процессах [3-7].

Спецификой льда как материала является довольно значительное различие пределов его прочности на растяжение и сжатие - в 4 - 5 и более раз. При этом предельные величины существенно зависят от природных факторов, таких как температура воздуха, соленость воды и др.

На данном этапе исследований под моментом разрушения понимается момент наступления предела прочности льда как упругого тела с хрупким разрушением и образование поверхности разрушения, т. е. разламывание материала. Рассматривается восходящая ветвь диаграммы напряжения - деформации.

Моделирование условий на контакте конструкция - лед является ответственным моментом в имитации взаимодействия сооружения и ледового поля. Программы LS-DYNA и ANSYS предлагают большое число контактных типов, как с возможностью их использования при решении специфических задач, так и для более широкого использования.

В данных исследованиях при использовании программы LS-DYNA применяется тип контакта CONTACT_AUTOMATIC_GENERAL. При решении задачи с помощью программы ANSYS используется контакт типа CONTA175. Указанные типы контактов достаточно хорошо срабатывают в задачах с разрушением.

3. Примеры исследований. На начальной стадии исследований решаются многочисленные тестовые задачи, далее разработанные подходы применяются уже к конкретным гидротехническим объектам. Здесь кратко дается описание исследований вертикальных гидротехнических затворов и довольно сложной пространственной конструкции плавучего затвора судопропускного отверстия комплекса защитных сооружений Санкт-Петербурга (КЗС).

Модель 1. На рис. 1 показана расчетная модель системы плоская ограждающая конструкция - ледовое поле. Конструкция представлена практически жесткой стенкой. Здесь не ставится задача оценки несущей

способности конструкции и влияния деформируемости преграды. Льдина смоделирована пространственной плитой с тремя элементами по ее толщине.

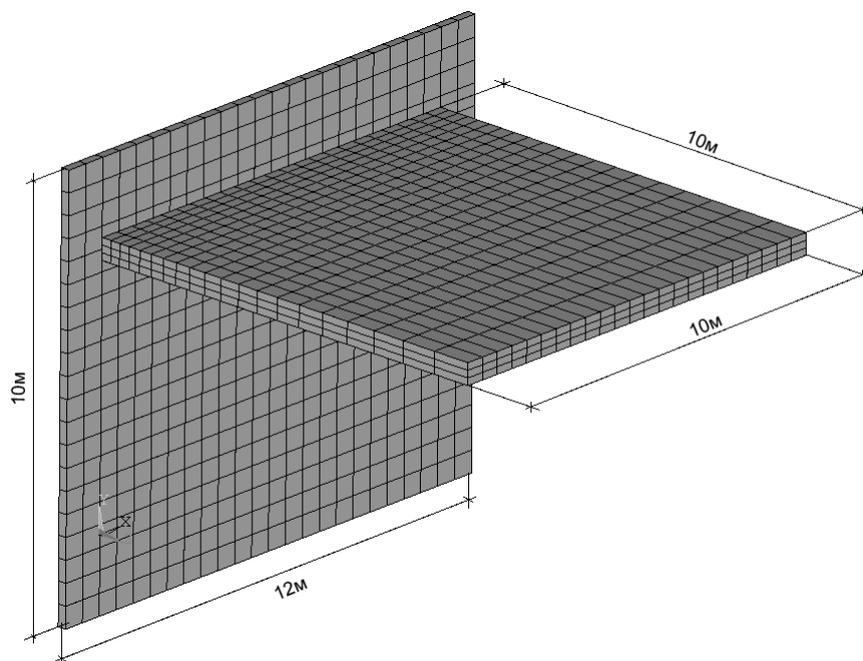


Рис. 1. Расчетная модель взаимодействия льдины с вертикальной преградой.
Модель 1

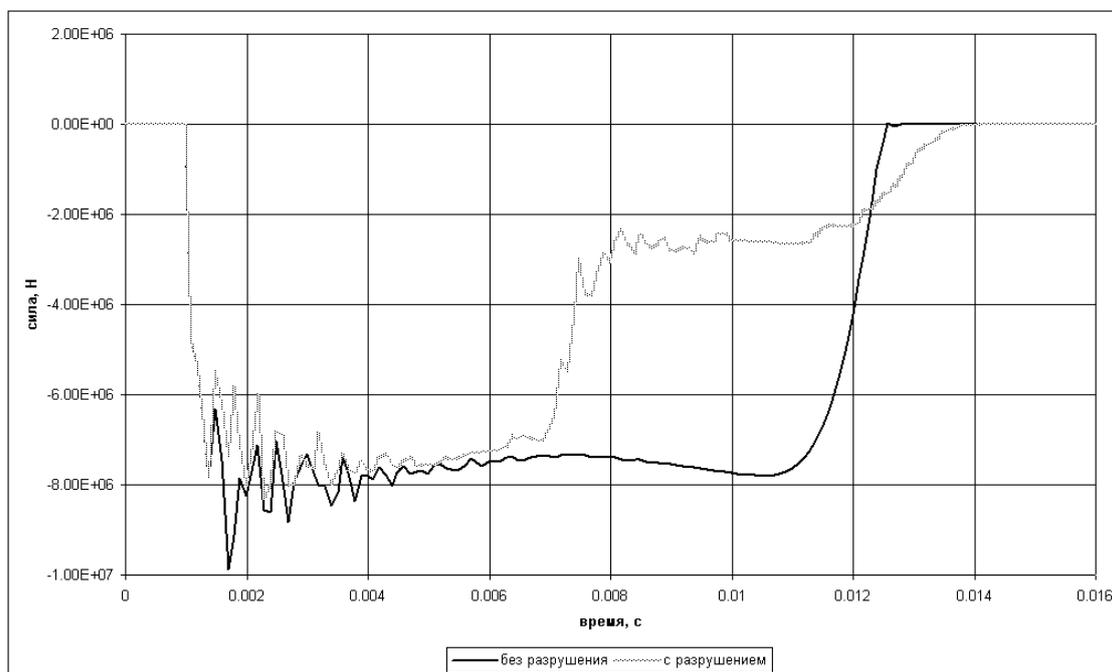


Рис. 2. Развитие во времени суммарного давления льда на затвор. Модель 1

Льдина размером $10.0 \times 10.0 \times 0.5$ метров подходит к затвору со скоростью 1.0 м/сек, определяемой скоростью воды и ветра. Начальное расстояние между льдиной и поверхностью затвора принимается равным

1.0 мм, ускорение сближения нулевое. Затвор неподвижен, конструкция его слабodeформируемая.

На рисунке 2 приведен график развития суммарного давления на конструкцию от момента соприкосновения льдины с конструкцией до устойчивого состояния системы. При этом рассматриваются варианты удара без разрушения льдины и с ее разрушением.

Как видно, максимальная величина суммарного давления, наблюдается в случае упругой работы льда без разрушения, - около 8 МН.

При разрушении льда при ударе суммарное давление на преграду меньше, чем при отсутствии разрушения. Так, при прочности льда на растяжение 0.5 МПа, на сжатие - 2.0 МПа максимальное суммарное давление на поверхность преграды порядка 7.5 МН.

При ударе лед испытывает сжатие по нормали к контакту с преградой. В поперечном же направлении развиваются растягивающие напряжения, приводящие к началу его разрушения. С образованием "дыр" в льдине растут сжимающие напряжения в ее оставшейся части и могут уже превосходить прочность льда на сжатие, процесс разрушения может нарастать. На рисунке 3 видны выпавшие из работы элементы на 0.011 секунде от момента соударения. Суммарное давление на преграду упало с максимальной величины 8.0 МН до 2.0 МН. Полная разгрузка преграды происходит при откате оставшейся части льдины на 0.0128 секунде от момента соударения. Наблюдались в данных исследованиях случаи полного разрушения льда.



Рис. 3. Картина разрушения льдины перед плоским затвором при $t=0.0128$ с. Модель 1

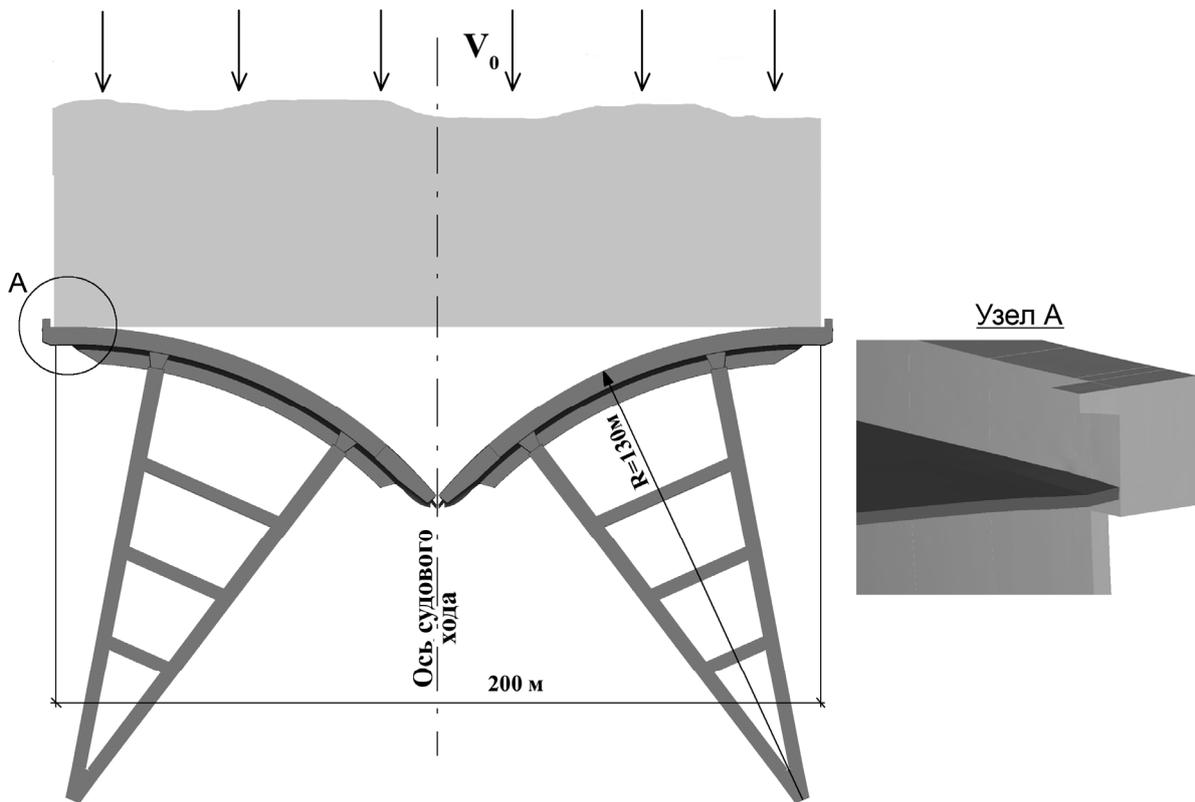


Рис. 4. Модель взаимодействия льда и затвора судоходного сооружения КЗС. Модель 2

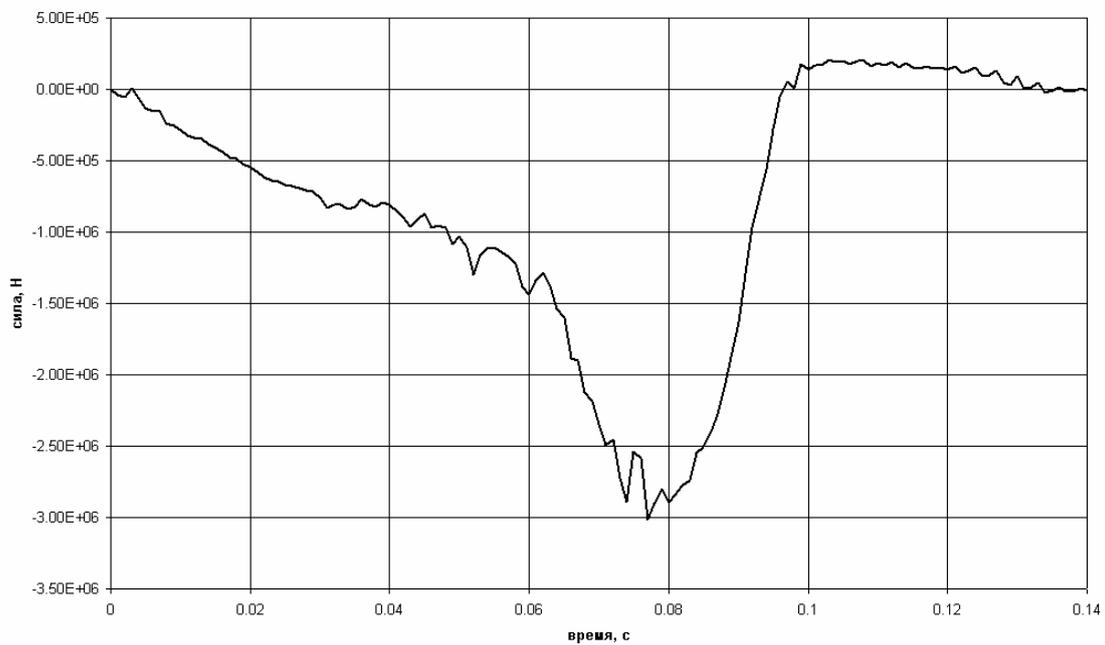


Рис. 5. Развитие суммарного давления на обшивку затвора. Модель 2

Модель 2. На рисунке 4 приведена пространственная модель затвора судопроемного отверстия комплекса защитных сооружений на реке Неве. Затвор — двухстворчатая плавучая металлическая конструкция, которая во время наводнения выводится в пролет судопроемного

сооружения и опускается на порог. Конструкция состоит из стального корпуса - батопорта и ног - опорных рам, связывающих батопорт с устоями. Она воспринимает давление воды нагонного уровня, волны, ветра, а в зимнее время еще и льда. Здесь рассматривается вариант зимнего наводнения.

Ровная льдина размерами $200 \times 600 \times 0.60$ метров движется к затвору с постоянной скоростью $V_0 = 0.30$ м/сек. Скорость направлена по оси судопропускного отверстия. На рисунке 4 выделена зона локального контакта рассматриваемого этапа взаимодействия льда и конструкции.

На рисунке 5 показано развитие во времени суммарного давления льда на обшивку затвора. Как видно, максимальное суммарное давление льда на обшивку батопорта наблюдается на 0.076 секунде от момента их соприкосновения и достигает величины 3.0 МН. Далее суммарное давление падает и при $t = 0.10$ секунд практически начинается откат льдины.

На рисунке 6 показано изменение скорости V_n и перемещений U_n льда в зоне А во времени (см. рис. 4).

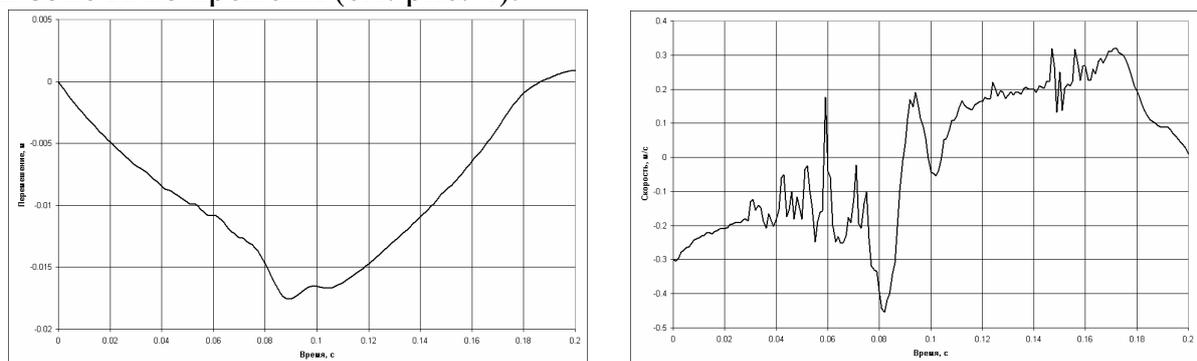


Рис. 6. Изменение перемещений и скорости льдины во времени. Модель 2

4. Заключение. Результаты исследований показали реальность решения практических задач по оценке несущей способности сложных пространственных сооружений на давление ледовых полей с учетом возможного их разрушения. Работа в данном направлении продолжается.

В настоящее время разрабатывается пользовательская подпрограмма по решению задач с критериями разрушения, более подходящими для льда, чем это предоставляется возможностями программы LS-DYNA.

Литература

1. LS-DYNA. A program for Nonlinear Dynamic Analysis of Structure in Three Dimension. Version 970. Livermore Software Technology Corporation.
2. ANSYS Release 9.0. Documentation ANSYS Inc.
3. Н. Маэно. Наука о льде. М.: Мир, 1988.
4. К.Ф. Войтковский. Механические свойства льда. Изд. АН СССР, 1960.

5. В.Н. Астафьев, Э.Н. Калинин, А.М. Поломошнов, Г.А. Сурков. Ледовые исследования на шельфе северного Сахалина. Электронное издание СахОРГО, www.science.sakhalin.ru, 2001.
6. Ю.И. Головин. Вода и лед - знаем ли мы о них достаточно? // Соровский образовательный журнал, том 6, № 9, 2000.
7. S.M. Kapustyansky, T. Kama, K.N. Shkinek. A mathematical model of the ridge. // Proceedings of the 13th International Symposium on Ice, 1996, Volume I, p.335 - 345.

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ

Голованов А.И., Султанов Л.У.

(Казанский государственный университет, Казань, Россия)

LARGE DEFORMATION VISCO-ELASTO-PLASTIC ANALYSIS

Golovanov A.I., Sultanov L.U.

(Kazan State University, Kazan, Russia)

Исследуется напряженно-деформированное состояние вязкоупругопластических тел с учетом больших перемещений, поворотов и деформаций. Используется метод пошагового нагружения в рамках комбинированного лагранжево-эйлерового описания деформации среды. Решение ведется МКЭ.

Для описания процесса деформирования используется комбинированная лагранжево-эйлерова постановка. Поведение материальной точки (элементарного объема) отслеживается в соответствии с лагранжевым методом описания среды, а в текущий момент времени процесс деформирования представляет собой течение среды с некоторыми физико-механическими свойствами. Это соответствует подходу Эйлера, широко применяемого в механике сплошных сред.

Напряженное состояние описывается тензором истинных напряжений Коши-Эйлера $(\Sigma) = \sigma^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$, здесь \bar{e}_i – орты глобальной декартовой системы координат. Помимо скорости изменения напряжений $(\dot{\Sigma})$, будем использовать индифферентную производную тензора напряжений по Яуманну (Σ^J) , которая имеет вид

$$(\Sigma^J) = (\dot{\Sigma}) - (\omega) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (\omega). \quad (1)$$

Считая среду изотропной, для удобства разложим скорость деформаций и напряжений на шаровую часть и дививатор, обозначив

$$d_0 = \frac{1}{3} d_{ii}, \quad \sigma_0^J = \frac{1}{3} \sigma_{ii}^J, \quad d'_{ij} = d_{ij} - \delta_{ij} d_0, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^J - \delta_{ij} \sigma_0^J,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Процесс деформирования представляется в виде последовательных равновесных состояний, переход от предыдущего к последующему происходит путем приращения нагрузки (рис. 1). Методика расчета состоит в разработке алгоритма вычисления $(l+1)$ -го состояния при известных параметрах процесса (l) -го состояния. Исходным является уравнение виртуальных мощностей в актуальной конфигурации, из которого путем линеаризации получено разрешающее уравнение в скоростях напряжений.

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[(\dot{\Sigma}) \cdot (\delta d) + (\Sigma) \cdot (\delta \dot{d}) + \frac{J}{J} (\Sigma) \cdot (\delta d) \right] d\Omega = \\ & = \iint_{\Omega} \left[\dot{f} + \dot{f} \frac{J}{J} \right] \cdot \delta v d\Omega + \iint_S \left[\dot{p} + \dot{p} \frac{J}{J} \right] \cdot \delta v dS. \end{aligned} \quad (2)$$

где Ω - текущий объем, S^σ - часть его поверхности, на которой заданы усилия, \dot{f} , \dot{p} - векторы массовых и поверхностных сил, v - вектор скорости, $J = \det(\partial y^i / \partial x^j)$ - изменение объема в процессе деформирования.

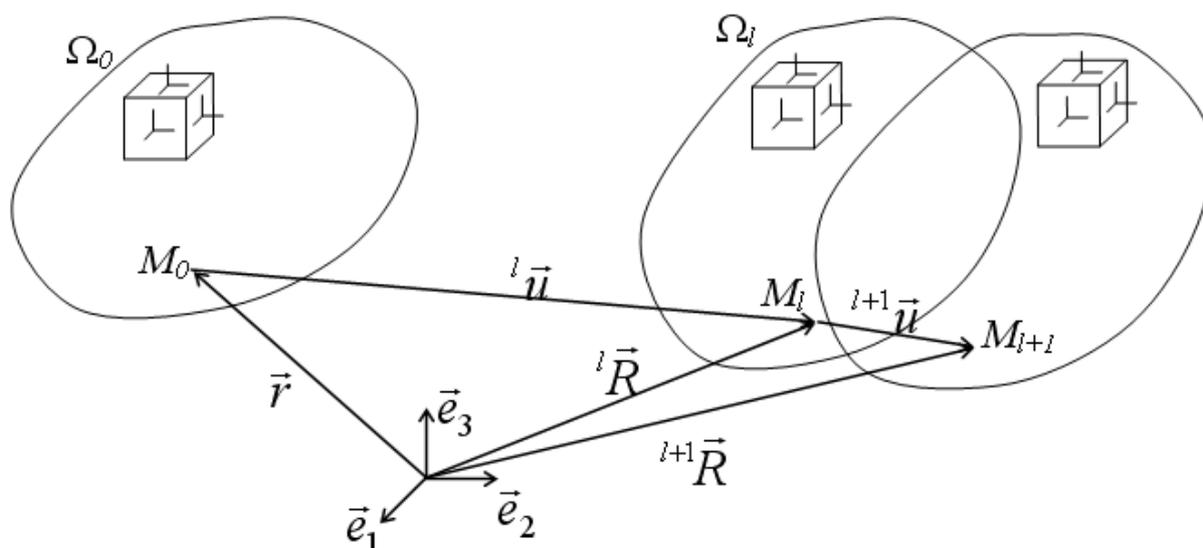


Рис. 1.

В рамках классической теории течения идеально пластического деформирование моделируется на основе метода проецирования напряжений на поверхность текучести с использованием критерия Губера-Мизеса с итерационным уточнением текущего НДС. Используется аддитивное представление для скорости деформаций. Физические соотношения упругого деформирования записаны в виде

$$\left(\Sigma_0^J \right) = 3K(d_0), \quad \left(\Sigma'^J \right) = 2G(d')$$

При учете вязких деформаций используется обобщенная модель Максвелла, тогда скорость напряжений Коши-Эйлера с учетом вязких деформаций будет иметь вид

$$(\dot{\Sigma}_0) = 3K(d_0),$$

$$(\dot{\Sigma}') = 2G(d') + (\omega) \cdot (\Sigma) - (\Sigma) \cdot (\omega) - \frac{(\Sigma')G}{\eta}. \quad (3)$$

где G – модуль сдвига, K – модуль объемного расширения, η – коэффициент вязкости.

Для уточнения текущего деформированного состояния применяется итерационная процедура, основанная на введении в разрешающее уравнение работы «дополнительных напряжений» (Σ_δ) на возможных скоростях деформаций. Итоговое уравнение для m -ой итерации на l -м шаге нагружения имеет вид

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \{ 2G(d') \cdot (\delta d) + 9K(d_0) \cdot (\delta d_0) + \\ & + (\Sigma) \cdot [(\delta d) \cdot (\omega) - (\omega) \cdot (\delta d) + (\delta \dot{d})] + \frac{J}{J} (\Sigma) \cdot (\delta d) \} d\Omega - \\ & - \iiint_{\Omega} \frac{J}{J} \vec{f} \cdot \delta \vec{v} d\Omega - \iint_S \frac{J}{J} \vec{p} \cdot \delta \vec{v} dS = \\ & = \iiint_{\Omega} \frac{G}{\eta} (\Sigma') \cdot (\delta d) d\Omega + \iiint_{\Omega} \vec{Q} \cdot \delta \vec{v} d\Omega + \iint_{S^\sigma} \vec{P} \cdot \delta \vec{v} dS - \\ & - \left\{ \iiint_{\Omega_l} [({}^l \Sigma) \cdot (\delta {}^l d) - {}^l \vec{f} \cdot \delta {}^l \vec{v}] d\Omega + \iint_{S_l^\sigma} {}^l \vec{p} \cdot \delta {}^l \vec{v} dS \right\} \Delta t^{-1} + \iiint_{\Omega_l} ({}^l \Sigma_\delta^m) \cdot (\delta {}^l d) d\Omega, \end{aligned} \quad (4)$$

Полученное уравнение является линейным относительно скорости ${}^l v^m$. Поэтому после численной дискретизации может быть получена система линейных алгебраических уравнений для соответствующих узловых значений проекций скоростей ${}^l v_i^m$. Т.к. исследуемые процессы не имеют явного динамического характера (ускорения не учитываются), то под временем можно понимать любой монотонно возрастающий параметр, определяющий изменение нагрузки. В таком аспекте вполне уместно принять производную по времени как отношение приращения соответствующих величин, получаемые при переходе с l состояния в $(l+1)$. Например

$${}^l v^m = \frac{{}^{l+1} \bar{R}^m - {}^l \bar{R}}{\Delta t} = \frac{\Delta {}^l \bar{u}^m}{\Delta t}.$$

Вычисление $({}^l \Sigma_{\partial}^m)$ организуется следующим образом: первоначально вычисляем текущие скорости ${}^l \dot{v}^m$, с помощью соотношений (1, 3) находим скорости приращений напряжений $({}^l \dot{\Sigma}^m)$ и т.н. пробные напряжения $(\tilde{\Sigma}^m) = ({}^l \Sigma) + ({}^l \dot{\Sigma}^m) \Delta t$;

проверяем условие пластичности

$$\bar{\sigma}_i^m = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\sigma}_{ij}^m \bar{\sigma}_{ij}^m} \leq \sigma_T;$$

при его невыполнении, т.е. при появлении пластических деформаций, считаем, что истинные напряжения определяются как проекции «пробных» на поверхность текучести, и в этом случае

$$({}^{l+1} \Sigma_0) = (\tilde{\Sigma}_0),$$

$$({}^{l+1} \Sigma',^m) = \frac{\sigma_T}{\bar{\sigma}_i^m} (\tilde{\Sigma}',^m);$$

дополнительные напряжения, фигурирующие в уравнении (4), определяются как разность истинных и «пробных» напряжений

$$({}^l \Sigma_{\partial}^{m+1}) = (\Sigma',^m) - (\tilde{\Sigma}',^m). \quad (5)$$

Численная аппроксимация основана на базе полилинейного восьмиузлового конечного элемента, изображенного на рис. 2 в декартовой и локальной (безразмерной, отнесенной к размерам элемента) системах координат.

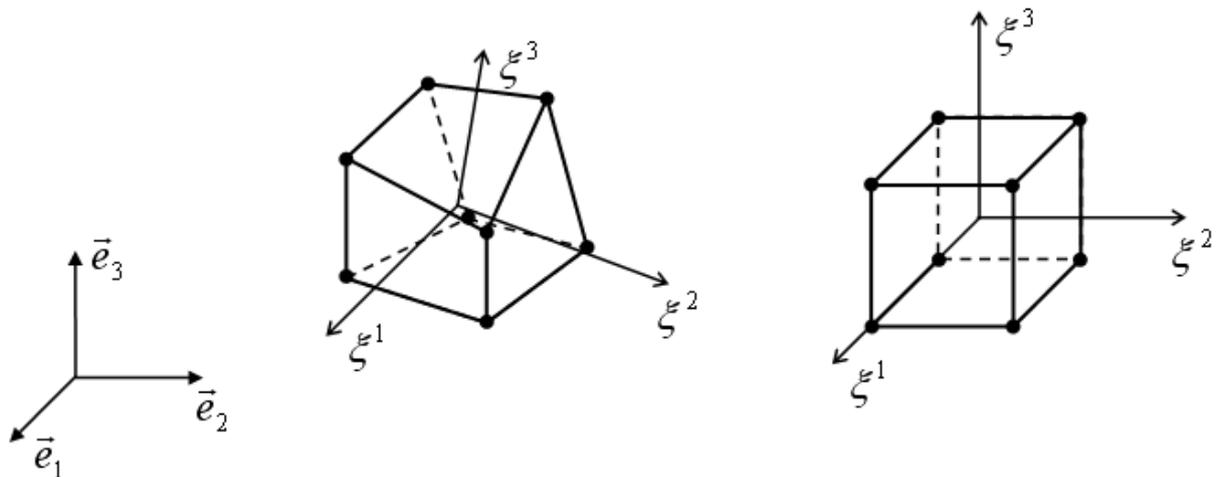


Рис. 2.

Введем аппроксимацию геометрии и скорости следующим образом:

$${}^l \bar{R}(\xi^j) = \sum_{t=1}^8 {}^l y_t^i N_t(\xi^j) \bar{e}_i, \quad {}^l R^i(\xi^j) = \sum_{t=1}^8 {}^l y_t^i N_t(\xi^j)$$

$${}^l \bar{D}(\xi^j) = \sum_{t=1}^8 {}^l v_t^i N_t(\xi^j) \bar{e}_i, \quad {}^l v^i(\xi^j) = \sum_{t=1}^8 {}^l v_t^i N_t(\xi^j)$$

где $N_t(\xi^j) = \frac{1}{8} (1 + \xi_t^1 \xi^1) (1 + \xi_t^2 \xi^2) (1 + \xi_t^3 \xi^3)$ – функция формы, $-1 \leq \xi^1, \xi^2, \xi^3 \leq 1$, ${}^l y_t^i$ – координаты узлов (l – номер шага нагружения, i – номер проекции, t – номер узла в элементе), ${}^l v_t^i$ – скорость узла.

В результате обычных для метода конечных элементов процедур получим на m -ой итерации l -го шага нагружения систему линейных алгебраических уравнений

$$[{}^l K] \{\Delta^l u^m\} = \{\Delta^l P\} - \{\Delta^l H\} - \{\Delta^l S^m\}.$$

Ее решение дает значения приращений перемещений $\Delta^l \bar{u}^m$, по которым вычисляются параметры НДС по вышеописанной схеме. По достижении сходимости, т.е. при достаточно малых (5), переходим к следующему шагу нагружения. Определим конфигурацию $l+1$ шага ${}^{l+1} R^i = {}^l R^i + \Delta^l u^i$ и соответствующее напряженное состояние $({}^{l+1} \Sigma_0) = (\bar{\Sigma}_0)$, $({}^{l+1} \Sigma) = (\Sigma^m)$.

Числовые примеры.

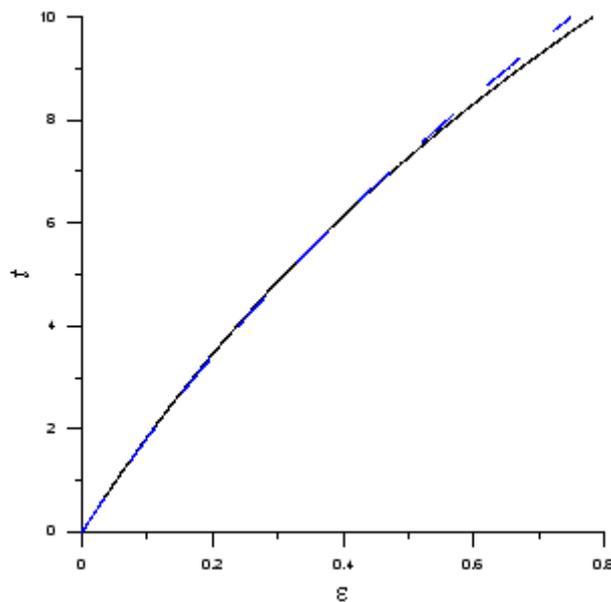


Рис. 3.

1. Растяжение вязкоупругого бруса. Рассмотрен брус квадратного поперечного сечения, на одном конце которого заданы напряжения $\sigma(t) = \sigma^0 t$, а другой – зашпелен. На рис. 3 приводится сравнение точного

решения (штрихованная линия) и решения, полученное настоящей методикой. Как видно результаты практически идентичны при малых деформациях и начинают расходиться при увеличении величины деформации, что вполне очевидно, так как точное решение справедливо при малых растяжениях.

2. Решена задача упругопластического изгиба конструкции, конечноэлементная модель которой представлена на рис. 4. В силу симметрии рассмотрена полконструкции, которая разбита на две подконструкции: четырехугольное основание и обод. Примем, что левый конец основания зашкелен, вертикально направленная вниз нагрузка равномерно распределена по верхней грани обода и изменяется по закону $q = q_0 t$. Задача решалась за 150 шагов при следующих параметрах: внутренний радиус обода равен 10 см, внешний – 20 см, ширина левого края основания – 5 см, правого – 10 см, длина – 20 см, толщина конструкции – 1 см, $E = 2.0 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\mu = 0.3$, $\eta = 1.0 \times 10^7 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{см}^2}$,

$q_0 = 2.0 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_T = 1500 \text{ кг/см}^2$. Четырехугольное основание было разбито на 20 конечных элементов по длине, 10 – по ширине, 1 – по толщине, обод – 20 элементов по окружному направлению, 10 – по радиальному, 1 – по толщине. Также для наглядности была решена аналогичная задача, но без учета деформаций ползучести.

На рис. 6 представлено деформированное состояние конструкции с распределением интенсивности пластических деформаций. На рис. 7 показан график зависимости перемещения точки А от нагрузки, на рис. 8 – зависимость интенсивности напряжений в точке В, где штриховыми линиями обозначено решения без учета вязкости, а сплошной – с учетом последних. Из приведенных рисунков, видно, что учет деформаций ползучести ведет к понижению скорости развития напряжений при возрастании деформаций.

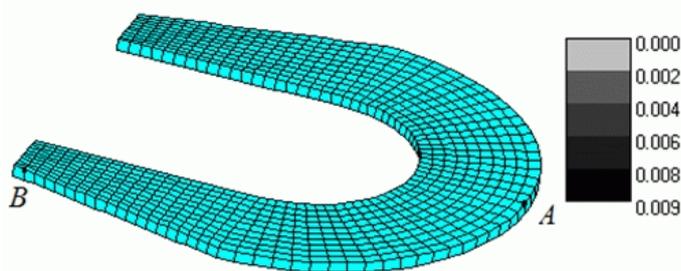


Рис. 5.

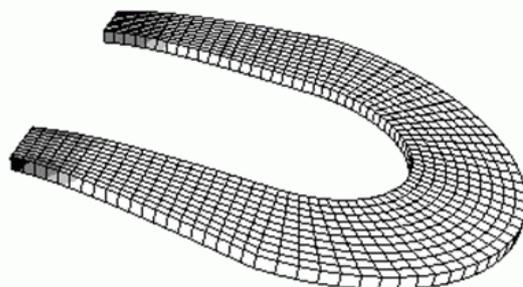


Рис. 6.

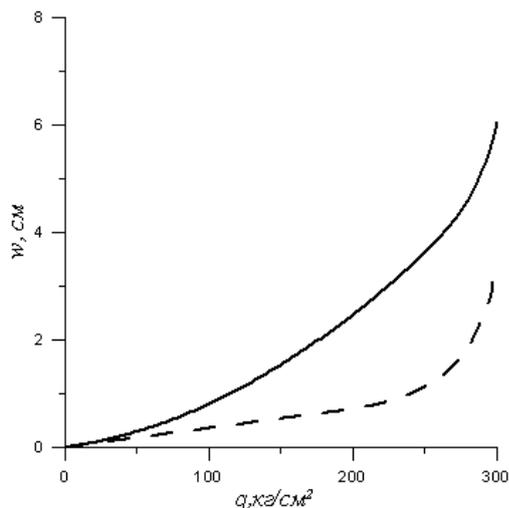


Рис. 7

Рис. 7.

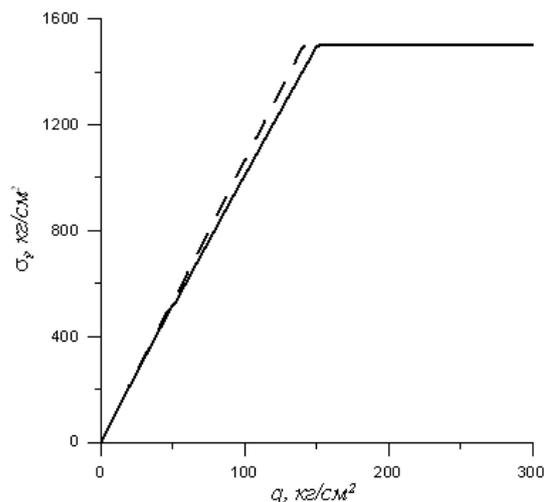


Рис. 8

Рис. 8.

Литература

1. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Кузнецов С.А., Султанов Л.У. Численное моделирование больших деформаций неупругих трехмерных тел. // Научно-технические технологии. – 2004, №4, Т. 5. с. 52-60.
2. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Кузнецов С.А., Султанов Л.У. Исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Труды XX Международной конференции. – СПб: 2003, Т.2, с. 128-133.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ КОНТАКТНО-ФРИКЦИОННОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛУЖЕСТКИХ ДИСКОВЫХ МУФТ

Гондляр А.В., Чемерис А.О.

*(Национальный технический университет Украины «КПИ»,
Киев, Украина)*

APPLICATION OF CONTACT FRICTION FINITE ELEMENT FOR SEMIFIXED DISK COUPLINGS CALCULATION

Gondlyakh A.V., Chemeris A.O.

(National technical university of Ukraine "KPI", Kyiv, Ukraine)

Рассматривается разработка и численная реализация методики уточненного расчета полужестких дисковых муфт методом конечных элементов с учетом комплексного решения геометрически нелинейной задачи контактного фрикционного взаимодействия упругих элементов при эксплуатационных нагрузках. Отмечается важность правильного учета зон контакта и сил трения между дисками пакета упругих элементов муфты.

1. Введение. В настоящее время в машиностроительной отрасли широко используются приводы, в которых для передачи крутящего момента на исполнительный механизм используются муфты с пакетом упругих дисков. В частности, в тяжелой промышленности в реверсивных приводах и механизмах с дистанционным управлением используются полужесткие дисковые муфты (ПДМ) [1]. Такие муфты позволяют передавать крутящий момент при значительном осевом и угловом смещении соединяемых валов. Как показывает практика, наиболее напряженным элементом конструкции муфты при таких режимах эксплуатации является пакет упругих дисков. При этом площадь контакта у отдельно взятых пар соседних дисков может существенно отличаться, а также меняться в процессе эксплуатации муфты [2]. При деформировании дисков их перемещения могут значительно превышать толщину самого диска. Также при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции особое внимание следует уделять моделированию эффекта трения между дисками. Все вышеизложенное предполагает комплексное решение геометрически нелинейной задачи контактного фрикционного взаимодействия дисков упругого пакета при оценке НДС ПДМ. Традиционные инженерные методы расчета муфт не позволяют учитывать вышеизложенные факторы, поэтому для решения поставленной задачи наиболее рационально использовать численные методы, среди которых ведущие позиции удерживает метод конечных элементов (МКЭ) [3,4].

2. Математическая модель. В настоящей работе поставленная задача реализуется на базе итерационно-аналитической теории оболочек [5]. Эта модель позволяет определять физически обоснованные функции приведения и на их основе получить разрешающую систему трехмерных уравнений, порядок которой не зависит от числа слоев пакета:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V A_j^r \left(V_i^s; \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; \frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}; F_s^i; \frac{dF_s^i}{dx^3}; \frac{d^2 F_s^i}{(dx^3)^2}; p_j^r \right) \delta v_j^r dV \right\} dt = 0;$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V B_j^r \left(V_i^s; \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; \frac{\partial^2 v_i^s}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}; F_s^i; \frac{dF_s^i}{dx^3}; \frac{d^2 F_s^i}{(dx^3)^2}; p_j^r \right) \delta F_r^j dV \right\} dt = 0$$
(1)

с соответствующими граничными условиями

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_s a_j^r \left(v_i^s; \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; F_s^i; \frac{dF_s^i}{dx^3}; q_j^r \right) \delta v_r^j dS \right\} dt = 0;$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_s b_j^r \left(v_i^s; \frac{\partial v_i^s}{\partial x^\alpha}; F_s^i; \frac{dF_s^i}{dx^3}; q_j^r \right) \delta F_r^j dS \right\} dt = 0.$$
(2)

Это позволяет независимо от физических процессов протекающих в материале пакета упругих дисков (изменение условий контакта, расслоение, отрыв, пластическое деформирование или разрушение) определить вектор обобщенных неизвестных v_i^s , а также физически обоснованные функции приведения F_s^i .

Для решения системы (1) итерационными методами эти выражения могут быть записаны в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая может быть легко разрешима известными численными методами, а при соответствующей группировке неизвестных допускает также и аналитическое решение, что позволяет существенно упростить решение основных уравнений (1).

Решив систему дифференциальных выражений (1), мы получим трехмерное представление вектора перемещений на основании формулы:

$$u_i = \sum_{s=1}^s F_s^i(x^3, t) v_i^s(x^1, x^2, t), \quad (3)$$

Корректный учет жестких смещений, которые могут возникать в муфте при геометрически нелинейном деформировании, осуществляется за счет применения моментной схемы конечных элементов, предложенной в работах [3,6].

Для решения поставленной комплексной задачи в настоящей работе применяется специально разработанный изопараметрический четырехугольный многослойный контактно-фрикционный конечный элемент. Этот элемент был разработан на базе четырехугольного многослойного криволинейного КЭ с полилинейным законом восполнения функций перемещений [7], матрица жесткости КЭ с преднапряжениями для учета геометрической нелинейности представляется в виде:

$$G_{fsrt}^{t'p'} = \tilde{G}_{fsrt}^{t'p'} + \tilde{G}_{fsrt}^{t'p'} = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^M \int_{h_m} \left[c_{cm}^{ijkl} \left\{ \tilde{B}_{klf}(r) \tilde{B}_{ijs}(t) + \frac{1}{3} \tilde{D}_{klvf}(r) \tilde{D}_{ijvs}(t) \omega_{ij}^{vv} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{9} \tilde{A}_{klv\mu f}(r) \tilde{A}_{ijv\mu s}(t) \delta_{ij}^{33} \omega_{\mu}^v \right\} + g_m^{kp} \left\{ \sigma_{n-1}^{oj} \tilde{B}_{ijkpSftr} + \frac{1}{3} \sigma_{n-1}^{ij} \tilde{D}_{ijkpvsrt} \omega_{ij}^{vv} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{9} \sigma_{n-1}^{ij} \tilde{A}_{ijkpvsrt} \delta_{ij}^{33} \omega_{\mu}^v \right\} \right] \sqrt{g_m} dx^3 \quad (4)$$

МЖ КЭ для учета фрикционного взаимодействия между слоями дискового пакета муфты записывается в виде:

$$\Gamma_{rtSf}^{k'R'm} = \frac{1}{4} \sqrt{g_o} \sum_{m=M_t+1}^M \left(c_m^{ijkl} c_k^{k'} c_i^{q'} B_l(t) S_{-m} B_j(r) S_{-m} + \sigma_m^{\alpha\beta} B_{trSf}^m c_\alpha^{k'} c_\beta^{q'} \right) \quad (5)$$

Результаты исследований. Разработанный КЭ был интегрирован в систему автоматизации прочностных расчетов АПРОКС и апробирован путем решения большого числа контрольно-тестовых и прикладных задач исследования нелинейного деформирования муфт. В качестве примера рассматривается численное моделирование работы ПДМ при угловом смещении соединяемых валов на 0.5 градуса. Конечно-элементная модель ПДМ представлена на рис.1.

В этой модели конечные элементы в пакете дисков позволяют моделировать контактное взаимодействие и отслоение дисков муфты с учетом трения между ними. НДС муфты при угловом смещении валов на 0.5 градуса представлено на рис.2.

Далее был проведен ряд численных экспериментов по определению влияния коэффициента трения на напряженно деформированное состояние муфты в целом. Зависимость максимальных перемещений в конструкции от коэффициента трения приведена на диаграмме (рис.3).

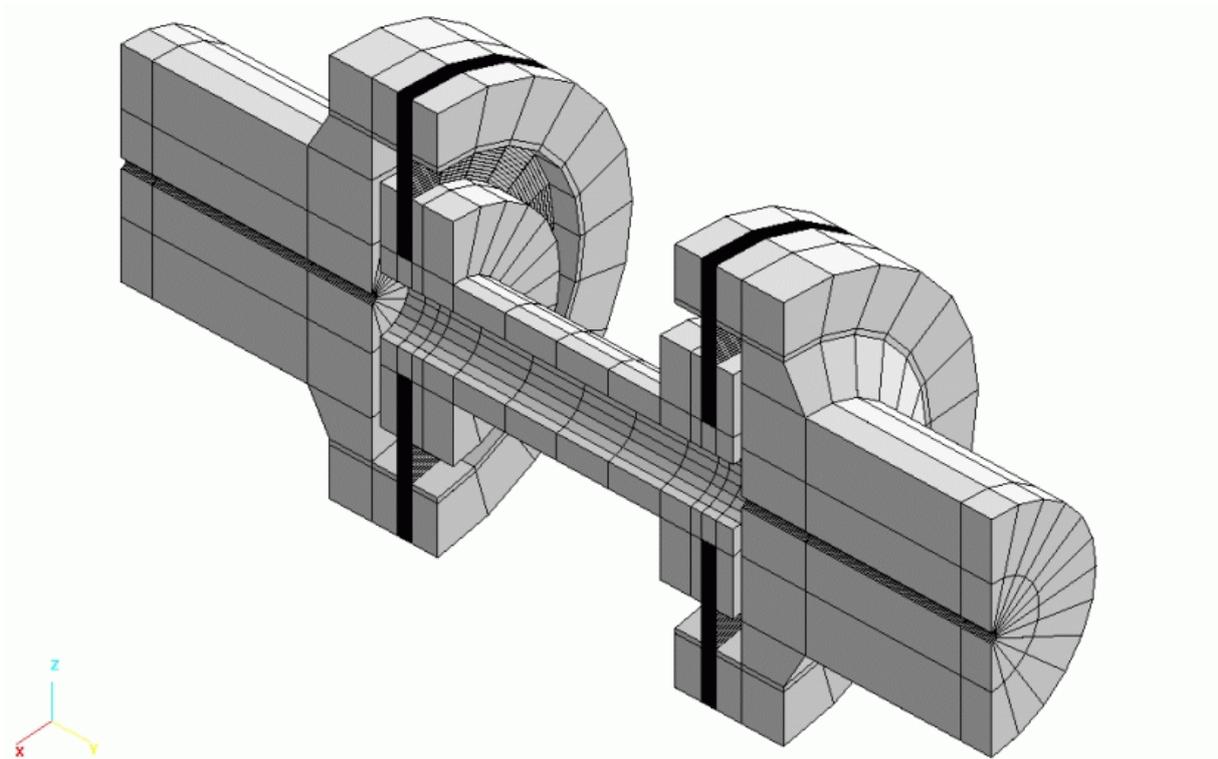


Рис.1. Конечно-элементная модель муфты.

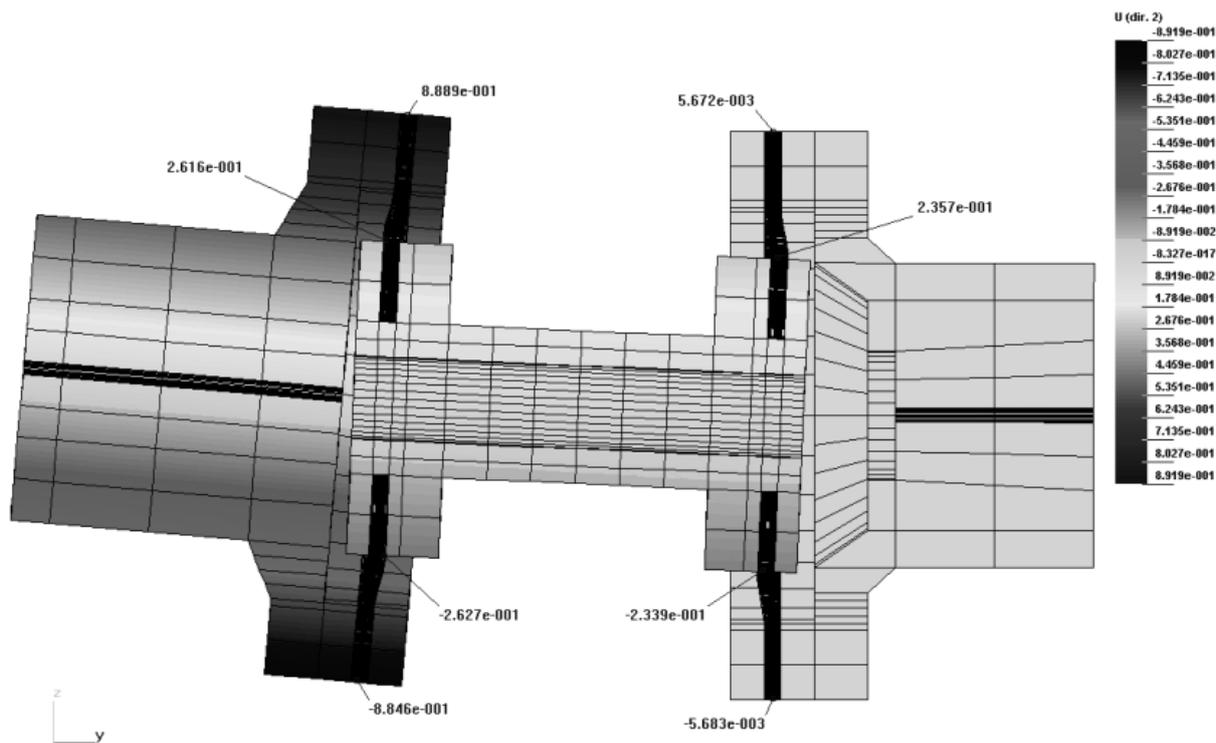


Рис. 2. Деформированная схема муфты при угловом смещении валов.

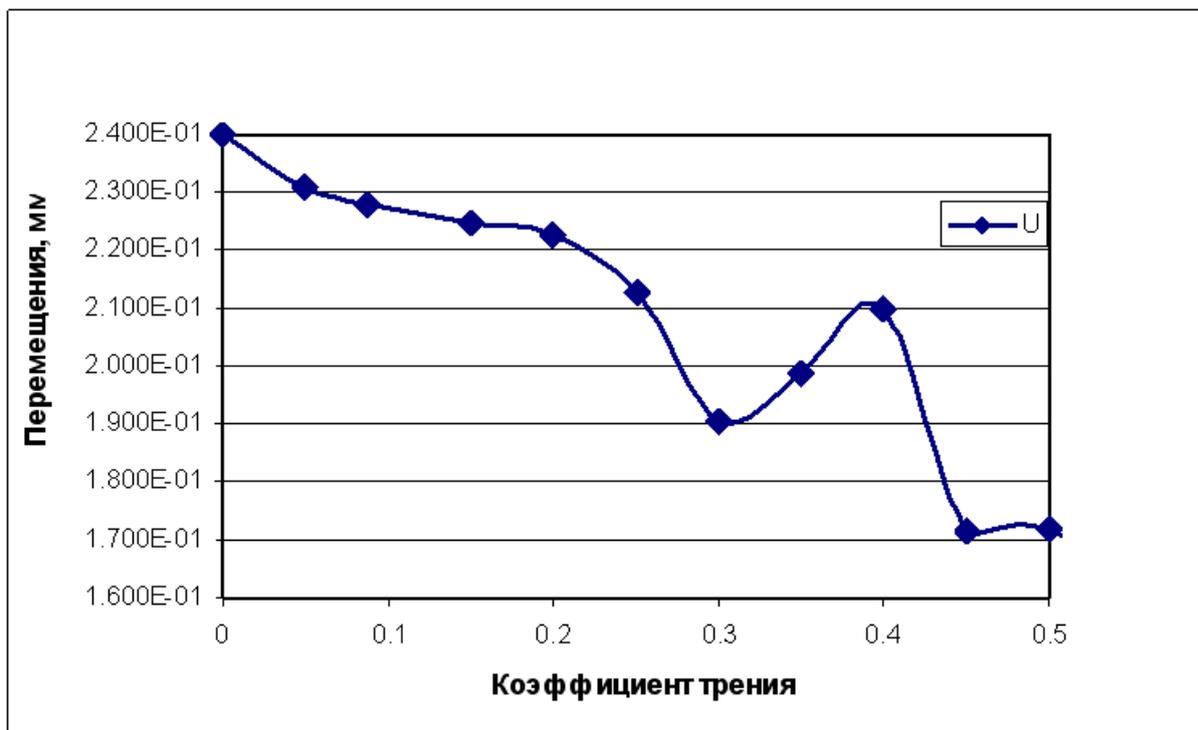


Рис.3. Диаграмма зависимости перемещений от коэффициента трения.

На диаграмме четко прослеживается несколько характерных участков. Участок, на котором коэффициент трения меняется от 0 до 0,2, характеризуется плавным снижением значений перемещений, что

обусловлено образованием зон сдвига и проскальзывания и незначительным развитием зон отрыва на краях пакета (рис. 4 а,б).

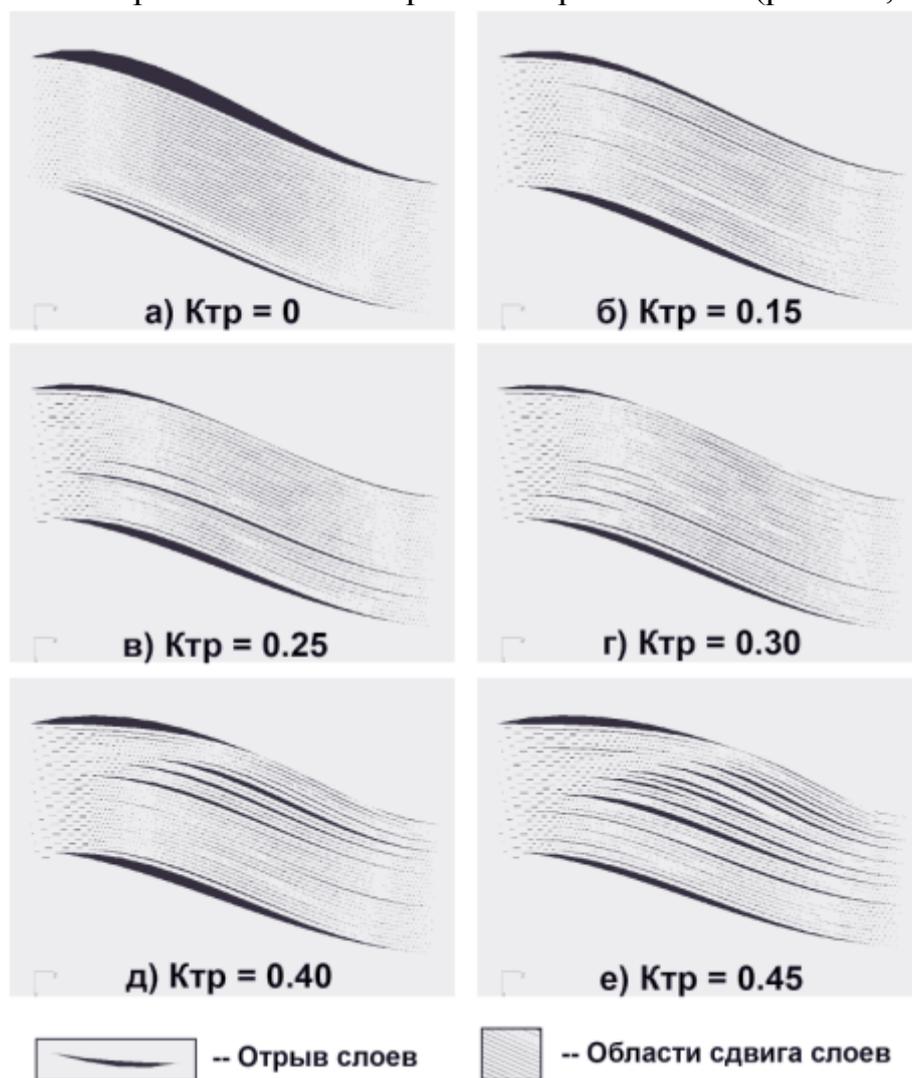


Рис. 4. Зоны отрыва и сдвига в пакете упругих дисков (повернуто).

С увеличением коэффициента трения образуются дополнительные зоны отрыва между дисками (рис. 4в) и пакет распадается на несколько независимо работающих пакетов. Это приводит к значительному снижению жесткости пакета в целом, что отображается на диаграмме (участок $K_{тр}=0.2-0.3$ рис. 3). Дальнейшее повышение коэффициента трения (участок $K_{тр}=0.3-0.4$ рис. 3) ведет к аккумуляции внутренней энергии деформирования муфты (эффект упрочнения) рис. 4г. При выходе коэффициента трения на участок $0.4-0.5$ диаграммы (рис. 3) происходит изменение формы деформирования пакета и появляются дополнительные зоны отрыва на площадках главных касательных напряжений (рис. 4д,е), что вновь приводит к значительному снижению жесткости пакета дисков в целом.

Выводы. Таким образом, на базе разработанного многослойного контактно-фрикционного конечного элемента были исследованы

особенности деформирования ДПМ от углового смещения соединяемых валов при различных значениях коэффициента трения между слоями пакета упругих дисков.

Установлено, что учет влияния коэффициента трения является обязательным при оценке НДС дисковой полужесткой муфты. Учет трения между слоями пакета упругих дисков приводит к уточнению напряженного состояния до 30%, а также позволяет прояснить характерные особенности нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих дисков.

Литература

1. Поляков В.С., Барбаш И.Д., Ряховский О.А. Справочник по муфтам // Л.: Машиностроение. 1979.
2. Гондлях А.В., Чемерис А.О., Васильев В.С. Расчет полужесткой дисковой муфты методом конечных элементов с учетом контактного взаимодействия дисков и трения между ними // Прогресивні технології і системи машинобудування: Міжнародний зб. Наукових праць. – Донецьк: ДонНТУ, 2005. Вип. 30.- с. 60-66.
3. Die Methode Der Finiten Elemente In Der Festkörpermechanik. Unter der Gesamtedaktion von J. Altenbach und A.S. Sacharov. Leipzig VEB Fachbuchverlag, 1982.
4. Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел.// . Киев: Вища школа, 1982.
5. Бате К., Вилсон В. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – Москва. 1982.
6. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1974. -Вып. 24. -С. 147-156.
7. В.А. Баженов, А.С. Сахаров, А.В. Гондлях, С.Л. Мельников. Нелинейные задачи механики многослойных оболочек. Киев, 1994.

РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР ВЕЛИЧИНЫ ПАРАМЕТРА ШТРАФА ПРИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ РЕШЕНИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

*Горохов М.Ю., Семенов А.С., Мельников Б.Е.
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
Россия)*

AN EFFICIENT CHOICE OF PENALTY VALUE AT FINITE ELEMENT SOLUTION OF CONTACT PROBLEM

*Gorokhov M.Yu., Semenov A.S., Melnikov B.E.
(Saint-Petersburg State Polytechnical University, Russia)*

Обсуждается проблема рационального выбора величины параметра штрафа при решении задач механики контактного взаимодействия без учета трения методом штрафных функций в рамках метода конечных элементов.

Проблема рассматривается в общей геометрически нелинейной постановке. Формулируется критерий рационального выбора параметра штрафа и сравниваются различные способы решения поставленной задачи.

Введение. Из множества методов применяемых к конечно-элементному решению задач механики контактного взаимодействия одним из наиболее робастных признан метод штрафных функций [1, 2]. Недостаточно исследованным аспектом применения метода штрафных функций является выбор величины параметра штрафа. В литературе [2] приводятся лишь полуэмпирические оценки и способы выбора величины параметра штрафа, область применимости которых не оговорена. Решение контактной задачи в геометрически нелинейной постановке с применением схемы Ньютона-Рафсона с постоянной в процессе решения величиной параметра штрафа зачастую приводит к быстрой расходимости инкрементально-итерационной процедуры. Как оказывается, причины расходимости позволяют сформулировать дополнительные ограничения на выбор величины параметра штрафа.

1. Кинематика контактного взаимодействия. Излагаются основные моменты кинематики контактного взаимодействия. Изложение базируется на работах [1, 2].

Пусть отображениями $\mathbf{x}^{(i)}(X, t)$, $X \in \Omega^{(i)}$, $i = \overline{1, N_b}$ отсчетной конфигурации $\Omega^{(i)}$ тел $\mathcal{B}^{(i)}$ в актуальную конфигурацию задано движение системы N_b деформируемых тел.

Дальнейшее рассмотрение проводится для случая двух тел $\mathcal{B}^{(1)}$ и $\mathcal{B}^{(2)}$. Между телами допускается контактное взаимодействие. Математически условия контакта (условия непроницаемости) выражаются в терминах нормального взаимопроникновения и распределенных нормальных контактных сил. Рассматривается вспомогательная задача о нахождении проекции границы $\Gamma^{(1)}$, $X \in \Gamma^{(1)}$ тела $\mathcal{B}^{(1)}$ на границу $\Gamma^{(2)}$, $Y \in \Gamma^{(2)}$ тела $\mathcal{B}^{(2)}$ в актуальной конфигурации

$$\bar{Y}(X, t) = \arg \min_{Y \in \Gamma^{(2)}} \|\mathbf{x}^{(1)}(X, t) - \mathbf{x}^{(2)}(Y, t)\|. \quad (1)$$

Отображение $\bar{Y}(X, t)$ выделяет среди всех точек границы тела $\mathcal{B}^{(2)}$ точки, которые потенциально могут вступить в контакт с телом $\mathcal{B}^{(1)}$. Вводя на границе тела $\mathcal{B}^{(2)}$ регулярную координатную сетку $o^\alpha = o^\alpha(Y)$, $Y = Y(o^\alpha)$, задачу (1) можно записать через локальные координаты

$$\bar{o}^\alpha(X, t) = \arg \min_{o^\alpha: Y(o^\alpha) \in \Gamma^{(2)}} \|\mathbf{x}^{(1)}(X, t) - \mathbf{x}^{(2)}(Y(o^\alpha), t)\|, \quad \bar{Y}(X, t) = Y(\bar{\xi}^\alpha(X, t)). \quad (2)$$

Индекс α принимает значения $\alpha = 1, 2$ в пространственной задаче и $\alpha = 1$ в плоской или осесимметричной задаче.

Нормальное взаимопроникновение g вводится в рассмотрение равенством

$$[x(X,t)] = x^{(1)}(X,t) - x^{(2)}(Y,t) \Big|_{Y=\bar{Y}(X,t)} = gn^{(2)}, \quad (3)$$

где $n^{(2)}$ – нормаль к поверхности тела $\mathcal{B}^{(2)}$ в точке \bar{o}^α в актуальной конфигурации.

Нормальная составляющая относительной $[v] = v^{(1)}(X,t) - v^{(2)}(Y,t) \Big|_{Y=\bar{Y}(X,t)}$,

$$v^{(1)}(X,t) = \partial_t x^{(1)}(X,t), \quad v^{(2)}(Y,t) \Big|_{Y=\bar{Y}(X,t)} = \partial_t x^{(2)}(Y,t) \Big|_{Y=\bar{Y}(X,t)}$$
 скорости имеет вид $[v] \cdot n^{(2)} n^{(2)} = \dot{g} n^{(2)}$. (4)

Касательная составляющая относительной скорости

$$[v] \cdot e_\alpha^{(2)} e^\alpha^{(2)} = \dot{\xi}^\beta \tilde{m}_{\alpha\beta} e^\alpha^{(2)} - g e^\alpha^{(2)} n^{(2)} \cdot \partial_\alpha v^{(2)}, \quad (5)$$

где $\tilde{m}_{\alpha\beta} = m_{\alpha\beta} - g b_{\alpha\beta}$, $m_{\alpha\beta} = e_\alpha^{(2)} \cdot e_\beta^{(2)}$ – ковариантные компоненты метрического тензора, $b_{\alpha\beta} = n^{(2)} \cdot \partial_\beta e_\alpha^{(2)}$ – ковариантные компоненты тензора кривизны, $e_\alpha^{(2)} = \partial_\alpha x^{(2)}(Y(o^\alpha), t)$ – базисные векторы.

2. Формулировка контактной задачи в вариационной форме.

Слабая форма уравнений равновесия двух деформируемых тел, находящихся в контакте, в квазистатическом приближении в актуальной конфигурации основана на принципе виртуальных работ [1, 2]:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{tV^{(i)}} y^{(i)} \cdot (\nabla \delta u^{(i)})^S d^t V^{(i)} - \sum_{i=1}^2 \int_{tV^{(i)}} {}_t f_V^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} d^t V^{(i)} - \sum_{i=1}^2 \int_{tS_\sigma^{(i)}} {}_t f_S^{(i)} \cdot \delta u^{(i)} d^t S^{(i)} = \\ = \int_{tS_c^{(1)}} {}_t f_{S_c}^{(1)} \cdot \delta u^{(1)} \Big|_{g=0} d^t S_c^{(1)} + \int_{tS_c^{(2)}} {}_t f_{S_c}^{(2)} \cdot \delta u^{(2)} \Big|_{g=0} d^t S_c^{(2)}. \quad (6)$$

Здесь $tV^{(i)}$, $tS^{(i)}$ – внутренняя область и граница i -го тела в актуальной конфигурации, $tS_\sigma^{(i)}$ – граница, на которой заданы внешние силы ${}_t f_S^{(i)}$, $tS_c^{(1)}$, $tS_c^{(2)}$ – границы контакта для тел $\mathcal{B}^{(1)}$ и $\mathcal{B}^{(2)}$ соответственно (для непрерывной (но не дискретной) модели эти две области совпадают), y – тензор напряжений Коши, δu – вектор виртуальных перемещений, ${}_t f_V^{(i)}$, ${}_t f_S^{(i)}$ – заданные распределенные силы в области и на границе i -го тела в расчете на единицу меры в актуальной конфигурации, ${}_t f_{S_c}^{(i)}$ – неизвестные распределенные контактные силы.

В данной работе считается, что вопрос корректного учета в решении слагаемых в левой части (6) решен тем или иным образом. Основным интересом представляет виртуальная работа контактных сил

$$\delta W_c = \int_{tS_c^{(1)}} {}_t f_{S_c}^{(1)} \cdot (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}) \Big|_{g=0} d^t S_c^{(1)}. \quad (7)$$

Для сил на поверхности контакта в силу уравнений равновесия выполняются равенства

$${}_0\mathbf{f}_{S_c}^{(1)}d^0S_c^{(1)} = {}_t\mathbf{f}_{S_c}^{(1)}d^tS_c^{(1)} = -{}_0\mathbf{f}_{S_c}^{(2)}d^0S_c^{(2)} = -{}_t\mathbf{f}_{S_c}^{(2)}d^tS_c^{(2)}, \quad (8)$$

где ${}_0S_c^{(1)}$, ${}_0S_c^{(2)}$ – образы границы контакта в отсчетной конфигурации. С вычислительной точки зрения интегрирование в (7) удобнее проводить по отсчетной конфигурации.

Рассматривается контакт без трения

$${}_t\mathbf{f}_S^{(1)} = {}_t f_{c_n} \mathbf{n}^{(2)}, \quad {}_0\mathbf{f}_S^{(1)} = {}_0 f_{c_n} \mathbf{n}^{(2)}. \quad (9)$$

Следует обратить внимание, что сила ${}_0\mathbf{f}_S^{(1)}$, действующая на тело $\mathcal{B}^{(1)}$ со стороны тела $\mathcal{B}^{(2)}$, раскладывается по базису на границе тела $\mathcal{B}^{(2)}$ в актуальной конфигурации в точке \bar{o}^α .

С учетом сказанного выражение (7) примет вид

$$\delta W_c = \int_{{}_0S_c^{(1)}} {}_0 f_{c_n} \mathbf{n}^{(2)} \cdot \left(\delta \mathbf{u}^{(1)} - \delta \mathbf{u}^{(2)} \right) \Big|_{g=0} d^0S_c^{(1)} = \int_{{}_0S_c^{(1)}} {}_0 f_{c_n} \delta g d^0S_c^{(1)}. \quad (10)$$

2.1 Регуляризация по методу штрафных функций. К сформулированной выше слабой форме контактных ограничений необходимо добавить условия непроникновения одного тела в другое

$$g \geq 0, \quad {}_0 f_{c_n} \geq 0, \quad {}_0 f_{c_n} g = 0. \quad (11)$$

Следует отметить, что система условий (11) не определяет величины нормальной составляющей контактной силы, она задает лишь область допустимых значений, величина силы определяется уравнениями равновесия при наложенных ограничениях.

Для удовлетворения условий непроницаемости (11) вводится регуляризация в соответствии с методом штрафных функций [1, 2]

$${}_0 f_{c_n} = \varepsilon_n \langle -g \rangle = -\varepsilon_n g H(-g), \quad (12)$$

где $\langle \dots \rangle$ – скобки Маккейли, $H(x)$ – функция Хевисайда, ε_n – параметр штрафа. С учетом регуляризации (12) выражение (10) примет вид

$$\delta W_c = - \int_{{}_0S_c^{(1)}} \varepsilon_n g H(-g) \delta g d^0S_c^{(1)}. \quad (13)$$

2.2 Линеаризованное выражение виртуальной работы контактных сил. В силу нелинейности задачи необходимо располагать линеаризованным выражением интеграла (13)

$$\Delta(\delta W_c) = - \int_{{}_0S_c^{(1)}} \varepsilon_n H(-g) (\Delta g \delta g + g \Delta \delta g) d^0S_c^{(1)}. \quad (14)$$

Здесь $\Delta(\dots)$ означает малое приращение первого порядка малости. Выражения для δg , Δg и $\Delta \delta g$ имеют вид [1, 2]

$$\delta g = \mathbf{n}^{(2)} \cdot \left(\delta \mathbf{u}^{(1)} - \delta \mathbf{u}^{(2)} \right), \quad (15)$$

$$\Delta g = \mathbf{n}^{(2)} \cdot (\Delta \mathbf{u}^{(1)} - \Delta \mathbf{u}^{(2)}), \quad (16)$$

$$\Delta \delta g = -\partial_\alpha \delta \mathbf{u}^{(2)} \Delta \xi^\alpha \cdot \mathbf{n}^{(2)} - (\delta \mathbf{u}^{(1)} - \delta \mathbf{u}^{(2)}) \cdot \mathbf{e}^{\alpha(2)} \left[\mathbf{n}^{(2)} \cdot \partial_\alpha \Delta \mathbf{u}^{(2)} + b_{\alpha\beta} \Delta \sigma^\beta \right], \quad (17)$$

где

$$\Delta \xi^\alpha = \tilde{m}_{\alpha\beta}^{-1} \left[(\Delta \mathbf{u}^{(1)} - \Delta \mathbf{u}^{(2)}) \cdot \mathbf{e}_\beta^{(2)} + g \mathbf{n}^{(2)} \cdot \partial_\beta \Delta \mathbf{u}^{(2)} \right]. \quad (18)$$

3. КЭ дискретизация при контакте. В соответствии с идеологией метода конечных элементов интегрирование по границе ${}^0S_c^{(1)}$ в (13) и (14) заменяется конечной суммой интегралов по элементарным участкам ${}^0S_{c_e}^{(1)}$ границы ${}^0S_c^{(1)}$

$$\delta W_c = \bigcup_{e=1}^{nE_c} \delta W_{c_e} = - \bigcup_{e=1}^{nE_c} \int_{{}^0S_{c_e}^{(1)}} \varepsilon_n g H(-g) \delta g \, d{}^0S_{c_e}^{(1)}, \quad (19)$$

$$\Delta \delta W_c = \bigcup_{e=1}^{nE_c} \Delta \delta W_{c_e} = - \bigcup_{e=1}^{nE_c} \int_{{}^0S_{c_e}^{(1)}} \varepsilon_n H(-g) (\Delta g \delta g + g \Delta \delta g) \, d{}^0S_{c_e}^{(1)}. \quad (20)$$

Внутри каждого элементарного участка ${}^0S_{c_e}^{(1)}$ вводится координатная сетка ζ^α , так чтобы область $-1 \leq \zeta^\alpha \leq 1$ взаимно однозначно соответствовала области ${}^0S_{c_e}^{(1)}$. Далее, применяя стандартный прием приближенного вычисления интегралов с использованием квадратур Гаусса, можно записать (для трехмерного случая)

$$\delta W_{c_e} \approx - \sum_{p=1}^{nGP} \sum_{q=1}^{nGP} A_p A_q \varepsilon_n H(-g_{p,q}) g_{p,q} \delta g_{p,q} \det \mathbf{J}(\zeta_{p,q}^\alpha), \quad (21)$$

$$\Delta \delta W_{c_e} \approx - \sum_{p=1}^{nGP} \sum_{q=1}^{nGP} A_p A_q \varepsilon_n H(-g_{p,q}) \left[\Delta g_{p,q} \delta g_{p,q} + g_{p,q} \Delta \delta g_{p,q} \right] \det \mathbf{J}(\zeta_{p,q}^\alpha). \quad (22)$$

Индекс $(\dots)_{p,q}$ означает, что соответствующая величина вычислена для пары координат $(\zeta_{p,q}^\alpha, \bar{\zeta}_{p,q}^\alpha)$.

В силу значительных вычислительных затрат данная схема в большинстве систем конечно-элементного анализа не реализована. Вместо этого используется упрощенная схема, когда контактные силы представляются системой сосредоточенных сил в узлах КЭ сетки на границе ${}^0S_c^{(1)}$. В этом случае соотношения (21)-(22) трансформируются в

$$\overline{\delta W}_{c_e} \approx \sum_{p=1}^{nNS} \varepsilon_n H(-g_p) g_p \delta g_p, \quad (23)$$

$$\Delta \overline{\delta W}_{c_e} \approx \sum_{p=1}^{nNS} \varepsilon_n H(-g_p) \left[\Delta g_p \delta g_p + g_p \Delta \delta g_p \right]. \quad (24)$$

Индекс $(\dots)_p$ означает, что соответствующая величина вычислена для пары координат $(\zeta_p^\alpha, \bar{\zeta}_p^\alpha)$, где ζ_p^α пробегает значения координат узлов элемента ${}^0S_{c_e}^{(1)}$.

Внутри каждого элемента ${}^0S_{c_e}^{(1)}$ имеются интерполяционные зависимости для перемещений $\mathbf{u}^{(1)}(\zeta^\alpha) = \sum_{i=1}^{nNS^{(1)}} N^i(\zeta^\alpha) \mathbf{u}_i^{(1)}$. Так как рассматривается контакт деформируемых тел, то на границе ${}^0S_c^{(2)}$ тела $\mathcal{B}^{(2)}$ также имеется КЭ сетка с интерполяционными зависимостями $\mathbf{u}^{(2)}(\xi^\alpha) = \sum_{i=1}^{nNS^{(2)}} N^i(\xi^\alpha) \mathbf{u}_i^{(2)}$ внутри каждого элемента ${}^0S_{c_e}^{(2)}$. Точка \bar{o}^α попадает в один из элементов ${}^0S_{c_e}^{(2)}$. С учетом интерполяционных зависимостей можно записать матричные аналоги соотношений (15)-(18), а затем (21)-(22)

$$\delta W_{c_e} \approx - \sum_{p=1}^{nGP} \sum_{q=1}^{nGP} \delta \mathbf{U}_c^T A_p A_q \varepsilon_n H(-g_{p,q}) g_{p,q} N \det \mathbf{J}(\zeta_{p,q}^\alpha), \quad (25)$$

$$\Delta \delta W_{c_e} \approx - \sum_{p=1}^{nGP} \sum_{q=1}^{nGP} \delta \mathbf{U}_c^T A_p A_q \varepsilon_n H(-g_{p,q}) [\mathbf{K}_{c_n_force} + g_{p,q} \mathbf{K}_{c_n_geom}] \det \mathbf{J}(\zeta_{p,q}^\alpha) \Delta \mathbf{U}_c, \quad (26)$$

и (23)-(24)

$$\overline{\delta W}_{c_e} \approx - \sum_{p=1}^{nNS} \delta \mathbf{U}_c^T \varepsilon_n H(-g_p) g_p N, \quad (27)$$

$$\Delta \overline{\delta W}_{c_e} \approx - \sum_{p=1}^{nNS} \delta \mathbf{U}_c^T \varepsilon_n H(-g_p) [\mathbf{K}_{c_n_force} + g_p \mathbf{K}_{c_n_geom}] \Delta \mathbf{U}_c. \quad (28)$$

Выражения для симметричных матриц $\mathbf{K}_{c_n_force}$ и $\mathbf{K}_{c_n_geom}$ имеют вид

$$\mathbf{K}_{c_n_force} = \mathbf{N} \mathbf{N}^T, \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_{c_n_geom} = \left[\mathbf{N}_\alpha \mathbf{D}^{\alpha T} + m^{\alpha\beta} \mathbf{T}_\beta \left(\mathbf{N}_\alpha^T - \mathbf{n}^{(2)} \cdot \partial_\gamma \mathbf{e}_\alpha^{(2)} \mathbf{D}^{\gamma T} \right) \right], \quad (30)$$

где $\mathbf{D}^\alpha = \tilde{m}_{\alpha\beta}^{-1} [\mathbf{T}_\beta - g N_\beta]$, а выражения для \mathbf{N} , \mathbf{T}_β , \mathbf{N}_β имеют вид

$$\mathbf{N}^T = \left[N^1(\zeta_{p,q}^\alpha) \mathbf{n}^{(2)T}, \dots, N^{nNS^{(1)}}(\zeta_{p,q}^\alpha) \mathbf{n}^{(2)T}, -N^1(\bar{\zeta}_{p,q}^\alpha) \mathbf{n}^{(2)T}, \dots, -N^{nNS^{(2)}}(\bar{\zeta}_{p,q}^\alpha) \mathbf{n}^{(2)T} \right], \quad (31)$$

$$\mathbf{T}_\beta^T = \left[N^1(\zeta_{p,q}^\alpha) \mathbf{e}_\beta^{(2)T}, \dots, N^{nNS^{(1)}}(\zeta_{p,q}^\alpha) \mathbf{e}_\beta^{(2)T}, -N^1(\bar{\zeta}_{p,q}^\alpha) \mathbf{e}_\beta^{(2)T}, \dots, -N^{nNS^{(2)}}(\bar{\zeta}_{p,q}^\alpha) \mathbf{e}_\beta^{(2)T} \right], \quad (32)$$

$$\mathbf{N}_\beta^T = \left[\mathbf{0}^T, \dots, \mathbf{0}^T, -\partial_\beta N^1(\bar{\zeta}_{p,q}^\alpha) \mathbf{n}^{(2)T}, \dots, -\partial_\beta N^{nNS^{(2)}}(\bar{\zeta}_{p,q}^\alpha) \mathbf{n}^{(2)T} \right], \quad (33)$$

применительно к формулам (25) и (26), а применительно к (27) и (28)

$$\bar{\mathbf{N}}^T = \left[\mathbf{n}^{(2)T}, -N^1 \left(\frac{\bar{\xi}^\alpha}{\xi_p} \right) \mathbf{n}^{(2)T}, \dots, -N^{nNS^{(2)}} \left(\frac{\bar{\xi}^\alpha}{\xi_p} \right) \mathbf{n}^{(2)T} \right], \quad (34)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_\beta^T = \left[\mathbf{e}_\beta^{(2)T}, -N^1 \left(\frac{\bar{\xi}^\alpha}{\xi_p} \right) \mathbf{e}_\beta^{(2)T}, \dots, -N^{nNS^{(2)}} \left(\frac{\bar{\xi}^\alpha}{\xi_p} \right) \mathbf{e}_\beta^{(2)T} \right], \quad (35)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_\beta^T = \left[\mathbf{0}^T, -\partial_\beta N^1 \left(\frac{\bar{\xi}^\alpha}{\xi_p} \right) \mathbf{n}^{(2)T}, \dots, -\partial_\beta N^{nNS^{(2)}} \left(\frac{\bar{\xi}^\alpha}{\xi_p} \right) \mathbf{n}^{(2)T} \right]. \quad (36)$$

Приведенная система соотношений составляет основу КЭ формулировки для решения задач механики контактного взаимодействия без учета трения. Выражения (25)-(26) и (27)-(28) позволяют вычислить «элементные» вектор контактных сил и контактную матрицу жесткости.

4. Рациональный выбор величины параметра штрафа. На основе приведенной конечно-элементной формулировки, в рамках системы КЭ анализа PANTOCRATOR (www.pantocrator.narod.ru, [3]) разработан и реализован комплекс алгоритмов для решения двухмерных, осесимметричных и трехмерных задач механики контактного взаимодействия без учета трения в общей геометрически и физически нелинейной постановках методом штрафных функций.

При решении контактной задачи в геометрически нелинейной постановке без учета трения проявляется чрезвычайная чувствительность метода к величине параметра штрафа. Установлено, что расходимость икрементально-итерационной процедуры метода Ньютона связана с вырождением глобальной матрицы жесткости.

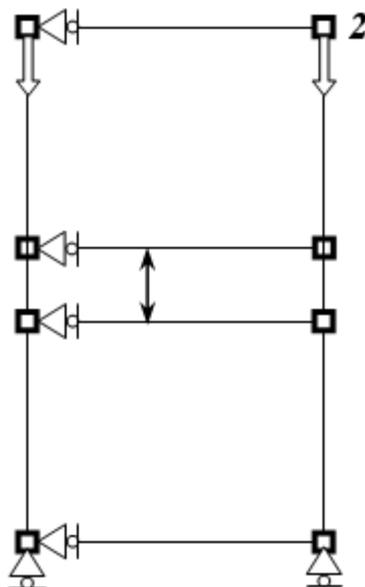


Рис. 1. Контактное взаимодействие двух КЭ.

Решена аналитически модельная задача о контактном взаимодействии двух одинаковых КЭ в форме квадратов (с узлами {1,2,3,4} и {5,6,7,8})

(рис. 1) из линейно-упругого материала в условиях плоской деформации. Условия закрепления и условия нагружения показаны на рис. 1.

При этом элементные контактные матрицы жесткости вычислялись по соотношениям (28)-(30). Ансамблирование глобальной матрицы жесткости проводилось с учетом того, что в задаче возникают два контактных элемента, объединяющих группы узлов (5,3,4) и (6,3,4). Учет кинематических граничных условий проводился с помощью процедуры Пейна-Айронса.

Получена оценка для критического максимального значения параметра штрафа из условия невырожденности глобальной матрицы жесткости для момента, когда происходит первое взаимопроникновение конечных элементов. Ее выражение при коэффициенте Пуассона равном $\nu = 1/4$ с точностью до множителя $\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{8}{5}E$ представлено формой (38). Где

$\varepsilon = \frac{5}{8} \frac{\varepsilon_n}{E}$, $\tilde{g} = \frac{g}{a}$, $\alpha = \frac{5}{8} \frac{I_V}{E}$, I_V – размерная константа Айронса, a – размер стороны КЭ.

С высокой степенью точности критическое значение параметра штрафа обратно пропорционально взаимопроникновению контактирующих тел и прямо пропорционально модулю упругости материала

$$\varepsilon_n^{crit} \approx \frac{\alpha}{|g|/a} E. \quad (37)$$

При $I_V/E = 10^{10}$ величина безразмерной константы α в (37) равна $\alpha = 0,219$.

Понимание того, что расходимость инкрементально-итерационной процедуры есть показатель вырождения глобальной матрицы жесткости, подсказывает путь решения задачи рационального выбора параметра штрафа. А именно, необходимо выбирать параметр штрафа так, чтобы обеспечить с некоторым запасом условие невырожденности глобальной матрицы жесткости. Математически задача поиска критического значения параметра штрафа сводится к обобщенной задаче на собственные значения с парой матриц: глобальная матрица жесткости при отсутствии контакта, глобальная контактная матрица жесткости.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
\alpha & \frac{1}{8} & \frac{-5}{24} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha & 0 & \frac{1}{24} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-5}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha & 0 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{8} - \varepsilon \tilde{g} & \frac{-5}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{-5}{24} & \frac{-5}{24} & \tilde{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} + \varepsilon - 2\varepsilon \tilde{g}^2 & -\tilde{g} & \frac{1}{24} + 2\varepsilon \tilde{g}^2 & -\tilde{g} & \frac{1}{24} + 2\varepsilon \tilde{g}^2 & -\tilde{g} & \tilde{g} & 0 & \tilde{g} & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha & \frac{-1}{8} + \varepsilon \tilde{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} + \varepsilon - 2\varepsilon \tilde{g}^2 & -\tilde{g} & -\varepsilon & -\tilde{g} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha & \frac{1}{8} & \frac{-5}{24} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} + \varepsilon & 0 & \frac{1}{24} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{24} \\
\text{symm} & & & \frac{1}{3} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{24} & \frac{1}{8} \\
\frac{1}{3} + \varepsilon & 0 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{6} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{-5}{24} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{8} & \frac{1}{24} & 0 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{8} & 0 \\
\alpha & 0 & \frac{1}{24} & \frac{-1}{8} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} & 0 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{24} \\
\alpha & & & & & & & & & & & \alpha & 0 & \frac{1}{24} & \frac{-1}{8} \\
\alpha & & & & & & & & & & & & \alpha & \frac{-1}{8} & \frac{1}{24}
\end{bmatrix} \quad (38)$$

В случае контакта без трения глобальная матрица жесткости сохраняет симметрию. Поэтому обобщенная задача на собственные значения с учетом специфики рассматриваемых двух матриц (большой порядок, сильная разреженность, вырожденность) может быть эффективно решена блочным методом Ланцоша. Однако его применение к данной задаче сопряжено с необходимостью обращения матрицы на каждой итерации. По временным затратам это неудовлетворительно. Поэтому рационально построение итерационной процедуры поиска минимального ненулевого параметра штрафа. Метод Ланцоша в этом случае применяется уже к простой задаче на собственные значения как индикатор вырождения глобальной матрицы жесткости. Рациональной величиной параметра штрафа в этом случае будет взятое с некоторым запасом критическое значение.

Литература

1. Laursen T.A. Computational contact and impact mechanics. Fundamentals of modelling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis. Springer, Berlin Heidelberg New York. 2002.
2. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. John Wiley & Sons Ltd. 2002.
3. Семёнов А.С. PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Труды V-ой Межд. Конф. "Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения". 2003. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466-480.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

Горшков А.Г., Егорова О.В.
(*Московский авиационный институт (ГТУ),*
Москва, Россия)

Разработана численно-аналитическая методика решения нестационарных задач дифракции акустических ударных волн на телах вращения переменной кривизны.

NON-STEADY DIFFRACTION PROBLEMS ON VARIABLE CURVATURE BODIES OF REVOLUTION

Gorshkov A.G., Egorova O.V.
(*Moscow Air Institute (State Technical University),*
Moscow, Russia)

The numerically - analytical solution technique of non-steady acoustic shock waves diffraction's problems on variable curvature bodies of revolution is designed.

Исследуется нестационарная задача движения абсолютно жесткого тела, ограниченного гладкой поверхностью, под действием акустической волны давления.

Для определения давления на поверхности тела используется модифицированная теория тонкого слоя [1,2]. При этом давление представляется в виде суперпозиции давления в падающей, отраженной и излученной волнах. Для определения составляющих суммарного давления вводится функция влияния. Давление в отраженной и излученной волнах вычисляется в виде свертки данной функции соответственно с нормальной скоростью в падающей волне и нормальной скоростью движения точек поверхности тела при поступательном и вращательном движении.

Система линеаризованных уравнений движения записывается в интегральной форме и с учетом вида функции влияния приводится к системе интегральных уравнений Вольтерра II рода, решаемой численно методом квадратур.

Построено решение задачи о движении осесимметричного тела нулевой плавучести под действием сферической акустической волны давления от произвольно расположенного источника.

1. Постановка задачи. Рассматривается абсолютно твердое тело G массой m , ограниченное гладкой выпуклой поверхностью Π . Тело погружено в неограниченную акустическую среду со скоростью распространения звука c_0 , плотностью ρ_0 и взаимодействует с нестационарной волной давления p_* . Начальный момент времени $t = 0$ соответствует касанию фронта акустической волны некоторой точки $A \in \Pi$.

Уравнения движения твердого тела имеют вид [1]

$$m(\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad (1.1)$$

$$J \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}$$

где m , J – масса и момент инерции тела, \mathbf{v} – вектор поступательной скорости центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела, точкой обозначена производная по времени t .

Уравнениям (1.1) соответствуют начальные условия

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \quad (1.2)$$

где \mathbf{v}_0 , $\boldsymbol{\omega}_0$ – параметры невозмущенного движения тела.

Движение акустической среды описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \phi, \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \text{grad } \phi \quad (1.3)$$

где ϕ – потенциал скоростей, \mathbf{w} – вектор скорости точек акустической среды, p – давление в среде. В начальный момент времени среда находится в невозмущенном состоянии, что соответствует однородным начальным условиям

$$\phi|_{t=0} = \dot{\phi}|_{t=0} = 0 \quad (1.4)$$

При этом давление p_* и вектор скорости \mathbf{w}_* в падающей волне считаются заданными и удовлетворяют.

На границе твердого тела ставятся условия непротекания акустической среды, имеющие вид

$$(\mathbf{w}_* + \mathbf{w})|_{\Pi} \cdot \mathbf{n} = v_n|_{\Pi}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad (1.5)$$

где v_n – нормальная составляющая вектора скорости точек поверхности тела Π , \mathbf{n} – вектор единичной внешней нормали поверхности Π , \mathbf{r} – радиус-вектор точки поверхности Π в связанных координатах, точкой обозначено скалярное произведение.

На бесконечности возмущения в акустической среде отсутствуют. В приближенной связанной постановке задачи для определения гидродинамической нагрузки на твердое тело можно воспользоваться рядом гипотез, связывающих давление среды на поверхности тела только с кинематическими параметрами последнего. В публикуемой работе используется модифицированная гипотеза тонкого слоя [2].

2. Внешние силы и моменты, действующие на твердое тело.

Ограничимся рассмотрением действия на твердое тело поверхностных сил давления среды.

Главный вектор \mathbf{F} и главный момент \mathbf{M} , приведенные к центру масс тела, вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{F}(t) = -\iint_{\Pi} p(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{M}(t) = -\iint_{\Pi} p(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS \quad (2.1)$$

где $p > 0$ – давление акустической среды. Знак «минус» учитывает направление поверхностных сил с учетом выбранного направления нормали к поверхности Π .

Воспользуемся теорией тонкого слоя, согласно которой основной вклад в гидродинамические составляющие нагрузки на тело вносит движение акустической среды по нормали к поверхности Π , при этом движением вдоль поверхности тела в первом приближении можно пренебречь. В этом случае давление на поверхности Π можно представить в виде [2]:

$$p = p_* + p_1 + p_2$$

$$p_1(\mathbf{r}, t) = - \int_0^t w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad (2.2)$$

$$p_2(\mathbf{r}, t) = \int_0^t v_n(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau$$

$$v_n(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_\Pi(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{n} \quad (2.3)$$

где p_* – давление в падающей волне, p_1 – давление в отраженной волне, p_2 – давление в излученной волне, $G_0(\mathbf{r}, t)$ – переходная функция гипотезы тонкого слоя, зависящая от времени и местной средней кривизны $k = k(\mathbf{r}) = k_i^i(\mathbf{r})/2$ граничной поверхности тела Π , w_* – нормальная к поверхности Π составляющая скорости среды в падающей волне, v_n – нормальная к Π составляющая скорости \mathbf{v}_Π точки поверхности Π твердого тела.

Соотношения (2.1) с учетом (2.2), (2.3) можно записать так

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & - \iint_{\Pi} p_*(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS + \iint_{\Pi} \int_0^t w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{n} d\tau dS - \\ & - \iint_{\Pi} \int_0^t \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{v}(\tau) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\tau dS - \\ & - \iint_{\Pi} \int_0^t \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\tau) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\tau dS \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) = & - \iint_{\Pi} p_*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS + \iint_{\Pi} \int_0^t w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\tau dS - \\ & - \iint_{\Pi} \int_0^t \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{v}(\tau) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\tau dS - \\ & - \iint_{\Pi} \int_0^t \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\tau) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\tau dS \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь и далее символом \otimes обозначено прямое произведение тензоров.

Так как для твердого тела векторы \mathbf{r}, \mathbf{n} не зависят от времени, то порядок интегрирования в (2.4), (2.5) может быть изменен, и данные соотношения приводятся к следующему виду:

$$\mathbf{F}(t) = -\mathbf{F}_*(t) + \int_0^t \dot{\mathbf{F}}_r(t, \tau) d\tau - \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_v^F(t-\tau) \cdot \mathbf{v}(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_\omega^F(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_v^F(t) = \iint_{\Pi} \dot{G}_0(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} dS \quad (2.7)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_\omega^F(t) = \iint_{\Pi} \dot{G}_0(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} \otimes (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS \quad (2.8)$$

$$\dot{\mathbf{F}}_r(t, \tau) = \iint_{\Pi} w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(t-\tau) \mathbf{n} dS \quad (2.9)$$

$$\mathbf{F}_*(t) = \iint_{\Pi} p_*(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS \quad (2.10)$$

$$\mathbf{M}(t) = -\mathbf{M}_*(t) + \int_0^t \dot{\mathbf{M}}_r(t, \tau) d\tau - \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_v^M(t-\tau) \cdot \mathbf{v}(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_\omega^M(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_v^M(t) = \iint_{\Pi} \dot{G}_0(\mathbf{r}, t) (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} dS \quad (2.12)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_\omega^M(t) = \iint_{\Pi} \dot{G}_0(\mathbf{r}, t) (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS \quad (2.13)$$

$$\dot{\mathbf{M}}_r(t, \tau) = \iint_{\Pi} w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t-\tau) \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS \quad (2.14)$$

$$\mathbf{M}_*(t) = \iint_{\Pi} p_*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS \quad (2.15)$$

3. Интегральные уравнения движения твердого тела в акустической среде. После линеаризации уравнения движения твердого тела можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) + m^{-1} \int_0^t \mathbf{G}_v^F(t-\tau) \cdot \mathbf{v}(\tau) d\tau - m^{-1} \int_0^t \mathbf{G}_\omega^F(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau = \\ = \mathbf{v}_0 - m^{-1} \int_0^t [\mathbf{F}_*(\tau) - \mathbf{F}_r(t, \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \omega(t) + \mathbf{I} \cdot \int_0^t \mathbf{G}_v^M(t-\tau) \cdot \mathbf{v}(\tau) d\tau - \mathbf{I} \cdot \int_0^t \mathbf{G}_\omega^M(t-\tau) \cdot \omega(\tau) d\tau = \\ = \omega_0 - \mathbf{I} \cdot \int_0^t [\mathbf{M}_*(\tau) - \mathbf{M}_r(t, \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (3.2)$$

Соотношения (3.1), (3.2) представляют собой интегральные уравнения Вольтерра II рода типа свертки с ядрами

$$\mathbf{G}_b^A(t-\tau), \quad A \in \{F, M\}, \quad b \in \{v, \omega\} \quad (3.3)$$

и правыми частями, содержащими производные по времени функций $\mathbf{F}_r(t, \tau)$, $\mathbf{M}_r(t, \tau)$.

Переходная функция гипотезы тонкого слоя $G_0(\mathbf{r}, t)$ для гладкой выпуклой поверхности имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r}, t) = -c_0^{-1} H(t) R[z(\mathbf{r}, t)], \quad z(\mathbf{r}, t) = c_0 k(\mathbf{r}) t \\ R(z) = J_0(z) - z[1 + J_1(z)] + \\ + z^2 \left\{ J_0(z) - \frac{\pi}{2} [J_0(z) H_1(z) - J_1(z) H_0(z)] \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $k(\mathbf{r})$ – средняя кривизна поверхности Π , $H(t)$ – функция Хевисайда, $H_\nu(z)$ – функции Струве порядка ν , $J_n(z)$ – функции Бесселя первого рода порядка n .

Будем рассматривать абсолютно твердое тело, ограниченное гладкой выпуклой поверхностью вращения Π с направляющей Γ , заданной функцией $f(\xi^1) \in C^2[a, b]$, где $\xi^1 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ – осевая координата. Зададим поверхность Π в связанной с центром масс тела системе координат $Ox^1x^2x^3$

$$\Pi: \quad \mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i = \xi^j \mathbf{e}_j \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2)$$

$$x^1 = \xi^1, \quad x^2 = f(\xi^1) \sin \xi^2, \quad x^3 = f(\xi^1) \cos \xi^2, \quad \xi^2 \in [0, 2\pi)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + f'(\xi^1) \sin \xi^2 \mathbf{e}_2 + f'(\xi^1) \cos \xi^2 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_2 = f(\xi^1) \cos \xi^2 \mathbf{e}_2 - f(\xi^1) \sin \xi^2 \mathbf{e}_3$$

Здесь $\mathbf{e}_\alpha = \partial \mathbf{r} / \partial \xi^\alpha$ – векторы базиса, нормально связанного с поверхностью Π , ξ^2 – окружная координата.

Пусть на тело падает сферическая волна экспоненциально затухающей амплитуды. Давление и скорость в акустической среде в этом случае имеют вид:

$$p_* = \frac{p_*^0 L}{r_2} e^{-\beta(c_0 t - r_2)} H(c_0 t - r_2) \quad (3.5)$$

$$w_* = \frac{p_* L}{\rho_0 c_0 r_2} \left\{ e^{-\beta(c_0 t - r_2)} \left[1 - \frac{1}{\beta r_2} \right] + \frac{1}{\beta r_2} \right\} H(c_0 t - r_2) \quad (3.6)$$

где $\beta \in \mathbb{R}_+$ характеризует интенсивность затухания давления (имеет размерность c^{-1}), $r_2^2 = (\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_{g2}) \cdot (\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_{g2})$ – расстояние от источника волны с координатами точки $O_2 (x_{g2}^1, x_{g2}^2, x_{g2}^3)$, L – характерный линейный размер. Вектор скорости $\mathbf{w}_* = w_* \mathbf{n}_* = w_*^i \mathbf{e}_i$, где \mathbf{n}_* – внешняя нормаль к фронту волны (сфере радиуса $c_0 t$), в базисе \mathbf{e}_i системы координат $O_g x_g^1 x_g^2 x_g^3$ имеет следующие компоненты:

$$w_*^i = (w_*/r_2) (x_g^i - x_{g2}^i) \quad (i=1,2,3) \quad (3.7)$$

Соотношения (3.1), (3.2) представляют собой интегральные уравнения Вольтерра II рода, их численное решение не требует регуляризации и может быть найдено методом квадратур [4].

4. Динамика цилиндрических и сферических твердых тел под воздействием акустической волны давления. Рассмотрим абсолютно твердое тело цилиндрической формы радиуса R и длины l , имеющее полусферические законцовки радиуса R . Ограничимся телом «нулевой плавучести».

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\tilde{f} = \frac{f}{L}, \quad \tilde{\xi}^1 = \frac{\xi^1}{L} = \frac{\xi^1}{2R+l}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L} \quad (i=1,2,3) \quad (4.1)$$

$$\lambda = \frac{l}{2R}, \quad \mu = 2(1+\lambda), \quad L = 2R+l$$

$$\tilde{m} = m/(\rho_0 L^3) = \rho_0 V/(\rho_0 L^3), \quad \tilde{J}_\alpha = J_{\alpha\alpha}/(\rho_0 L^5) \quad (\alpha=1,2)$$

$$\tilde{t} = tL/c_0, \quad \tilde{v}_i(\tilde{t}) = v_i(\tilde{t})/c_0, \quad \tilde{x}_g^i(\tilde{t}) = x_g^i(\tilde{t})/L.$$

где λ – удлинение цилиндрической части. Для рассматриваемого тела вращения соотношения (4.1), имеют следующий вид (тильды всюду опущены):

$$\begin{aligned} f(\xi^1) = & \frac{1}{\mu} \left\{ f_1(\xi^1) [H(\mu\xi^1 + \lambda + 1) - H(\mu\xi^1 + \lambda)] + \right. \\ & + f_2(\xi^1) [H(\mu\xi^1 + \lambda) - H(\mu\xi^1 - \lambda)] + \\ & \left. + f_3(\xi^1) [H(\mu\xi^1 - \lambda) - H(\mu\xi^1 - \lambda - 1)] \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

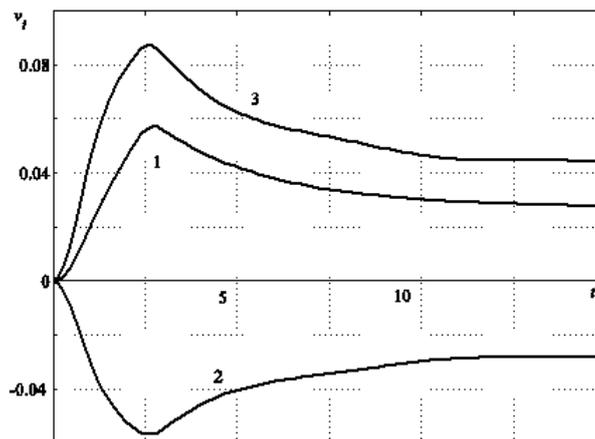
$$f_1(\xi^1) = \sqrt{1 - (\mu\xi^1 + \lambda)^2}, \quad f_2(\xi^1) = 1, \quad f_3(\xi^1) = \sqrt{1 - (\mu\xi^1 - \lambda)^2} \quad (4.3)$$

$$m = \frac{\pi}{12} \frac{2 + 3\lambda}{(1 + \lambda)^5}, \quad J_1 = \frac{\pi(8 + 15\lambda)}{480(1 + \lambda)^5}$$

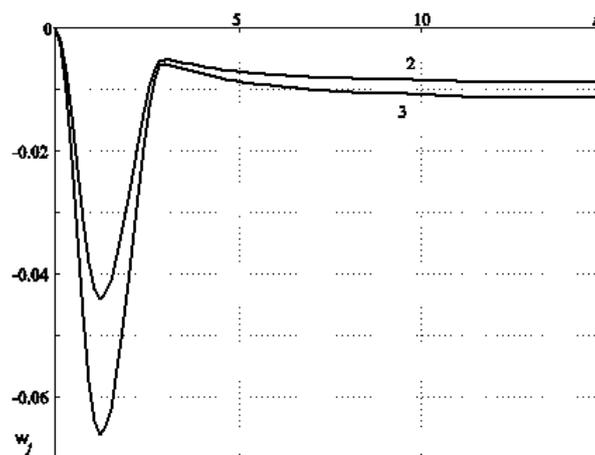
$$J_2 = \frac{\pi}{960(1+\lambda)^5} [20\lambda^3 + 40\lambda^2 + 45\lambda + 16]$$

Рассмотрим задачу о взаимодействии данного тела со сферической акустической волной давления, источник которой расположен в точке с безразмерными координатами (x_g^1, x_g^2, x_g^3) .

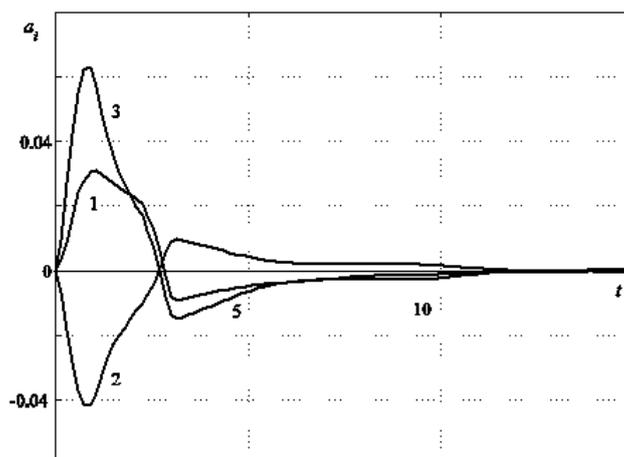
Рассматривается тело радиуса $R=1$ с удлинением цилиндрической части $\lambda=4$. Координаты источника сферической волны $x_g^1 = -1$, $x_g^2 = 1$, $x_g^3 = -1.5$. Давление и скорость в падающей волне определяются соотношениями (3.5), (3.6) при $p_{*0} = 1$, $\beta = 0.8$. Кривые зависимостей компонентов векторов поступательной $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ и угловой $\boldsymbol{\omega}(\omega_2, \omega_3)$ скоростей центра масс тела вращения от времени t показаны на фиг. 1 (кривые 1-3) и на фиг. 2 (кривые 2, 3); аналогичные кривые для линейного $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ и углового $\boldsymbol{\varphi}(\varphi_2, \varphi_3)$ ускорения приведены на фиг. 3, 4 ($i=1, 2, 3, j=2, 3$).



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

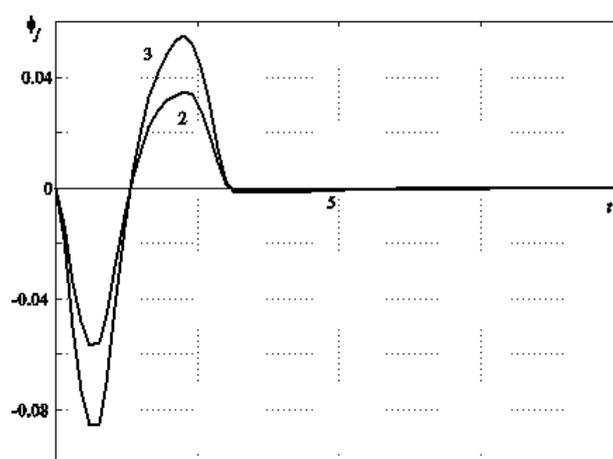


Рис. 4.

Предложенный подход может быть использован при решении задач движения упругих тел в акустической среде под действием нестационарных волн давления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №04-08-01497).

Литература

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 592 с.
2. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Егорова О.В. Плоская задача дифракции акустической волны давления на криволинейном препятствии // Изв. РАН. МТТ. 2003. №3. С.148-154.
3. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение. 208 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Бинوم. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

**ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУПРУГОСТИ
НИКЕЛИДА ТИТАНА**

*Груздков А.А., Кривошеев С.И., Петров Ю.В.,
Разов А.И., Федоровский Г.Д. (НИИ математики и механики СПбГУ,
Санкт-Петербург, Россия)*

**THE STUDY OF DYNAMIC INELASTIC PROPERTIES
NIKELID TITAN**

*Gruzdkov A.A., Krivosheev S.I., Petrov Yu.V., Razov A.I., Fedorovsky G.D.
(Scientific research institute of mathematics and mechanics
of St.-Petersburg state university, Russia)*

1. Неупругие свойства никелида титана. Никелид титана находит все более широкое применение как в машиностроении, так и в медицине. Этим во многом вызван большой интерес к изучению его механических свойств. Для медицинских приложений оказывается интересным то обстоятельство, что величины характеристик упругости этого материала близки к соответствующим значениям для упругих характеристик кости человека. Но все-таки наибольший интерес вызывает «эффект памяти формы». В случае квазистатического нагружения при превышении определенного порога нагрузки происходит неупругое деформирование образцов из никелида титана. Основным механизмом деформации в этом случае традиционно считается мартенситное двойникование. При последующем нагревании образца, он восстанавливает свою первоначальную форму. В случае если нагрузка существенно превосходит предел упругости, имеет место дислокационный механизм деформирования. Полученная в результате неупругая деформация оказывается необратимой при нагревании.

Таким образом, имеет место явное «соревнование» двух механизмов деформирования. Возникает вопрос, каковы временные характеристики данных процессов, какой из двух механизмов инициируется за меньшее время. Ответ на этот вопрос может быть получен в результате изучения реакции материала на силовые воздействия малой длительности.

2. Описание переходных процессов на основе понятия “инкубационное время”. Различные физические явления - хрупкое или вязкое разрушение «бездефектных» образцов или образцов с макроскопическими дефектами, переход в пластическое состояние, фазовые превращения, кавитация в жидкостях, пробой диэлектрика и т.д., которые охватываются понятием «прочностные свойства материалов», при всем их разнообразии для различных материалов обладают некоторыми общими закономерностями. При проведении испытаний в условиях

кратковременного нагружения большой интенсивности наблюдается резкое отличие прочностных характеристик по сравнению с данными квазистатических испытаний. Кроме того, обнаруживаются эффекты, принципиально не описываемые классическими моделями. Это вызвано тем обстоятельством, что длительность нагружения становится соизмеримой с характерным временем переходных процессов в структуре материала. Этот параметр мы называем инкубационным временем материала. Представляется естественным сохранить в качестве характеристики материала пороговое значение параметра нагружения в квазистатических испытаниях (статический предел текучести, прочности и т.д.). Это позволит описать в рамках одной модели результаты как квазистатических, так и динамических испытаний. Такой подход оказался эффективным для моделирования всех упоминавшихся выше явлений [1].

Для моделирования ряда наблюдаемых эффектов (смена типа разрушения [2,3], влияние температуры [4,5] и т.д.) необходимо иметь критерий справедливый в широком диапазоне изменения параметров нагружения. В настоящей работе мы используем предложенный ранее критерий инкубационного времени. Достоинством данного критерия является то, что он применим для произвольного закона изменения напряжения во времени и не связан с предположением о постоянстве нагрузки или скорости деформации. Это особенно важно при проведении динамических испытаний с импульсной нагрузкой. Важно отметить также то обстоятельство, что все разнообразие проявления динамических свойств материала описывается с помощью ограниченного набора констант. Для описания динамической пластичности используем критерий инкубационного времени, который имеет вид

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_* - \tau}^{t_*} \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_Y} \right)^\alpha dt \leq 1, \quad (1)$$

где σ_Y - статический предел текучести, τ - инкубационное время текучести, α - безразмерный параметр формы. Момент перехода в пластическое состояние t_* определяется из условия достижения равенства в (1).

3. Экспериментальное определение пороговых нагрузок при импульсном нагружении. Предлагаемый подход требует экспериментального определения констант, описывающих динамические свойства материала. Отрабатывалась методика испытаний образцов малых размеров на трехточечный изгиб импульсной сосредоточенной нагрузкой. В этом случае изготовление образцов относительно несложно, а для анализа результатов можно использовать известные квазистатические решения.

Испытания проводились на магнитно-импульсной установке емкостью 12 мкФ с запасаемой энергией до 15 кДж. Установка позволяет формировать импульс давления в микросекундном интервале длительности с амплитудой до 2000 МПа [6].

Стальная призма собирает магнитное давление с части шин и передает усилие на испытуемый образец, установленный на жестких опорах, расстояние между которыми варьировалось в диапазоне 22-49 мм. Динамические испытания с длительностью импульса, лежащем в микросекундном диапазоне, сопровождались статическими, которые были проведены на испытательных машинах Р-0.5 и РМУ-0.05. Образцы из никелида титана изготавливались из проволоки диаметром 2 мм. Нагружение осуществлялось при комнатной температуре, при которой никелид титана находится в мартенситном состоянии.

Пороговые значения нагрузки, при которой появляется остаточная деформация, определялись путем экстраполяции зависимости величины прогиба от нагрузки $u(F)$ в область $u \rightarrow 0$. На рис. 1 приведены результаты одной из проведенных серий.

В последствие деформированные образцы были подвергнуты нагреванию. Во всех случаях после отогрева прогиб образца уменьшился, однако ни в одном из случаев первоначальная форма не была полностью восстановлена. Таким образом имели место оба механизма деформирования.

4. Анализ экспериментальных данных. Главным фактором, который следует принять во внимание при оценке напряженного состояния в образце, является инерция ударника. Инерцией самого образца пренебрегаем, поскольку она на порядок меньше.

Для описания поведения образца воспользуемся моделью балки с одной степенью свободы. В линейно-упругом приближении сила реакции балки пропорциональна прогибу. Уравнение движения ударника в этом случае можно записать в виде

$$m \cdot \ddot{u} = -k \cdot u + F(t),$$

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0,$$

где u - прогиб, m - масса ударника, k - жесткость балки, $F(t)$ - сила, действующая на ударник, которая задается соотношением

$$F(t) = \begin{cases} A \sin^2 \frac{\pi t}{t_1}, & t < t_1 \\ 0, & t \geq t_1 \end{cases}$$

где t_1 - длительность импульса, A - амплитуда. Решая дифференциальное уравнение и учитывая, что сила реакции балки равна $G(t) = u(t) k$,

получаем, что сила, действующая непосредственно на образец, задается соотношением

$$G(t) = \begin{cases} \frac{A}{\omega^2 - v^2} \left(\omega^2 \cdot \sin^2 \frac{v t}{2} - v^2 \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right), & \text{при } 0 \leq t < t_1 \\ \frac{A}{1 - (v/\omega)^2} \sin \frac{v t_1}{2} \cdot \sin v \left(t - \frac{t_1}{2} \right), & \text{при } t > t_1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что продолжительность и амплитуда импульса, действующего на образец, равны, соответственно

$$t_2 = \frac{\pi}{v} + \frac{t_1}{2} \quad \text{и} \quad G_{\max} = \frac{A}{1 - (v/\omega)^2} \sin \frac{v t_1}{2}.$$

При расчете жесткости балки использовалась формула для статического прогиба:

$$u = \frac{GL^3}{48EJ},$$

где G - сила, действующая на балку, L - расстояние между опорами, E - модуль Юнга, J - момент инерции. Очевидно, что

$$k = \frac{48EJ}{L^3}$$

Для круглого поперечного сечения: $J = \frac{\pi d^4}{64}$ (d - диаметр).

Для того чтобы варьировать длительность воздействия ударника на образец изменялось расстояние между опорами. С этой же целью в ряде тестов использовался облегченный (за счет просверленного отверстия) ударник.

Для определения статического предела текучести рассматривалась задача об упруго-пластическом изгибе опертой балки круглого поперечного сечения. Нормальное напряжение в осевом направлении задается формулой

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_s \frac{y}{\zeta}, & |y| > \zeta, \\ \sigma_s \operatorname{sign} y, & |y| \leq \zeta. \end{cases}$$

Здесь x - ось балки, y - ось нагрузки, ζ - расстояние от оси $y=0$ до пластической зоны, σ_s - статический предел текучести. Будем считать, что критическая нагрузка соответствует переходу всего центрального поперечного сечения в пластическое состояние, т.е. $\zeta \rightarrow 0$. Из равенства момента приложенной силы относительно опор изгибающему моменту балки получается соотношение

$$\sigma_S = \frac{3LF}{2d^3},$$

где L - расстояние между опорами, F - критическая нагрузка, d - диаметр. Рассчитанное значение составляет 62 МПа.

При расчете данных обрабатывались результаты четырех серий проведенных ранее [9] и данные четырех новых серий испытаний на МИУ, а также данные тестирования при статическом нагружении. Расчетная кривая ($\alpha = 0.76$, $\tau = 2.3 \cdot 10^{-3} c$) сопоставлена с экспериментальными точками на рис. 2.

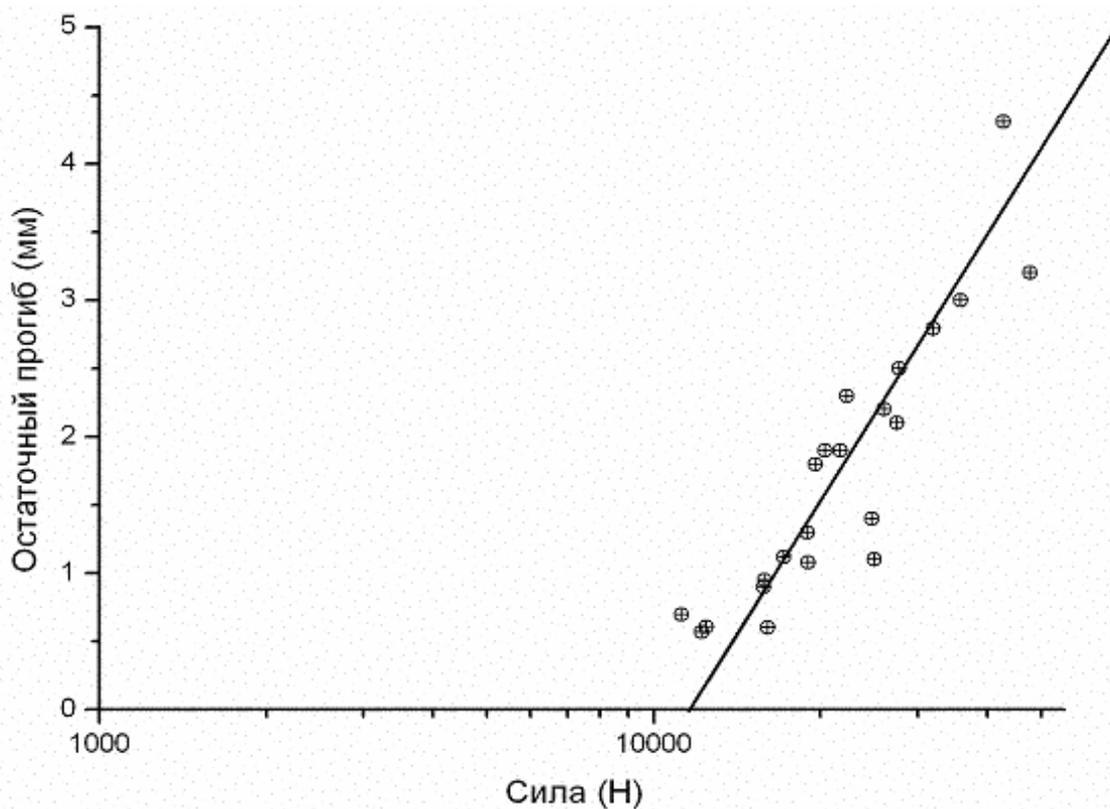


Рис. 1. Зависимость остаточного прогиба от амплитуды приложенной нагрузки

Выводы.

Разработана и апробирована новая методика определения инкубационного времени необратимого деформирования материалов с использованием образцов малого размера.

Проведены серии испытаний на трехточечный изгиб образцов из никелида титана, в результате чего определены временные характеристики необратимого деформирования этого материала.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований – грант № 04-01-00653.

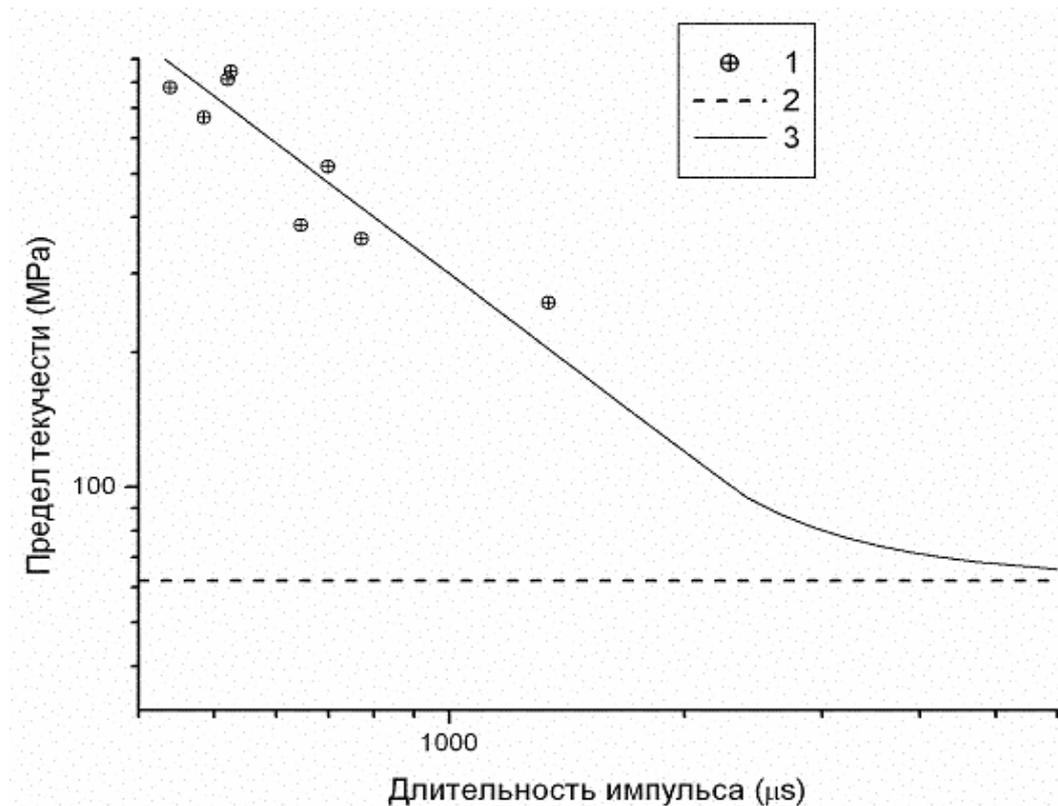


Рис. 2. Зависимость предела текучести от длительности воздействия: 1-динамические испытания, 2-статические испытания, 3-расчет

Список литературы

1. Петров Ю.В. Критерий инкубационного времени и импульсная прочность сплошных сред: разрушение, кавитация, электрический пробой // Докл. Академии Наук. 2004. Т. 395, № 5. С. 621-625.
2. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997, 132 с.
3. Morozov N.F., Petrov Yu.V. Brittle and Ductile Fracture: Transition Points // Вопросы материаловедения. 2003, № 1(33). С. 390-393.
4. Campbell J.D., Ferguson W.G. The Temperature and Strain-Rate Dependence of the Shear Strength of Mild Steel // The Philosophical Magazine. 1970. V. 21, № 169. P. 63-82.
5. Груздков А.А., Петров Ю.В. О температурно-временном соответствии при высокоскоростном деформировании металлов. // Доклады РАН. 1999. Т. 364, № 6. С. 766-768.
6. Кривошеев С.И., Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Шнеерсон Г.А. Иницирование разрушения твердых тел при интенсивном импульсном нагружении // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 1999. №5. С.165-172.
7. Груздков А.А., Кривошеев С.И., Разов А.И., Петров А.А., Петров Ю.В., Федоровский Г.Д. Функционально-механические свойства сплава TiNi при высокоскоростном магнитно-импульсном нагружении // Структура и свойства перспективных металлов и сплавов / Труды XL международного семинара «Актуальные проблемы прочности», 30 сент. - 4 окт. 2002 г., Великий Новгород. – Великий Новгород, 2003. С. 56-60.

РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОЕКЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Жаворонок С.И., Медведский А.Л.

Московский авиационный институт (ГТУ) (Москва)

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейное операторное уравнение вида

$$Lp = u \tag{1}$$

$$L: D_L \rightarrow R_L, \quad D_L \subseteq H, \quad R_L \subseteq H$$

где L – линейный, в общем случае неограниченный оператор, D_L – область определения оператора, R_L – область значений оператора, H – гильбертово пространство.

Уравнению (1) может быть поставлено в соответствие следующее соотношение:

$$L \cdot p = u \tag{2}$$

где L – тензор второго ранга на паре пространств H, H , p, u – векторы из H , точкой обозначено скалярное произведение со сверткой по одной паре индексов.

Определим прообраз D_L и образ R_L линейными оболочками базисных векторов:

$$D_L = \{q_k\}_1^\infty, \quad R_L = \{r_k\}_1^\infty \tag{3}$$

Множество линейных функционалов $\varphi(p), p \in H$ образует пространство, сопряженное пространству H . Подпространствам D_L, R_L соответствуют сопряженные подпространства $D_L^*, R_L^* \lim_{\delta x \rightarrow 0}$. Любой

линейный функционал $\varphi(p) \in H^*, p \in H$ однозначно определен скалярным произведением – билинейным функционалом $p \cdot q \in \mathbb{R}, p, q \in H$, порождающим в H квадратичную норму и метрику [1]:

$$\|p\|^2 = p \cdot p, \quad \rho(p, q) = (p \cdot q)^{\frac{1}{2}}$$

Ковариантные базисные векторы q_k, r_k связаны соотношением взаимности с векторами p^m, q^m :

$$p_k \cdot p^m = q_k \cdot q^m = \delta_k^m,$$

где δ_k^m – символ Кронекера, задающий компоненты тождественного преобразования пространства.

Отображение $L: D_L \rightarrow R_L$ запишется в соответствии с (3) следующим образом:

$$R_L = \{t_k\}_1^\infty, \quad t_k = Lq_k, \quad k = 1, \dots, \infty \tag{4}$$

Следовательно, сопряженные подпространства D_L^*, R_L^* также могут быть заданы линейными оболочками векторов $\mathbf{p}^m, \mathbf{q}^m$, образующих контравариантный (взаимный) базис.

В D_L, R_L, D_L^*, R_L^* могут быть введены метрические тензоры \mathbf{g}, \mathbf{G} , соответствующие операторам, отображающим подпространство в сопряженное подпространство:

$$\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{q}^i \otimes \mathbf{q}^j = \delta_i^j \mathbf{q}^i \otimes \mathbf{q}_j = g^{ij} \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{q}_j \quad (5)$$

$$\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}^j = \delta_i^j \mathbf{r}^i \otimes \mathbf{r}_j = G^{ij} \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_j$$

с ковариантными и контравариантными компонентами

$$g_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j, \quad g^{ij} = \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{q}^j \quad (6)$$

$$G_{ij}^* = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, \quad G^{ij} = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j$$

С учетом (4) определим тензор \mathbf{L} оператора L на паре пространств D_A, R_A^* или D_A^*, R_A :

$$\mathbf{L} = L_i^j \mathbf{q}^i \otimes \mathbf{r}_j = L_{ij} \mathbf{q}^i \otimes \mathbf{r}^j = L^{ij} \mathbf{q}_i \otimes \mathbf{r}_j \quad (7)$$

с компонентами

$$L_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{s}_j, \quad L^{ij} = \mathbf{q}^j \cdot \mathbf{s}^i, \quad (8)$$

$$L_i^j = \mathbf{q}^i \cdot \mathbf{s}_j, \quad L_i^j = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{s}^j$$

следующими из

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{L} \cdot \mathbf{q}_k = L_{ij} \mathbf{q}^i \otimes \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{q}_k = L_{ij} \delta_k^j \mathbf{r}^j = L_{kj} \mathbf{r}^j = L_k^j \mathbf{r}_j \quad (9)$$

$$\mathbf{s}^k = \mathbf{L} \cdot \mathbf{q}^k = L_{ij} \mathbf{q}^i \otimes \mathbf{r}^j \cdot \mathbf{q}^k = L_{ij} g^{ik} \mathbf{r}^j = L_i^k \mathbf{r}^i = L^{ik} \mathbf{r}_i$$

Соотношения (8), (9) являются базовыми для проекционного метода решения линейной операторной задачи в варианте Галеркина-Петрова. В частном случае $\mathbf{q}_k = \mathbf{r}_k$ построенная проекционная схема соответствует методу Бубнова-Галеркина.

Поднятие и опускание индексов компонентов операторов \mathbf{L} осуществляется обычным образом с помощью метрических тензоров \mathbf{g}, \mathbf{G} :

$$L^{ij} = G^{ik} L_k^j = G^{ik} g^{mj} L_{km}, \dots \quad (10)$$

Система уравнений относительно компонентов функции \mathbf{p} в базисе \mathbf{q}^k или \mathbf{q}_k при правой части \mathbf{u} , определяемой своими компонентами в базисе \mathbf{r}^k или \mathbf{r}_k проекциями

$$u_k = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_k, \quad u^k = \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}^k \quad (11)$$

$$p_k = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_k, \quad p^k = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}^k$$

записывается в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned} L_{ij} p^j &= u_i, & L_i^j p_j &= u_i \\ L^i_j p^j &= u^i, & L^{ij} p_j &= u^i \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{p} \in D \in H, \mathbf{u} \in L_2(I \times \Omega), \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, I = [0, \tau], \tau > 0$$

Компоненты правой части и оператора \mathbf{L} на основе приведенного формального алгоритма могут быть вычислены автоматически в среде компьютерной алгебры, поддерживающей операции тензорного анализа, например, Maple 9 [2].

2. Решение операторных уравнений первого рода. Рассмотрим теперь решение операторного уравнения первого рода:

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{u} \quad (13)$$

Введем регуляризирующий функционал $M^{\alpha\beta\gamma}[\mathbf{p}]$ по следующему правилу [3]:

$$M^{\alpha\beta\gamma}[\mathbf{p}] = \|\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{u}\|_{L_2}^2 + \alpha \|\mathbf{p}\|_{L_2}^2 + \beta \|D_t \mathbf{u}\|_{L_2}^2 + \gamma \sum_{i=1}^2 \|D_x^i \mathbf{u}\|_{L_2}^2, \quad (14)$$

где $\|u\|_{L_2}$ - метрика пространства $L_2(I \times \Omega)$, а α, β и γ - параметры регуляризации.

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2}^2 = \int_0^\tau \int_\Omega \mathbf{u}^2(t, \mathbf{x}) dx dt, \quad D_t = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad D_x^i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

Представим функционал $M^\alpha[\mathbf{p}]$ в виде следующих слагаемых (точкой обозначена производная по времени):

$$\begin{aligned} M^\alpha[\mathbf{p}] &= M_1[\mathbf{p}] + \alpha M_2[\mathbf{p}] + \beta M_t[\mathbf{p}] + \gamma \sum_{i=1}^2 M_x^i[\mathbf{p}], \\ M_1[\mathbf{p}] &= \|\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{u}\|_{L_2}^2, \quad M_2[\mathbf{p}] = \|\mathbf{p}\|_{L_2}^2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$M_t[\mathbf{p}] = \|\dot{\mathbf{p}}\|_{L_2}^2, \quad M_x^i[\mathbf{p}] = \|D_x^i \mathbf{p}\|_{L_2}^2$$

Рассмотрим конечномерное представление указанных операторов. Для этого введем ковариантный $\{\mathbf{q}_k\}_{k=1}^\infty$ и контравариантный $\{\mathbf{q}^k\}_{k=1}^\infty$ базисы в соответствующем гильбертовом пространстве. Тогда для вектора \mathbf{p} получим координаты в соответствии с (11)

$$\mathbf{p} = p^k \mathbf{q}_k = p_k \mathbf{q}^k, \quad p^k = g^{km} p_m \quad (17)$$

Для оператора $M_1[\mathbf{p}]$ будем иметь:

$$\begin{aligned}
M_1[\mathbf{p}] &= \|\mathbf{Ap} - \mathbf{u}\|_{L_2}^2 = (\mathbf{Ap} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{Ap} - \mathbf{u}) = \\
&= \mathbf{Ap} \cdot \mathbf{Ap} - 2\mathbf{Ap} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \\
&= A_m^k A_k^q p^m p^q - 2A_m^k p^m u_k + u^k u_k = \\
&= A_m^k A_k^q g_{qs} p^m p^s - 2A_m^k p^m u_k + u^k u_k
\end{aligned} \tag{18}$$

Для оператора $M_2[\mathbf{p}]$ аналогично получим:

$$M_2[\mathbf{p}] = \|\mathbf{p}\|_{L_2}^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = p^k p_k = g_{km} p^k p^m \tag{19}$$

Введем конечномерные операторы дифференцирования T_k^m и $D_{(i)q}^k$ по временной переменной t и пространственным переменным x^i ($i=1,2$). Для оператора дифференцирования по времени имеем:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}} &= \dot{p}^k \mathbf{q}_k = \dot{p}_k \mathbf{q}^k, \quad \dot{p}^k = g^{km} \dot{p}_m, \\
\dot{p}^k &= T_m^k p^m, \quad \dot{p}_k = T_k^m p_m, \quad T_{km} = g_{kn} T_m^n
\end{aligned} \tag{20}$$

Аналогично для пространственных переменных:

$$\begin{aligned}
D_x^i \mathbf{p} &= (\partial_i p)^k \mathbf{q}_k = (\partial_i p)_k \mathbf{q}^k, \quad (\partial_i p)^k = g^{km} (\partial_i p)_k, \\
(\partial_i p)^k &= D_{(i)q}^k p^q, \quad (\partial_i p)_k = D_{(i)k}^q p_q
\end{aligned} \tag{21}$$

Следовательно, для операторов $M^t[\mathbf{p}]$, $M_x^i[\mathbf{p}]$ получим:

$$M_t[\mathbf{p}] = \|\dot{\mathbf{p}}\|_{L_2}^2 = \dot{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{p}} = g_{km} \dot{p}^k \dot{p}^m = g_{km} T_q^k T_s^m p^q p^s = T_{mq} T_s^m p^q p^s \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
M_x^i[\mathbf{p}] &= \|D_x^i \mathbf{p}\|_{L_2}^2 = (\partial_i p)^k (\partial_i p)_k = g_{km} (\partial_i p)^k (\partial_i p)^m = \\
&= g_{km} D_{(i)q}^k p^q D_{(i)s}^m p^s = D_{(i)mq} D_{(i)s}^m p^q p^s
\end{aligned} \tag{23}$$

3. Конечномерное приближение. Приближенно заменим построенные для бесконечномерных пространств соотношения конечномерными, рассматривая

$$\delta M^{\alpha\beta\gamma}[\mathbf{p}] = 0 \tag{24}$$

где $\delta(M^{\alpha\beta\gamma})$ - первая вариация функционала M^α .

Для конечномерного случая условие (24) эквивалентно следующим соотношениям:

$$\mathbf{grad}(M^{\alpha\beta\gamma}[\mathbf{p}]) = \frac{\partial M^{\alpha\beta\gamma}}{\partial p^n} \mathbf{e}^n = \mathbf{0}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial M^{\alpha\beta\gamma}}{\partial p^n} = 0, \quad n = 1, \dots, N \quad (26)$$

Вычислим частные производные от слагаемых в (26). Для $M_1[\mathbf{p}]$ получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial p_n} &= \frac{\partial}{\partial p_n} \left[A_m^k A_k^q g_{qs} p^m p^s - 2A_m^k p^m u_k + u^k u_k \right] = \\ &= A_m^k A_k^q g_{qs} \left(\frac{\partial p^m}{\partial p^n} p^s + \frac{\partial p^s}{\partial p^n} p^m \right) - 2A_m^k u_k \frac{\partial p^m}{\partial p^n} = \\ &= A_m^k A_k^q g_{qs} \left(\delta_n^m p^s + \delta_n^s p^m \right) - 2A_m^k u_k \delta_n^m = A_n^k A_k^q g_{qs} p^s + A_m^k A_k^q g_{qn} p^m - 2A_n^k u_k = \\ &= \left(A_n^k A_{km} + A_m^k A_{kn} \right) p^m - 2A_n^k u_k = \\ &= \widehat{A}_{nm} p^m - 2A_n^k u_k \end{aligned} \quad (27)$$

\widehat{A}_{nm} определяется следующим правилом:

$$\widehat{A}_{nm} = A_n^k A_{km} + A_m^k A_{kn} \quad (28)$$

Далее вычислим частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_2}{\partial p_n} &= g_{km} \frac{\partial}{\partial p_n} \left(p^k p^m \right) = g_{km} \left(\frac{\partial p^k}{\partial p_n} p^m + \frac{\partial p^m}{\partial p_n} p^k \right) = \\ &= g_{km} \left(\delta_n^k p^m + \delta_n^m p^k \right) = g_{nm} p^m + g_{kn} p^m = 2g_{nk} p^k = \widehat{G}_{nk} p^k, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\widehat{G}_{nk} = 2g_{nk}$$

Для операторов по пространственным переменным $M_x^i[\mathbf{p}]$ выкладки будут аналогичными:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_t}{\partial p_n} &= T_{mq} T_s^m \frac{\partial}{\partial p_n} \left(p^q p^s \right) = T_{mq} T_s^m \left(\frac{\partial p^q}{\partial p_n} p^s + \frac{\partial p^s}{\partial p_n} p^q \right) = \\ &= T_{mq} T_s^m \left(\delta_n^q p^s + \delta_n^s p^q \right) = T_{mn} T_s^m p^s + T_{mq} T_n^m p^q = \\ &= \left(T_{mn} T_k^m + T_{mk} T_n^m \right) p^k = \widehat{T}_{nk} p^k, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\partial M_x^i}{\partial p_n} = \left(D_{(i)mn} D_{(i)k}^m + D_{(i)mk} D_{(i)n}^m \right) p^k = \widehat{D}_{(i)nk} p^k, \quad (31)$$

где операторы \widehat{T}_{nk} , $\widehat{D}_{(i)nk}$ определяются следующим образом:

$$\widehat{T}_{nk} = T_{mn} T_k^m + T_{mk} T_n^m \quad (32)$$

$$\widehat{D}_{(i)nk} = D_{(i)mn}D_{(i)k}^m + D_{(i)mk}D_{(i)n}^m \quad (33)$$

Следовательно, для оператора $M^{\alpha\beta\gamma}[\mathbf{p}]$ будем иметь:

$$\frac{\partial M^{\alpha\beta\gamma}}{\partial p^n} = \frac{\partial M_1}{\partial p^n} + \alpha \frac{\partial M_2}{\partial p^n} + \beta \frac{\partial M_t}{\partial p^n} + \gamma \sum_{i=1}^2 \frac{\partial M_x^i}{\partial p^n} = 0 \quad (34)$$

В матричном виде окончательно получим:

$$\left(\widehat{A}_{nk} + \alpha \widehat{G}_{nk} + \beta \widehat{T}_{nk} + \gamma \sum_{i=1}^2 \widehat{D}_{(i)nk} \right) p^k = 2A_n^k u_k, \quad n=1\dots N \quad (35)$$

Соотношение (35) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, зависящую от векторного параметра регуляризации $\Xi = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ относительно неизвестных компонент p^k вектора \mathbf{p} .

Таким образом, на основе общего проекционного метода для операторных уравнений в гильбертовых пространствах сформулирована методика приближенного решения уравнений I рода, требующего построения регуляризующего процесса по Тихонову, позволяющая рассматривать обратные задачи механики сплошных сред.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
2. Матросов А. Maple 6. – СПб.: БХВ Петербург, 2001. – 528 с
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1986. – 288 с.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Жаворонок С.И., Медведский А.Л.

Московский авиационный институт (ГТУ), Москва

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская статическая задача о кинематическом воздействии на срединную поверхность тонкой линейно-упругой оболочки.

Интегральная постановка задачи имеет вид:

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{p}(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega. \quad (1.1)$$

Здесь Ω - срединная поверхность оболочки, \mathbf{u} - вектор обобщенных перемещений срединной поверхности оболочки Π , \mathbf{p} - неизвестный вектор поверхностной нагрузки, действующей на оболочку, $\mathbf{G}(x, \xi)$ - матрица фундаментальных решений оператора \mathbf{L}_x теории оболочек, удовлетворяющая краевым условиям закрепления оболочки.

Теория фундаментальных решений для линейных дифференциальных операторов достаточно полно изложена в работе [1].

Будем предполагать, что в области $\Omega_* \subseteq \Omega$ задан вектор обобщенных перемещений $\mathbf{w}(x)$, а в области $\Omega \setminus \Omega_*$ - поверхностная нагрузка \mathbf{q} . Это позволяет представить интегральное соотношение (1.11) в следующем виде:

- в области кинематического возбуждения ($x \in \Omega_*$):

$$\int_{\Omega_*} \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{p}(\xi) d\xi = \mathbf{w}(x) - \int_{\Omega \setminus \Omega_*} \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{q}(\xi) d\xi, \quad (1.2)$$

- вне области кинематического возбуждения ($x \notin \Omega_*$):

$$\int_{\Omega_*} \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{p}(\xi) d\xi + \int_{\Omega \setminus \Omega_*} \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{q}(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \delta(x - \xi) \mathbf{u}(\xi) d\xi, \quad (1.3)$$

или с учетом свойств дельта-функции, в другом эквивалентном виде:

$$\int_{\Omega_*} \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{p}(\xi) d\xi - \int_{\Omega \setminus \Omega_*} \delta(x - \xi) \mathbf{u}(\xi) d\xi = \mathbf{w}(x) - \int_{\Omega \setminus \Omega_*} \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{q}(\xi) d\xi \quad (1.4)$$

Введем новую неизвестную векторную функцию:

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{p}(x) \chi(\Omega_*) + \mathbf{u}(x) \chi(\Omega \setminus \Omega_*), \quad (1.5)$$

где $\chi(\Omega)$ - характеристическая функция множества Ω .

А также ядро интегрального оператора $\widehat{\mathbf{G}}(x, \xi)$ по следующей формуле:

$$\widehat{\mathbf{G}}(x, \xi) = \mathbf{G}(x, \xi) \chi(\Omega_*) + \mathbf{E} \delta(x - \xi) \chi(\Omega \setminus \Omega_*), \quad (1.6)$$

где \mathbf{E} - единичная матрица соответствующей размерности.

Тогда интегральные выражения (1.3) и (1.4) представляются в следующем виде:

$$\int_{\Omega} \widehat{\mathbf{G}}(x, \xi) \mathbf{U}(\xi) d\xi = \mathbf{W}(x), \quad (1.7)$$

где $\mathbf{W}(x)$ определяется так:

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{w}(x) - \int_{\Omega \setminus \Omega_*} \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{q}(\xi) d\xi. \quad (1.8)$$

В частном случае, когда вне области кинематического возбуждения Ω_* срединная поверхность оболочки свободна от нагрузки ($\mathbf{q} \equiv 0$), выражение (1.8) имеет вид:

$$\mathbf{W}(x) = \mathbf{w}(x) \quad (1.9)$$

Таким образом, контактная задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма I рода (1.7) относительно вектор-функции \mathbf{U} . Необходимо отметить, что в выражениях (1.6) и (1.8) область кинематического возбуждения Ω_* предполагается заданной. Для решения контактной задачи построенное интегральное уравнение необходимо дополнить алгоритмом определения области контакта Ω_* . При неизвестной области Ω_* задача становится нелинейной. Решение интегральных уравнений

Фредгольма I рода является некорректной задачей, требующей использования специальных процедур регуляризации [2].

2. Использование собственных функций оператора для построения фундаментальных решений. Фундаментальные решения $\mathbf{G}^{(i)}(x, \xi)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\mathbf{L}_x \mathbf{G}^{(i)} = -\delta(x - \xi) \mathbf{I}_{(i)}, \quad x, \xi \in G \quad (2.1)$$

$$\mathbf{V}_x \mathbf{G}^{(i)} \Big|_{\partial \Pi} = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{G}(x, \xi) = \left(\mathbf{G}^1(x, \xi), \dots, \mathbf{G}^n(x, \xi) \right) \quad (2.3)$$

Здесь $\mathbf{G}^{(i)}(x, \xi)$ - вектор фундаментальных решений; $\mathbf{I}_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})^T$, т.е. все компоненты вектора \mathbf{I}_i равны нулю за исключением i -й, которая совпадает с дельта-функцией Дирака, \mathbf{V}_x - дифференциальный оператор граничных условий.

Рассмотрим вопрос построения матрицы фундаментальных решений $\mathbf{G}(x, \xi)$. Далее будем предполагать, что оператор \mathbf{L}_x является линейным вполне непрерывным и самосопряженным в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$.

Построим решение задачи Штурма-Лиувилля для оператора \mathbf{L}_x :

$$\mathbf{L}_x \mathbf{U}_n = \lambda_n \mathbf{U}_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{V}_x \mathbf{U}_n \Big|_{\partial \Pi} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Собственные значения λ оператора \mathbf{L}_x указанного класса вещественны, неотрицательны и множество $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ счетно. Также в силу теоремы Гильберта-Шмидта [3] любой элемент $\mathbf{f} \in L_2(G)$ разлагается в сходящийся ряд Фурье по ортонормированной системе собственных векторов \mathbf{U}_n :

$$\mathbf{f} = \sum_n f_n \mathbf{U}_n^{(0)}, \quad (2.6)$$

$$f_n = \left(\mathbf{f}, \mathbf{U}_n^{(0)} \right) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \mathbf{U}_n^{(0)}(x) dx \quad (2.7)$$

$$\mathbf{U}_n^{(0)} = \frac{\mathbf{U}_n}{\|\mathbf{U}_n\|}, \quad \|\mathbf{U}_n\|^2 = \int_{\Omega} \mathbf{U}_n^2(x) dx \quad (2.8)$$

Будем предполагать, что указанное разложение справедливо и в пространстве обобщенных функций. Поэтому решение неоднородного уравнения (2.1) будем искать в виде ряда:

$$\mathbf{G}^{(i)}(x, \xi) = \sum_n f_n^i(\xi) \mathbf{U}_n^{(0)}(x), \quad (2.9)$$

Подставим разложение (2.9) в (2.1) и применим теорему о почленном дифференцировании членов ряда. В результате с учетом (2.4) получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_x \sum_n f_n^i(\xi) \mathbf{U}_n^{(0)}(x) &= \sum_n f_n^i(\xi) \mathbf{L}_x \mathbf{U}_n^{(0)}(x) = \\ &= \sum_n f_n^i(\xi) \lambda_n \mathbf{U}_n^{(0)}(x) = -\delta(x - \xi) \mathbf{I}_{(i)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Предполагая, что правая часть уравнения (2.10) раскладывается в ряд по базису $\mathbf{U}_n^{(0)}$, будем иметь:

$$\delta(x - \xi) \mathbf{I}_{(i)} = \sum_n b_n^i(\xi) \mathbf{U}_n^{(0)}(x) = \sum_n \left(\mathbf{I}_{(i)}, \mathbf{U}_n^{(0)}(\xi) \right) \mathbf{U}_n^{(0)}(x) \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} b_n^i(\xi) &= \left(\delta(x - \xi) \mathbf{I}_{(i)}, \mathbf{U}_n^{(0)}(x) \right) = \\ &= \int_G \delta(x - \xi) \left(\mathbf{I}_{(i)}, \mathbf{U}_n^{(0)}(x) \right) dx = \left(\mathbf{I}_{(i)}, \mathbf{U}_n^{(0)}(\xi) \right), \quad \xi \in G \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тогда из (2.10) и (2.12) будем иметь следующее соотношение:

$$\sum_n \lambda_n f_n^i(\xi) \mathbf{U}_n^{(0)}(x) = \sum_n \left(\mathbf{I}_{(i)}, \mathbf{U}_n^{(0)}(\xi) \right) \mathbf{U}_n^{(0)}(x) \quad (2.13)$$

Учитывая, что при всех n $\lambda_n \neq 0$ и система $\mathbf{U}_n^{(0)}$ является базисом, окончательно для коэффициентов рядов f_n^i получим:

$$f_n^i(\xi) = \frac{\left(\mathbf{I}_{(i)}, \mathbf{U}_n^{(0)}(\xi) \right)}{\lambda_n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.14)$$

Следовательно, фундаментальное решение согласно (2.9) примет вид:

$$\mathbf{G}^{(i)}(x; \xi) = -\sum_n \frac{\left(\mathbf{I}_{(i)}, \mathbf{U}_n^{(0)}(\xi) \right)}{\lambda_n} \mathbf{U}_n^{(0)}(x), \quad (2.15)$$

Как следует из линейности задачи, знание фундаментальных решений (2.15) позволяет получить эквивалентную интегральную постановку задачи (1.1):

$$\mathbf{u}(x) = \int_{\Omega} \mathbf{G}(x, \xi) \mathbf{p}(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \mathbf{G}^{(i)}(x, \xi) p^i(\xi) d\xi. \quad (2.16)$$

$$\mathbf{p} = \left(p^1, \dots, p^n \right)^T$$

3. Контактная задача для ортотропной оболочки типа Тимошенко. В качестве примера использования интегральных операторов первого рода рассмотрим решение контактной задачи для тонкой ортотропной оболочки в форме параболического цилиндра и абсолютно твердого штампа.

Параметризация координатной поверхности оболочки имеет вид:

$$x^1(\xi^k) = \xi^2/2, \quad x^2(\xi^k) = \xi, \quad x^3(\xi^k) = \eta, \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \Omega = [-1, 1] \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{r} = x^i(\xi^k)\mathbf{e}_i$ - радиус-вектор срединной поверхности оболочки.

В области контакта оболочки и штампа $\Omega^* = [-a, a]$, $0 < a \leq 1$, задан прогиб оболочки, при этом ставятся условия свободного проскальзывания:

$$\mathbf{L}_x(u_1, w_1, \chi_1) = (0, p, 0)^T \quad (3.2)$$

$$w_1(\xi) = f(\xi), \quad p(\xi) < 0, \quad \xi \in \Omega^*$$

Вне области контакта оболочка свободна от внешней нагрузки:

$$\mathbf{L}_x(u_2, w_2, \chi_2) = \mathbf{0}, \quad \xi \in \Omega \setminus \Omega^* \quad (3.3)$$

Граничные условия соответствуют жесткому заземлению оболочки:

$$u_2|_{x=\pm 1} = 0, \quad w_2|_{x=\pm 1} = 0, \quad \chi_2|_{x=\pm 1} = 0 \quad (3.4)$$

Также ставятся условия сопряжения участков оболочки:

$$u_1|_{x=\pm a} = u_2|_{x=\pm a}, \quad w_1|_{x=\pm a} = w_2|_{x=\pm a}, \quad \chi_1|_{x=\pm a} = \chi_2|_{x=\pm a}, \quad (3.5)$$

$$N_1|_{x=\pm a} = N_2|_{x=\pm a}, \quad Q_1|_{x=\pm a} = Q_2|_{x=\pm a}, \quad M_1|_{x=\pm a} = M_2|_{x=\pm a}$$

Здесь u_i, w_i, χ_i - компоненты обобщенного вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки, N_i, Q_i, M_i - внутренние усилия в оболочке, $f(\xi)$ - профиль штампа. Компоненты матричного оператора \mathbf{L}_x приведены в работе [4].

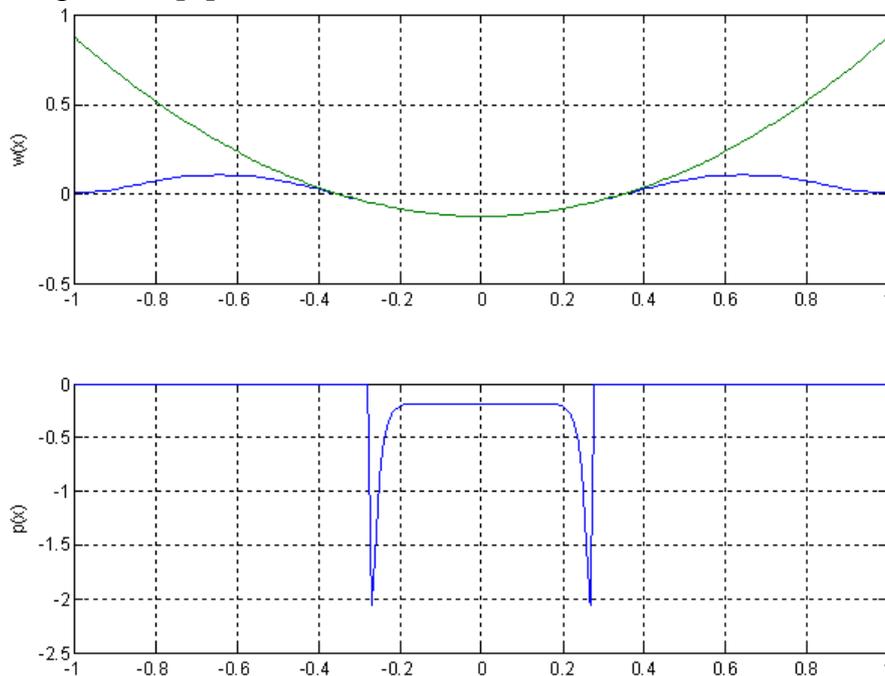


Рис. 1.

Задача сводилась к решению интегрального уравнения (1.7) с правой частью (1.9), для решения которого использовалась процедура

регуляризации по Тихонову (параметр регуляризации $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-8}$) [2]. Рассматривалась ортотропная оболочка ($E_1 = 142,8 \cdot 10^{10}$ Па, $E_2 = 9,13 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{12} = 5,49 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_{12} = 0,02$, $\nu_{21} = 0,32$) толщиной $h = 0,01$ м, взаимодействующая со штампом $f(\xi) = \xi^2 - 1/8$. Граница области контакта a определялась методом последовательных приближений из условия $p < 0$. На рисунке 1 представлен прогиб оболочки контактирующей с абсолютно жестким штампом. Ниже приведено распределение контактной нагрузки p , действующей на оболочку.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ – БРФФИ (проект № 04-01-81006).

Литература

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.- 632 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1986. – 288 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.:Наука, 1968. – 496 с.
4. Горшков А.Г., Жаворонок С.И., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Плоская задача дифракции акустической волны давления на тонкой ортотропной панели, помещенной в жесткий экран. Изв. РАН. МТТ. №1. 2004. С.209-220.

КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ, С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ СОЕДИНЕНИЯ РЕБЕР С ОБШИВКОЙ

Заруцкий В.А., Анкянец Е.К.

(Институт механики им. С.П. Тимошенко, НАНУ, Киев, Украина)

VIBRATIONS OF A THIN CYLINDRICAL SHELL, REINFORCED BY RIBS, SUBJECT TO FLEXIBILITY OF THE JOINT OF RIBS AND PANELING

Zarutsky V.A., Ankyanec E.K.

(S.P.Timoshenko Institute of Mechanics, NASU, Kiev, Ukraine)

Проведено исследование колебаний цилиндрической оболочки, усиленной кольцевыми ребрами жесткости. Задача решается методом конечных элементов. Разработан плоский четырехузловой оболочечный конечный элемент, полученный наложением четырехузлового элемента плоского напряженного состояния и четырехузлового элемента изгибного состояния. Изучено влияние жесткости связей, соединяющих ребра с оболочкой, на собственные частоты и формы колебаний.

1. Введение. Известно значительное число работ, посвященных изучению поведения подкрепленных оболочек под действием динамических нагрузок (их обзоры имеются в [1, 2, 3, 4, 5]). Как правило, принимается, что в процессе деформирования перемещения точек обшивки (собственно оболочки) и ребер, на линии (поверхности) их контакта равны. Авторам известно лишь несколько работ, в которых учитывается податливость слоя, соединяющего ребра и обшивку.

В работах, указанных в [1, 2], рассматриваются тонкие пластинки и оболочки, для которых справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява. Предполагается, что стержни находятся в плоском напряженном состоянии. Для них формулируются гипотезы Бернулли-Эйлера. Поставленные задачи решаются для областей, имеющих определенные, как правило, правильные очертания (рассматриваются цилиндрическая панель, прямоугольная пластинка, оболочка вращения) при условии шарнирного опирания по краям. Учитывается наличие непрерывно распределенного промежуточного слоя (клеевого) и его податливость. Обнаружить работы, в которых описывалось бы поведение оболочки с ребрами, прикрепленными к ней при помощи дискретного промежуточного слоя (например, точечной сварки), авторам не удалось.

2. Постановка задачи. Работа посвящена изучению влияния на собственные частоты и формы колебаний тонкостенной цилиндрической оболочки, подкрепленной дискретно кольцевыми ребрами, способа соединения ребер с обшивкой. Рассматривается непрерывно распределенный промежуточный слой (например, клеевое соединение) и дискретный промежуточный слой (например, точечная сварка). Изучается влияние жесткости непрерывного промежуточного слоя на частоты и формы собственных колебаний подкрепленной оболочки, а также влияние на эти величины дискретности размещения соединительных элементов.

В отличие от работ, указанных в [1, 2], в которых применяются аналитические методы, ниже для решения поставленной задачи используется метод конечных элементов. Это позволяет рассматривать области с произвольными очертаниями, и не налагает ограничения на способ закрепления системы. Граничные условия могут быть любыми, вплоть до отсутствия каких-либо связей, что осуществимо благодаря применению для решения получаемой системы алгебраических уравнений блочного метода Ланцоша со спектральными трансформациями [6, 7], использующего для многократной факторизации матрицы $K_\sigma = K - \sigma M$ (K, M, σ – соответственно матрицы жесткости, масс и сдвиг) высокопроизводительный многофронтальный метод факторизации разреженных матриц [8]. Данные методы внедрены в конечно-элементную программу промышленного пользования SCAD [9]. Они использованы в данной работе с разрешения автора методов, которым были предоставлены

соответствующие программные модули для платформы Windows NT, 2000, XP.

Обшивка и ребра моделируются с помощью оболочечного элемента с шестью степенями свободы в узле, полученного суперпозицией четырехузлового элемента изгибного состояния DKMQ (discrete Kirchhoff-Mindlin quadrilaterals) и четырехузлового элемента плоского напряженного состояния (соответствующие работы указаны в статьях [1, 2]).

Соединительные элементы моделируются link-элементами. Матрица жесткости link-элемента составляется при помощи метода штрафных функций.

3. Исследование влияния слоя, соединяющего оболочку и ребра, на собственные частоты и формы колебаний.

3.1. Упругое непрерывное соединение. Принято, что упругое непрерывное соединение каждой степени свободы может иметь свое значение жесткости. В качестве примера рассмотрены собственные колебания тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевым ребром жесткости, расположенным посередине длины оболочки при различных значениях жесткости соединительного слоя. Вычисления выполнены для оболочки со следующими характеристиками: радиус обшивки $r = 1$ м, длина $l = 1$ м, толщина $th = 0.01$ м.; высота ребра $h_{rib} = 0.2$ м, его толщина $th_{rib} = 0.1$ м. Нижний край оболочки защемлен, а верхний – свободный.

Параметр λ , характеризующий жесткость клея, принят равным $\lambda = \frac{K_{glue}}{K_{rib}}$, где K_{glue} - жесткость клея, K_{rib} - жесткость ребра на растяжение.

На основании проведенного исследования сходимости результатов вычислений собственных частот колебаний при равномерном сгущении сетки, выбрана и далее используется конечно-элементная сетка, размерностью 200×20 разбиений соответственно в окружном и в продольном направлении для обшивки и 4 разбиения по высоте ребра.

Таблица 1

m	$\lambda = 10^{-2}$	$\lambda = 10^{-1}$	$\lambda = 1$
	f, Гц		
4	182.2	204.6	208.8
5	196.4	204.3	206.1
6	181.8	188.7	190.6
7	184.9	190.4	192.3
8	203.6	207.7	209.4

Были рассмотрены оболочки с такими значениями параметра λ : $10^{-6}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1$. Некоторые значения полученных собственных частот приведены в Таблице 1. (m – число волн собственной формы колебаний в окружном направлении)

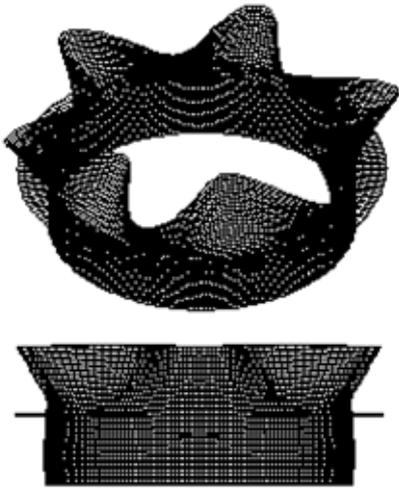


Рис.1. Первая собственная форма,
 $\lambda = 10^{-2}, 10^{-1}, 1$,
 $f_{\min} = 181.8, 188.7, 190.6$ Гц.

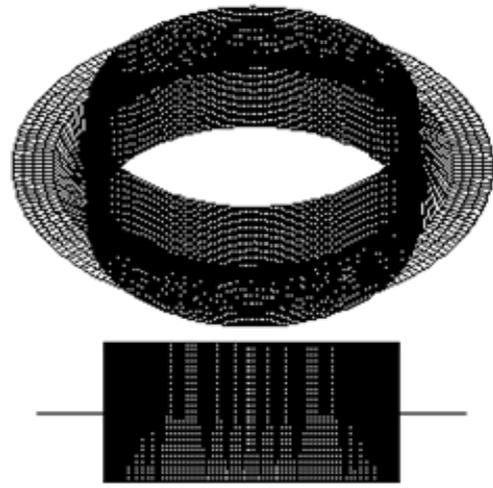


Рис.2. Первая собственная форма,
 $\lambda = 10^{-4}$,
 $f_{\min} = 41.27$ Гц.

На Рис.1, 2 представлены формы колебаний, соответствующие минимальным собственным частотам, полученные для упомянутой выше оболочки при различных значениях жесткости клея.

Обнаружено, что жесткость клея при $\lambda \geq 10^{-2}$ существенно влияет на частоты собственных колебаний оболочки и не влияет на формы собственных колебаний. При $\lambda < 10^{-2}$ ребро колеблется отдельно от оболочки, а собственная частота колебаний ребристой оболочки соответствует аналогичной частоте оболочки без ребра.

3.2. Жесткое дискретное соединение. Проведено исследование влияния числа дискретных соединительных элементов на собственные колебания тонкой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевым ребром жесткости. Рассмотрена оболочка со следующими характеристиками обшивки: радиус $r = 1$ м, длина $l = 1$ м, толщина $th = 0.01$ м.; и характеристиками ребра: высота ребра $h_{rib} = 0.2$ м, толщина ребра $th_{rib} = 0.1$ м, расстояние от нижнего края оболочки до ребра $l_{rib} = 0.5$ м. Как и выше, принято, что нижний край оболочки защемлен, а верхний – свободный.

В результате исследования сходимости собственных частот колебаний при равномерном сгущении сетки, выбрана и использована конечно-элементная сетка, размерностью 200×20 разбиений соответственно в

окружном и в продольном направлении для обшивки и 4 разбиения по высоте ребра.

В Таблице 2 приведены собственные частоты колебаний упомянутой оболочки при различном числе соединяющих обшивку и ребра упругих элементов: $N = 5, 10, 15, 25, 50, 75, 200$. Результаты, приведенные в последнем столбце (число соединяющих элементов равно 200), совпадают с результатами, полученными для случая, когда ребро и обшивка соединены жестко.

Таблица 2

N	5	10	15	25	50	75	200
m	f, Гц						
0	106.6	169.5	174.3	178.7	184.8	188.3	200.5
2	-	-	205.3	210.6	213.6	213.9	209.7
4	138.8	196.1	-	-	-	-	-
5	106.3	166.1	182	193.8	201.5	203.2	206.6
5	131.7	170.4	182	193.8	201.5	203.2	206.6
6	107.5	156.9	168.9	178.9	185.6	187.3	190.9
7	131.3	163.8	172.4	181.8	187.5	189.1	192.6
8	-	182.4	196.6	200.4	205.2	206.6	218.2

В Таблице 3 приведены величины собственных частот колебаний оболочки при различном значении параметра штрафа (P), характеризующего жесткость упругих соединительных элементов, для $N = 25$.

Таблица 3

P	1	100	10000
m	f, Гц		
0	177.9	178.6	178.7
2	208.4	210.6	210.6
5	192.2	193.8	193.8
6	177.5	178.9	178.9
7	180.6	181.8	181.8
8	199.5	200.4	200.4

На Рис. 3-5 приведены собственные формы колебаний для оболочки с пятью упругими соединяющими элементами ($N = 5$). При колебаниях по первой собственной форме оболочка колеблется так, что ребро остается неподвижным. При колебаниях по второй собственной форме колеблется ребро, а оболочка остается неподвижной. При колебаниях по седьмой собственной форме между оболочкой и ребром образуются зазоры.

Из приведенных в Таблице 2 данных следует необходимость учета дискретности размещения элементов, соединяющих обшивку и ребра, по крайней мере, при количестве упругих элементов меньше 75. Жесткость соединений влияет на собственные частоты колебаний слабо (Таблица 3).

4. Выводы. Проведенные исследования показали, что частоты и формы собственных колебаний ребристой оболочки существенно зависят от способа соединения ребра с обшивкой. При значениях λ , близких к 1, для клеевого соединения, и при N близком к количеству разбиений конечно-элементной сетки в окружном направлении, частоты и формы собственных колебаний близки к частотам и формам собственных колебаний оболочки с жестким соединением ребер с обшивкой.



Рис.3. Первая собственная форма, $f = 106.3$ Гц.

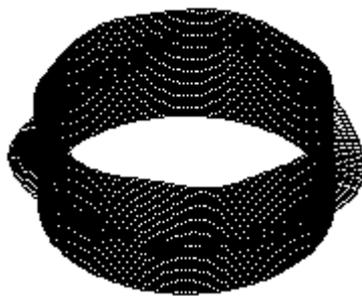


Рис.4. Вторая собственная форма, $f = 106.6$ Гц.

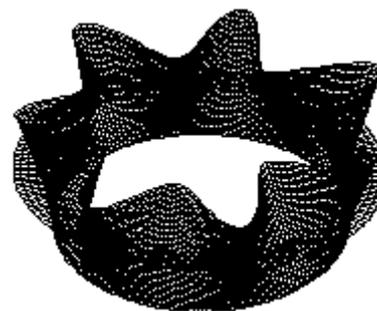
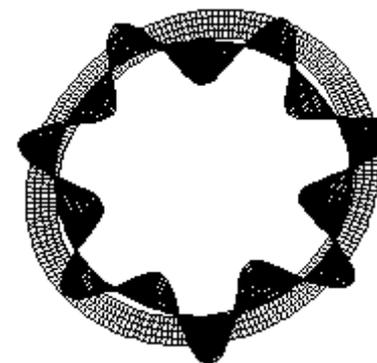
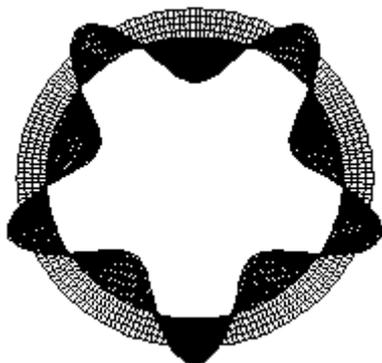


Рис.5. Седьмая собственная форма, $f = 131.3$ Гц.



Литература

1. Е.К. Анкянец, Собственные колебания цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами, присоединенными к ней с помощью упругих связей // Прикл. мех. №8, 2005г., Том 41, с. 105 - 110 .
2. Е.К. Анкянец, Собственные колебания цилиндрической оболочки с кольцевыми ребрами, присоединенными к ней с помощью дискретных упругих связей.// Прикл. мех. №9, 2005г., Том 41, с. 72 - 78 .
3. V.A.Zarutskii On the applicability domain of the assumptions in the theory of ribbed shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 3. - P. 307.

4. V.A. Zarutskii, N.Ya. Prokopenko Dispersion equations for harmonic waves propagating along a cylindrical shell reinforced with a rib mesh (single-mode approximation) // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N 2. - P. 190.
5. V.A. Zarutskii, N.Ya. Prokopenko Influence of discrete longitudinal ribs on harmonic waves in cylindrical shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, N 4. - P. 457.
6. В.С.Карпиловский, Э.З.Криксунов, С.Ю. Фиалко. Блочный метод Ланцоша со спектральными трансформациями для решения больших МКЭ задач собственных колебаний. Вісник Одеського національного морського університету, 10, 2003, с. 93 — 99.
7. С.Ю. Фиалко. О решении обобщенной проблемы собственных значений. - В кн. Перельмутер А.В., Сливкер В.И., Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. - Издание второе, Киев, 2002, с. 570-597.
8. С.Ю. Фиалко. Сопоставление прямых и итерационных методов решения больших конечно-элементных задач строительной механики. - В кн. Перельмутер А.В., Сливкер В.И., Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. - Издание второе, Киев, 2002, с. 552 - 569.
9. В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер, А.Т. Трофимчук SCAD для пользователей /.— К.: Изд-во Компас, 2000.— 332 с.

УДК 539.3

ИЗГИБ ЖЕСТКО И УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ КОНСОЛИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ НАГРУЖЕНИИ – ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

****Захаров Ю.В., ****Охоткин К.Г., **Власов А.Ю., **Филенкова Н.В.
 (*Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН,
 **Сибирский государственный технологический университет,
 ***Сибирский государственный аэрокосмический университет,
 Красноярск, Россия)*

EXACT SOLUTIONS FOR BENDING DEFLECTION OF CANTILEVERS WITH RIGID AND ELASTIC FIXING ENDS UNDER SHEARING LOAD

****Zakharov Yu.V., ****Okhotkin K.G., **Vlasov A.Yu., **Filenkova N.V.,
 (*Kirensky Institute of Physics SD RAS,
 **Siberian State Technological University,
 ***Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, Russia)*

Получены точные решения задачи нелинейного изгиба упруго закрепленной консоли под действием поперечной нагрузки, выраженные через эллиптические интегралы и функции. Получены приближенные формулы, записанные через элементарные функции, для стрел прогибов в зависимости от действующей нагрузки и параметра, определяющего упругие свойства закрепления.

Введение. Наиболее полно задачи геометрически нелинейного изгиба тонких стержней рассмотрены в монографии Е.П. Попова [1]. Задачи изгиба стержней на упругих опорах и упругом основании рассмотрены, например, в работах С.П. Тимошенко [2] и А.С. Вольмира [3]. В работах

авторов [4, 5] была развита теория геометрически нелинейного изгиба тонких стержней. В этих работах было рассмотрено уравнение равновесия стержня типа нелинейного маятника, аналитически найдены и систематизированы формы изгиба стержня при различных нагрузках постоянного направления и способах закрепления концов стержня. В работе [5] вычислены критические нагрузки и найдены равновесные формы жестко защемленного стержня при нагружении следящей сосредоточенной силой. Полученные в работе [4] решения были записаны в едином параметрическом виде и выражены через эллиптические интегралы и функции Якоби, зависящие от одного внешнего параметра – модуля эллиптических функций, определяемого граничными условиями и внешней действующей силой, в отличие от работы [1], где решения зависели от трех параметров. В рассмотренных ранее случаях не учитывается возможность упругого закрепления стержня, что ограничивало область применения полученных результатов.

В настоящей работе рассматривается стержень, упруго закрепленный на одном конце и свободный на другом. Приводится точное аналитическое решение задачи о нелинейном изгибе тонкого упруго закрепленного стержня при нагружении на свободный конец поперечной силой, направление действия которой остается неизменным.

1. Решение задачи об изгибе упруго закрепленного стержня. Рассмотрим тонкий нерастяжимый стержень длины L с изгибной жесткостью EI . Выберем декартову систему координат xOy так, чтобы изначально прямой стержень был расположен вдоль оси Ox , упруго закреплен на левом конце в начале координат и свободен на правом конце.

Стержень сжимается поперечной силой P , сосредоточенной на правом конце стержня, направление которой не меняется. Обозначим через l длину вдоль линии стержня, через $\gamma(l)$ – угол между касательной в текущей точке к линии стержня и осью Oy . В этом случае, следуя работе [5] уравнение равновесия стержня имеет вид

$$\gamma'' + q^2 \sin \gamma = 0. \quad (1)$$

Введем следующие обозначения: P – модуль сосредоточенной силы; $t = l/L$ – безразмерная длина вдоль изогнутой линии стержня, изменяющаяся в интервале $0 \leq t \leq 1$; $q^2 = PL^2/EI$ – собственное число.

Запишем граничные условия для уравнения равновесия стержня (1). Один конец стержня упруго закреплен. В этом случае имеем граничное условие третьего рода

$$\gamma(0) - h\gamma'(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{где } h = \frac{EI}{cL}, \quad (2a)$$

где h – коэффициент упругого закрепления, определяемый упругими свойствами заделки и свойствами самого стержня, c – модуль кручения,

который определяется упругими свойствами заделки, имеющий размерность $[c] = \text{Н}\cdot\text{м}$.

Другой конец стержня свободен. В этом случае имеем отсутствие изгибающего момента

$$EI\gamma'(1) = 0. \quad (2б)$$

Условие (2а) имеет два предельных случая. При $h \rightarrow 0$ получим условие жесткого защемления стержня $\gamma(0) = 0$, а при $h \rightarrow \infty$ получим условие шарнирного закрепления $\gamma(0)' = 0$.

Решение уравнения (1) следуя работе [2] записывается в виде

$$\gamma = 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(qt + F_1)], \quad (3)$$

где sn , cn – эллиптические синус и косинус Якоби. Модуль эллиптических функций k и параметр F_1 выполняют роль констант интегрирования, и их связь с силой P определяется из граничных условий.

Введем обозначение для аргумента эллиптических функций

$$u = qt + F_1. \quad (4)$$

После применения первого граничного условия (2а) получим трансцендентное уравнение для нахождения собственных значений q

$$2 \arcsin[k \operatorname{sn} F_1] - 2hkq \operatorname{cn} F_1 = \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

Последнее уравнение не имеет аналитического решения, и для определения собственных значений используются численные методы.

Из второго граничного условия (2б) следует, что $\operatorname{sn}(q + F_1) = 0$, откуда

$$q = pK(k) - F_1, \quad (6)$$

где $p = 2n - 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$; n – номер моды решения; $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Из выражений (5), (6) следует спектр собственных значений $q_n(k)$, который в свою очередь определяет критические нагрузки

$$P/P_c \equiv (2/\pi)^2 q^2 = (2/\pi)^2 [pK(k) - F_1]^2. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение $P_c = \left(\frac{p}{2}\right)^2 \frac{EI}{L^2}$ – Эйлера критическая сила.

Выражение (7) совпадает по своей структуре с выражением для критических нагрузок стержня с защемленным концом при нагружении силой, направление действия которой не меняется, приведенным в работе [5]. В нашем случае параметр F_1 находится при численном решении уравнения (5). Параметр k изменяется в пределах $1/2 \leq k^2 \leq 1$.

Интегрируя соотношения $dx/dl = \sin \gamma$, $dy/dl = \cos \gamma$, и с учетом (4) получим выражения для координат произвольной точки стержня

$$x/L = [2k / (pK(k) - F_1)] [\operatorname{cn} F_1 - \operatorname{cn} u], \quad (8)$$

$$y/L = t - [2 / (pK(k) - F_1)] [E(\operatorname{am} u, k) - E_1(k)],$$

где $E(\operatorname{am} u, k)$ и $E_1(k) = E(\operatorname{am} F_1, k)$ - неполные эллиптические интегралы второго рода от эллиптической амплитуды. Выражения (8) задают форму профиля изогнутого стержня в параметрическом виде с параметром t – приведенной длиной стержня.

Координаты точек перегиба. Точки, в которых обращается в нуль вторая производная d^2y/dx^2 , являются точками перегиба линии стержня. Обозначим искомую криволинейную координату такой точки t_1 . Вычислим с учетом (3) вторую производную функции линии изгиба стержня, заданной параметрическими уравнениями (8) вида $x = x(t)$, $y = y(t)$. Проведя вычисления, получим

$$t_1 = \frac{(2m+1)K(k) - F_1}{(2n-1)K(k) - F_1}, \quad (9)$$

где параметр F_1 находится из уравнения (5).

Число точек перегиба зависит от номера моды решения и изменяется в следующих пределах $m = 0, 1 \dots (n-1)$.

Координаты точки сжатия. Точки, в которых совпадают угол наклона касательной и угол наклона сжимающей силы к оси Ox , назовем точками сжатия. Обозначим искомую криволинейную координату такой точки t_0 . Положив в выражении для угла наклона касательной (3) $\gamma(t_0) = 0$

$$t_0 = \frac{2mK(k) - F_1}{(2n-1)K(k) - F_1}, \quad (10)$$

где параметр F_1 находится из уравнения (5).

Число точек сжатия зависит от номера моды решения и изменяется в следующих пределах $m = 1 \dots (n-1)$

Стрела прогиба. Точное выражение для стрелы прогиба (прогиба конца стержня) дается выражением

$$f(k) \equiv \frac{y(1)}{L} = 1 - 2 \frac{E(k) - E_1(k)}{K(k) - F_1}, \quad (11)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

2. Приближенные зависимости для стрелы прогиба. Получим приближенные выражения для эллиптических интегралов, входящих в выражения для стрелы прогиба (11), в трех предельных случаях. Будем рассматривать выражение (5), определяющее константу F_1 для случая первой моды.

2.1. Рассмотрим случай $h \rightarrow 0$. Положим в выражении (5) $h = 0$ тогда $F_1 = F_0$, следовательно, при малом положительном изменении около нуля коэффициента h , F_1 можно представить в виде $F_1 = F_0 \pm \Delta F$, где ΔF – малая добавка, $F_0 = F(\arcsin[\sqrt{2}/2k])$.

Раскладывая выражение (5) в ряд Тейлора по малому параметру ΔF получаем приближенные выражения для константы интегрирования F_1 и неполного эллиптического интеграла E_1

$$F_1 \approx F_0 + (K(k) - F_0)h. \quad (12)$$

$$E_1 \approx E_0 + \frac{h}{2}(K(k) - F_0), \text{ где } E_0 = E\left(\arcsin\left[\frac{\sqrt{2}}{2k}\right]\right). \quad (13)$$

На основе точной зависимости для стрелы прогиба упруго закрепленного стержня (11) и приближенных выражений (12), (13) получены приближенные формулы, пригодные для использования в инженерных расчетах при малых нагрузках.

Приближенное выражение для стрелы прогиба упруго закрепленной консоли под действием поперечной нагрузки в случае $h \rightarrow 0$

$$f \approx 1 - 2 \frac{(E(k) - E_0) - \frac{h}{2}(K(k) - F_0)}{(K(k) - F_0)(1 - h)}. \quad (14)$$

Получим приближенное выражение для стрелы прогиба упруго закрепленного стержня от приведенной нагрузки. Для этого, учитывая (12), разложим выражение (7) в ряд по малому параметру $(k - \sqrt{2}/2)$ до второго порядка малости. Решая получившееся кубическое уравнение относительно $\sqrt{k - \sqrt{2}/2}$ по формуле Кардана и затем, раскладывая в ряд по малому параметру P/P_c , получаем приближенную зависимость для модуля k от безразмерной нагрузки P/P_c .

Учитывая проведенные вычисления, (14) получим приближенное выражение для стрелы прогиба в зависимости от приведенной нагрузки

$$f(\lambda) \approx \frac{1}{12} \frac{p^2}{(1-h)^3} \lambda - \frac{8\pi^2 + \pi^4}{768(1-h)^5} \lambda^2 + \dots, \quad (15)$$

где $\lambda \equiv P/P_c$ - безразмерный параметр нагрузки.

Линейный член по λ этого выражения в предельном случае абсолютно жесткой заделки переходит в известное в теории сопротивления материалов приближенное выражение для стрелы прогиба консоли под действием поперечной нагрузки.

2.2 Рассмотрим случай $h \rightarrow \infty$. Положим в выражении (5) $h \rightarrow \infty$, тогда $F_1 = K(k)$ следовательно, при бесконечно больших положительных значениях параметра h можно F_1 представить в виде $F_1 = K(k) \pm \Delta F$, где ΔF - малая добавка. Раскладывая в ряд Тейлора по малому параметру ΔF , получаем приближенные выражения

$$F_1 \approx K(k) \pm \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{\frac{\arcsin k - \frac{p}{4}}{k\sqrt{1-k^2}}}, \quad E_1 \approx E(k) \pm \frac{1-k^2}{\sqrt{h}} \sqrt{\frac{\arcsin k - \frac{p}{4}}{k\sqrt{1-k^2}}}. \quad (16)$$

Учитывая (16), (7) найдем зависимость $(k - \sqrt{2}/2)$ от приведенной нагрузки аналогично п 2.1. Основываясь на выражение для стрелы прогиба (11) и приближенных выражениях (16) получим зависимость для стрелы

прогиба при больших значениях коэффициента h и малых значениях нагрузки λ

$$f(\lambda) = \frac{\pi^2}{4} \lambda h + \dots \quad (17)$$

2.3. Рассмотрим случай малой нагрузки, $\lambda \rightarrow 0$ или, что эквивалентно $k \rightarrow \sqrt{2}/2$, h - любое. Преобразуем точное выражение (5), с учетом (6) полагая, что λ мало. Представим выражение для приведенной нагрузки в виде $\lambda(k, h)$ и выполним разложение в ряд в окрестности $k = \sqrt{2}/2$ до второго порядка малости. Решая получившееся квадратное уравнение в предположении, что эллиптический модуль k изменяется в пределах $1/2 \leq k^2 \leq 1$, получим приближенное выражение для $(k - \sqrt{2}/2)$ в зависимости от приведенной нагрузки.

Раскладывая выражение (11) в ряд по малому параметру $(k - \sqrt{2}/2)$, λ , пренебрегаем членами выше первого порядка малости и учитывая полученные приближения для $(k - \sqrt{2}/2)$ в зависимости от приведенной нагрузки получим приближенное выражение для стрелы прогиба в случае малых нагрузок и любых значений h

$$f \approx \frac{(3h+1)\pi^2\lambda}{12} + \dots \quad (18)$$

Выражение (18) является обобщением приближенных результатов (15), (17) полученных ранее.

На основе асимптотических приближений, следуя работе [7], предложим аппроксимационную зависимость стрелы прогиба от нагрузки, коэффициенты которой определены методом нелинейной регрессии для конкретных значений коэффициента упругого закрепления.

$$f(\lambda) = p_1 \left(\exp \left(2 \left(1 - \frac{1}{(p_2\lambda + 1)^2} \right) \right) - 1 \right) \quad (19)$$

Таблица 1

Значения коэффициентов в формуле (19) в зависимости от h для каждого случая определена ошибка χ^2

h	p_1	p_2	χ^2
0	0,1321	1,3944	0,0007
0,2	0,1478	1,9665	0,0006
0,5	0,1539	2,9067	0,0007

Формула (19) определяет стрелу прогиба при значениях нагрузок более трех критических, с относительной ошибкой менее 3%.

Заключение. Использованный здесь подход работы [5] позволил получить точные аналитические выражения (8) для форм изгиба упруго закрепленного гибкого стержня при нагружении поперечной нагрузкой постоянного направления. Отличие от работ [5, 7] состоит в том, что при

упругом закреплении стержня решения для прогибов зависят не только от эллиптического модуля k , определяемого величиной внешней нагрузки, углом наклона силы и модой решения, но и от коэффициента упругого закрепления h . Рассмотрены предельные случаи поведения упруго закрепленного стержня, получены приближенные выражения для стрелы прогиба упруго закрепленной консоли.

Работа поддержана ведомственной научной программой «Развитие научного потенциала высшей школы», проект № 4418.

Литература

1. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. – М.: Наука, 1986 – 295 с.
2. С.П. Тимошенко Устойчивость стержней пластин и оболочек – М.: Наука, 1971 - 808 с.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967 – 984 с.
4. Захаров Ю.В., Захаренко А.А. Динамическая потеря устойчивости в нелинейной задаче о консоли // Вычисл. технол. 1999. Т. 4. № 1. С. 48-54.
5. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. Нелинейный изгиб тонких упругих стержней // ПМТФ. 2002. Т. 43. №5. С. 124-131.
6. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г., Скоробогатов А.Д. Изгиб стержней под действием следящей нагрузки // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 5. С. 167-175.
7. Захаров Ю.В., Охоткин К.Г., Власов А.Ю. Приближенные формулы для стрелы прогиба упругого стержня при поперечном нагружении // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 5. С. 132-134.
8. Астапов Н.С. Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней // ПМТФ. 1996. Т. 37, №4. С. 135-138.
9. Астапов Н.С. Приближенное представление формы сжатого гибкого стержня // ПМТФ. 1999. Т. 40, №3. С. 200-203.
10. Анфиловьев А.В. Стрела прогиба и сближение концов стержня в продольном изгибе // ПМТФ. 2001. Т. 42, №2. С. 188-193.

УДК 539.3, 624.04

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Колесников Г.П.
(Московский государственный строительный университет, Россия)*

DISCRETE-CONTINUAL VARIATION-DIFFERENCE METHOD FOR ANALYSIS OF PLATES

*Zolotov A.B., Akimov P.A., Sidorov V.N., Kolesnikov G.P.
(Moscow State University of Civil Engineering, Russia)*

В настоящем докладе рассматривается, главным образом, приложение разработанного дискретно-континуального вариационно-разностного метода для расчета плитных конструкций. Приводится континуальная постановка задачи с выделением основного направления (направления постоянства

физико-геометрических характеристик), дискретно-континуальная постановка, описывается методика решения разрешающей многоточечной краевой задачи, приводятся сведения о программной реализации.

1. Введение. Настоящий доклад продолжает серию статей, посвященных приложениям дискретно-континуального вариационно-разностного метода (ДКВРМ) к расчету плит [1-5]. Вообще, ДКВРМ предназначен для расчета конструкций, зданий и сооружений, физико-геометрические характеристики которых постоянны по некоторому (основному) координатному направлению [2]. Метод является дискретно-континуальным в том смысле, что по данному основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и, соответственно, аналитический характер получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация с использованием стандартной техники вариационно-разностного метода (ВРМ). Выбор подобной схемы аппроксимации позволяет сочетать простоту и наглядность, свойственную конечно-разностным методам, с преимуществами вариационной постановки (меньший порядок производных и автоматическое удовлетворение решения основным (естественным) граничным условиям) с одной стороны и очевидные достоинства аналитического решения с другой. Использование ДКВРМ позволяет сравнительно просто получить дискретную операторную формулировку задачи по направлениям сеточной аппроксимации, внешне повторяющую ее континуальную постановку, представленную соответствующими дифференциальными уравнениями.

Как известно, задача определения напряженно-деформированного состояния плит осложняется на этапе аппроксимации проблемой выбора интерполяционных функций, обусловленной наличием производных высокого порядка в уравнениях и функционале. В этой связи, для некоторых приложений удобнее оставаться в рамках ВРМ, что, в конечном счете, облегчает процесс аналитического решения, поскольку он не связан с введением дополнительных неизвестных. Наличие законтурных точек при поперечной дискретизации в рамках дискретно-континуальной модели не приводит к алгоритмическим усложнениям задачи. Кроме того, считается, что введение законтурных точек ведет к повышению точности по сравнению с методом конечных элементов (МКЭ).

2. Континуальная постановка задачи.

2.1. Операторная постановка задачи. Имеем [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(\partial_1^2 M_1 + 2\partial_1 \partial_2 M_{12} + \partial_2^2 M_2 + cw) = -\theta q \\ \delta_\Gamma \{v_1(\partial_1 M_1 + \partial_2 M_{12}) + v_2(\partial_1 M_{12} + \partial_2 M_2) + \partial_\tau [v_2(v_1 M_1 + v_2 M_{12}) - \\ \quad - v_1(v_1 M_{12} + v_2 M_2)]\} = \delta_\Gamma [Q + \partial_\tau (v_2 M_1 - v_1 M_2)] \\ \delta'_\Gamma (v_1^2 M_1 + 2v_1 v_2 M_{12} + v_2^2 M_2) = \delta'_\Gamma (v_1 M_1 + v_2 M_2), \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\text{где } M_1 = D(\chi_1 + \nu\chi_2); \quad M_2 = D(\nu\chi_1 + \chi_2); \quad M_{12} = 0.5 \cdot D(1 - \nu)\chi_{12}; \quad (2)$$

изгибающие и крутящий моменты;

$$\chi_1 = -\partial_1^2 w; \quad \chi_2 = -\partial_2^2 w; \quad \chi_{12} = -\partial_1 \partial_2 w \quad (3)$$

изменения кривизны и кручения;

$$D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)] \quad (4)$$

цилиндрическая жесткость (жесткость плиты к изгибу);

h – толщина плиты; ν – коэффициент Пуассона материала плиты; w – прогиб плиты; c – жесткость основания; q – плотность нагрузки; Q , M_1 ,

M_2 – поперечная сила и крутящие моменты на границе плиты; x_1, x_2 –

используемые координаты; Ω – область, описываемая плитой с границей

$\Gamma = \partial\Omega$; ω – соответствующая расширенная область, окаймляющая Ω ;

$$\partial_k = \partial / \partial x_k, \quad \partial_k^2 = \partial^2 / \partial x_k^2, \quad k = 1, 2;$$

$$F = -\theta q + \delta_\Gamma Q + \partial_1(\delta_\Gamma M_1) + \partial_2(\delta_\Gamma M_2); \quad (5)$$

$\theta = \theta(x_1, x_2)$ – характеристическая функция области ω ; $\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(x_1, x_2)$ –

дельта-функция границы $\Gamma = \partial\Omega$; $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$ – цилиндрическая жесткость;

$$\theta = \theta(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x \in \omega \\ 0, & x \notin \omega; \end{cases}$$

$$\delta_\Gamma = \delta_\Gamma(x_1, x_2) = \partial\theta / \partial \bar{\nu}; \quad (6)$$

$$\delta'_\Gamma = \delta'_\Gamma(x_1, x_2) = \partial\delta_\Gamma / \partial \bar{\nu}$$

$\bar{\nu} = [\nu_1 \quad \nu_2]^T$ – внутренняя нормаль к границе $\Gamma = \partial\Omega$ в выбранной точке;

$\bar{\tau} = [\nu_2 \quad -\nu_1]^T$ – касательная к границе в выбранной точке.

2.2. Вариационная постановка задачи. Соответствующий функционал энергии определяется формулой

$$\Phi(w) = \iint_\omega \left[\frac{1}{2} (M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + 2M_{12} \chi_{12} + cw^2) + qw \right] dx_1 dx_2. \quad (7)$$

2.3. Континуальная постановка в рамках ДКВРМ с выделением основного направления. Полагаем, что характеристики плиты в направлении, соответствующей переменной x_2 (основное направление) остаются неизменными. Вводя обозначения

$$L_4 = \theta D; \quad L_2 = -[\partial_1^2 \theta D \nu + \partial_1 \theta D (1 - \nu) \partial_1 + \theta D \nu \partial_1^2]; \quad L_0 = -\partial_1^2 \theta D \partial_1^2 + \theta c; \quad (8)$$

$$\nu(x_1, x_2) = \partial_2^2 w(x_1, x_2); \quad (9)$$

$$w''(x_1, x_2) = \partial_2^2 w(x_1, x_2); \quad \nu''(x_1, x_2) = \partial_2^2 \nu(x_1, x_2)$$

переходим от (1) к следующей системе дифференциальных уравнений второго порядка (относительно x_2) с операторными коэффициентами:

$$\bar{U}'' = \tilde{L}\bar{U} + \bar{F} \quad (10)$$

$$\text{где } \bar{U} = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}; \quad \bar{U}'' = \partial_2^2 \bar{U} = \begin{bmatrix} \partial_2^2 w \\ \partial_2^2 v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w'' \\ v'' \end{bmatrix}; \quad (11)$$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ L_4^{-1}L_0 & L_4^{-1}L_2 \end{bmatrix}; \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_4^{-1}F \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Возможен также переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка (относительно x_2) с операторными коэффициентами [3].

3. Дискретно-континуальная постановка задачи. Многоточечная краевая задача. Для постановки и решения рассматриваемой краевой задачи исходная область Ω окаймляется расширенной ω . Принимается дискретно-континуальная модель следующего типа: по основному («продольному», ось Ox_2) направлению плиты сохраняется континуальный характер задачи, тогда как по другому («поперечному», ось Ox_1) направлению, производится сеточная аппроксимация. В итоге получаем ансамбль дискретно-континуальных сеточных элементов, к которому, исходя из техники вариационно-разностных аппроксимаций, добавляются два вспомогательных («законтурных») элемента – итого имеем $N + 2$ элемента (рис. 1).

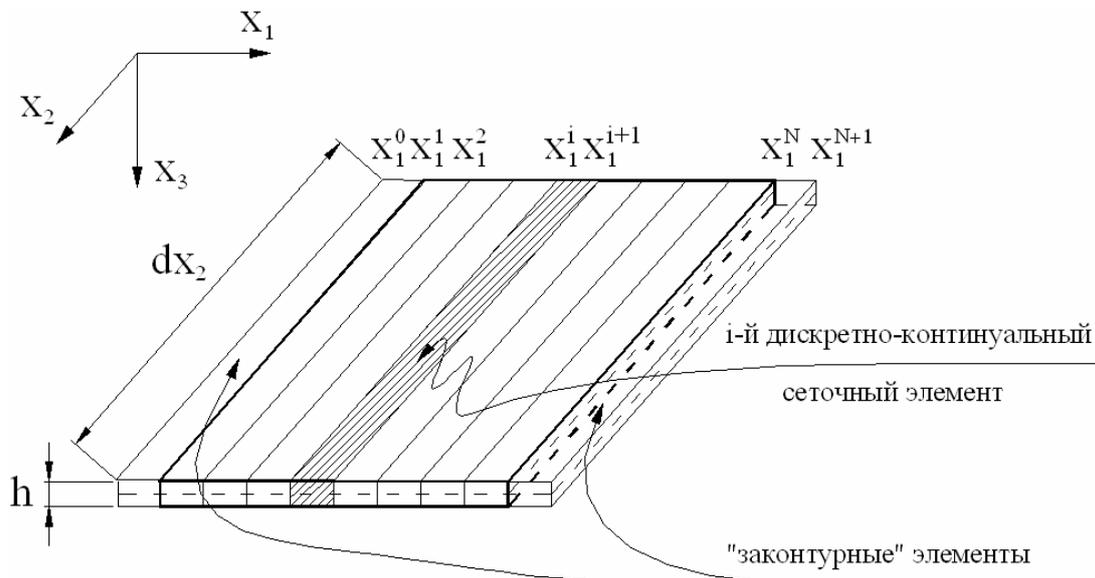


Рис. 1. Дискретно-континуальная аппроксимирующая модель плиты.

В результате проблема сводится к многоточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, т.е. к совокупности обычных краевых задач, рассматриваемых на областях, имеющих общие границы [4]:

$$\bar{y}^{(2)} - A\bar{y} = \bar{f}, \quad x \in \bigcup_{k=1}^{n_k-1} (x_k^b, x_{k+1}^b); \quad (13)$$

$$B_k^- \bar{Y}(x_{2,k}^b - 0) + B_k^+ \bar{Y}(x_{2,k}^b + 0) = \bar{g}_k^- + \bar{g}_k^+, \quad k = 2, 3, \dots, n_k - 1; \quad (14)$$

$$B_1^+ \bar{Y}(x_{2,1}^b + 0) + B_{n_k}^- \bar{Y}(x_{2,n_k}^b - 0) = \bar{g}_1^+ + \bar{g}_{n_k}^-, \quad (15)$$

$$\text{где } \bar{y} = \bar{y}(x_2) = [(\bar{w}_n^r)^T \quad (\bar{v}_n^r)^T]^T; \quad (15)$$

$$\bar{w}_n^r = \bar{w}_n^r(x_2) = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_N]^T; \quad \bar{v}_n^r = \bar{v}_n^r(x_2) = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_N]^T; \quad (16)$$

$w_i(x_2)$, $v_i(x_2)$ – основные неизвестные в узлах – для i -го узла это функция перемещений плиты $w(x_2)$ и ее вторая производная по переменной x_2 ; $\bar{f} = \bar{f}(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad \dots \quad f_n(x)]^T$ – заданная n -мерная вектор-функция правых частей; A – матрица коэффициентов, квадратная n -го порядка; B_k^-, B_k^+ – заданные матрицы граничных условий, квадратные $2n$ -го порядка; \bar{g}_k^-, \bar{g}_k^+ – заданные $2n$ -мерные векторы правых частей граничных условий; $n = 4N$;

$$\bar{Y} = \bar{Y}(x) = [(\bar{y}(x))^T \quad (\bar{y}^{(1)}(x))^T]^T. \quad (17)$$

Пусть по условию требуется определить вектор-функцию $\bar{y} = \bar{y}(x)$, являющуюся решением задачи (13)-(15) и ее производную $\bar{y}^{(1)}(x)$, т.е. (17).

4. Специфические особенности многоточечных краевых задач строительной механики. В ходе разработки и исследования дискретно-континуальных методов расчета строительных конструкций выполнялись комплексные теоретические и практические изыскания в области анализа и аналитического решения получаемых многоточечных краевых задач. В результате выявлены следующие специфические особенности соответствующих многоточечных краевых задач строительной механики: система дифференциальных уравнений является жесткой, что обусловлено характерным явлением краевого эффекта (эффектом малого параметра); матрица коэффициентов системы имеет собственные значения разных знаков; в жордановом разложении матрицы коэффициентов имеются жордановы клетки неединичного порядка; при практических расчетах количество дифференциальных уравнений в системе может быть достаточно большим и достигать нескольких тысяч. Сами по себе перечисленные факторы, и тем более их неучет, предопределяют значительные трудности при практической реализации как аналитических, так и численных методов, выявляя порой недееспособность большинства из них. Здесь важно акцентировать внимание на том факте, что во всех стандартных полуаналитических методах алгоритм построения аналитического решения такой задачи отсутствует и отсутствует совсем не

случайно. Авторами предложены метод и алгоритмы промышленного типа, позволяющие получить решение в удобной, реализуемой на ЭВМ аналитической форме (с использованием обобщенных функций), учитывающей сложности отмеченные выше.

5. Разложение Жордана матрицы коэффициентов. Имеем:

$$A = T J T^{-1}, \text{ где } J = \{J_1, J_2, \dots, J_u\}; \quad (18)$$

T – невырожденная матрица, столбцами которой являются собственные и корневые векторы матрицы A ; J – матрица Жордана; J_p , $\dim J_p = m_p$ – жорданова клетка, соответствующая собственному значению λ_p .

Наличие жордановых клеток неединичного порядка требует вычисления корневых векторов. Как известно, в общем случае не может существовать ни одного численно устойчивого способа вычисления жордановых форм. Однако, в задачах расчета конструкций, как установлено в ходе проведенных исследований, количество и размерности жордановых клеток неединичного порядка не меняются при сгущении сетки дискретно-континуальных элементов, они соответствуют нулевым собственным значениям, а для получения решения разработаны альтернативные подходы.

6. Частичное жорданово разложение матрицы коэффициентов и построение матриц проектирования. Авторами предлагается так называемое частичное жорданово разложение, основанное на применении правых и левых собственных векторов матрицы A , представимой в виде:

$$A = A_1 + A_2, \text{ где } A_1 = T_1 J_1 \tilde{T}_1, \quad A_2 = A - A_1; \quad (19)$$

T_1 и \tilde{T}_1 – соответственно матрицы, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям, расположенные по столбцам и строкам; J_1 – диагональная жорданова матрица, отвечающая ненулевым собственным значениям; A_2 – часть матрицы A , соответствующая кратным и простым нулевым собственным значениям.

Пусть u – число различных собственных значений. Проведем сортировку $\lambda_p, p = 1, \dots, u$ (и преобразование T_1, \tilde{T}_1, J_1), т.ч. будет выполняться:

$$\left. \begin{array}{l} \forall \lambda_p, \quad p = 1, \dots, l \quad \exists m_p = 1 \\ \forall \lambda_p, \quad p = l+1, \dots, u \quad \exists m_p > 1 \end{array} \right\}, \quad (20)$$

$$\text{где } l = \sum_{p=1}^u \delta_{1,m_p}; \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

Пусть P_1 и P_2 – матрицы проектирования на подпространства левых и правых собственных и корневых векторов для ненулевых и нулевых собственных значений соответственно. Имеем:

$$P_1 = T_1(\tilde{T}_1 T_1)^{-1} \tilde{T}_1; \quad P_2 = E - P_1. \quad (21)$$

7. Построение фундаментальной матрицы-функции системы. Существенное значение для решения задачи (13)-(15) играет фундаментальная матрица-функция, по определению удовлетворяющая условиям [5]

$$\varepsilon^{(2)}(x) - A\varepsilon(x) = \delta(x)E \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varepsilon^{(2)}(x) - A\varepsilon(x) = 0, & x \neq 0 \\ \varepsilon^{(1)}(+0) - \varepsilon^{(1)}(-0) = E. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь E – соответствующий единичный оператор.

Фундаментальную матрицу-функцию представим в виде суммы трех или двух составляющих:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_+(x) + \varepsilon_-(x) + \varepsilon_0(x) \quad \text{или} \quad \varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x), \quad (23)$$

$$\text{где} \quad \varepsilon_1(x) = \varepsilon_+(x) + \varepsilon_-(x); \quad \varepsilon_2(x) = \varepsilon_0(x); \quad (24)$$

где $\varepsilon_+(x), \varepsilon_-(x)$ – соответственно составляющие, отвечающие подпространствам простых положительных и отрицательных собственных значений; $\varepsilon_2(x)$ – составляющая, отвечающая подпространству простых и кратных нулевых собственных значений.

В статье [5] получена формула для построения фундаментальной матрицы-функции в удобном для решения задач расчета конструкций виде (именно здесь учитывается характерное явление краевого эффекта, наличие собственных значений разных знаков у матрицы коэффициентов и устраняются соответствующие вычислительные трудности):

$$\varepsilon(x) = T_1 \varepsilon_{0,1}(x) \tilde{T}_1 + x_+ P_2 + \sum_{j=1}^{m_{\max}} \frac{1}{(2j-1)!} x_+^{2j-1} A_2^j, \quad (25)$$

$$\text{где} \quad \varepsilon_{0,1}(x) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}} \exp(-\sqrt{\lambda_1} |x|) \quad \dots \quad -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_{l_1}}} \exp(-\sqrt{\lambda_{l_1}} |x|) \right\}; \quad (26)$$

m_{\max} – максимальный порядок жордановой клетки соответствующей нулевому собственному значению матрицы A .

8. Построение общего решения задачи. Пусть $\bar{Y}_k(x)$ – вектор-функция $\bar{Y}(x)$, определяемая (17), на интервале (x_k^b, x_{k+1}^b) . Имеем:

$$\bar{Y}_k(x) = (E(x - x_k^b) - E(x - x_{k+1}^b)) \bar{C}_k + \bar{\varepsilon} * \bar{f}_k, \quad x \in (x_k^b, x_{k+1}^b), \quad (27)$$

$$\text{где } E(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x) & \varepsilon^{(1)}(x) \\ \varepsilon^{(1)}(x) & \varepsilon^{(2)}(x) \end{bmatrix}; \quad \bar{\varepsilon}(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x) \\ \varepsilon^{(1)}(x) \end{bmatrix}; \quad (28)$$

\bar{C}_k – вектор искомых постоянных коэффициентов $2n$ -го порядка;

$$\tilde{f}_k(x) \equiv f(x)\theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b); \quad \theta(x, x_k^b, x_{k+1}^b) = \begin{cases} 1, & x \in (x_k^b, x_{k+1}^b) \\ 0, & x \notin (x_k^b, x_{k+1}^b). \end{cases} \quad (29)$$

Определение постоянных коэффициентов в общем решении из граничных условий (14)-(15) производится методами описанными в [1,5].

Литература

1. Золотов А.Б., Акимов П.А. Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 стр.
2. P.A. Akimov, A.B. Zolotov. Discrete-continual Variational-difference Method of Analysis for Two-dimensional and Three-dimensional Problems of Structural Analysis. // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Volume 1, Issue 2, Begell House Inc. Publishers & ASV, 2005, p. 1-20.
3. Золотов А.Б., Акимов П.А., Колесников Г.П., Мсхалая Ж.И. Континуальная постановка задачи об изгибе плиты на упругом основании в рамках дискретно-континуального вариационно-разностного метода. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сб. науч. тр. №8. – М.: МГСУ. 2005, с. 105-110.
4. Золотов А.Б., Акимов П.А., Колесников Г.П., Мсхалая Ж.И., Ширинский В.И. Использование дискретно-континуального вариационно-разностного метода для расчета плит. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сб. науч. тр. №3. – М.: МГСУ. 2005, с. 111-123.
5. Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Колесников Г.П. Метод аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сб. науч. тр. №3. – М.: МГСУ. 2005, с. 124-134.

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВОДОРОДНОГО ОХРУПЧИВАНИЯ

Индейцев Д.А., Семенов Б.Н.

ИПМаш РАН, Санкт-Петербургский государственный университет

Водородное охрупчивание материалов является одним из важных факторов при оценки работоспособности конструкций. Несмотря на то, что исследованию влияния водорода на свойства металлов и сплавов посвящено много работ, в этой проблеме еще достаточно "белых" пятен. К их числу относится вопрос о влиянии на основные прочностные характеристики при статическом и динамическом нагружении кинетических процессов внутри материала, приводящих к перераспределению водорода. Отсутствие достоверной механической модели, описание которой базируется на

основных фундаментальных принципах рациональной механики делает проблему весьма актуальной, так как, по своей сути, наличие такой модели позволило бы описывать влияние внутренней кинетики на макропараметры материала. В рамках данной работы предлагается модель, базирующаяся на физических экспериментах, указывающих на снижение энергии разрыва межатомных связей при посадке частиц водорода на последнюю, т.е. снижение уровня свободной энергии. Предложенная модель позволяет объяснить локализацию водорода в областях повышенной концентрации напряжений.

Общепризнано, что водород - одна из наиболее опасных примесей для подавляющего большинства металлов и сплавов. Изучению влияния водорода на различные служебные свойства материалов посвящено огромное количество работ. Однако в этой проблеме еще достаточно открытых вопросов, в частности, вопрос о влиянии кинетических процессов внутри материала, приводящих к перераспределению водорода, на основные прочностные характеристики при статическом и динамическом нагружении. Отсутствие достоверной механической модели, описание которой базируется на основных фундаментальных принципах рациональной механики делает проблему весьма актуальной, т.к., по своей сути, наличие такой модели позволило бы описывать влияние внутренней кинетики на макропараметры материала, что сегодня исключительно важно ввиду огромного количества гипотез, которые готовы подтвердить лишь конкретные эксперименты и не позволяют их использовать в других случаях.

Основная гипотеза, заложенная в основу предлагаемой модели, базируется на физических экспериментах, указывающих на снижение энергии разрыва межатомных связей при посадке частиц водорода на последнюю, т.е. снижение уровня свободной энергии. Надо сказать, что этот эффект имеет место и для скопления дефектов решетки: дислокаций, вакансий и т.п. Таким образом, основные уравнения, которые будут приводиться ниже, можно ожидать, будут справедливы и в других случаях, связанных с описанием ослабления межатомных связей решетки.

Вполне естественно продемонстрировать упомянутую выше гипотезу на примере одномерной цепочки, состоящей из одинаковых частиц - точечных масс m_0 (масса атома кристаллической решетки материала), соединенных одинаковыми нелинейными пружинами длины a (Рис.1).

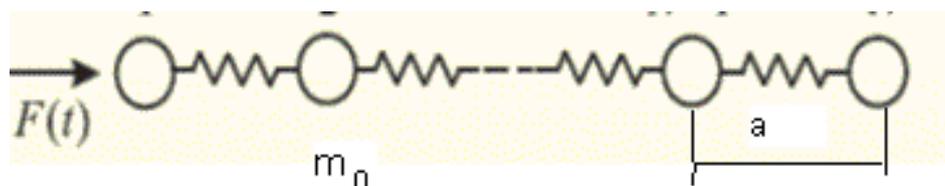


Рис. 1.

Основное уравнение движения в длинноволновом приближении имеет вид

$$m_0 \ddot{u} = -a[f(a(1 + u'))]' \quad (1)$$

Для малых деформаций $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ естественно приходим к уравнению вида

$$\ddot{u} - \vartheta_0^2 u'' = 0, \quad \vartheta_0^2 = \sqrt{\frac{c}{m}} a \quad (2)$$

т.к. $f[a(1 + \varepsilon)] \approx -Ca\varepsilon = -Ca \frac{\partial u}{\partial x}$.

Ослабление межатомной связи, вызванное "посадкой" на нее либо частиц водорода либо иных подвижных внутренних элементов структуры, можно представить следующей схемой (Рис.2) образования новой межатомной связи как последовательные соединения упругих связей основной решетки и внедренных упругих связей новых элементов (на примере частиц водорода). Естественно, такая схема справедлива при предположении малости массы частиц подвижной структуры, т.е. $m_0 \gg m_H$.

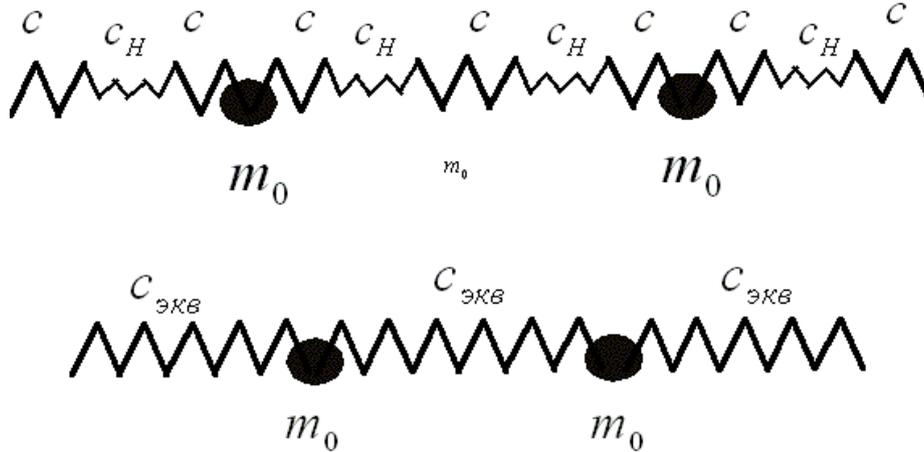


Рис. 2.

Эквивалентная жесткость новой связи очевидно может быть найдена из уравнения

$$\frac{N_\Sigma}{C_\Xi} = \frac{N_0}{C_0} + \frac{N_H^+}{C_H} \quad N_\Sigma = N_0 + N_H^+ \quad (3)$$

Или, записывая последние выражения в привычных обозначениях для сплошной среды, т.е. выводя эффективный модуль упругости, получим

$$\sigma^{(1)} = E_\Xi \varepsilon, \quad E_\Xi = \frac{E_0 E_H}{n_0 E_H + n^+ E_0}, \quad (4)$$

$$n_0 = \frac{N_0}{N_\Sigma}, \quad n^+ = \frac{N_H^+}{N_\Sigma}, \quad n_0 + n^+ = 1.$$

Здесь N_{Σ} - полное число частиц в элементарном объеме, N_0 - число частиц, соединенных неиспорченными связями, N_H^+ - число частиц водорода, присоединенного к решетке со своими связями жесткостью C_H .

Соответственно n_0, n^+ - концентрации указанных выше частиц. В уравнении (1) нелинейную силу f теперь можно принять в виде (для малых деформаций)

$$f = -C_{\Xi} a \varepsilon = -E_{\Xi} \varepsilon \quad (5)$$

Очевидно, а это следует из (4), эквивалентный модуль, иначе говоря, жесткость решетки может существенно уменьшиться, т.к. $E_H \ll E_0$ ($c_H \ll c_0$), и имеет сильную зависимость от концентрации присоединенных частиц n^+ .

Понимая, что число частиц водорода, осевших на решетку, зависит от напряженного состояния последней неоднородно по координатам, а в общем случае и от времени, для E_3 имеем пока неизвестную функциональную зависимость от $n^+(\varepsilon, x, t)$, которую определим исходя из модели двухкомпонентной сплошной среды. Основные положения теории двухкомпонентных сред можно найти в работе [1], поэтому приведем здесь лишь окончательные уравнения с соответствующими пояснениями сценария происходящих процессов. При рассмотрении одномерного случая для первой компоненты, в последующем к ней будем относить основную несущую конструкцию, т.е. кристаллическую решетку с присоединенными частицами водорода либо иными подвижными элементами внутренней структуры, уравнение динамики (первое уравнение Эйлера) имеет вид

$$\frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial x} = \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + J_{12} v^{(1)} + R_{12} \quad (6)$$

$$\rho^{(1)} = \rho^{(0)} + \rho_H^{(1)}$$

Уравнение (6) в отличие от классической сплошной среды в правой части имеет новые силовые слагаемые. Как указывалось выше, присоединение подвижных частиц практически не влияет изменение инерционных характеристик несущей среды, т.е. $\rho_H^+ = m_H \cdot N_H \ll \rho_0^{(0)}$ - плотность сплошной среды, но скорость изменения этой характеристики J_{12} приводит к появлению реактивной силы $J_{12} \cdot V^{(1)}$, которой в общем случае пренебрегать нельзя.

Внутренняя сила R_{12} определяет реакцию взаимодействия между первой и второй компонентами рассматриваемой сплошной среды и ее определение существенно зависит от характера процессов протекающих внутри структуры материала.

Ко второй компоненте отнесем подвижный состав внутренней структуры материала, в нашем случае - это неприсоединенные частицы.

Уравнение, определяющее динамику таких частиц, имеет вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho^{(2)} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} + J_{21} v^{(2)} + R_{21} \quad (7)$$

$$\rho^{(2)} = \rho_H^- = m_H \cdot N^-$$

Здесь N^- - число подвижных частиц водорода.

По аналогии со сжимаемой жидкостью, уравнение состояния определяет связь между давлением p и плотностью $\rho_H^{(-)}$ [2]

$$\tilde{p} = p - p_0 \cong \rho_H^- c_H^2 = m_H N^- c_H^2 \quad (8)$$

К уравнениям (6) и (7) необходимо добавить уравнение баланса массы, именно,

$$\frac{\partial \rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^{(1)} v^{(1)})}{\partial x} = J_{12} \quad (9)$$

или учитывая неизменность $\rho^{(0)}$

$$\frac{\partial \rho_H^+}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_H^+ v^{(1)})}{\partial x} = J_{12} \quad (10)$$

Уравнение (10) определяет баланс частиц водорода, присоединенных к решетке несущего материала

$$\frac{\partial N_H^+}{\partial t} + \frac{\partial(N_H^+ v^{(1)})}{\partial x} = J_{12}/m_H$$

Выражение для баланса массы неприсоединенных частиц имеет вид

$$\frac{\partial \rho_H^-}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_H^- v^{(1)})}{\partial x} = J_{21} \quad (11)$$

или

$$\frac{\partial N_H^-}{\partial t} + \frac{\partial(N_H^- v^{(1)})}{\partial x} = J_{21}/m_H$$

Остаются пока неопределенными реакции $R_{12} = -R_{21}$, а также источниковые члены $J_{12} = -J_{21}$.

Принимая модель обтекания потоком неприсоединенных частиц водорода решетки несущей конструкции аналогичную модели обтекания сжимаемой жидкостью [2], для R_{12} примем следующие представления

$$R_{12} = k \frac{\rho_H^-}{D(\varepsilon)} [v^{(2)} - v^{(1)}] \quad (12)$$

Эта формула аналогична часто используемой в гидравлике формуле [2], только там принимается квадратичный закон сопротивления, здесь же проведена линеаризацию и введен коэффициент k .

Важным моментом является введение в (12) выражения $D(\varepsilon)$ - размер проходного сечения, который зависит от деформации ε .

Источниковые члены $J_{12} = -J_{21}$ примем по аналогии с работой [3], т.е.

$$J_{12} = \alpha N_H^- - \beta N_H^+ \quad (13)$$

где α и β - положительные коэффициенты, определяющие взаимодействие между присоединенными и свободными частицами водорода. Их роль нетрудно установить из следующих модельных уравнений баланса частиц в конструкции

$$\begin{aligned} \frac{dN_H^+}{dt} &= \alpha N_H^- - \beta N_H^+ \\ \frac{dN_H^-}{dt} &= -\alpha N_H^- + \beta N_H^+ \end{aligned} \quad (14)$$

Начальные условия

$$N_H^+(0) = 0, \quad N_H^-(0) = \Psi,$$

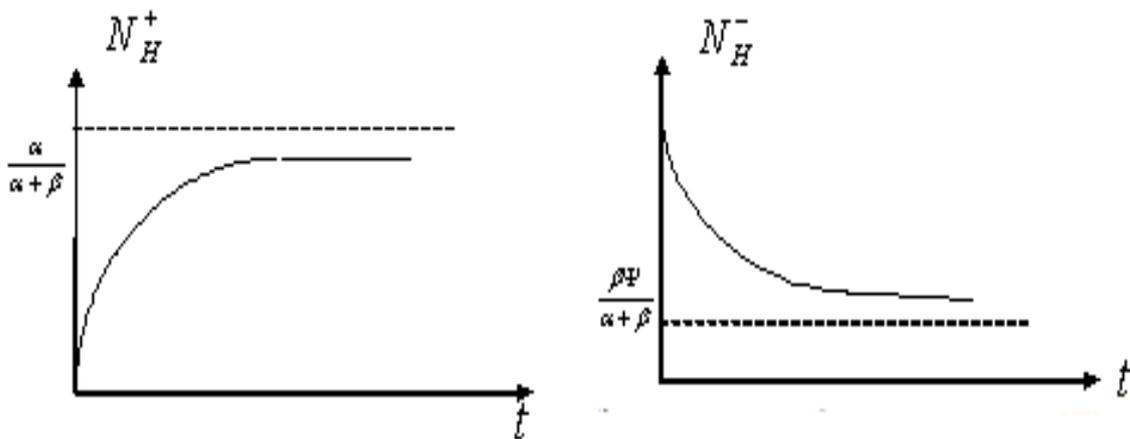


Рис. 3.

Решением системы (14) будет (Рис.3)

$$\begin{aligned} N_H^+ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \alpha \Psi (1 - e^{-(\alpha + \beta)t}) \\ N_H^- &= \Psi \left[1 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} (1 - e^{-(\alpha + \beta)t}) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Параметры α и β необходимо брать их экспериментов, ибо они определяют скорость насыщения несущей конструкции водородом, а также скорость ее обезводороживания.

Следует заметить, что уравнение (14) описывает взаимообмен частиц водорода (связанных и несвязанных) при условии отсутствия скорости перемещения частиц несвязанного водорода.

Последнее реализуется, как это следует из (12), при условии $D(\varepsilon) = 0$, т.е. свободные проходы для частиц несвязанного водорода закрыты. Очевидно, в этом случае весь несвязанный водород переходит в связанное состояние. Параметры α и β таковы, что $\alpha \gg \beta$.

Для одномерного случая полная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial x} &= \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + J_{12} v^{(1)} + R_{12}, & \rho^{(1)} &= \rho^{(0)} + \rho_H^+, & \rho_H^+ &= m_H \cdot N^+ \\ \sigma^{(1)} &= \frac{E_0 E_H}{n_0 E_H + n^+ E_0} \varepsilon, & n_0 &= \frac{N_0}{N_0 + N_H^+}, & n^+ &= \frac{N_H^+}{N_0 + N_H^+}. \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho^{(2)} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial t} + J_{21} v^{(2)} + R_{21} & \rho^{(2)} &= \rho_H^- = m_H \cdot N^- \\ \tilde{p} &= p - p_0 \cong \rho_H^- c_H^2 = m_H N^- c_H^2 \\ \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho^{(0)} v^{(1)})}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \rho_H^+}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_H^+ v^{(1)})}{\partial x} &= J_{12} \sim \frac{\partial N_H^+}{\partial t} + \frac{\partial(N_H^+ v^{(1)})}{\partial x} = J_{12}/m_H \\ \frac{\partial \rho_H^-}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_H^- v^{(1)})}{\partial x} &= J_{21} \sim \frac{\partial N_H^-}{\partial t} + \frac{\partial(N_H^- v^{(1)})}{\partial x} = J_{21}/m_H \\ R_{12} &= -R_{21} = k \frac{\rho_H^-}{D(\varepsilon)} [v^{(2)} - v^{(1)}] \\ J_{12}/m_H &= J_{21}/m_H = \alpha N_H^- - \beta N_H^+ \end{aligned} \tag{16}$$

Полученная система уравнений (16) является полной и сильно нелинейной, поэтому ограничимся рассмотрением простейшего случая: статика при заданном одноосном растяжении - сжатии, когда первая (основная) компонента испытывает деформацию ε .

Основной интерес представляет значение напряжения σ . В случае отсутствия водорода в структуре материала, для линейно-упругого его поведения $\sigma_{st} = E \cdot \varepsilon_{st}$. При наличии последнего из-за изменения размеров проходных сечений $D(\varepsilon)$, происходит его перераспределение по структуре материала, т.е. из состояния несвязанного водорода переходит в связанное, что приводит к изменению эффективного модуля, а значит и самого

значения напряжения. Именно из уравнения состояния $\sigma = \sigma(\varepsilon, n^+(\varepsilon, x, t))$, которое можно представить в виде

$$\sigma = E_0 \varepsilon \left[1 - \frac{n^+}{n^+ + n^{(0)} E_H / E_0} \right], \quad (17)$$

видна существенная зависимость напряженного состояния от концентрации связанного водорода.

Сразу необходимо отметить, что понятие статического напряженного состояния достаточно условно и его необходимо отнести к несущей компоненте среды, т.е. к уравнению (6), т.к. движение второй компоненты определяется своей кинематикой. Иначе говоря, перестройка структуры материала на своем временном уровне обладает "своей" динамикой. Поэтому естественно искать решение поставленной задачи в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_{st} + \tilde{\varepsilon}(x, t), \quad v^{(1)} = 0 + \tilde{v}^{(1)}, \quad v^{(2)} = 0 + \tilde{v}^{(2)} \quad (18)$$

Здесь ε_{st} однородное статическое поле деформаций. Очевидно, что $N^+ = N^+(x, \varepsilon, t)$ может быть представлено в виде

$$N^+(x, \varepsilon_{st} + \tilde{\varepsilon}, t) = N^+(x, \varepsilon_{st}, t) + \frac{\partial N^+}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{st}} \tilde{\varepsilon}(x, t), \quad (19)$$

Естественно и напряжения σ представить в виде

$$\sigma = \sigma + \tilde{\sigma} = E_0 \varepsilon_{st} - E_0 \varepsilon_{st} \left(\frac{n^+}{n^+ + n^{(0)} E_H / E_0} \right) + O(\tilde{\varepsilon}) \quad (20)$$

Здесь специально выделены слагаемые с $\tilde{\varepsilon}$, подчеркивая тем самым, что есть индуцированные деформации, связанные с перестройкой внутренней структуры, порождающие напряжения $\tilde{\sigma}$.

Сложная зависимость $\sigma^{(1)}$ от деформации приводит первое уравнение (16) к виду

$$\frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \sigma^{(1)}}{\partial n_H^+} \left[\frac{\partial n_H^+}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial n_H^+}{\partial x} \right] = \rho^{(1)} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial t} + J_{12} v^{(1)} + R_{12} \quad (21)$$

Ограничиваясь первым приближением, (16) можно записать в виде

$$\frac{\partial \widetilde{\sigma}^{(1)}}{\partial x} = \rho^{(1)} \frac{\partial \widetilde{v}^{(1)}}{\partial t} + J_{12} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{st}} \widetilde{v}^{(1)} + R_{12} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{st}} - \frac{\partial \sigma_0}{\partial n_H^+} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{st}} \frac{\partial n_H^+}{\partial x} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{st}} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\sigma &= E_0 \varepsilon_{st} \left\{ 1 - \left[\frac{n^+}{n^+ + n^{(0)} E_H / E_0} \right] \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_{st}} \right\}, \\ \tilde{\sigma} &= E_0 \tilde{\varepsilon} \left\{ 1 - \left[\frac{n^+}{n^+ + n^{(0)} E_H / E_0} \right] \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_{st}} \right\}, \\ R_{12} \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_{st}} &= k \frac{\rho_H^-}{D(\varepsilon_{st})} v^{(2)}\end{aligned}\quad (23)$$

Второе уравнение в (22) служит для определения индуцированного поля деформаций $\tilde{\varepsilon}$ при известном из главного приближения слагаемом $\frac{\partial \sigma_0}{\partial n^+} \cdot \frac{\partial n^+}{\partial x} \Big|_{\varepsilon = \varepsilon_{st}}$.

Для второй компоненты имеем

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = k \frac{m_H N_H n_H^-}{D(\varepsilon_{st})} v^{(2)}, \quad p - p_0 = \tilde{p} = m_H N_H n_H^- c_H^2 \quad (24)$$

Здесь $\rho_H = m_H \cdot N_H$ - плотность водорода, N_H - общее число частиц водорода в элементарном объеме, n_H^- - концентрация несвязанного водорода, $n_H^- = N_H^- / N_H$, $N_H = N_H^- + N_H^+$.

Уравнение (24) приводится к виду

$$c_H^2 \frac{\partial n_H^-}{\partial x} = -k^* \frac{n_H^-}{D(\varepsilon_{st})} v^{(2)} \quad (25)$$

Уравнение (25) сходно с формулой Дарси, но имеет обобщенный коэффициент диффузии, зависящий от поля деформации ε_{st} .

Итак имеем

$$v^{(2)} = -\frac{1}{k^* n_H^-} \cdot c_H^2 \cdot D(\varepsilon_{st}) \frac{\partial n_H^-}{\partial x} \quad (26)$$

К указанным выше уравнениям необходимо добавить уравнение баланса числа частиц связанного и несвязанного водорода

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_H^+}{\partial t} &= \alpha n_H^- - \beta n_H^+ \\ \frac{\partial n_H^-}{\partial t} + \frac{\partial n_H^- v^{(2)}}{\partial x} &= -(\alpha n_H^- - \beta n_H^+)\end{aligned}\quad (27)$$

Уравнения (27) могут быть сведены к одному уравнению относительно n_H^+ , последнее с учетом (26) имеет вид

$$\frac{\partial^2 n_H^+}{\partial t^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial n_H^+}{\partial t} - A \cdot D(\varepsilon_{st}) \left[\beta \frac{\partial^2 n_H^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 n_H^+}{\partial t \partial^2 x} \right] = 0 \quad (28)$$

Здесь $A = c_H^2/kj$.

Уравнение (28) - уравнение смешанного типа. оно содержит слагаемые присущие гиперболическому уравнению, т.е. $\partial^2 n_H^+/\partial t^2$, $\partial^2 n_H^+/\partial x^2$, а также члены параболического вида $\partial n_H^+/\partial t$, $\partial^3 n_H^+/\partial t \partial^2 x$.

Последнее означает, что при детальном анализе нестационарной задачи, при задании финитного начального возмущения следует ожидать характерный фронт движения увеличения (или уменьшения концентрации связанного водорода), подвергающейся сильной дисперсии.

Рассмотрим возможное упрощенное решение поставленной задачи. Именно, для исходного уравнения (28) исследуем задачу при начальных условиях вида

$$\begin{aligned} n_H^+(0, x) = 0, \quad n_H^-(0, x) &= \frac{1}{2} \cdot \Psi^{(-)} \cdot \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \\ \dot{n}_H^+(0, x) &= \alpha \frac{1}{2} \cdot \Psi^{(-)} \cdot \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

Примем возможность существования решения в виде

$$n_H^+ = \frac{1}{2} q(t) \cdot \Psi^{(-)} \cdot \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (30)$$

где λ - характеристический размер внутренней структуры, а $q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{q} + \dot{q}(\alpha + \beta + G(\varepsilon_{st})) + \beta G(\varepsilon_{st}) q = 0, \quad (31)$$

решение которого имеет вид

$$q(t) = \frac{\alpha}{\alpha + G(\varepsilon_{st})} \cdot \Psi^{(-)} \cdot \left(e^{\beta \frac{G(\varepsilon_{st})}{\alpha + G(\varepsilon_{st})} t} - e^{-(\alpha + G(\varepsilon_{st})) t} \right) \quad (32)$$

$$G(\varepsilon_{st}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{c_H^2}{k} \cdot D(\varepsilon_{st}) \cdot \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

Важен следующий результат

$$\frac{\partial n_H^+}{\partial \varepsilon} = -\frac{1}{3} \frac{c_H^2}{k} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{st}} \frac{\alpha \Psi^{(-)}}{\alpha + G(\varepsilon_{st})} \quad (33)$$

Если $D(\varepsilon) = D_0 + D_1 \cdot \varepsilon$ и $D_1 < 0$, то происходит закрытие каналов, что способствует увеличению концентрации связанного водорода. (см.Рис.4)

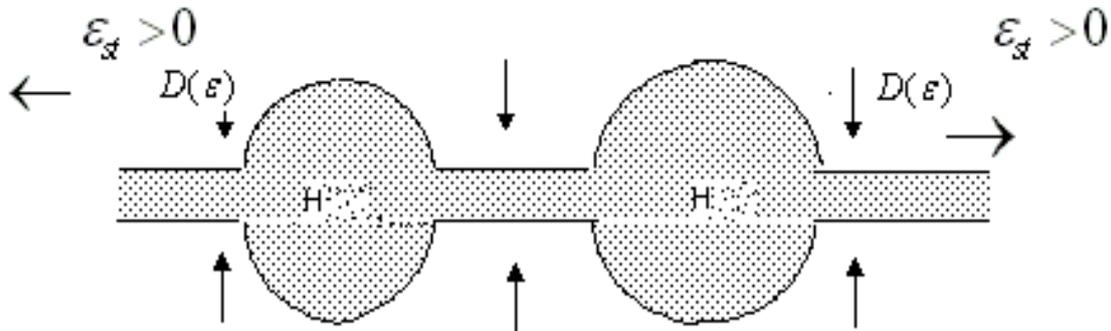


Рис. 4.

Можно получить достаточно упрощенную формулу

Примем следующие значения параметров $\beta \ll \alpha$, $\varepsilon_{st}^* = \frac{D_0}{D_1}$ - предельная концентрация для "закрытых" каналов, $\Psi^{(-)}$ - предельная концентрация связанного водорода.

$$\Psi^{(-)} \gg \kappa = \frac{\rho_H c_H^2}{\rho_0 c_0^2} \quad (35)$$

В частности, для стали:

$$\Psi^{(-)} \approx 10^{-6}, \quad \kappa \approx 10^{-7} \div 10^{-8},$$

для титана:

$$\Psi^{(-)} \approx 10^{-4}$$

Считая, что ε_{st} - однородное статическое поле деформаций, много больше индуцированных деформаций, связанных с перестройкой внутренней структуры, получим сравнительно простые формулы для уравнения состояния и условий потери устойчивости деформирования, характерного при разрушении.

$$\sigma_0^{(1)} = E_0 \cdot \varepsilon_{st} \cdot \frac{\kappa}{\frac{\alpha \Psi^{(-)}}{\alpha + D_0 - D_1 \varepsilon_{st}} + \kappa} \quad (36)$$

$$\left. \frac{\partial \sigma_0^{(1)}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = \varepsilon_1} = 0, \quad \varepsilon_1 \cong \varepsilon^* \cdot \left(1 - \sqrt{\alpha \cdot \frac{\Psi^{(-)}}{\kappa} \cdot \frac{k}{c_H^2 D_0} \lambda^2} \right)$$

Поведение концентрации "связанного" водорода при растяжении образца в зависимости от приложенной деформации показано на Рис.5-1. На Рис. 5-2 дано качественное представление потери устойчивости деформирования при достижении критической начальной деформации, т.е. разрушения.

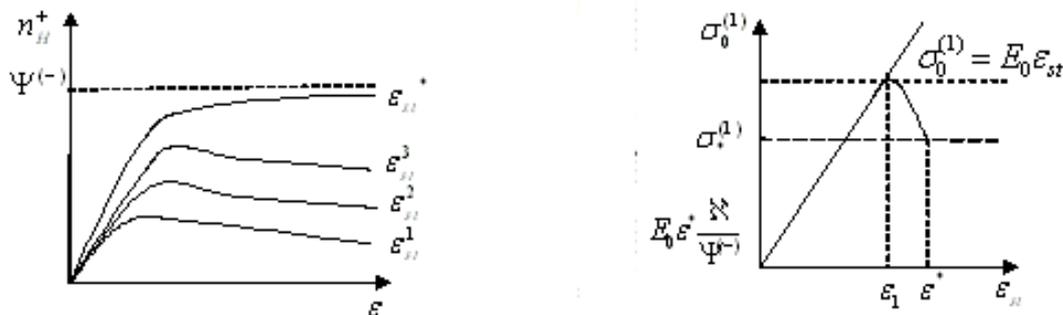


Рис. 5.

Заклучение. Таким образом построена модель, позволяющая описать кинетику водорода в металлах. Оценить его переход из подвижного в связанный в зависимости от напряженного состояния. И описать локализацию связанного водорода, приводящую в итоге к разрушению материала в местах локализации.

Литература

1. Krivtsov A.M., Morozov N.F. Anomalies in mechanical characteristics of nanometer-size objects.// Doklady Physics. Vol.40, No 11, 2001, pp.825-827.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. / "Наука", М.,1978.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. / "Мир", М., 1977.

РАСЧЕТ СКЛАДОК С ПЕРФОРИРОВАННЫМИ РЕБРАМИ

Кадисов Г.М., Завьялова Н.В.

(Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ), Омск, Россия)

Обсуждается возможность применения метода перемещений А.В. Александрова и метода компенсирующих нагрузок в задачах о напряженно-деформированном состоянии складчатых систем с перфорированными ребрами. Отмечаются особенности применения локальных взаимно уравновешенных воздействий в качестве компенсирующих нагрузок.

A NUMERICAL SOLUTION FOR HIPPED PLATE CONSTRUCTIONS WITH PERFORATED RIBS

Kadisov G.M., Zavyalova N.V.

(The Siberian automobile and highway academy, SibADI, Omsk, Russia)

The paper discusses the possibility of using the Alexandrov's method of displacement and method compensating loads for problems stress-strain state of hipped plate constructions with perforated ribs. The importance of application local mutually balanced effects as compensating loads is noted.

1. Введение. В строительстве широко используются конструкции, представляющие собой складчатые системы с перфорированной стенкой.

Расчёт таких систем в настоящее время остается актуальным. Для расчета складок проф. Александровым А.В. предложен метод перемещений с использованием ординарных тригонометрических рядов Фурье и точных решений теории упругости плоского напряженно-деформированного состояния и изгиба [1]. Решения в результате можно получить с любой заданной точностью.

В работе [2] приведена методика статического расчета складок с диафрагмами, где предложены взаимно уравновешенные системы неизвестных сил взаимодействия каждой диафрагмы со складкой. Эти неизвестные определяются из уравнений смешанного метода. Там же с использованием метода расширения заданной системы и метода компенсирующих нагрузок получено решение задачи по определению напряжений и перемещений в консольной складке. Компенсирующая нагрузка располагалась на расширенной системе за пределами заданной консольной складки.

В работе [3] модель складки Александрова А.В. дополнена поясными листами разной длины, что позволило создать модель складки со ступенчатым изменением вдоль пролета поперечным сечением и определить распределение напряжений в дополнительных листах. Кроме того, в этой работе получен спектр первых десяти собственных частот складки с диафрагмами и его зависимость от относительной жесткости стержневых элементов диафрагм.

Необходимо отметить, что одним автором многие годы разрабатывается и постоянно совершенствуется специализированное программное обеспечение по численной реализации метода перемещений применительно к расчету складчатых систем.

Ниже рассматривается применение этого же программного обеспечения с некоторыми дополнительно разработанными модулями к расчету балок, в стенках которых имеются вырезы.

2. Постановка задачи. Рассмотрим ниже расчет складок с пластинами, имеющими вырезы, используя известные методы расширения заданной системы и компенсирующих нагрузок [4]. Для прямоугольной пластины, имеющей вырез, в качестве расширенной системы принимается эта же пластинка без выреза, и представляется набором попарно жестко соединенных между собой узких сплошных пластинок. К расширенной системе кроме заданной нагрузки приложим в замкнутой области, совпадающей с вырезом, компенсирующую нагрузку. Компенсирующую нагрузку будем определять из условия, чтобы в расширенной системе нормальные и касательные напряжения на замкнутой контуре, совпадающим с границей выреза, при совместном действии внешней нагрузки и компенсирующих сил равнялись нулю. Тогда напряженное и деформированное состояния расширенной системы за исключением замкнутой области будут такими же, как и в заданной пластинке.

Поскольку замкнутый контур оказывается тогда свободным от напряжений, то компенсирующая нагрузка, действующая в замкнутой области будет взаимно уравновешенной. Заметим, что и в известном методе расширения заданной системы и в методе компенсирующих нагрузок это последнее условие не ставилось [4].

Если компенсирующую нагрузку выбрать произвольной, неуравновешенной, то ввиду того, что в процессе решения будет обеспечено равенство нулю напряжений только в фиксированных точках замкнутого контура, на отрезках между ними для уравнивания компенсирующей нагрузки будут возникать значительные напряжения, которые для пластинки с вырезом будут представлять уже дополнительную нагрузку. В результате напряженное состояние пластинки с вырезом не будет соответствовать заданной нагрузке. В целом, результаты будут неправильными.

Необходимо отметить и следующее обстоятельство. В связи с представлением заданной и компенсирующей нагрузки, также как и искомого решения в виде перемещений и напряжений, в тригонометрических рядах, выбор типа взаимно уравновешенной нагрузки и ее положение на узловых линиях внутри замкнутой области, соответствующей вырезу, следует производить с учетом явления Гиббса. Дело в том, что в локальных зонах, содержащих точки с сосредоточенными нагрузками или с их скачкообразным изменением, ряды Фурье, аппроксимирующие такие нагрузки, при вычислениях сильно флуктуируют. При этом флуктуации увеличиваются по мере приближения к точке разрыва аппроксимируемой нагрузки. Напряжения, определяемые такими рядами, ведут себя также.

3. Основные уравнения. Основным условием при определении напряженного и деформированного состояния в пластинке с вырезом является равенство нулю нормальных и касательных напряжений на границе выреза:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2m} \sigma_{ik}^{\Gamma} \cdot X_k + \sigma_{iq}^{\Gamma} = 0, \\ \sum_{k=1}^{2m} \tau_{ik}^{\Gamma} \cdot X_k + \tau_{iq}^{\Gamma} = 0 \end{cases} \quad i(1...m), \quad (1)$$

где $\sigma_{ik}^{\Gamma}, \tau_{ik}^{\Gamma}$ - нормальные и касательные напряжения в i -ой точке контура при действии k -ой компенсирующей нагрузки, $\sigma_{iq}^{\Gamma}, \tau_{iq}^{\Gamma}$ - нормальные и касательные напряжения в i -ой точке контура при действии внешней силы q .

Напряжения определяются суммированием амплитуд каждой гармоники.

$$\begin{aligned}\sigma_{ik} &= \sum S_i^{(n)} \cdot z_k^{(n)}; \\ \sigma_{iq} &= \sum S_i^{(n)} \cdot z_q^{(n)},\end{aligned}\tag{2}$$

где – $S_i^{(n)}$ - амплитуда напряжений при единичных амплитудах смещений n - й гармоники, $z_k^{(n)}$, $z_q^{(n)}$ – амплитуды перемещений узловых линий соответственно от $X_k=1$ и от внешней нагрузки q .

4. Типы компенсирующей нагрузки. Компенсирующая нагрузка, действующая на расширенную систему в зоне выреза, как сказано выше, должна быть уравновешенной. В качестве компенсирующих нагрузок могут быть приняты группы сосредоточенных сил, моментов, распределенных нагрузок. Каждая группа должна представлять взаимно уравновешенную систему сил. Количество компенсирующих нагрузок равняется количеству обнуляемых напряжений и усилий в фиксированных точках контура выреза. Поскольку в модели Александра нагрузка действует на узловых линиях складки, то и компенсирующая нагрузка должна воздействовать на них.

Например, это могут быть две противоположно направленные и равные по величине сосредоточенные силы, действующие вдоль узловой линии и удаленные друг от друга на достаточно малом расстоянии, или два сосредоточенных момента. Аналогично можно создать взаимно уравновешенные системы из распределенных на ограниченных отрезках поперечных или продольных нагрузок и т.п.

Ввиду того, что разложение разрывных (ступенчатых) функций в ряды Фурье сопровождается явлением Гиббса, группы компенсирующей нагрузки должны располагаться на некотором удалении от контурных точек, в которых обнуляются напряжения.

5. Численные примеры. В качестве первого примера применения изложенной методики рассмотрим двутавровую балку, имеющую шарнирное опирание по торцам. Длина пролета $L=20$ м, высота $H=5.5$ м, ширина полок $B=1,8$ м, толщина стенки $\delta=0,1$ м, толщина полок $\delta_n=0,16$ м. Стенка имеет прямоугольный вырез шириной $b=4,0$ м, высота выреза $h=2,75$ м. На верхней полке по оси двутавра действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q=1$ кН/м. Предполагалось, что материал работает только в упругой стадии.

Данную конструкцию разбиваем на 14 элементов в виде узких длинных полос и вводим 15 узловых линий (рис.1.). Ширина элементов стенки равна 0,55 м.

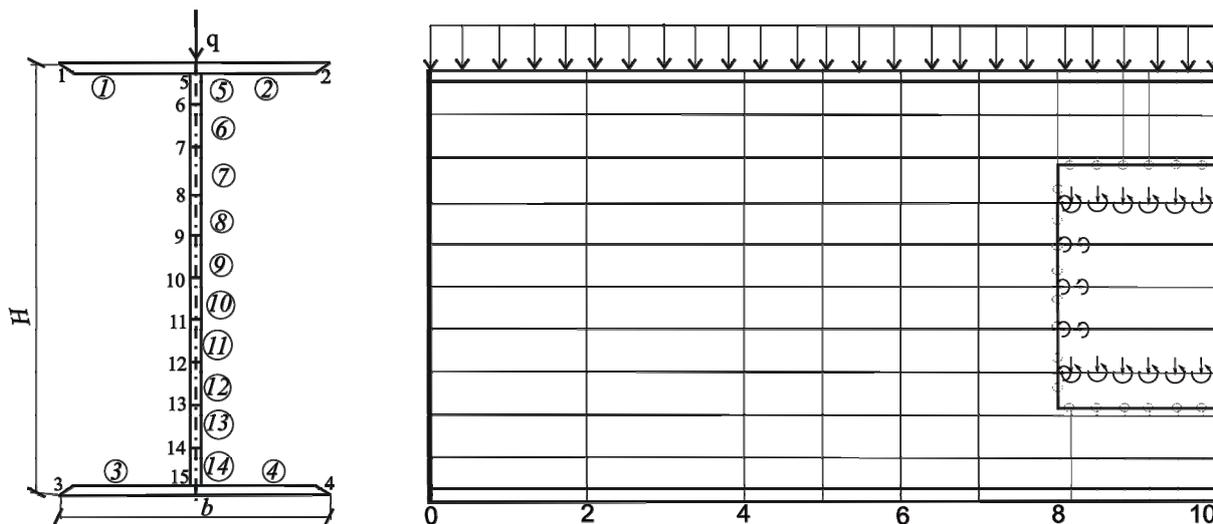


Рис. 1.

На каждой кромке выреза назначено 12 фиксированных точек по горизонтали и 8 по вертикали. Эти точки равномерно распределены по вертикальной кромке с шагом $h/9$ и горизонтальной с шагом $b/13$. Компенсирующая нагрузка, представленная сосредоточенными изгибающими моментами, горизонтальными и вертикальными единичными силами, воздействует на 5 узловых линиях в зоне выреза. Для решения системы уравнений (1) необходимо найти 80 неизвестных значений компенсирующей нагрузки. Компенсирующую нагрузку прикладываем так, чтобы эффект действия силы не выходил за пределы заданной области и напряженно-деформированное состояние расширенной и заданной систем совпадали. Схема приложения этой нагрузки приведена на рис.1. В результате решения системы уравнений были получены значения компонентов компенсирующей нагрузки и вычислены значения напряжений. По полученным результатам строим эпюры нормальных и касательных напряжений вблизи выреза и в удаленных сечениях. На рис.2 и рис.3 показаны эпюры нормальных напряжений σ_x в верхнем и нижнем элементах стенки. Построенные эпюры напряжений соответствуют эпюрам напряжений для сплошных складок с вырезом. В 5 верхнем элементе стенки наблюдается сжатие, а в 14 нижнем - растяжение. В фиксированных 40 точках контура напряжения равны нулю.

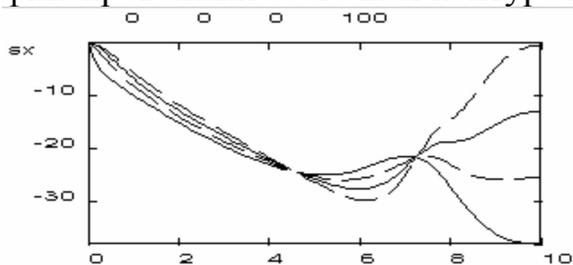


Рис. 2.

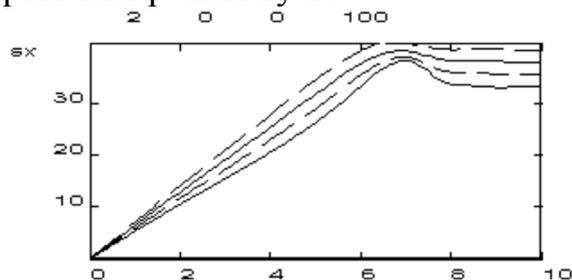


Рис. 3.

На рис. 4 и рис. 5 показаны эпюры напряжений σ_y .

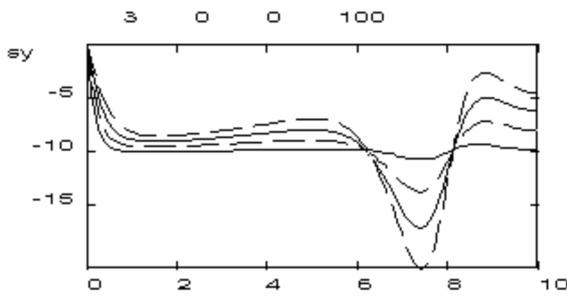


Рис.4.

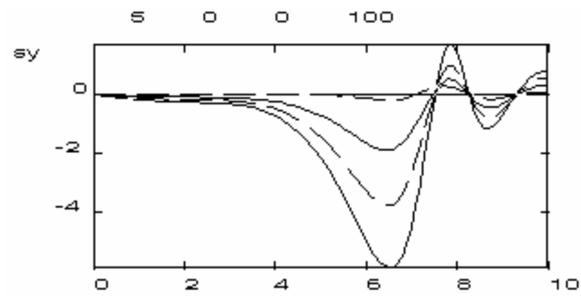


Рис. 5.

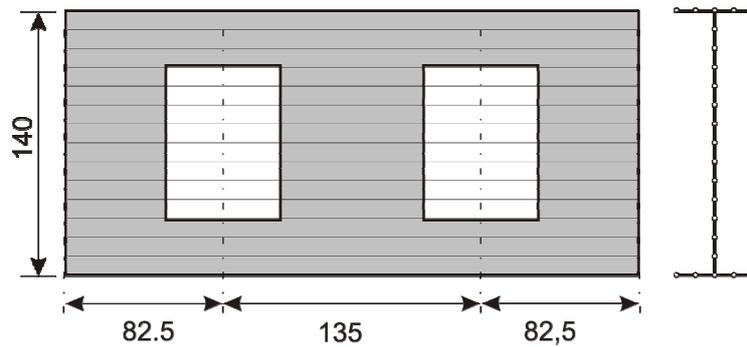


Рис. 6.

В качестве второго примера приведем результаты расчета нормальных напряжений в двутавровой балке пролетом 3.0 м и высотой 1.40 м с двумя симметричными относительно середины пролета прямоугольными вырезами, шарнирно опертой по торцам и нагруженной на верхней фибре равномерно распределенной нагрузкой, интенсивностью $q = 1.0$ кН/м, модуль упругости $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Толщина всех элементов, полок и стенки, равна 0.04 м. Высота и ширина каждого выреза соответственно равны 82 см. и 60 см. Остальные размеры в см. показаны на рис. 6. Компенсирующая нагрузка представлена сосредоточенными силами и моментами, действующими в точках, удаленных от горизонтальных кромок выреза на 11 см., от вертикальных – на 1 см. Всего компенсирующих нагрузок принято 112 . В расчете учитывалась 3201 гармоника. На рис.7 показаны эпюры нормальных напряжений σ_x в верхнем элементе стенки, на рис.8 – в нижнем. Наибольшие сжимающие напряжения оказались на верхней фибре верхнего элемента, на его нижней кромке в зоне, примыкающей к середине пролета, наблюдаются растягивающие напряжения (Рис.7). В нижнем элементе стенки, как видно из рис.8, верхняя фибра испытывает сжимающие напряжения, нижняя – растяжение.

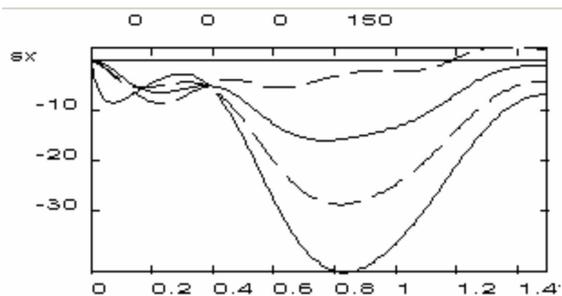


Рис. 7.

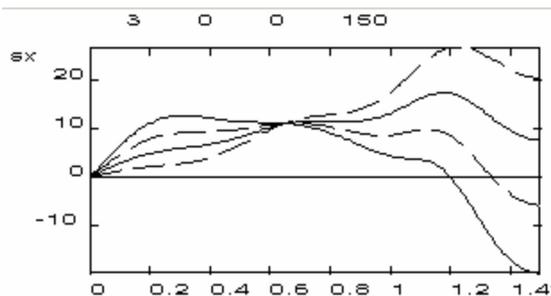


Рис.8.

Литература

1. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Расчет сооружений с применением вычислительных машин // М.: Стройиздат, 1964.-380с.
2. Кадисов Г.М. Динамика складчатых систем при подвижных нагрузках: Монография. Омск: Изд-во СибАДИ, 1997.
3. Кадисов Г.М. К вероятностному расчету пролетных строений мостов.// Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте. Сборник статей./ПГУПС.-СПб, 2004.–с.173 – 180.
4. Безухов П.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. - М.: Высшая школа, 1974.—198с.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СКЛАДЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ

Карпов В.В., Масленников А.М.

(Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Россия)

MATHEMATICAL MODEL FOLDED SHELL

Karpov V.V., Maslennikov A.M.

(St.-Petersburg state university of architecture and civil engineering , Russia)

Приводится пример построения математической модели складчатой оболочки из плоских плит, подкрепленных ребрами. Созданная модель реализована при расчете оболочки вариационным методом. Расчет этой же оболочки выполнен методом конечных элементов (МКЭ). Дано сравнение числовых результатов. Показано, что вариационный метод дает результаты того же порядка, как и МКЭ.

Конструкции в виде складчатых оболочек из плоских плит, вследствие наличия переломов в двух направлениях в местах стыка плит, обеспечивают значительную жесткость конструкции. При этом технология их изготовления существенно проще, чем криволинейных оболочек. Расчет складчатой оболочки типа, изображенной на рис. 1, с помощью существующих вычислительных комплексов вызывает большие

затруднения. Ниже расчет произведен вариационным методом и МКЭ, реализованным с помощью системы MatLAB.



Рис. 1.

При реализации вариационного метода, т.е. метода непрерывной аппроксимации (метод Ритца) необходимо, чтобы кривизны поверхности были единичными соотношениями для всей области, занимаемой оболочкой, и эти соотношения не содержали квадрата дельта-функции. Поэтому в начале рассматривается оболочка с волнистой формой поверхности, где изменение кривизн задается с помощью единичных столбчатых функций. Затем предельным переходом, используя метод вариационных предельных преобразований [1], получают соотношения для оболочек с изломом срединной поверхности.

Так, для пологих оболочек прямоугольного плана эти соотношения будут иметь вид (для линейной задачи)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = \iint_{00}^{ab} \left\{ N_x W \sum_{j=1}^m \theta_j \delta(x - x_j) + N_y W \sum_{i=1}^n \theta_i (y - y_i) + \right. \\ \left. + \mu \frac{EhW^2}{1-\mu^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \theta_j \delta(x - x_j) \theta_i (y - y_i) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

θ_j, θ_i - углы изломов срединной поверхности в направлении осей x и y соответственно;

m, n - число изломов в этих направлениях;

$\delta(x - x_j), \delta(y - y_i)$ - дельта-функции;

a, b - размеры оболочки вдоль осей x и y ;

W - прогиб оболочки;

N_x, N_y - нормальные усилия в направлении осей x и y .

Суть проведенных преобразований заключается в том, чтобы в функционале полной энергии деформации не было бы квадратов дельта-

функций. Таким образом, кривизны оболочки можно взять в виде (в направлении осей x и y)

$$\bar{K}_x = K_x - \sum_{j=1}^m \theta_j \delta(x - x_j), \quad \bar{K}_y = K_y - \sum_{i=1}^n \theta_i \delta(y - y_i), \quad (2)$$

где K_x, K_y - кривизны гладкой части оболочки.

Если рассматривать оболочки в виде тора с изломом срединной поверхности вдоль образующей (в направлении оси x), то для i -го сектора с углом разворота x_k и радиусом r будем иметь выражения для параметров Ляме A, B и кривизн K_x, K_y

$$B = B_i = r (\sin(x + \alpha) - \sin \alpha) + d_i, \quad d_i = (i - 1) d_0 + d_1, \\ d_0 = r (\sin(x_k + \alpha) - \sin \alpha), \quad K_y = \frac{\sin(x + \alpha)}{r (\sin(x + \alpha) - \sin \alpha) + d_i}, \quad (3)$$

$$A = r, \quad K_x = \frac{1}{r} - \theta \delta(x - x_k).$$

Здесь

α - угол поворота сектора относительно оси вращения;

d_1 - расстояние, на которое образующий сектор смещен относительно оси вращения.

Если от сферической системы координат перейти к полярной на плоскости основания, приняв

$$\xi = r (\sin(x + \alpha) - \sin \alpha) + d_i, \quad d \xi = r dx, \quad \cos(x + \alpha) \approx 1,$$

то получим выражение функционала полной энергии деформации оболочки в виде

$$\mathcal{E} = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1\gamma_{xy}^2 + \frac{h^2}{12} \times \right. \\ \left. \times (\chi_1^2 + 2\mu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1\chi_{12}^2) - 2(1-\mu^2) \frac{q}{Eh} W \right] \xi d\xi dy \quad (4)$$

где для линейного варианта

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial \xi} - K_x W, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{\xi} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{\xi} U - K_y W,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\xi} V, \quad \chi_1 = -\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2},$$

$$\chi_2 = -\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \chi_{12} = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial y} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial W}{\partial y}, \quad (5)$$

$$K_x = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{m-1} \theta \delta(\xi - \xi_{i+1}), \quad \xi_i = d_i, \quad K_x^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r} \sum_{i=1}^{m-1} \theta \delta(\xi - \xi_{i+1}),$$

$$K_y = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{d_1 - r \sin \alpha}{\xi} \delta(\xi - \xi_1) - \sum_{i=2}^m \frac{d_0}{\xi} \delta(\xi - \xi_i) \right].$$

Здесь $\delta(\xi - \xi_i)$, $\tilde{\delta}(\xi - \xi_i)$ дельта-функция и единичная функция; m — общее число секторов.

Неизвестные функции переменной берутся в виде

$$U = \sum_{I=1}^N U(I) X_I(\xi, y), \quad V = \sum_{I=1}^N V(I) Y_I(\xi, y), \quad W = \sum_{I=1}^N W(I) Z_I(\xi, y) \quad (6)$$

и после подстановки их в функционал полной энергии деформации и выполнения процедуры метода Ритца получается система алгебраических уравнений для определения числовых параметров $U(I), V(I), W(I)$; ($X_I(\xi, y), Y_I(\xi, y), Z_I(\xi, y)$ - известные аппроксимирующие функции, удовлетворяющие заданным краевым условиям).

Приведенные выше соотношения реализованы и в МКЭ; но в явном виде они распространяются на отдельные конечные элементы. Полный функционал для всей системы представляется суммой отдельных функционалов. Отличие состоит в выборе самих функций для отдельных элементов. Они, как правило, представляются полиномами соответствующей степени. Будет отсутствовать и выражение типа (2), так как изломы поверхности в МКЭ учитываются дискретно через матрицу преобразования координат. Ниже, в качестве примера, приведены функции (6) для четырехугольного элемента полой оболочки.

$$W = f_1 + x f_2 + y f_3 + x^2 f_4 + y^2 f_5 + xy f_6 + x^2 y f_7 + \\ + x y^2 f_8 + x^3 f_9 + y^3 f_{10} + x^3 y f_{11} + x y^3 f_{12};$$

$$U_0 = f_{13} + x f_{14} + xy f_5 + y f_{16} - 0,5 y^2 f_{19};$$

$$V_0 = f_{17} + y f_{18} + xy f_{19} + x f_2 - 0,5 x^2 f_{15}.$$

Рассматривается квадратная в плане оболочка со стороной $a = 6$ м и толщиной $h = 0,005$ м, состоящая из 36 ребристых плит размером 0,5 м x 2 м. Вдоль оси y расположено 3 плиты длиной 2 м каждая, а вдоль оси x - 12 плит длиной 0,5 м каждая. По контуру оболочка закреплена шарнирно—подвижно. Вдоль оси x находится 11 изломов срединной поверхности с одинаковым углом излома $\theta_j = 0,06065$ радиан, а вдоль оси y - 2 излома с углом $\theta_j = 0,24391$ радиана. Материал конструкции — железобетон с $E = 2,5 \cdot 10^4$ МПа и $\mu = 0,167$. На конструкцию действует равномерно—распределенная по площади оболочки нагрузка, составляющая с собственным весом конструкции $q = 4,3 \cdot 10^{-3}$ Мпа [2].

Если для расчетов применить метод Бубнова–Галеркина к уравнениям в смешанной форме, то получим $W_{\max} = 2,14 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma_{\max} = -3,224$ МПа. При расчете МКЭ получено $W_{\max} = 2,72 \cdot 10^{-3}$ м, $\sigma_{\max} = -3,22$ МПа в точке 1 (прогибы показаны штриховой линией на рис. 2). Результаты эксперимента согласуются с полученными значениями.

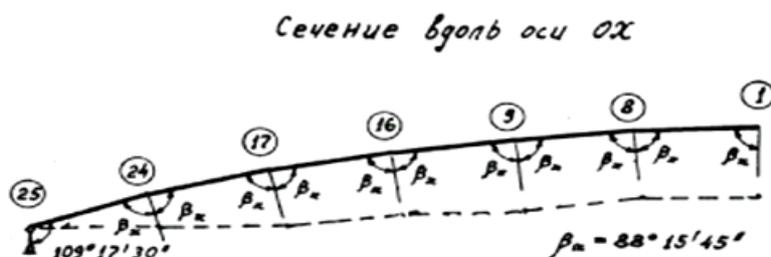


Рис. 2.

Литература

1. Карпов В.В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решений. Изд-во АСВ; СПбГАСУ. – М.; СПб, 1999. –154с.
2. Масленников А.М. Использование идей метода конечных элементов при проектировании комбинированных конструкций (на словацком языке). Строительный журнал Словацкой АН, Братислава, 1973, №12. С.893-910.

ПРОГРАММА РАСЧЁТОВ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ «ЗЕНИТ-95». НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ

Катилина Н.Н., Курков С.В.

(ООО НТП «ДИП», г. Санкт-Петербург, Россия)

Программа «Зенит-95», разработанная ООО НТП «ДИП», предназначена для решения следующих задач расчёта конструкций:

- определение деформаций и напряжений при действии статических нагрузок (линейная и нелинейная статика);
- анализ начальной устойчивости;
- определение параметров движения, деформаций и напряжений при динамических переходных процессах (удары, действие сейсмических нагрузок и т.п.) в линейной и нелинейной постановке;
- расчет частот и форм собственных колебаний;
- расчёт реакций на сейсмические воздействия линейно-спектральным методом;
- расчет амплитуды вынужденных колебаний;
- расчет параметры процессов теплопередачи при стационарных и нестационарных процессах;
- совместный расчёт температур и напряжений;

- расчёт стационарных и нестационарных процессов течения жидкости в трубопроводах и гидравлических системах;
- расчёт отклика на сейсмические воздействия;
- анализ акустических полей;
- определение инерционных характеристик.

Максимальный объём решаемых задач определяется возможностями используемой техники. К настоящему моменту имеется опыт решения задач для моделей, содержащих несколько миллионов узлов.

Программа имеет индивидуальные отличия как по составу библиотеки элементов, так и, практически, в каждой из реализуемых задач.

Решение систем линейных алгебраических уравнений, используемое, практически, во всех алгоритмах программы, возможно двумя методами – методом Гаусса и методом сопряжённых градиентов. Последний предпочтительнее для больших задач. Кроме того, вариант метода сопряжённых градиентов реализованный в программе, обеспечивает возможность решения некоторых задач для вырожденных матриц жёсткости, в частности решение задач определения перемещений при линейном статическом анализе для моделей, нагруженных уравновешенной системой сил при отсутствии закреплений. Это свойство противоречит каноническому положению метода конечных элементов о необходимости закрепления модели, однако исключительно полезно при задании граничных условий при выделении фрагмента из конструкции. Здесь можно обойтись только силовыми граничными условиями, которые гораздо легче подобрать, нежели кинематические.

Интегрирование уравнений движения по времени при решении задач динамики выполняется прямым интегрированием уравнений движения неявными безусловно-устойчивыми методами, что обеспечивает подавление высокочастотных составляющих решения и позволяет выбирать шаг интегрирования по времени исходя только из требуемой точности воспроизведения исследуемых процессов не заботясь об устойчивости вычислений. При динамическом анализе для всех видов воздействий и кинематических возмущений возможно задание практически любого закона изменения во времени.

Моделируется поведение изотропных, ортотропных и анизотропных материалов. Имеется возможность расчёта армированных элементов конструкций.

Расчёт напряжений и деформаций в модели для изотропных материалов может выполняться с учётом геометрической и физической нелинейности. Моделирование физически нелинейных свойств материала процессов осуществляется в рамках теории пластического течения. Деформирование материала рассматривается вплоть до разрушения, после чего, разрушенные элементы исключаются из рассмотрения. Это позволяет моделировать аварийные ситуации.

Одним из наиболее важных отличий программы от аналогов является возможность моделирования динамики систем, представляющих собой механизмы, т.е. системы, элементы которых совершают большие пространственные кинематические перемещения и одновременно испытывают упругие и пластические деформации.

Геометрическая нелинейность предполагает как учёт больших перемещений элементов модели объекта, так и учёт изменения его структуры вследствие соударений звеньев, разрушения элементов или появления новых элементов в модели. В качестве примеров реализованных в программе задач, где необходимо учитывать появление новых элементов, может служить задача моделирования процесса сварки, где по мере прохождения подвижной тепловой нагрузки, имитирующей действие сварочной дуги, появляются новые элементы, описывающие свойства сварного шва. Другой задачей, может служить задача определения напряжений в процессе строительства железобетонных сооружений, когда по мере нанесения новых слоёв бетона в ранее сформированных слоях возникают начальные напряжения.

Расчёт частот и форм собственных колебаний выполняется на основе известного метода итераций в подпространстве.

Расчёт реакций на сейсмические воздействия может выполняться как линейно-спектральным методом, так и динамическим, при котором рассматривается динамический процесс в конструкции, вызванных действием синтезированных по заданным спектрам акселерограмм. Последнее важно для анализа нелинейных систем, в структуре которых присутствуют опоры с трением, неудерживающие связи, контактные взаимодействия и т.п., так расчёт для таких систем можно выполнить только динамическим методом, т.е. прямым интегрированием уравнений движения.

Алгоритмы анализа акустических полей ориентированы на решение задач дефектоскопии – поиска мест локализации источников эмиссии (дефектов) и определения мест эффективного расположения акустических датчиков. Для определения мест локализации источников эмиссии в процессе разработки программы предложен и реализован метод временных диаграмм. Сущность метода заключается в следующем. Для заданных точек расположения акустических датчиков определяются временные диаграммы - узловые значения времен достижения акустической волны при расположении источника в месте расположения датчика. Затем, по определённым экспериментально временным задержкам прихода сигнала к датчикам определяется суммарная диаграмма, показывающая место наиболее вероятного расположения источника. Метод имеет определённые перспективы для создания систем безопасности, регистрирующих акустические сигналы характерные для состояний предшествующих разрушению элементов, или нехарактерных для

нормальной работы объекта внешних воздействий. При наличии модели объекта с временными диаграммами акустических датчиков метод позволяет быстро определить положение источника сигнала.

Задачи расчёта процессов теплопередачи и механики возможно решать как совместно, так и последовательно, используя результаты расчёта температур в задачах расчёта напряжений и деформаций. В последнем случае, поля температур, полученные в результате расчёта тепловых процессов, автоматически используются для определения температурных напряжений при расчёте напряжений и деформаций.

Возможность совместного решения тепловых и механических задач особенно важна при рассмотрении гидромеханических систем, в которых имеет место теплообмен между рабочей жидкостью и стенками трубопроводов. Условия теплообмена зависят от скорости движения жидкости. Вязкость жидкости, а, следовательно, и скорость её движения, зависят от температуры. Это требует совместного решения задач механики и теплофизики, что и реализовано в программе.

Библиотека элементов программы содержит следующие группы конечных элементов: объёмные конечные элементы, пластины, стержневые элементы, контактные элементы, элементы механизмов, элементы гидравлических и пневматических схем, логические элементы систем автоматического управления, виртуальные кинематические ограничения.

Объёмные, стержневые конечные элементы, а также пластины, отличаются от традиционных тем, могут использоваться в геометрически нелинейных задачах, а также тем, что при учёте физической нелинейности позволяют учесть возможность разрушения элемента.

Для стержневых элементов обеспечена возможность расчёт характеристик сечений для произвольных сечений. Имеется, также, библиотека типовых сечений, в которую входят стандартные профили и их сочетания. Стержневые элементы трубчатого сечения позволяют производить расчёт деформаций и напряжений с учётом действия внутреннего и внешнего давлений, что делает их удобными при расчёте трубопроводов. Кроме того, для криволинейных элементов предусмотрен учёт концентраций напряжений в соответствии с нормами, действующими для газопроводов.

Библиотеки элементарных механизмов (кулисный механизм, элемент с изменяемой длиной, контактные точки и поверхности,...), элементов гидро- и пневмоприводов (трубопроводы, цилиндры,...), логических элементов систем автоматического управления, а также виртуальные кинематические ограничения выделяют программу из аналогов, значительно расширяя класс моделируемых объектов. К последним относятся плоские, цилиндрические, конические и сферические поверхности, ограничивающие перемещения узловых точек при

выполнении условий контакта. С точки зрения математической реализации, эти элементы занимают промежуточное положение между контактными и редуцирующими элементами. Их разновидностью являются связующие элементы, имитирующие крепёжные элементы в сборках. Использование элементов этой группы позволяет значительно сократить число узлов и элементов модели при достаточно высоком уровне точности моделирования, так как сохраняются основные свойства элементов – учёт податливости резьбового соединения, возможность контакта цилиндрической части шпильки с внутренней поверхностью отверстия и возможность учёта потери контакта части поверхностей гайки и фланца при изгибе шпильки. Распределение напряжений и перемещений в области крепёжных элементов в этом случае мало отличается от распределений, полученных на подробной модели, в которой все крепёжные элементы представлены объёмными конечными элементами.

При решении задач распространения тепла можно задать следующие виды граничных условий: источники тепла, конвективный теплообмен, теплообмен излучением. Эти условия могут задаваться в узле, по линии и поверхности. Тепловыделение может быть объёмным.

Возможно задание следующих видов механических нагрузок: сосредоточенные узловые силы и моменты, погонные (распределённые по длине) нагрузки, давления, распределённые по массе силы, силы сопротивления движению, подвижные нагрузки, силы взаимодействия с воздушной (ветер) и водной средой (сила Архимеда, сопротивления движению, волновые нагрузки).

В качестве кинематических граничных условий могут задаваться: закрепления по осям Декартовой и в цилиндрических системах координат, узловые перемещения, скоростей и ускорения, опоры с трением.

Важным видом кинематических граничных условий является возможность согласования сеток элементов, построенных с разным шагом, или редуцирование – связь значений параметров в редуцирующих и редуцируемых узлах. Полагается, что параметры (перемещения, температуры...) редуцируемых узлов выражаются через параметры редуцирующих через функции формы. Реализовано два основных вида редуцирования – по линии и по поверхности. В первом случае редуцируемый узел лежит на прямой между двумя редуцирующими узлами. Во втором – на поверхности, ограниченной четырёхугольником с редуцирующими узлами в вершинах. Этот тип условий позволяет согласовывать сетки элементов с разным шагом без использования вырожденных конечных элементов, а также стыковать элементы различных типов. Опытным установлено, что в большинстве случаев редуцирование при сгущении сетки даёт гораздо лучший с точки зрения точности и сходимости результат, чем использование вырожденных (треугольных) элементов.

Программа реализована в среде Windows-98/2000/XP и имеет стандартный Windows-интерфейс: выведенная программой информация может экспортироваться в другие Windows-программы (Word, Exel, Paint и др.).

В программе имеется удобный многофункциональный графический редактор, обеспечивающий возможность эффективного построения моделей.

Библиотека параметризованных фрагментов, имеющаяся в программе, обеспечивает возможность автоматизированного формирования и включения в модель часто повторяющихся фрагментов, для которых указываются конкретные геометрические параметры. Библиотека может пополняться пользователем.

Обеспечена возможность импорта графических данных из AUTOCAD (DXF - файлы), файлов STEP- и IGES- форматов, а также исходных данных для программ ANSYS, COSMOS/M, NASTRAN.

Обеспечены самые разнообразные возможности представления и контроля исходных данных и результатов расчёта

Новыми возможностями, отличающими современную версию программы, являются: возможность совместного решения задач теплофизики и механики, возможность анализа начальной устойчивости конструкций, возможность анализа акустических полей, возможность синтеза акселерограмм при динамическом расчёте на сейсмические воздействия, возможность расчёта параметров процессов теплопередачи путём лучистого теплообмена с учётом видимости и затенения поверхностей, возможность задания нагрузок вызванных воздействием водной среды, появление в библиотеке элементов автоматического управления и специальных контактных элементов, возможность импорта графических данных в файлах STEP- и IGES- форматов.

К настоящему времени имеется значительный положительный опыт эксплуатации программы на предприятиях аэрокосмической, авиационной, судостроительной, машиностроительной, строительной отраслях, а также в области атомного энергомашиностроения.

Программа аттестована в Госатомнадзоре РФ по задачам расчёта напряжений и деформаций (аттестационный паспорт № 148 от 20.02.03 г) и теплофизическим задачам (аттестационный паспорт № 200 от 21.06.05 г).

Литература

1. Курков С.В. Метод конечных элементов в задачах динамики механизмов и приводов. -Спб.: Политехника, 1991.-224с.-ISBN 5-7325-0176-2
2. Курков С.В. Применение метода конечных элементов для динамического анализа геометрически нелинейных систем. Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: доклады XVII международной конференции. Доклады. -СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999.-324с. ISBN 5-7997-0159-3

3. Курков С.В. Программный комплекс расчёта динамики и прочности сложных нелинейных физически неоднородных механических систем «Зенит-95». Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: доклады XVIII международной конференции. Доклады. -СПб.: НИИХ СПбГУ, 2000.-324с. ISBN 5-7997-0159-3.
4. Курков С.В. Особенности решения контактных задач методом конечных элементов при больших перемещениях. Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: доклады XVIII международной конференции. Доклады. -СПб.: НИИХ СПбГУ, 2000.-324с. ISBN 5-7997-0159-3.
5. Курков С.В. Моделирование динамических процессов в гидро- и пневмоприводах в программном комплексе «Зенит-95». Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: доклады XIX международной конференции. Доклады. СПб.: НИИХ СПбГУ, 2001.-324с. ISBN 5-7997-0159-3.
6. С.В. Курков, Н.Н. Катилина. Универсальная программа расчётов конструкций методом конечных элементов «Зенит-95». Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Труды XX международной конференции. СПб: 24 – 26 сентября, 2003 г. ISBN 5-94158-054-1.

ЗАДАЧА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА КРУГЛОЙ УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕАССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ТЕЧЕНИЯ

Курс Ю.

(Таллинский Технический Университет, Эстония)

Рассматриваются шарнирно-опертые круговые пластины кусочно-постоянного профиля нагруженные равномерно распределенной динамической нагрузкой. Учитывается изотропное упрочнение материала. Цель задачи — определить параметры пластины таким образом, чтобы объем ее был минимальным, если конечный прогиб в центре задан, задана также минимальная толщина. Используется условия текучести Треска и новый уточнённый метод неассоциированного закона течения.

MINIMUM WEIGHT PROBLEM OF CIRCULAR HARDENING PLATES USING NONASSOCIATED YIELD LAW

Kirs J.

(Tallinn University of Technology, Estonia)

1. Introduction. The optimization of dynamically loaded plastic structures have been studied for many years already, but most of them using the rigid-plastic model of plasticity. The hardening of material was taken into account in this field by J.Kirs. In [1] the minimum weight problem of simply supported circular plates was discussed considering the linear model of isotropic hardening. Residual deflections in centre of plate were prescribed, the function of generalized bending line was taken simply $f(x) = 1 - x^2$. In [2] the minimum weight problem of built-in circular plates, subjected to dynamic loading were

studied. Tresca yield condition was employed, but the new method of non-associated yield law was employed only in central part of plate. *In this paper* the minimum weight problem of circular hinged plates, subjected to dynamic loading and considering the linear isotropic hardening is studied. Tresca yield condition is employed using the new improved method of non-associated yield law.

2. Basic equations and assumptions. Let us consider a plastic circular plate, hinged around the outer perimeter. The plate of radius R has piece-wise constant thickness. In central part the thickness is $2H_1$, in outer part $2H_2$. Thickness changes at the coordinate $r = r_1$. The plate is subjected to uniform pressure load P , which is rapidly and monotonously decreasing according to formulae

$$P = P_0(1 - \tau/\tau_1) \text{ if } 0 \leq \tau \leq \tau_1; \text{ and } P = 0 \text{ if } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_f. \quad (1)$$

where τ is time; P_0 — prescribed constant; τ_f — end of movement. Let us name the first part of deformation process, when $P > 0$, as a *I* phase. The following part, when $P = 0$, is then the *II* phase. The movement can stop either during the *II* phase or even during the *I* phase. It depends upon the value of load P and the parameters of plate.

The purpose is to minimize the volume (the weight) of plate by determining the parameters H_1, H_2, r_1 and taking into account the prescribed value of maximum residual deflection of plate. The minimum possible thickness is also prescribed. We shall take into consideration only plastic deformations and confine ourselves to small deformations.

Let us introduce the following non-dimensional quantities:

$$h = \frac{H}{H_p}; \quad x = \frac{r}{R}; \quad w = \frac{W}{H_p}; \quad t = \frac{\tau}{\tau_1}; \quad \rho = \frac{r_1}{R}; \quad V = \frac{V_A}{2\pi R^2 H_p}; \quad \alpha = \frac{B_* H_p^2}{R^2}; \quad (2a)$$

$$m_S = \frac{M_S}{\sigma_{S0} H_p^2}; \quad m_{1,2} = \frac{M_{1,2}}{\sigma_{S0} H_p^2}; \quad q = \frac{PR^2}{\sigma_{S0} H_p^2}; \quad k_{1,2} = \frac{\kappa_{1,2} R^2}{H_p}; \quad k = \frac{\mu R^2}{\sigma_{S0} \tau_1^2} \quad (2b)$$

where w is non-dimensional deflection; t, h, x — non-dimensional time, half-thickness and coordinate respectively; m_1 and m_2 — non-dimensional bending moments in radial and circumferential directions; m_S — non-dimensional limit value of dynamic bending moment; κ_1 and κ_2 — main curvatures of the plate; k_1 and k_2 — non-dimensional main curvatures; V_A and V — dimensional and non-dimensional volume of plate; k — non-dimensional prescribed plate parameter; q — non-dimensional load; σ_{S0} — yield stress of material in initial moment $t = 0$; σ_S — yield stress in a moment under regard; α — *prescribed parameter, describing the work-hardening*. Introducing the non-dimensional quantities the thickness parameter H_p is used. It may be any given formal thickness parameter, but here it is the minimum possible half-thickness of plate. For that reason here $h \geq 1$ everywhere.

The equation of motion of a circular plate in non-dimensional quantities is

$$\frac{\partial^2(xm_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial m_2}{\partial x} + qx = 2kx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

where non-dimensional load is $q = q_0(1-t)$ if $0 \leq t \leq 1$, and $q = 0$ if $1 \leq t \leq t_f$.

The non-dimensional main curvatures take the form

$$k_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad k_2 = -\frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4)$$

We will use the method of mode form motions, therefore $w(x,t) = \varphi(t) \cdot f(x)$ where $f(x)$ is the function of generalized bending line. The main curvatures are

$$k_1 = \varphi \cdot \nu_1; \quad k_2 = \varphi \cdot \nu_2; \quad \text{where } \nu_1 = -\frac{d^2 f}{dx^2}; \quad \nu_2 = -\frac{1}{x} \frac{df}{dx} \quad (5)$$

The volume V of plate may be written as $V = (h_1 - h_2)\rho^2 + h_2$ (6)

The problem is to minimize the volume of plate by means of selecting the sui-table values for parameters h_1 , h_2 and ρ , taking into account the prescribed value of maximum residual deflections. It must be equal to φ_{fe} . As we will see, the maximum residual deflection is in centre of plate, therefore $w(0, t_f) = \varphi_{fe}$.

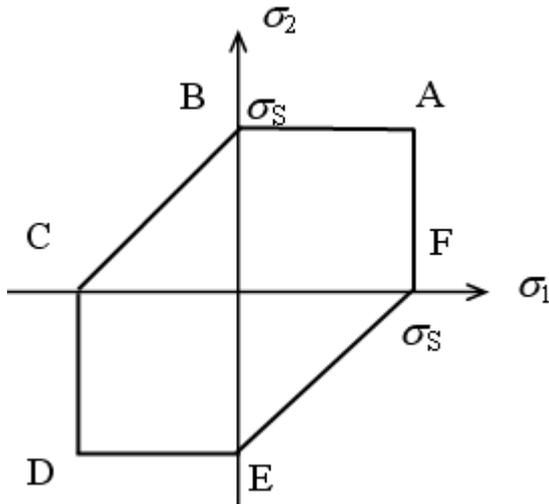


Figure 1. Tresca hexagon.

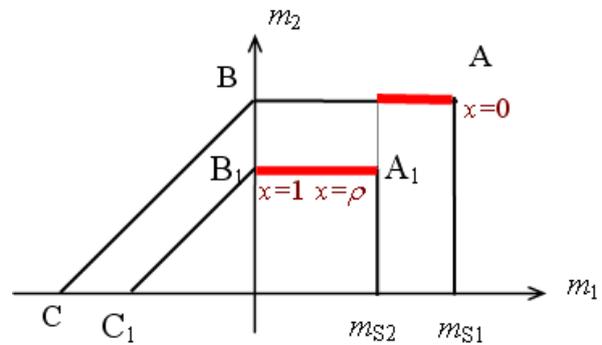


Figure 2. Deformation scheme.

As the Tresca yield condition is used, then the stresspoint may be situated only on the borderlines of Tresca hexagon (Fig. 1). In the case of hinged circular plates only the regimes $AB+DE$ are used. Going over from the stresses $(\sigma_1; \sigma_2)$ to bending moments $(m_1; m_2)$ two hexagons are obtained: a larger one for $h = h_1$ and smaller one for $h = h_2$. On the figure 2, where only the upper half of them are depicted, the deformation scheme used in this paper is displayed.

It means, that

$$m_2 = m_{S1} \text{ and } h = h_1 \text{ if } 0 \leq x \leq \rho, \quad (7a)$$

$$m_2 = m_{S2} \text{ and } h = h_2 \text{ if } \rho \leq x \leq 1 \quad (7b)$$

The necessary conditions for the solution to be statically permissible are

$$|m_1| \leq m_{S1} \text{ if } 0 \leq x \leq \rho \quad (8a)$$

$$|m_1| \leq m_{S2} \text{ if } \rho \leq x \leq 1 \quad (8b)$$

3. Models of deformation. The corner-stone of this theory is the following supposition – that the plastic work can be presented as

$$a) \quad A_p = \frac{\sigma_S^{1+\delta}}{B_* \sigma_{S0}^\delta} + C_0 ; \text{ or b) } \quad dA_p = \frac{(1+\delta)\sigma_S^\delta d\sigma_S}{B_* \sigma_{S0}^\delta} \quad (9)$$

where B_* is a prescribed constant, describing the extent of hardening; δ is a prescribed constant, describing the non-linearity of hardening. Here in linear case $\delta = 1$. It has been shown in paper [2], that using *Tresca* yield condition the associated yield law in centre of plate is not possible (if hardening is considered). Indeed – on the ground of associated yield law the strain-rate vector $\dot{\vec{E}}$ must be perpendicular to the yield surface, or yield curve. In this case vector $\dot{\vec{E}}$ must be perpendicular to straight line AB in figure 2, it means that vector $\dot{\vec{E}}$ is directed vertically upwards within the scope of whole plate. It is well known, that the projection of vector $\dot{\vec{E}}$ to abscissa-axis determines the main curvature k_1 , the projection of it to ordinate-axis determines the main curvature k_2 . If the method of mode form motions is used, then the mentioned projections determine ν_1 and ν_2 (see(5)). It means, that using associated yield law here $f(x) = 1 - x$, and $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1/x$. It has been shown in paper [2], that in this case $m_S \rightarrow \infty$ if $x \rightarrow 0$. Therefore – in center of plate and near it the non-associated yield law have to be used. The question is now – whether we use in the rest part of plate the associated or non-associated yield law? How is the deformation in real bodies? In reality the *Mises* yield law is valid and the *Mises* ellipse have to be used as the yield curve. The only problem is, that it is extraordinary complicated to solve the problem this way. According to the associated yield law here the strain-rate vector $\dot{\vec{E}}$ is perpendicular to this ellipse. It means, that the vector $\dot{\vec{E}}$ is continuously varying, and the direction of it also is changing. It suggests, that the non-associated yield law in the rest part of plate corresponds much more to reality than the associated yield law. Let us study the following models of non-associated yield law.

Model 1. Let the strain-rate vectors be the rays starting from zero-point (figure 3a) of *Tresca* hexagon (see [2]).

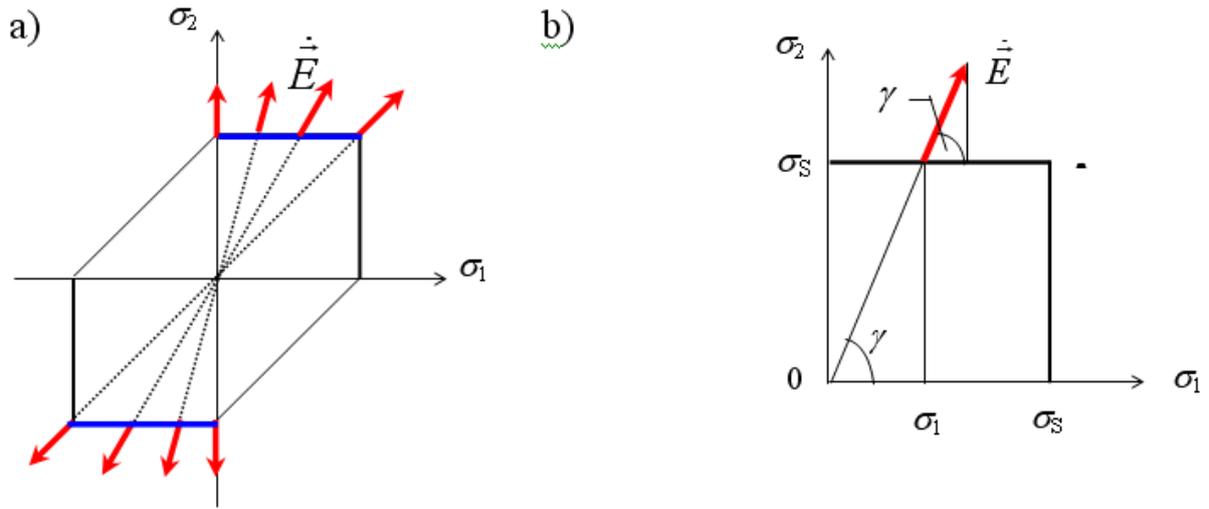


Figure 3. Model 1 of non-associated yield law.

Then it proceeds from figure 3b, that $e_1 = \dot{E} \cos \gamma$; $e_2 = \dot{E} \sin \gamma$ and $\tan \gamma = e_2/e_1$, where e_1, e_2 are principal strain components. As $\tan \gamma = \frac{\sigma_S}{|\sigma_1|} = \frac{\sigma_S}{\sigma_1 \text{sign} z}$, therefore $\frac{e_2}{e_1} = \frac{\sigma_S}{\sigma_1 \text{sign} z}$. As the rate of plastic work is $\dot{A}_p = \sigma_1 \dot{e}_1 + \sigma_2 \dot{e}_2$, and according to yield condition $\sigma_2 = \sigma_S \text{sign} z$, then it proceeds, that

$$\dot{A}_p = \frac{(e_1^2 + e_2^2)}{e_2} \cdot \sigma_S \text{sign} z \quad (10)$$

From the other side we use the expression of plastic work (9b). Using (10) and (9b) together one obtains the differential equation, the solution of which may be presented as

$$\sigma_S^\delta = \sigma_{S0}^\delta \cdot \left\{ 1 + \frac{\delta B^*}{(1 + \delta)} \cdot z \text{sign} z \cdot \frac{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}{\kappa_2} \right\} \quad (11)$$

In the linear case of hardening $\delta = 1$ and just this is used in this paper.

Model 2. Let the strain-rate vectors be the rays starting from the point (see [2]). Here $e_1 = e_2$ if $r = 0$, and $e_1 = -e_2/2$ if $r = 1$. These conditions approximate this model to *Mises* ellipse case, where the same conditions are valid. In this case one obtains

$$\sigma_S^\delta = \sigma_{S0}^\delta \cdot \left\{ 1 + \frac{\delta B^*}{(1 + \delta)} \cdot z \text{sign} z \cdot \frac{(\kappa_1 \kappa_2 + 2\kappa_1^2 + 3\kappa_2^2)}{3\kappa_2} \right\} \quad (12)$$

Model 3. Here strain-rate vectors are the rays starting from the point $(\sigma_S/2; \sigma_S/2)$. In this case one obtains

$$\sigma_S^\delta = \sigma_{S0}^\delta \cdot \left\{ 1 + \frac{\delta B^*}{(1+\delta)} \cdot z \operatorname{sign} z \cdot \frac{(\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1^2 + 2\kappa_2^2)}{2\kappa_2} \right\} \quad (13)$$

Now the limit bending moment can be found using formula

$$M_S = \int_{-H}^{+H} \sigma_S z \operatorname{sign} z \, dz.$$

After making use of non-dimensional quantities (2) one obtains in the case of linear hardening

$$m_{S1} = h_1^2 + \frac{1}{3} h_1^3 \alpha \varphi \eta; \quad m_{S2} = h_2^2 + \frac{1}{3} h_2^3 \alpha \varphi \eta \quad (14)$$

$$\text{model 1: } \eta = (\nu_1^2 + \nu_2^2) / \nu_2; \quad (15a)$$

$$\text{model 2: } \eta = (\nu_1 \nu_2 + 2\nu_1^2 + 3\nu_2^2) / 3\nu_2; \quad (15b)$$

$$\text{model 3: } \eta = (\nu_1 \nu_2 + \nu_1^2 + 2\nu_2^2) / 2\nu_2, \quad (15c)$$

where ν_1 and ν_2 were introduced in (5) by the help of function $f(x)$. This function is a polynomial either of degree 3 or 4, the coefficients of it are found using the following conditions: 1) $f(0) = 1$; 2) $f(1) = 0$; 3) $f'(0) = 0$; 4) $\nu_1(0) = \nu_2(0)$; 5) the conditions of continuity of functions f and f' ; 6a) using

model 1: $\nu_1(1) = 0$; 6b) using model 2: $\nu_1(1) = -\frac{1}{2} \nu_2(1)$; 6c) using model 3:

$\nu_1(1) = -\nu_2(1)$. On the ground of these conditions:

<p>Model 1: a) polynomial of degree 3</p> $f(x) = 1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^3;$ $\eta = \frac{3(8 - 12x + 5x^2)}{2(2 - x)};$	<p>b) polynomial of degree 4</p> $f(x) = 1 - \frac{6}{5} x^2 + \frac{1}{5} x^4;$ $\eta = \frac{8(9 - 12x^2 + 5x^4)}{5(3 - x^2)};$
<p>Model 2: a) polynomial of degree 3</p> $f(x) = 1 - \frac{5}{3} x^2 + \frac{2}{3} x^3;$ $\eta = \frac{2(50 - 85x + 39x^2)}{3(5 - 3x)};$	<p>b) polynomial of degree 4</p> $f(x) = 1 - \frac{14}{11} x^2 + \frac{3}{11} x^4;$ $\eta = \frac{8(49 - 77x^2 + 36x^4)}{11(7 - 3x^2)};$
<p>Model 3: a) polynomial of degree 3</p> $f(x) = 1 - \frac{9}{5} x^2 + \frac{4}{5} x^3;$ $\eta = \frac{6(18 - 33x + 16x^2)}{5(3 - 2x)};$	<p>b) polynomial of degree 4</p> $f(x) = 1 - \frac{4}{3} x^2 + \frac{1}{3} x^4;$ $\eta = \frac{4(8 - 14x^2 + 7x^4)}{3(2 - x^2)};$

Let us study another 3 models, besides the previously mentioned 3 ones.

Model 4. It is largely the same as model 2, only the function η have been taken similarly to *Mises* yield law as

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2} \quad (16)$$

a) using polynomial of degree 3

$$f(x) = 1 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3; \quad \eta = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{25 - 45x + 21x^2}; \quad (17a)$$

b) using polynomial of degree 4:

$$f(x) = 1 - \frac{14}{11}x^2 + \frac{3}{11}x^4; \quad \eta = \frac{8}{11} \cdot \sqrt{49 - 84x^2 + 39x^4}; \quad (17b)$$

Model 5. It is the most rough of all models, because in this case it have been taken grossly

$$f(x) = 1 - x^2; \quad \text{and so } \eta = \text{const} = 2. \quad (18)$$

Model 6. Here we use the non-associated yield law only in the immediate vicinity of the center of plate ($x \leq 0.1$). In the other part the associated yield law have been used. Therefore

a) if $0 \leq x \leq 0.1$:

$$f(x) = 1 + \frac{100}{29} (10x^3 - 3x^2); \quad \eta = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{600}{29} \cdot \sqrt{2 + 125x^2 - 30x} \quad (19a)$$

b) if $0.1 \leq x \leq 1$:

$$f(x) = \frac{30}{29} \cdot (1 - x); \quad \eta = v_2 = \frac{30}{29x}. \quad (19b)$$

This model is the most close one to *Tresca* solution.

4. Results of calculations and conclusions. To solve the problem the differential equation (3) have to be integrated, considering the formulae (7), (8) and (14), but also the proper expressions of functions $f(x)$ and $\eta(x)$. It must be done 10 times, because we have 6 models and in 4 of them two various expressions of function $f(x)$ have been used. The constants of integration can be determined using the conditions: 1) $m_1|_{x=0} = m_{S1}|_{x=0}$; 2) $m_1'|_{x=0} = 0$; 3) the conditions of continuity in $x = \rho$. After that the differential equation to determine the function $\varphi(t)$ may be obtained using the condition: a) $m_1(1) = 0$.

The value of ρ is found using condition

$$m_1|_{x=\rho} = m_{S2}|_{x=\rho} \quad (20)$$

The problem have been solved using MATLAB-program with double loops. The parameters h_1 and h_2 were changing in the interval $[h_{\min} = 1; h_{\max}]$ by step Δh , which was always 0.00005. The third parameter ρ was determined according to condition (20). In each case the correctness of two conditions have been checked. Firstly $w_{end}^{\max} = w(0; t_f) = \varphi_{fe}$, where φ_{fe} is prescribed. Secondly

– the correctness of condition (8) at several moments of time. As it turned out, the most dangerous moment of time was the initial moment $t = 0$. If the construction resists the load at this moment, then it resists the load always. The maximum possible inaccuracy of w_{end}^{max} was prescribed as 0.000005.

Results.

Let us take $q_0 = 25$; $\alpha = 0.5$; $\varphi_{fe} = 1.0$; $k = 1$. The results of calculations are presented in tables 1 and 2.

Table 1. Results of calculations if $f(x)$ is polynomial of degree 3.

Model	h_1	h_2	ρ	V	$m_1(0;0)$	$m_1(0;t_f)$	V if $h = \text{const}$	Economy %
1a	1.3319	1.0242	0.7617	1.20266	1.773	4.136	1.33156	10.72
2a	1.3325	1.0910	0.7179	1.21541	1.775	4.404	1.33239	9.62
3a	1.3336	1.0169	0.7731	1.20615	1.778	4.624	1.33358	10.56
4a	1.3229	1.0180	0.7670	1.19739	1.750	4.322	1.32342	10.52
5	1.3704	1.0023	0.7757	1.22380	1.878	2.735	1.36808	11.79
6	1.3364	1.0142	0.7814	1.21094	1.786	13.425	1.33591	10.32

Table 2. Results of calculations if $f(x)$ is polynomial of degree 4.

Model	h_1	h_2	ρ	V	$m_1(0;0)$	$m_1(0;t_f)$	V if $h = \text{const}$	Economy %
1b	1.3247	1.0282	0.7541	1.19681	1.755	3.615	1.32486	10.70
2b	1.3260	1.0005	0.7752	1.19609	1.758	3.737	1.32640	10.89
3b	1.3275	1.0125	0.7702	1.19934	1.762	3.841	1.32799	10.73
4b	1.3189	1.0195	0.7612	1.19300	1.740	3.686	1.31987	10.63

Conclusions:

1. In table 1 are presented the results of calculations in the case, if the function $f(x)$ is the polynomial of degree 3. If we compare the results obtained, then the worst results gives model 5. It is quite understandable, because this model is very rough one. All the rest of models give results quite alike to each other. Which model of them can we prefer? Which of them is the closest to reality, it means the closest to *Mises* case? Studying the functions $f(x)$, the closest to *Mises* are models 2 and 4. Considering then the function $\eta(x)$, then the closest model to reality must be model 4. Interesting is, that the next model to this one is not model 2, but model 1, where the strain-rate

- vectors are rays starting from zero-point. But if we compare the models 1 and 4 from the point of complicatedness, then we prefer the model 1 of course, because it is so easy to integrate the differential equation in that case. And after all – the values of function V of models 1 and 4 (which are 1.202663 and 1.197386) differ only 0.44% from each other.
2. The value of function V in the case of model 6 is 1.210939, which is also quite satisfactory and quite close one to models 1 and 4. But the trouble is elsewhere – the model 6 greatly overestimates the influence of hardening. As we can see from table 1 – the value of bending moment m_1 in center of plate (if $x = 0$) in initial moment $t = 0$ is 1.7860; in the final moment t_f it is 13.4252. The influence of hardening is never so great in reality. So, to solve the problem we can use the models 1 and 4, but yet the models 2 and 3 are also good ones. The results obtained using these models so little differ from the corresponding results of models 1 and 4.
 3. In the table 2 are presented the results of calculations in the case, if the function $f(x)$ is the polynomial of degree 4. In this case also the model 4 is the most close one to reality, but it is quite difficult to solve. The best model from other three is here model 2 which is much more simple than model 4.
 4. Which form of function $f(x)$ we must prefer, the polynomial of degree 3 or polynomial of degree 4? Though it seems, that the polynomial of degree 4 is more close to reality, but nevertheless the difference between these two groups of solution is very small. For instance – the results, using model 1 in both cases, differ only 0.49%; using model 4 in both cases – only 0.37%. So, both forms of function $f(x)$ are good ones.
 5. Examining the results of calculations, presented in Tables 1 and 2, one can determine the amount of economy of material, if the stepped plate is used instead of the plate of constant thickness. As we can see in Tables 1 and 2, the economy of material is more than 10% almost everywhere.
 6. From the other side – how much material we can economize, if we compare the results obtained with the stepped circular plate without any hardening at all? If we solve the minimum weight problem of stepped circular plate made of rigid-plastic material ($\alpha = 0$), then the results are:
 - 1) In the case of model 1a (polynomial of degree 3): $h_1 = 1.4665$; $h_2 = 1.0062$; $\rho = 0.80035$; $t_f = 0.968$ and $V_{main} = 1.3010505$. The corresponding result in main solution was $V = 1.202663$, therefore the economy is 8.18% .
 - 2) In the case of model 2a: $h_1 = 1.4715$; $h_2 = 1.0118$; $\rho = 0.80056$; $t_f = 0.961$ and $V = 1.3064013$. As $V_{main} = 1.215414$, then the economy is 7.49%.
 - 3) In the case of model 3a: $h_1 = 1.4756$; $h_2 = 1.0149$; $\rho = 0.801434$;

$t_f = 0.955$ and $V = 1.310756$. As $V_{main} = 1.206150$, then the economy in this case is 8.67%.

References

1. Kirs, J., Minimum weight problem of plastic circular plates, considering the hardening of material, Proc. of OST-98 Symposium on Machine Design, Finland, Oulu 1998, pp 205-219.
2. Kirs, J., Optimal design of dynamically loaded built-in circular plates, considering the isotropic hardening, Proc. of OST-01 Symposium on Machine Design, Tallinn, 2001, pp 293-302.

УДК 519.853.3

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Колесников Г.Н., Раковская М.И.

(Петрозаводский государственный университет)

ON THE SOLVING OF A QUADRATIC PROGRAMMING PROBLEM AT MODELING OF ELASTIC SYSTEM WITH UNILATERAL CONSTRAINTS

Kolesnikov G.N., Rakovskaya M.I.

(Petrozavodsk State University)

The procedure of the numerical analysis of elastic systems with unilateral constraints is developed. The search of the solving is reduced to the mixed linear complementarity problem.

1. В качестве объекта моделирования рассматривается упругая конструкция с односторонними связями. Опыт исследований в области моделирования подобных объектов, проблемы и пути их решения отражены, например, в работах [1-8]. Эта область исследований интенсивно развивается, причиной чего является не только то обстоятельство, что системы с односторонними связями встречаются на каждом шагу, в прямом и переносном смысле слова. Актуальность работ в данной области обусловлена необходимостью совершенствования математических моделей объектов с односторонними связями.

Методы решения задач, сопровождающих моделирование указанных объектов, развиваются по нескольким направлениям.

В работах одного из направлений расчет сводится к решению задачи квадратичного программирования с применением методов поиска условного минимума, например, метода условного градиента [4].

В целях уменьшения объема вычислений в работах другого направления [6, 7] используется то обстоятельство, что задача

квадратичного программирования может быть сведена к линейной задаче дополненности [9, 10]. Тогда координаты точки условного минимума квадратичной функции определяются как неотрицательное решение системы n линейных алгебраических уравнений с $2n$ неизвестными. К такой системе уравнений приводят условия Куна-Таккера.

Эти уравнения могут выражать, например, условия равновесия. Тогда они могут быть составлены с использованием основной системы метода перемещений [11, с. 59], без обращения к условиям Куна-Таккера.

Анализ литературы по затронутой теме показывает, что требуют дальнейшего изучения вопросы, относящиеся к моделированию объектов с жесткими элементами, с податливыми односторонними связями, а также с односторонними ограничениями угловых перемещений.

Цель данной работы – разработка эффективного в вычислительном отношении алгоритма расчета конструкций, состоящих из упругих и жестких элементов, с упругими и жесткими односторонними связями, в том числе с односторонними ограничениями угловых перемещений.

2. Физическая модель объекта представляет собой систему упругих и жестких тел, односторонних и двусторонних связей. Связями могут быть любые устройства, ограничивающие линейные и угловые перемещения.

Односторонняя связь рассматривается как некоторое устройство с двумя допустимыми состояниями («включено» и «выключено»). Число возможных (допустимых) состояний системы n таких устройств равно 2^n . Допустимое состояние, отвечающее всем условиям задачи, является *действительным*, т.е. осуществляемым при данном воздействии на объект.

Двусторонняя связь может рассматриваться как частный случай односторонней связи, которая всегда находится в состоянии «включено».

Состояние каждого элемента модели описывается с точки зрения геометрии и механики линейными соотношениями. Однако переходы односторонних связей из одного состояния в другое при установлении воздействия, как одно из проявлений самоорганизации структуры механической системы [12], являются причиной, по которой поведение модели в целом описывается кусочно-линейными зависимостями.

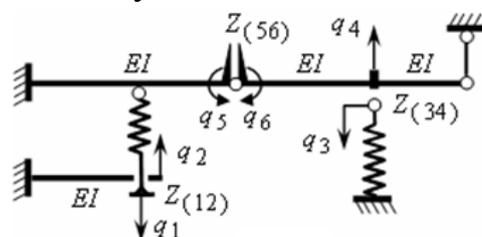


Рис. 1.

Анализ с физической точки зрения свеем к контактной задаче для дискретной модели, в которой имеются зазоры между некоторыми узлами.

Величина зазора Z зависит от воздействия на объект и равна расстоянию между двумя узлами, контакт которых возможен. Можно считать, что каждая пара таких узлов соединена линейной односторонней связью. Состояния «зазор закрыт (открыт)» и «связь включена (выключена)» эквивалентны. Реакция X «включенной» связи равна силе контактного взаимодействия, $X \geq 0$, зазор $Z = 0$. Если связь «выключена», то $X = 0$, $Z \geq 0$.

Например, на схеме (рис. 1) узлы, перемещения которых обозначены как q_1 и q_2 , q_3 и q_4 , попарно соединены линейными односторонними связями. Угловая связь ограничивает взаимное вращение деталей только в одном направлении, зазор $Z_{(56)}$ измеряется как некоторый угол. Начальные зазоры могут быть равны нулю. Текущие значения зазоров $Z_{(12)}$, $Z_{(34)}$, $Z_{(56)}$ неотрицательны.

Преимущества представленной модели: не требуется разделения односторонних связей на жесткие и упругие; связи могут быть как линейными, так и угловыми. Тем самым упрощается решение **основной проблемы** математического моделирования объектов рассматриваемого класса, которая заключается в определении действительного состояния односторонних связей при достаточно большом их числе в системе.

3. Математическое описание физической модели (собственно математическая модель) и алгоритмы ее компьютерной реализации могут быть построены с использованием различных подходов.

Универсален подход, исходящий из вариационной формулировки задачи с последующим ее сведением к поиску минимума функции вида

$$E = \frac{1}{2} q^T K q - q^T P, \quad q \geq 0 \quad (1)$$

Здесь E – потенциальная энергия (с точностью до некоторой постоянной); q – вектор перемещений узлов; P – вектор внешних сил; K – матрица жесткости, симметричная и положительно определенная. Условия Куна-Таккера, являясь в данном случае необходимыми и достаточными условиями оптимальности, приводят к поиску таких векторов q и R , что

$$R = Kq - P, \quad R \geq 0, \quad q \geq 0, \quad q^T R = 0. \quad (2)$$

Элементы вектора R по своему физическому смыслу являются реакциями связей метода конечных элементов в форме метода перемещений.

Формально задача (2) представляет собой *линейную задачу дополненности*. Методы решения данной задачи известны [9,10].

Если все связи модели двусторонние, то $R = 0$ в (2) и расчет сводится к решению системы уравнений вида $Kq = P$. К решению системы такого же вида свелся бы анализ модели с односторонними связями, если бы было

заранее известно их действительное состояние. По существу, это основная проблема моделирования упругого дискретного контакта [3, с. 154-155].

Рассмотрим конечно-элементную модель, в которой перемещения узлов и реакции по направлениям этих перемещений разделены на три типа, в зависимости от наличия или отсутствия ограничений.

Элементами вектора R_t представим реакции по тем направлениям, перемещения по которым ограничены двусторонними (*two-sided*) связями. Вектор R_t подлежит определению. По условию задачи перемещения по направлению этих реакций равны нулю, укажем их в векторе $q_t = 0$.

Перемещения, не ограниченные связями, представим вектором q_f , подлежащим определению. Реакции по направлению этих условно свободных (*free*) перемещений равны нулю, их укажем в векторе $R_f = 0$.

Аналогично, элементами векторов q_u и R_u представим перемещения и реакции, совместные с односторонними (*unilateral*) связями. Известно, что $q_u \geq 0$, $R_u \geq 0$, $q_u^T R_u = 0$. (3)

Разбив матрицу жесткости K и вектор нагрузки P на блоки, запишем

$$\begin{pmatrix} R_t \\ R_f \\ R_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{tt} & K_{tf} & K_{tu} \\ K_{ft} & K_{ff} & K_{fu} \\ K_{ut} & K_{uf} & K_{uu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_t \\ q_f \\ q_u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P_t \\ P_f \\ P_u \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Жордановы исключения (в литературе называемые также исключениями Гаусса-Жордана) с выбором в качестве разрешающих диагональных элементов блока K_{ff} приводят к следующим соотношениям

$$\begin{pmatrix} R_t \\ q_f \\ R_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [] & [] & K_{tu} - K_{tf} K_{ff}^{-1} K_{fu} \\ [] & [] & -K_{ff}^{-1} K_{fu} \\ [] & [] & K_{uu} - K_{uf} K_{ff}^{-1} K_{fu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{tf} K_{ff}^{-1} P_f - P_t \\ K_{ff}^{-1} P_f \\ K_{uf} K_{ff}^{-1} P_f - P_u \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Символы $[]$ в (5) обозначают элементы, которые далее не используются. Формально система соотношений (3) и (5) образует вариант *смешанной линейной задачи дополненности* [10]. Из условий (3) следует, что по меньшей мере половина общего числа элементов в векторах R_u и q_u равна нулю. Эти элементы можно найти и перевести в правую часть системы (5), используя алгоритмы решения задач дополненности [10]. Физическому смыслу установления воздействия на модель с односторонними связями адекватен алгоритм [13]. Вычисления сводятся к жордановым исключениям над системой (5) с выбором в качестве разрешающих диагональных элементов блока uu . В итоге не обязательно равные нулю переменные, а именно, реакции двусторонних связей, условно свободные

перемещения, реакции «включенных» и зазоры «выключенных» связей будут равны свободным членам преобразованных уравнений.

Эти преобразования приводят к уравнениям, в которых, с точки зрения смешанного метода строительной механики, роль неизвестных играют (а на самом деле равны нулю) перемещения «включенных» и реакции «выключенных» связей в действительном их состоянии.

4. Соотношения смешанной линейной задачи дополненности для конечно-элементной модели. Элементы указанных в (3) векторов, т.е., перемещения и реакции, совместные с некоторой односторонней связью, обозначим q_i , q_j и R_i , R_j . Пусть начальный зазор равен $\Delta_{(ij)}$. Тогда, если при некотором воздействии зазор остается открытым, то

$$q_i + q_j + \Delta_{(ij)} \geq 0, \quad R_i = R_j = 0. \quad (6)$$

Если зазор закрыт, то $q_i = -q_j$,

$$q_i + q_j + \Delta_{(ij)} = 0, \quad R_i = R_j \geq 0. \quad (7)$$

Перейдем к новым переменным в векторах q_u и R_u :

$$Z_{(ij)} = q_i + q_j + \Delta_{(ij)}, \quad X_{(ij)} = R_i = R_j. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что в любом случае

$$Z_{(ij)} \geq 0, \quad X_{(ij)} \geq 0, \quad Z_{(ij)} X_{(ij)} = 0. \quad (9)$$

Чтобы получить выражения для q_i и q_j , выполним жордановы исключения над системой уравнений метода конечных элементов, выбирая разрешающими диагональные коэффициенты в уравнениях для R_i , R_j . Далее, чтобы перейти к новым переменным (8), необходимо суммировать выражения для q_i , q_j (т.е., две строки). Во всех уравнениях $R_i = R_j = X_{(ij)}$, поэтому необходимо привести подобные члены, т.е., суммировать два соответствующих столбца матрицы коэффициентов.

Повторяя эти преобразования для очередной связи, формируем блоки R_u , K_{uu} , q_u . Получение других блоков (4) затруднений не вызывает [14].

5. Смешанная линейная задача дополненности для модели с жесткими элементами. Пусть в рассмотренной выше модели имеются, наряду с другими, абсолютно жесткие элементы, для которых допустимы линейные и (или) угловые перемещения. Известная система уравнений (моделирующих равновесие внешних и внутренних сил, совместность перемещений узлов и деформаций упругих элементов, связь между внутренними силами и деформациями этих элементов) должна быть дополнена, с учетом сказанного выше, соотношениями для зазоров.

Вектор внутренних сил F разобьем на два блока F_1 и F_2 . В блоке F_2 укажем силы контактного взаимодействия жестких тел, в том числе узлов

(точек) как тел бесконечно малых размеров. Все остальные силы укажем в блоке F_1 . Условия равновесия внешних (P) и внутренних сил имеют вид $C_1 F_1 + C_2 F_2 + P = 0$; $F_2 \geq 0$. (10)

Здесь C_1 и C_2 – блоки матрицы коэффициентов уравнений равновесия.

Запишем условия совместности деформаций упругих элементов (D_1) и перемещений узлов (U):

$$C_1^T U = D_{01} - D_1. \quad (11)$$

Здесь D_{01} – вектор начальных деформаций упругих элементов.

Пусть D_{02} – вектор начальных зазоров в односторонних связях. Текущие значения зазоров (D_2), силы F_2 и перемещения U связаны соотношениями

$$C_2^T U = D_{02} - D_2; \quad D_2 \geq 0, \quad F_2^T D_2 = 0. \quad (12)$$

Деформации D_1 и внутренние силы F_1 связаны законом Гука:

$$S_1 D_1 = F_1. \quad (13)$$

Исключив из соотношений (11) и (13) вектор D_1 , получим

$$S_1^{-1} F_1 + C_1^T U - D_{01} = 0 \quad (14)$$

Система соотношений (10), (12) и (14) приводит к формулировке смешанной линейной задачи дополнителности в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_1 & C_2 \\ -C_1^T & -S_1^{-1} & 0 \\ -C_2^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ D_{01} \\ D_{02} \end{pmatrix}; \quad F_2 \geq 0, \quad D_2 \geq 0, \quad F_2^T D_2 = 0. \quad (15)$$

Решение, если оно существует, находим по аналогии с задачей (3),(5). Если $D_2 = 0$, $D_{01} = 0$, $D_{02} = 0$ и существует C_2^{-1} , то $U = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = -C_2 P$.



Рис. 2.

Подстановка F_1 (13) в (10) ведет, с учетом (11), к варианту задачи (15):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K & C_2 \\ -C_2^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ F_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P + C_1 S_1^{-1} D_{01} \\ D_{02} \end{pmatrix}; \quad F_2 \geq 0, \quad D_2 \geq 0, \quad F_2^T D_2 = 0. \quad (16)$$

Здесь, как и в (1)-(2), K – матрица жесткости, $K = C_1 S_1 C_1^T$.

В заключение отметим, что эффективность данных алгоритмов подтверждена, в частности, при моделировании систем с двусторонними зазорами (рис. 2).

Литература

1. Гордеев В.Н., Перельмутер А.В. Расчет упругих систем с односторонними связями как задача квадратичного программирования // Исследования по теории сооружений. Вып. 15. М.: Стройиздат, 1967. С. 208 – 212.
2. Moreau J.J. Quadratic programming in mechanics: Dynamics of one-sided constraints // J. SIAM. Series A. On control. 1966. Vol. 4, № 1. P. 153 – 158.
3. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта // СПб.: Политехника, 2003.
4. Розин Л.А., Смирнов М.С. Решение контактных задач теории упругости с односторонними связями методом конечных элементов // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 1999. № 3 (17). С. 24 – 29.
5. Гольдштейн Ю.Б., Щербак М.П. Механика системы жестких тел и односторонних податливых связей // Тез. докл. XX Междунар. конф. «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Метод граничных и конечных элементов», 24 – 26 сент. 2003 г. СПб., 2003. С. 55–57.
6. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии // М.: Наука, 1989.
7. Ловцов А.Д. Алгоритмы линейной задачи дополнителности в применении к расчету систем с односторонними связями // Тез. докл. XX Междунар. конф. «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Метод граничных и конечных элементов», 24 – 26 сент. 2003 г. СПб., 2003. С. 128 – 129.
8. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа // Киев: Изд-во «Сталь», 2002.
9. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн. 2. // М.: Мир, 1986.
10. Murty K. G. Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming // Helderman-Verlag, 1988.
11. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н., Смирнов В.А. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. В 2-х ч. Ч. 1. // М.: Стройиздат, 1976.
12. Васильков Г. В. Эволюционные задачи строительной механики. Синергетическая парадигма // Ростов-на-Дону: ИнфоСервис, 2003.
13. Колесников Г.Н. Шаговый алгоритм решения линейной задачи дополнителности с положительно определенной матрицей коэффициентов // Вестник Поморского университета. "Естественные и точные науки". 2004. № 1(5), с. 78 – 82.
14. Колесников Г.Н., Раковская М.И. Алгоритм учета ограничений в виде нестрогих неравенств в конечно-элементных моделях механических систем // Материалы XIV Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС-2005), Алушта, Крым, 25-31 мая 2005 г. // М.: Вузовская книга, 2005. С. 228 – 229.

О ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Колпак Е.П., Иванова М.С.

(Санкт Петербургский государственный университет)

Математическое описание роста микробных популяций в биологическом реакторе опирается, как правило, на аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений [1-5]. Рост биомассы клеток описывается уравнением автокатализа [2,3,5]. При этом учитывается, что удельная скорость роста биомассы может быть ограничена скоростью переработки субстрата с учетом возможного субстратного угнетения [2,6,7]. При математическом моделировании проточного биологического реактора предполагается однородность распределения продуктов в реакторе за счет идеальности перемешивания [2,4,5]. Однако, последнее идеальным быть не может и, соответственно, возникают градиенты концентрации продуктов по профилю реактора [7-9]. Это приводит к необходимости учитывать диффузионные процессы, происходящие в реакторе [10-12]. Ниже рассматривается модель, роста биомассы с субстратным угнетением в проточном реакторе с учетом не идеальности перемешивания по длине реактора.

Пусть в реакторе длиной l выращивается биомасса X на субстрате Y , поступающем в реактор со скоростью v . С этой же скоростью продукты удаляются из реактора. Система уравнений, описывающая рост биомассы на лимитирующем субстрате с учетом субстратного угнетения при наличии диффузии субстрата и биомассы, имеет вид [2]

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - v \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{YX}{1 + Y + gY^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - v \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{YX}{1 + Y + gY^2}.$$

Здесь g - константа. Коэффициент диффузии D предполагается одинаковым для субстрата и биомассы.

К уравнениям (1) добавляются начальные

$$X(t=0) = X_0, \quad Y(t=0) = Y_0 \quad (2)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \text{при } x=0: \quad X &= 0, \quad Y = Y^0, \\ \text{при } x=l: \quad \frac{\partial X}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь предполагается, что в начальный момент времени в реактор загружаются биомасса и субстрат, а извне в реактор поступает только субстрат.

Для случая реактора идеального смешения уравнения (1) с учетом граничных условий (3) и начальные условия принимают вид ($v_0 = v/l$)

$$\frac{dX}{dt} = -v_0 X + \frac{YX}{1+Y+gY^2},$$

$$\frac{dY}{dt} = -v_0(Y - Y^0) - \frac{YX}{1+Y+gY^2},$$

$$X(0) = X_0, \quad Y(0) = Y_0.$$

Решением этой задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений является первый интеграл

$$X(t) + Y(t) = Y^0 + (X_0 + Y_0 - Y^0)e^{-v_0 t}.$$

Отсюда следует, что в стационарных точках $X + Y = Y^0$.

Особые точки системы дифференциальных уравнений (4) являются решением системы алгебраических уравнений

$$\left(-v_0 + \frac{Y}{1+Y+gY^2} \right) X = 0,$$

$$X + Y = Y^0,$$

которая всегда имеет тривиальное решение $Y = Y^0, X = 0$. Поскольку

функция $f(Y) = \frac{Y}{1+Y+gY^2}$ имеет экстремум равный $v_{\max} = \frac{1}{1+2\sqrt{g}}$ при

$Y = 1/\sqrt{g}$, то уравнения (5) при $v_0 < v_{\max}$ будет иметь еще два решения:

$$Y_2 = \frac{1}{2gv_0} \left(1 - v_0 - \sqrt{(1-v_0)^2 - 4gv_0^2} \right), \quad X_2 = Y^0 - Y,$$

$$Y_3 = \frac{1}{2gv_0} \left(1 - v_0 + \sqrt{(1-v_0)^2 - 4gv_0^2} \right), \quad X_3 = Y^0 - Y.$$

Матрица частных производных правых частей уравнений (4) по X и Y имеет вид

$$\begin{pmatrix} -v_0 + f(Y), & Xf'(Y) \\ -f(Y), & -v_0 - Xf'(Y) \end{pmatrix}.$$

Собственными значениями этой матрицы являются $\lambda_1 = -v_0$ и $\lambda_2 = -Xf'(Y) + f(Y) - v_0$. Первое собственное значения всегда отрицательно.

В первой стационарной точке второе собственное значение будет положительным, если $v_0 < v_{\max}$, и отрицательным в противном случае. Т.е., тривиальная стационарная точка устойчива, если она является единственной стационарной точкой.

Во второй и третьей стационарных точках $\lambda_2 = -Xf'(Y)$. Поскольку вторая стационарная точка лежит слева от точки максимума функции $f(Y)$, а вторая справа, то во второй стационарной точке λ_2 отрицательно, а в третьей положительно. Поэтому при $v_0 < v_{\max}$ устойчивой является вторая стационарная точка.

Таким образом, при выполнении условия $v_{\max} < v_0$ существует только одна стационарная устойчивая точка с нулевым значением X . Т.е., при больших скоростях подачи субстрата должно происходить «вымывание» биомассы из реактора.

Для случая уравнений (1) стационарное решение удовлетворяет системе уравнений

$$D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - v \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{YX}{1+Y+gY^2} = 0,$$

$$D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - v \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{YX}{1+Y+gY^2} = 0$$

при граничных условиях (3). Из этих уравнений и граничных условий следует, что

$$X(x) + Y(x) = Y^0 = \text{const.}$$

С учетом этого функция $Y = Y(x)$ является решением уравнения

$$D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - v \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{Y(Y^0 - Y)}{1+Y+gY^2} = 0 \quad (6)$$

при граничных условиях

$$Y(0) = Y^0, \quad \left. \frac{\partial Y}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Эта краевая задача имеет «тривиальное» решение $Y = Y^0$.

Удовлетворяющее граничным условиям (7) нетривиальное решение этой задачи можно представить в виде

$$Y(x) = Y^0 + B \sin \frac{\pi x}{2l}.$$

Тогда с применением метода Бубнова-Галеркина к уравнению (6) будет получено уравнение для нахождения постоянной B

$$\int_0^1 \frac{Y}{1+Y+gY^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \frac{\pi^2}{8l} D + \frac{1}{2} v_0. \quad (8)$$

Правая часть этого равенства ограничена сверху:

$$\int_0^l \frac{Y}{1+Y+gY^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx < v_{\max} \frac{l}{2}.$$

Поэтому уравнение (8) решений иметь не будет, если выполняется неравенство $v_{\max} < v_0 + \frac{\pi^2}{4l} D$, и соответственно, тривиальное стационарное решение будет единственным. Последнее означает, что наличие диффузии понижает скорость «вымывания» биомассы.

На стационарных решениях уравнений (1) выполняется неравенства $0 \leq Y \leq Y^0$. Поэтому если нетривиальное решение уравнения (6) близко к решению $Y = Y^0$, то оно в первом приближении должно удовлетворять уравнению

$$D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - v \frac{\partial Y}{\partial x} - \gamma (Y^0 - Y) = 0, \quad \gamma = \frac{Y^0}{1 + Y^0 + gY^0{}^2}. \quad (9)$$

Решение этого уравнения представляется в виде $Y = Y^0 + e^{\alpha x} (C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x)$.

Здесь C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, $\alpha = \frac{v_0}{2D}$, $\mu = \frac{\sqrt{4\gamma D - v_0^2}}{2D}$.

При $v_0^2 < 4\gamma D$ удовлетворение граничным условиям (7) приводит к условию существования нетривиального решения уравнения (9) близкого к решению $Y = Y^0$

$$\alpha \sin \mu l + \mu \cos \mu l = 0. \quad (10)$$

Это уравнение при положительных значениях μ и α может иметь решения, если выполняется неравенство $\pi/2l < \mu$ или

$$v_0^2 < 4\gamma D - \left(D \frac{\pi}{l} \right)^2.$$

Последнее неравенство при больших значениях v_0 удовлетворено быть не может. Из этого же неравенства (поскольку правая часть должна быть положительна) следует второе условие существования нетривиального решения уравнения (9):

$$D(\pi/2l)^2 < \gamma = \frac{Y^0}{1 + Y^0 + gY^0{}^2}.$$

Это условие накладывает ограничение на скорость реакции: при малых удельных скоростях реакции нетривиальное решение уравнения (9) может не существовать. Таким образом, «вымывание» биомассы из реактора

может происходить с одной стороны при больших скоростях протока, а с другой – при малых удельных скоростях реакции.

Для случая $g = 0.25$, $Y_0 = 0.5$ и $l = 1$ на рис. 1 в плоскости (D, v_0) показана граница раздела между областями существования и не существования тривиальных решений уравнения (6). Верхняя кривая соответствует первому корню уравнения (10), а нижняя – второму. На рис. 2 зависимости для случая $Y_0 = 0.5$ и $Y_0 = 2.0$ (при максимальном значении γ) приведены на рис. 2.

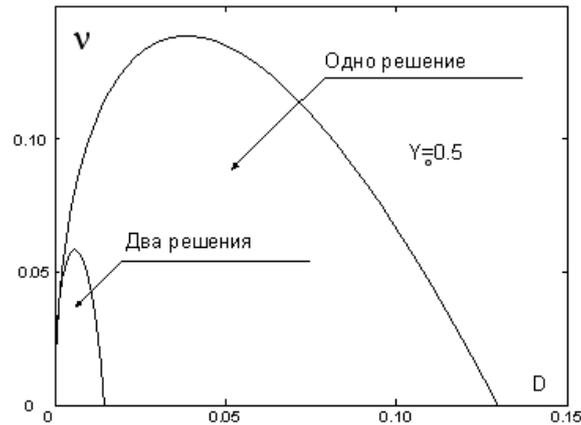


Рис. 1.

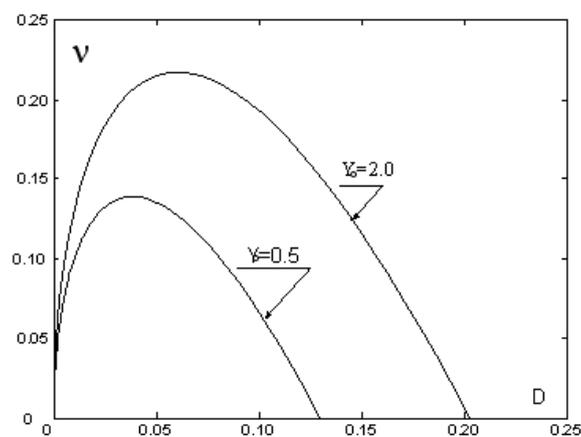


Рис. 2.

При $g = 0.25$ в точечной модели нетривиальное стационарное решение существует, если выполняется неравенство $v_0 < v_{\max} = 0.5$. В диффузионной модели при максимальном значении $\gamma = \gamma(Y_0 = 2) = v_{\max} = 0.5$ как следует из рис. 2 нетривиальное решение существует лишь при $v_0 < 0.217$.

Численное решение задачи (1)-(3) осуществлялось с применением метода сеток. При этом использовалась явная схема интегрирования по времени. В качестве начальных условий рассматривались следующие $X(t = 0) = X_0 = const$, $Y(t = 0) = 0$,

соответствующие случаю первоначальной загрузки реактора только биомассой.

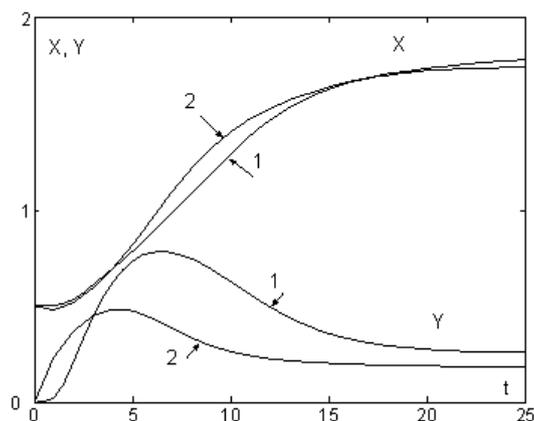


Рис. 3.

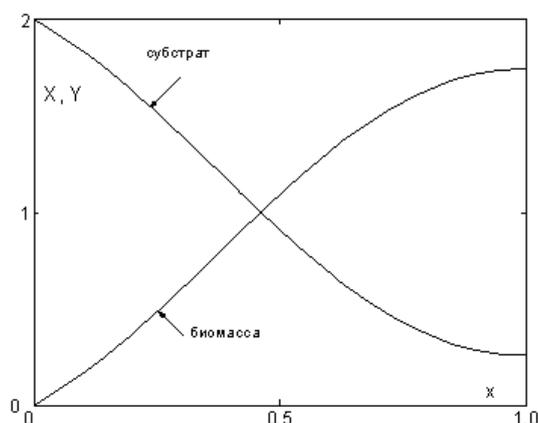


Рис. 4.

Результаты расчетов по диффузионной модели (в области существования нетривиального стационарного решения) сопоставлялись с результатами, полученными по «точечной» модели. На рис. 3 для случая $D = 0.05$, $\gamma = 0.25$, $\nu_0 = 0.15$, $Y_0 = 2$, $X_0 = 0.5$ показана зависимости $X = X(t, l)$ и $Y = Y(t, l)$ (на выходе реактора) от времени, рассчитанные по диффузионной модели (кривые 1) и точечной модели (кривые 2). Как следует из этого рисунка стационарные значения концентраций биомассы и субстрата на выходе диффузионного реактора близки к соответствующим значениям концентраций в ректоре идеального смешения. Изменение концентрации биомассы и субстрата вдоль реактора при $t = 25$ приведено на рис. 4. Как показывает непосредственный расчет с высокой степенью точности можно принять, что $X = X(x) = A \sin \pi x / 2 + B \sin 3\pi x / 2$. Для рассматриваемого на рис. 4 случая $A = 1.64$, $B = -0.10$.

Работа выполнена при поддержке программы “Государственная поддержка ведущих научных школ РФ” (НШ-2180.2003.1) и гранта РФФИ 03-01-00601.

Литература

1. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Биофизическая динамика продукционных процессов. Москва-Ижевск. 2004. 464с.
2. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М., Физматлит.1975. 344с.
3. Арзамасцев А.А., Андреев А.А. О возможности использования различных моделей кинетики биосинтеза. Биофизика, 2001. Т. 46. Вып. 6. 1048-1061.
4. Simeonov I.S. Mathematical modeling and parameters estimation of anaerobic fermentation processes. Bioprocess Engineering, 1999. V. 21. 377-381.
5. Бирюков В.В., Кантере В.М. Оптимизация периодических процессов микробиологического синтеза. М. Наука. 1985. 296с.
6. Pramod S., Chidambaram M. Closed loop identification of transfer function model for unstable bioreactors for tuning PID controllers . Bioprocess Engineering, 2000. V. 22. 185-188.
7. Печуркин Н.С., Брильков А.В., Марченкова Т.В. Популяционные аспекты биотехнологии. Новосибирск. Наука. 1990. 173с.
8. Коваленко Г.А., Сухинин С.В., Симаков А.В., Перминова Л.В., Комова О.В., Хомов В.В., Боровцова О.Ю. Роторно-инерционный биореактор для биокаталитических процессов. Биотехнология, 2004. №1. 83-90.
9. Liden G. Understanding the bioreactor. Bioprocess Engineering, 2002. V. 24. 273-279.
10. Ivanc M., Antek B. S., Novak S., . Horvat P., Maric V. Bioprocess kinetics in a horizontal rotating tubular bioreactor. Bioprocess Biosyst Eng, 2004. V. 26. 169–175.
11. Rami Tzafriria, Elazer R. Edelmana On the validity of the quasi-steady state approximation of bimolecular reactions in solution. Journal of Theoretical Biology, 2005. V. 233. 343–350.
12. Banerjee I., Modak Jayant M., Bandopadhyay K., Das D., Maiti B.R. Mathematical model for evaluation of mass transfer limitations in phenol biodegradation by immobilized *Pseudomonas putida*. Journal of Biotechnology, 2001. V. 87. 211–223.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛИТЫ С ОСНОВАНИЕМ

Кочанов А.Н., Раковская М.И.

(Петрозаводский государственный университет)

Решается задача определения деформаций и сил в заранее неизвестной зоне контакта плиты и основания с использованием метода конечных элементов. Конечно-элементные модели плиты и основания предполагаются заданными. Алгоритм решения верифицирован, в частности, с использованием результатов испытаний плит дорожных покрытий.

THE NUMERICAL MODELING AND FULL-SCALE EXPERIMENT OF CONTACT INTERACTION BETWEEN A PLATE AND A BASIS

*Kochanov A.N., Rakovskaya M.I.
(Petrozavodsk State University)*

The problem of determination of deformations and forces within unknown beforehand contact area of a plate and basis is solved. The finite-element models of a plate and a basis are assumed to be given. The results of tests of plates are used for verification of algorithm.

В настоящее время интенсивно разрабатываются методы решения задач, появляющихся при моделировании контактного взаимодействия деформируемых тел [1]. В данном сообщении рассматривается задача контактного взаимодействия плиты с основанием и конечно-элементная методика ее решения. При этом ставилась цель разработать методику, которая позволяла бы использовать уже внедренные в проектных организациях программные комплексы конечно-элементного анализа.

Необходимость в такой методике появляется, например, при расчете плит покрытий автомобильных дорог и аэродромов. Перемещения поверхности плиты ограничены условиями возникновения контакта с основанием, область контакта заранее неизвестна. Предполагается, что конечно-элементные модели плиты и основания заданы, плита и основание соединены друг с другом односторонними связями. Плита может иметь произвольную форму и переменную толщину. Задача заключается в определении как зоны контакта, так и деформаций и сил в зоне контакта.

Методика моделирования базируется на использовании принципа дополненности, который выполняется во всех односторонних контактах. Такой подход хорошо известен [2], однако сложности его компьютерной реализации обусловлены недостаточной эффективностью алгоритмов решения собственно линейной задачи о дополненности [3].

В связи с этим предлагается использовать более эффективный при решении задач рассматриваемого класса алгоритм, изложенный в работах [4, 5]. Алгоритм органично вписан в методику конечно-элементного анализа конструкций и может быть использован при численном моделировании механических систем с односторонними связями [6].

Разработанная методика позволяет избежать применения итерационных процедур, которая реализована в настоящее время в известных программных комплексах. Предложенный подход эффективен в вычислительном отношении, не требует создания принципиально новых программных комплексов, обладает необходимой для применения в инженерной практике физической прозрачностью.

Для подтверждения достоверности результатов моделирования по предлагаемой методике был проведен анализ их адекватности результатам испытаний плит дорожных покрытий [7].

Основной задачей экспериментального исследования являлось изучение напряженного состояния тонких предварительно напряженных плит при эксплуатационной нагрузке и определение возможности применения их в качестве покрытия автомобильных дорог. Исследовались плиты размерами $4.5 \times 1 \times 0.08$ м как в условиях обеспечения связи плит между собой, так и без нее. При испытаниях применялся автопоезд с нагрузкой на заднюю ось 92,56 кН. Определялись перемещения точек плит, площадь контакта плит с основанием и другие параметры [7].

Согласованность результатов моделирования и экспериментальных исследований подтверждает правомерность теоретических положений, положенных в основу предлагаемой методики.

Литература

1. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта. – СПб.: Политехника, 2003. 233с.
2. Ловцов А.Д. Алгоритмы линейной задачи о дополнителности в применении к расчету систем с односторонними связями / Тез. Докл. XX междунар. конф. «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Метод конечных и граничных элементов», 24-26 сент. 2003г., СПб., 2003. С.128-129.
3. Pfeiffer F., Glocker Ch. Cjntacts in multibody systems // J.Appl.Math. and Mech., 2000. Vol. 64(5). P.773-782.
4. Колесников Г.Н. Шаговый алгоритм решения линейной задачи о дополнителности с положительно определенной матрицей коэффициентов // Вестник Поморского университета. Естественные и точные науки. 2004. № 1. С.78-82.
5. Раковская М.И. Об одном алгоритме решения линейной задачи о дополнителности / Петрозаводск: ПетрГУ, 2004, 10с. Деп. В ВИНТИ 06.08.2004, № 1378-В2004.
6. Раковская М.И. Численное моделирование контактного взаимодействия основания и плит покрытия временных автомобильных дорог // Автореф. дис. канд. техн. наук. – Петрозаводск, ПетрГУ, 2004. 17с.
7. Кочанов А.Н. Исследование некоторых направлений совершенствования kolejных покрытий из железобетонных плит на лесовозных дорогах. / Дисс. канд. тех. наук. – Ленинград, 1979. –233с.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРЕССОВАННОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СЕТКИ ПРИ СЖАТИИ

Крапивин К.Ю., Ломакин Е.В.

Московский Государственный Университет

Процесс пластического деформирования многих материалов включает в себя не только механизм скольжения, но также развитие существующих и образование новых элементов несплошности, разрушение и перемещение структурных элементов, приводящих к дилатансии среды[1].

Теоретическое описание процесса дилатансии обычно основывается на использовании в условии пластичности гидростатической компоненты напряжений[2-7]. На основе численного моделирования поведения

пористого материала с использованием трехмерной ячеистой структуры установлено, что характеристики пластического разрыхления зависят не только от величины среднего нормального напряжения, но и от параметра вида напряженного состояния, характеризуемого отношением среднего напряжения к интенсивности касательных напряжений [8-10]. Этот вывод подтверждается результатами многочисленных экспериментальных исследований пластических свойств материалов, содержащих различного рода неоднородности структур [11-13].

В основе работы лежат экспериментальные зависимости материалов применяемых в устройствах, используемых при бурении и гидравлическом сжатии нефтяных скважин. Данные материалы являются металлическими сплавами и имеют проволочную структуру, на рис.1 показаны два различных образца данного материала после и до эксперимента на сжатие.



Рис.1. Образцы материала после и до эксперимента

Проведены эксперименты на одноосное свободное и стесненное сжатия, реализующие два различных вида однородного напряженного состояния, диаграммы приведены на рис.2. Значения предельных нагрузок берутся с учетом остаточной деформации 0.3%, предел текучести σ_y равен 0.027 ГПа.

При малых воздействиях, как видно из рис.2, материал ведет себя линейно, согласно закону Гука. Можно убедиться, что данный материал в рамках погрешностей эксперимента удовлетворяет условию пластичности Мизеса: коэффициент Пуассона равен $\nu = 0.33$, предельная нагрузка p^* в условиях стесненного сжатия 0.05 ГПа, вдвое превышает значение σ_y ,

что и должно следовать из условия Мизеса, $p^* = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \sigma_y$.

Характер же упрочнения для данного материала зависит от структурного строения, которое изменяется в условиях нагружения. Мы предлагаем возможный подход к описанию характеристик пластического деформирования таких материалов в зависимости от вида напряженного состояния.

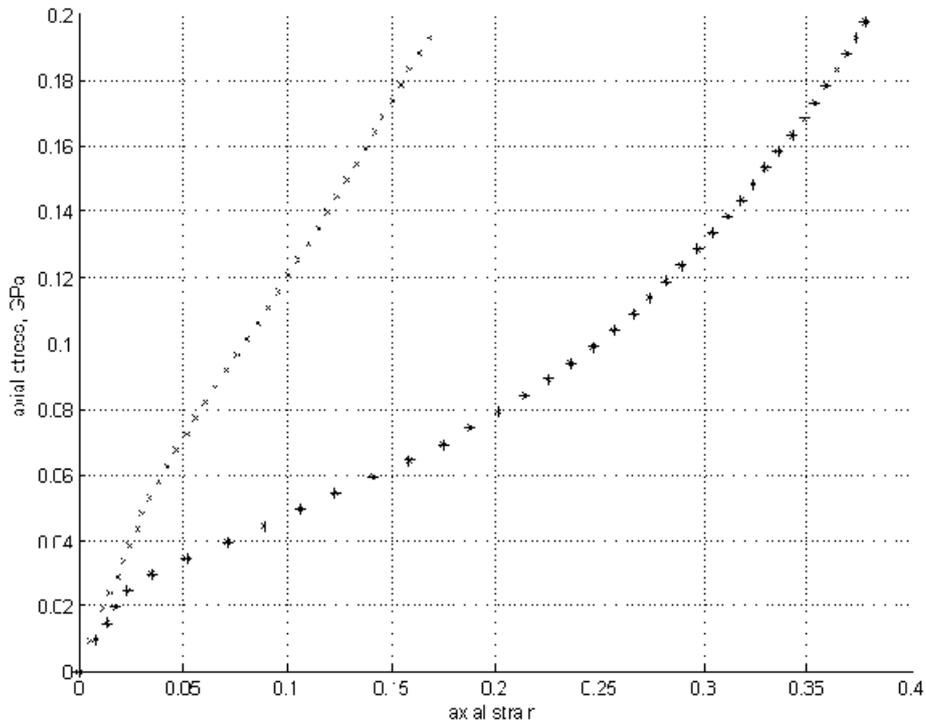


Рис.2. Экспериментальные зависимости, * -свободное сжатие, x – стесненное сжатие.

1. Условие пластичности для дилатирующей среды можно записать в обобщенном виде [12]:

$$\Phi(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k. \quad (1.1)$$

Здесь $\xi = \sigma / \sigma_0$ - параметр вида напряженного состояния, характеризующий в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды, $\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$ среднее нормальное напряжение, $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}$ - интенсивность касательных напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$.

При $f(\xi) = 1$ условие (1) совпадает с условием пластичности Губера-Мизеса, $\sigma_0 = k$. Если функцию $f(\xi)$ принять в виде.

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{1 + \alpha^2 \xi^2}{1 + (\alpha/3)^2}}, \quad (1.2)$$

то получим условие пластичности Грина [5,14]:

$$\sigma_0^2 + \alpha^2 \sigma_m^2 = k^2 \left(1 + (\alpha/3)^2\right),$$

где параметр α определяет форму поверхности текучести в плоскости σ, σ_0 и равняется отношению полуосей эллипса. При этом считается что коэффициент k представляет собой функцию параметров, характеризующих пористость среды, предлагается взять зависимость следующего вида:

$$k = \sigma_y + \beta \varepsilon / \varepsilon_d + \gamma \frac{(\varepsilon / \varepsilon_d)^\omega}{1 - (\varepsilon / \varepsilon_d)^\omega}, \quad (1.3)$$

где $\varepsilon = \sqrt{[1 + (\alpha/3)^2] \left[\varepsilon_0^2 + \varepsilon^2 / \alpha^2 \right]}$ - эквивалентная пластическая деформация, $\varepsilon_0 = \sqrt{2/3} e_{ij}^p e_{ij}^p$ - интенсивность пластических деформаций, $\varepsilon_d = -\ln \rho / \rho_0$ - параметр пористости материала, равный его плотности отнесенной к плотности того же материала сплошной структуры.

Из вида (1.3) зависимости при захлопывании пустот в среде следует неограниченное возрастание значения предела текучести, и описание поведения такого материала уже выходит за рамки предложенной модели.

Данная модель предлагается для определенной структуры материала или для характерного вида несплошности материала. В (1.3) величина ε_d изменяется в условиях нагружения и зависит от вида напряженно-деформированного состояния ξ .

Можно ввести эквивалентное напряжение $\sigma \equiv \sqrt{\frac{\sigma_e^2 + \alpha^2 \sigma_m^2}{1 + (\alpha/3)^2}}$. При этом

эквивалентная пластическая деформация ε является работой на пластических деформациях, сопряженная с σ , $\sigma \varepsilon = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p$. В терминах σ для функции $f(\xi)$ вида (1.2) условие пластичности (1.1) запишется в виде:
 $\sigma = k.$ (1.4)

Принимая ассоциированный с условием (1.1) закон течения $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = h' \partial \Phi / \partial \sigma_{ij}$ получим связь скоростей пластических деформаций с напряжениями

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = h' \left(\frac{1}{3} \Lambda(\xi) + \frac{3}{2} \lambda(\xi) S_{ij} / \sigma_0 \right), \quad (1.5)$$

где $\Lambda(\xi) = f'(\xi)$, $\lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi)$, модуль упрочнения $h' = \varepsilon_0 / \sigma_0 \sigma \left(1 + (\alpha/3)^2 \right).$

Согласно (1.5) можно получить выражения для интенсивности скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_0 = h' \lambda(\xi)$, и скорости объемной деформации $\dot{\varepsilon} = h' \Lambda(\xi)$. Из данных выражений видно что функция $\lambda(\xi)$ должна быть положительно определенной. При этом скорость остаточной

объемной деформации пропорциональна интенсивности скоростей деформации

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \Lambda(\xi) / \lambda(\xi). \quad (1.6)$$

Коэффициент пропорциональности $\Lambda(\xi)/\lambda(\xi)$, в общем случае зависит от параметра вида напряженного состояния ξ , т.е. принимает различные значения для разных соотношений между нормальными и касательными напряжениями в среде. В случае, когда функция $f(\xi)$ представляется выражением вида (1.2), коэффициент в соотношении (1.6) равен $\alpha^2 \xi$. Коэффициент Пуассона, выраженный через параметр эллиптичности α будет

$$\nu = \frac{1/2 - (\alpha/3)^2}{1 + (\alpha/3)^2} \quad (1.7)$$

2. В условиях стесненного сжатия, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, ε_1 – осевая деформация, интенсивность касательных напряжений равна $\sigma_0 = |\sigma_2 - \sigma_1|$. Из (1.5) можно выразить напряжения σ, σ_0 через σ_1 и записать условие (1.1) в терминах σ_1 :

$$\sigma = \sigma_1 - \frac{4}{9} \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)} \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{3}{2} (\sigma - \sigma_1). \quad (2.1)$$

В нашем случае $\Lambda(\xi)/\lambda(\xi) = \alpha^2 \xi$, подставляя это выражение в (2.1) получим

$$\xi^* = \frac{\sigma}{\sigma_0} = 6(\alpha/3)^2, \quad \sigma_0 = \frac{6(\alpha/3)^2}{1 + 4(\alpha/3)^2} \sigma_1.$$

Подставляя значение $\xi = \xi^*$ в уравнение (1.4), представляющее уравнение эллипса в плоскости σ, σ_0 можно получить квадратное уравнение

$$4(\alpha/3)^4 + (5 - 9\sigma_1/\sigma_y)(\alpha/3)^2 + 1 = 0. \quad (2.2)$$

Из полученного уравнения, зная из экспериментальных зависимостей предел текучести σ_y диаграммы на свободное сжатие и предельное значение σ_1 из стесненного сжатия, можно найти параметр эллиптичности α и тем самым определить характеризуемый параметром ξ^* вид напряженного состояния, реализующийся в условиях данного эксперимента.

В условии свободного сжатия среднее напряжение σ и интенсивность напряжений σ_0 будут: $\sigma = 1/3 \sigma_1$, $\sigma_0 = \sigma_1$, то есть $\xi = \frac{1}{3}$, и для функции

$f(\xi)$ вида (1.2) условие пластичности (1.1) совпадает с условием Губера-Мизеса, $\sigma_0 = k$.

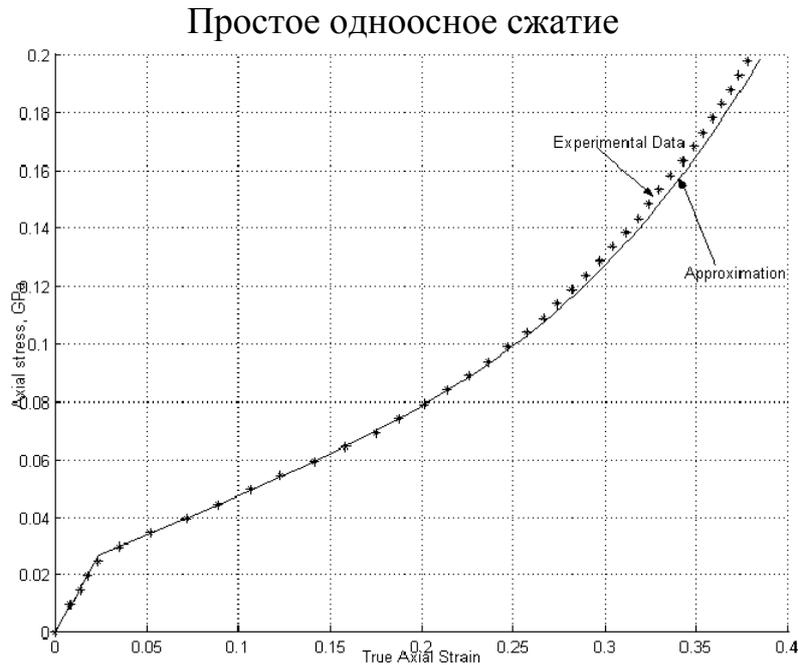


Рис.3. Сравнение экспериментальных данных на простое одноосное сжатие (обознач. “звезда”) с аппроксимирующей кривой (обознач. сплошной линией) в условиях свободного сжатия.

По горизонтальной оси отложена полная деформация, упругая и пластическая составляющие.

Остаточная объемная деформация $\varepsilon = \varepsilon_1(1 - 2\nu)$, где ε_1 – осевая пластическая деформация. Используя связь (1.6), учитывая, что $\xi = \frac{1}{3}$, и выражение для коэффициента Пуассона (1.7) можно записать эффективность пластических деформаций ε через осевую пластическую деформацию ε_1 :

$$\varepsilon = \varepsilon_1.$$

Таким образом, в условии свободного сжатия условие пластичности (выражения (1.1), (1.2), (1.4)) представляет собой аппроксимацию экспериментальной зависимости осевое напряжение – осевая пластическая деформация.

Данная аппроксимация позволяет определить, например, методом наименьшего квадратичного отклонения параметры β, γ, ω , входящие в выражение (1.3).

3. Здесь проводятся сравнения предсказуемой реакции напряжений от деформации предложенной модели с экспериментальными зависимостями. Кривые получены с помощью конечно-элементного кода LS Dyna.

Стесненное одноосное сжатие

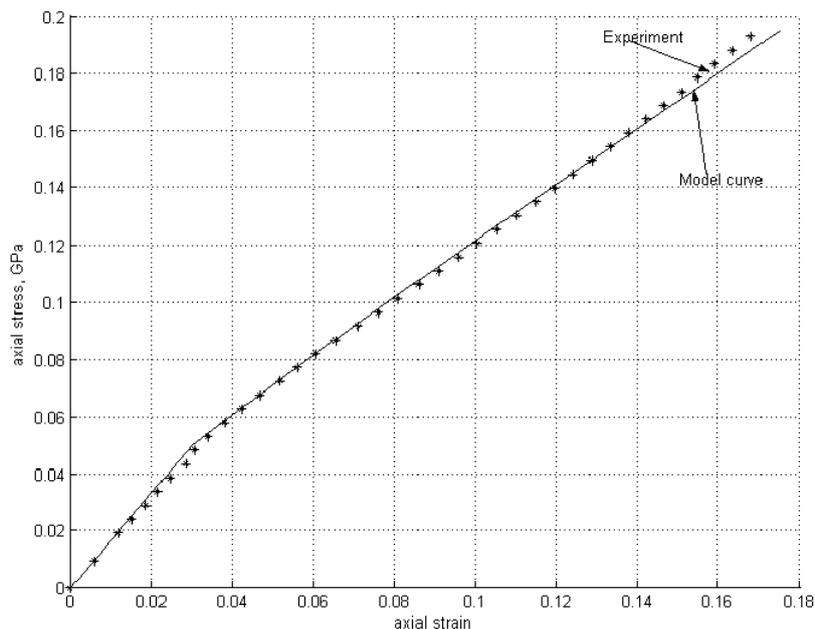


Рис.4. Сравнение экспериментальной (обознач. “звезда”) и полученной из численного эксперимента (обознач. сплошной линией) зависимостей в условиях стесненного одноосного сжатия.

Литература

1. Reynolds O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact // Philos. Mag. Ser 5. 1885. V. 20. № 127. P. 469-481.
2. Друккер Д., Прагер В. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование // Механика. Новое в зарубежной науке. Определяющие законы механики грунтов. М.: Мир, 1975. С.166-177.
3. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. с.681-689.
4. Соколовский В.В. Теория пластичности. 3-е изд. М.: Высш. шк., 1969, 608 с.
5. Грин Р.Дж. Теория пластичности пористых тел // сб. Перев. Механика. М. Ж Мир, 1973. №4 с. 109-120.
6. Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part I Yield Criteria and flow rules for porous ductile media // Trans.of the ASME. J of Eng. Materials and techn. 1977. v 99. p.2-15.
7. Tvergaard V., Needleman A. Analysis of a cup cone fracture in a round tensile bar // Acta metallurgica. 1984. V. 32. No 1. P. 157-169
8. Kopic J. Needleman A void growth and coalescence in porous plastic solids // Int. J. of solids and structures. 1988. V. 24. P. 835-853.
9. Kuna M., Sun D.Z. Three dimensional cell model analysis of void growth in ductile materials // Int. Journal of fracture. 1996. V.81. P. 235-258.
10. Worswick M.J., Pick R.J. Void growth and constitutive softening in a periodically voided solid // J. Mech. and Phys. Solids 1990. V. 38 №5. P. 601-625.
11. Ломакин Е.В. Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. №4. С.92-99.

ON UNIFICATION OF EXPERIMENTAL METHODS OF THE ESTABLISHMENT OF DETERMINING CHARACTERISTICS OF DYNAMIC AND STATIC DURABILITY OF MEDIA AT ALLOCATED LOADINGS

Krivosheev S.I., Fedorovsky G.D.

(Scientific research institute of mathematics and mechanics of St.-Petersburg state university, Russia)

The analysis and approbation of unification methods of experimental establishment of determining characteristics of dynamic and static durability of materials are executed in case of usage of even allocated dynamic and static loadings. It is established, that such approach allows to simplify and unify schemes of experiences and also to increase correctness of finding of determining properties.

Потребность оптимизации экспериментального исследования возникает особенно остро в моменты усложнения или расширения задачи исследования. Круг и глубина изучения механического поведения материалов в динамических процессах постепенно растет. Расширяются и исследования в статических условиях, необходимость которых связана во многом с потребностью получения дополнительных характеристик для полного определения динамических параметров. Известно, что при проведении динамических испытаний часто, особенно при необходимости создания коротких импульсов, непосредственно нагружающих образец, проще создать распределенную нагрузку, а при выполнении статических опытов обычно применяют сосредоточенные нагрузки.

В целях унификации, повышения корректности и удобства проведения испытаний нами были усовершенствованы и оптимизированы некоторые традиционные экспериментальные методики.

1. О методиках исследования трещиностойкости на пластинах с надрезами

Один из распространенных подходов определения динамической трещиностойкости базируется на испытании образцов-пластин с имитирующим трещину срединным сквозным надрезом при приложении равномерно распределенной ударной импульсной нагрузки по берегам надреза [1-3] (рис. 1), измерении размера проросшей трещины, установлении скоростей прохождения волны, определении плотности материала образца и проведении статического растяжения до разрыва стержня с поперечными надрезами (рис. 2).

Характеристика статической трещиностойкости (например, K_{1c} – коэффициент интенсивности напряжений) устанавливается известным образом [4] по параметрам статического опыта, а динамические свойства, например, инкубационное время τ определяется путем численного решения соответствующих краевых задач механики [1, 2] для пластины с надрезом при пороговом импульсе нагрузки соответствующем нулевому

прорастанию трещины при использовании «инкубационного» критерия прочности [1] и значения K_{1c} .

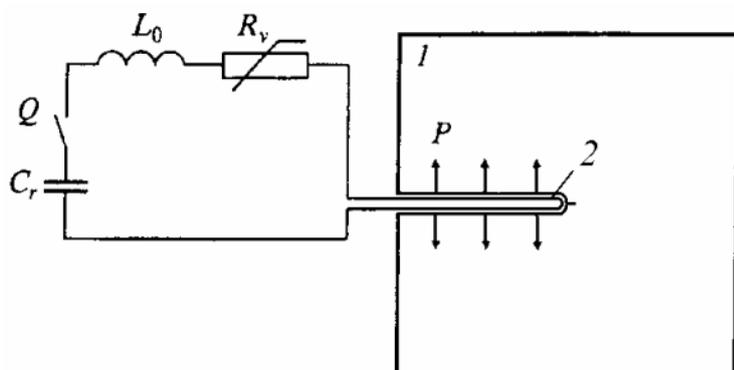


Рис. 1. Принципиальная схема динамического нагружения (1 – пластина, 2 – нагружающая шина, слева – электрическая схема магнитно-импульсной установки [2])

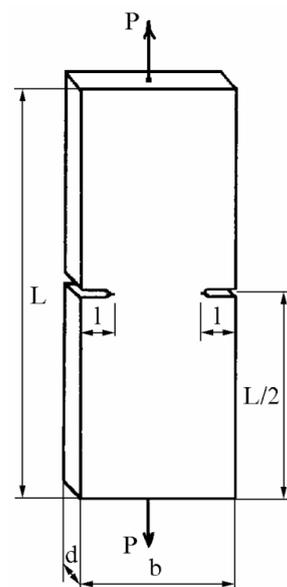


Рис. 2. Образец и схема нагружения для определения статической трещиностойкости

Характеристика статической прочности может быть определена и на образце-балке с надрезом (образце Шарпи) при трехточечном изгибе. Опыты показывают, что при использовании такого метода значение K_{1c} (при изгибе) для ряда материалов, например, горных пород получаются в несколько раз выше, чем при растяжении, что связано, по-видимому, с разными свойствами сред при растяжении и сжатии.

Какая же схема статического испытания верная, соответствующая - «парная» схеме динамического испытания? Даже «внешне», по образцам и по схеме нагружения, оба этих способа нахождения статической прочности не похожи на методику динамического нагружения (образец и схему приложения нагрузки).

Нами рассмотрен и частично апробирован способ определения статической трещиностойкости на образце-пластине с надрезом – образце идентичном применяемому в динамическом опыте, с приложением равномерно распределенной квазистатической нагрузки по берегам надреза, путем одной из возможных, -приближенной реализации такого вида нагружения.

В надрез образца вставляется тонкостенная емкость с водой (обыкновенная полимерная бутылка для напитков). В испытательной машине производится сжатие емкости в части вне образца, до разрушения последнего. Величина распределенной нагрузки по поверхностям надреза

может быть приближенно, по закону Паскаля для тонкостенных сосудов, установлена по давлению в емкости, которое можно определить либо по манометру, либо, без манометра, прикладывая нагрузку через известную площадку, – путем вычисления давления: деля величину приложенного усилия на величину площади площадки. Делается предположение, что значение K_{1c} может быть вычислено по формуле для бесконечной плоскости с надрезом, берега которого нагружены равномерно распределенной нагрузкой ($K_{1c} = \sigma \sqrt{\pi \cdot l}$). Результаты оказались близкими с имеющимися ранее данными, полученными по предшествующим методикам.

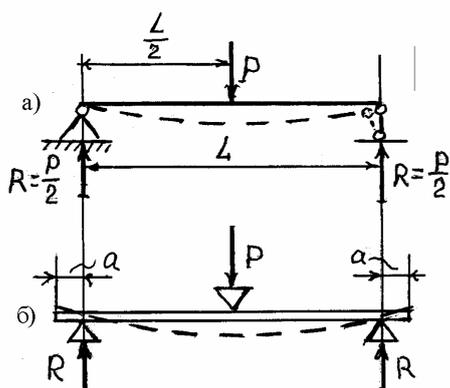


Рис.3. Схема трехточечного изгиба (а) и его реализация (б)

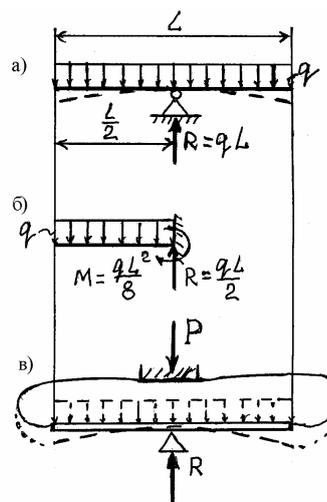


Рис. 4. Схема изгиба балки с одной опорой распределенной нагрузкой (а), принципа работы (б) и реализации нагружения

2. О методиках исследования прочностных свойств, текучести и трещиностойкости на балках

Обычно применяют схему трехточечного изгиба балки путем приложения сосредоточенных нагрузок (рис. 3а). При этом в эксперименте, как правило, используют три призмы: две опорные и одну для передачи статической или ударной нагрузки (рис. 3б), которая в случае ударной нагрузки является бойком. К достоинствам такого подхода следует отнести: малый расход материала; возможность разрушать особо прочные материалы; рассчитывать динамические характеристики по схеме квазистатики. Основными недостатками подхода являются: изменение длины балки во время испытания за счет проскальзывания по опорам при изгибе; несоблюдение, вообще говоря, наличия шарниров в опорах (и стержня в правой опоре), подразумевающихся расчетной схемой; необходимость учета инерционных свойств бойка в динамическом опыте, потребность варьирования его размеров и веса для оценки влияния инерционности; потребность изготовления балки большей длины, чем это

требуется по расчетной схеме (чтобы балочка не соскочила с опор, с концами длиной a), чем по идеальной схеме, поведение которой в динамическом опыте иное и требует специальной оценки.

Использование схемы изгиба балки с одной опорой, нагруженной распределенной нагрузкой (рис. 4а) имеет ряд существенных дополнительных преимуществ. Механическое поведение каждой половинки балки, соответствует изгибу жестко заземленной балки половинной длины (рис.4б). Такая схема просто реализуется путем использования в качестве опоры одной призмы и применения для создания распределенной нагрузки, в случае получения квазистатических характеристик, - тонкостенной емкости, с передачей на нее усилия от нагружающего устройства (разрывной машины) (рис. 4в). Величину распределенной нагрузки можно определить по давлению в сосуде.

Динамическая (безинерционная) нагрузка создается через наложенную на балку гибкую шину нагружающего устройства магнитно-импульсной установки.

Таким образом достигается унификация статических и динамических испытаний балок.

Определение прочности квазихрупких материалов и предела текучести других можно проводить по данным испытаний балок без надреза.

Балки с надрезами могут испытываться для определения статической и динамической трещиностойкости.

В заключение отметим, что создание распределенной нагрузки посредством применения гибкого сосуда в различных квазистатических опытах позволяет путем варьирования площади передачи усилия, добиваться максимальных (точных) отсчетов на шкале силоизмерителя (при увеличении площади растет значение усилия). Такой способ испытания позволяет также провести одновременно несколько параллельных испытаний, посредством передачи давления сосуда в нагружающем устройстве сразу на несколько образцов.

Разумеется, существуют другие способы создания распределенной нагрузки.

Литература

1. Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. - 132 с.
2. Кривошеев С.И. Магнитно-импульсная методика тестирования материалов при импульсном нагружении// ЖТФ, 2004, том 75, вып. 3. – С. 47-53.
3. Кривошеев С.И., Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Федоровский Г.Д., Шнеерсон Г.А. Исследование пороговых характеристик разрушения материалов при кратковременных нагрузках, создаваемых электромагнитными силами. - Тр. Междун. конф. «У Забабахинские научные чтения» (Снежинск, 20-26 сент. 1998.): Снежинск Челябинской обл. Изд-во РФЯЦ - ВНИИТФ, 1999, Ч.1.- - С. 706-713.

4. Керштейн И.М., Ключников В.Д., Ломакин Е.В., Шестериков С.А. Основы экспериментальной механики разрушения. - М.: Изд. Моск. ун-та, 1989. - 140 с.

УДК 534.113; 534.211; 534.511.4

ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ С ВЕТВЛЕНИЯМИ. ПРОЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЭФФЕКТОВ

Крылова О.В.

(Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Россия)

ANALYSIS OF DISTRIBUTION OF ENERGY FLOWS IN SEMI-INFINITE BEAM STRUCTURES WITH BRANCHINGS AND RESONANT EFFECTS

Krylova O.V.

(St.-Petersburg State Marine Technical University, Russia)

Алгоритм метода граничных уравнений, разработанный в [1-2], применяется к исследованию распределения потоков энергии в одномерных полубесконечных пространственных конструкциях, состоящих из прямых трубчатых стержневых элементов - волноводов (трубопроводы пространственной конфигурации с ветвлениями), между этими элементами. Обнаружены и проанализированы резонансные явления, возникающие вследствие эффектов локализации волнового движения в пределах стержней конечной протяженности.

1. Введение. На практике трубопровод представляет собой достаточно сложную колебательную систему. Его расчетная модель в одномерной постановке имеет вид пространственной составной конструкции, элементами которой являются прямые длинные стержни постоянного кольцевого поперечного сечения. МГУ одинаково пригоден для анализа стоячих волн в таких конструкциях конечной длины и для анализа распространения волн в бесконечно длинных конструкциях, когда стержни образуют упругие волноводы. Вибрационные расчеты на основе разработанного алгоритма МГУ позволяют: 1) определить амплитуды колебаний; 2) найти потоки энергии, переносимые изгибными в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, крутильными и продольными бегущими упругими волнами, распространяющимися по стержням и между ними в точках стыковок и ветвлений, при заданных условиях возбуждения; 3) определить, какой вид деформации является доминирующим в переносе энергии на каждом из стержней конструкции.

Стержни таких конструкций чаще всего сопряжены друг с другом под прямыми углами, и все многообразие вариантов стыковок можно свести к наиболее общему случаю. В данной работе проанализированы колебательные процессы, происходящие в двух типовых полубесконечных

конструкциях: с пространственным ветвлением (конструкция №1) и со сложным пространственным ветвлением (конструкция №2), см. рис.1. Конфигурации этих конструкций представляют несколько вариантов типичных ветвлений, характерных для сложных трубопроводных систем. В результате исследования обнаружено, что такие полубесконечные составные конструкции проявляют резонансные свойства, присущие конечным конструкциям. Помимо «сплошного спектра частот», который определяет связь между частотой возбуждения и волновым числом распространяющейся волны, существует дискретный спектр частот собственных колебаний. Соответствующие этим частотам моды колебаний получили название ловушечных [3]. В конструкции со сложным пространственным ветвлением выявлены эффекты локализации волнового движения.

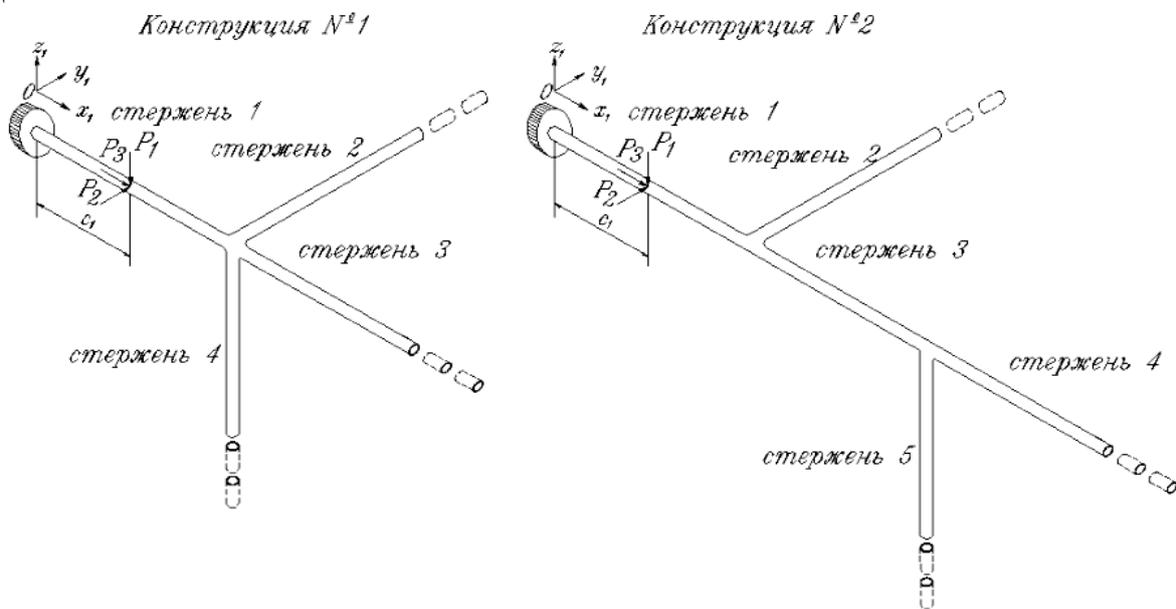


Рис. 1. Полубесконечные стержневые конструкции.

2. Особенности распределения потоков энергии. Стержни конструкций имеют следующие параметры (k – номер стержня): $l_1=1$ м, $l_3=1$ м – длины; $d_k=0,0275$ м – диаметры; $\alpha_k=(d_k-2h_k)/d_k=0,8182$; $\rho_k=7800$ кг/м³ – плотности материала; $E_k=2,1 \cdot 10^{11}$ Па – модули Юнга; $G_k=8 \cdot 10^{10}$ Па – модули сдвига; $\mu_k=0,3$ – коэффициенты Пуассона. Пусть возмущающая нагрузка в виде сосредоточенной гармонической силы действует на середине первых стержней конструкций ($c_1=l_1/2$) в трех взаимно перпендикулярных плоскостях: P_1 (xOz) или P_2 (xOy) – поперечная; P_3 (xOy) – продольная. Граничные условия соответственно сформулированы на левых границах первых стержней. Алгоритм составления условий стыковок представлен в [1]. СЛАУ для конструкции №1 будет иметь размерность 60×60 , для конструкции №2 – 84×84 .

Пусть возмущающие силы в каждом отдельном случае нагрузки действуют с одинаковой частотой $f=40$ Гц. Колебания происходят в

пространственной форме. Длины продольных волн ($\lambda_{uk}=128$ м) оказались гораздо больше длин крутильных волн ($\lambda_{\phi k}=79,6$ м), длины других волн имеют значения: $\lambda_{wk}=\lambda_{w'k}=\lambda_{vk}=\lambda_{v'k}=2,67$ м. Соотношения между длинами волн деформаций соответствующих типов зависят от частоты действующей нагрузки. В точке приложения сил на первых стержнях конструкций возникают потоки энергии, переносимые упругими волнами соответствующих типов в положительных направлениях стержней.

В точках ветвлений, естественно, происходит перераспределение потоков энергии как между стержнями, образующих ветвления, так и между перечисленными типами распространяющихся волн. Характер таких перераспределений зависит и от конфигурации конструкции, и от рассматриваемого способа возбуждения колебаний (направления действующей нагрузки). Количественная оценка потоков энергии представлена в табл. 1 (P_1), 2 (P_2) и 3 (P_3).

Оказалось, что в конструкции №1 действие поперечной силы P_1 или P_2 вызывает наибольшие колебания стержней конструкции, лежащих в плоскости нагрузки. Причем, суммарный поток энергии максимален в ответвлении, направление которого совпадает с направлением действия силы. И в том, и в другом случае нагрузки колебания стержня, лежащего в плоскости, перпендикулярной плоскости возбуждения, малы (на стержне 2 поток энергии преимущественно распространяется крутильными волнами). Действие же продольной силы P_3 на данной частоте вызывает в этой конструкции несущественные колебания. Суммарный поток энергии максимален в стержне 3, который можно считать продолжением стержня 1.

В конструкции же №2 при действии поперечной силы P_1 или P_2 , в отличие от предыдущей конструкции, суммарный поток энергии со стержня 1 в наибольшей степени переносится на стержень 2. При стыковке стержней 3, 4, 5 в зависимости от направления действующей нагрузки распространение суммарных потоков энергии различно. А именно, в случае нагрузки силой P_1 суммарный поток энергии в большей степени распространяется на стержень 5, переносимый преимущественно изгибными волнами в плоскости, перпендикулярной плоскости нагрузки, и продольными. На стержень 4 суммарный поток энергии, переносимый преимущественно изгибными волнами в плоскости нагрузки, распространяется немного меньше. В случае же нагрузки P_2 основная часть суммарного потока энергии, переносимого изгибными волнами в плоскости нагрузки, распространяется на стержень 4. Его величина существенно больше, чем на стержне 5. При действии продольной силы P_3 суммарный поток энергии в основном распространяется на стержень 3, а затем на стержень 4, являющиеся продолжениями стержня 1. Выяснилось, что в пределах стержня 3 следующие потоки энергии имеют отрицательные величины: при действии силы $P_1 - N_{v3}(\xi_3)$, при $P_2 - N_{\phi 3}(\xi_3)$, а при $P_3 -$ и $N_{w3}(\xi_3)$, и $N_{\phi 3}(\xi_3)$. Такие явления обуславливают эффекты

локализации волнового движения на участках стержней между точками стыковок. Таким образом, на определенных частотах действия соответствующих возбуждающих нагрузок возникают достаточно интенсивные колебания того или иного типа. Суммарный же поток энергии, как и должно быть, положителен.

Таблица 1

Поток энергии $\cdot 10^{-8}$, Вт	Конструкция №1				Конструкция №2				
	k								
	1	2	3	4	1	2	3	4	5
N_{wk}	5240	23.62	1615.6	4	48420	32499	15174	6064.9	452
N_{vk}	0	0.003	0.001	1885	0	7	-9.8	95	6775.6
N_{uk}	0	0.071	0.095	1663	0	2	0.1	1.4	2331.8
$N_{\phi k}$	0	48.34	0.095	0	0	172	575.5	19	0.3
$N_{\Sigma k}$	5240	72	1616	3552	48420	32680	15740	6180	9560

Таблица 2

Поток энергии $\cdot 10^{-8}$, Вт	Конструкция №1				Конструкция №2				
	k								
	1	2	3	4	1	2	3	4	5
N_{wk}	0	4	0.001	24	0	4.5	0.6	0.25	242
N_{vk}	5240	1885	1615.6	0.003	4754	1859	1195	931	0.3
N_{uk}	0	1663	0.095	0.071	0	1700	0.11	0.09	0.1
$N_{\phi k}$	0	0	0.095	48	0	0.001	-5.14	3.93	13
$N_{\Sigma k}$	5240	3552	1616	72	4754	3563	1191	936	255

Таблица 3

Поток энергии $\cdot 10^{-10}$, Вт	Конструкция №1				Конструкция №2				
	k								
	1	2	3	4	1	2	3	4	5
N_{wk}	0	0.0003	0.05	0.0003	0	0.395	-0.39	0.25	0.04
N_{vk}	0	6.5151	0.05	6.5151	0	6.769	0.34	0.29	6.39
N_{uk}	400	0.0144	379.66	0.0144	400	0.009	387.31	380.27	0.01
$N_{\phi k}$	0	0.0119	0	0.0119	0	0.001	-0.01	0.002	0.004
$N_{\Sigma k}$	400	10	380	10	400	7.17	387.26	380.812	6.45

3. Зависимость величины потока энергии от частоты возмущающей силы. В данном исследовании выявлены закономерности распределения потоков энергии от частоты возбуждения колебаний. Пусть силы P_1 , P_2 и P_3 действуют с частотой в диапазоне $f=15\dots 5000$ Гц. Графики суммарных потоков энергии построены по 100 точкам. Величины суммарных потоков энергии найдены в фиксированных сечениях каждого стержня рассматриваемых конструкций в точке наблюдения $\xi_k=0,6$ м.

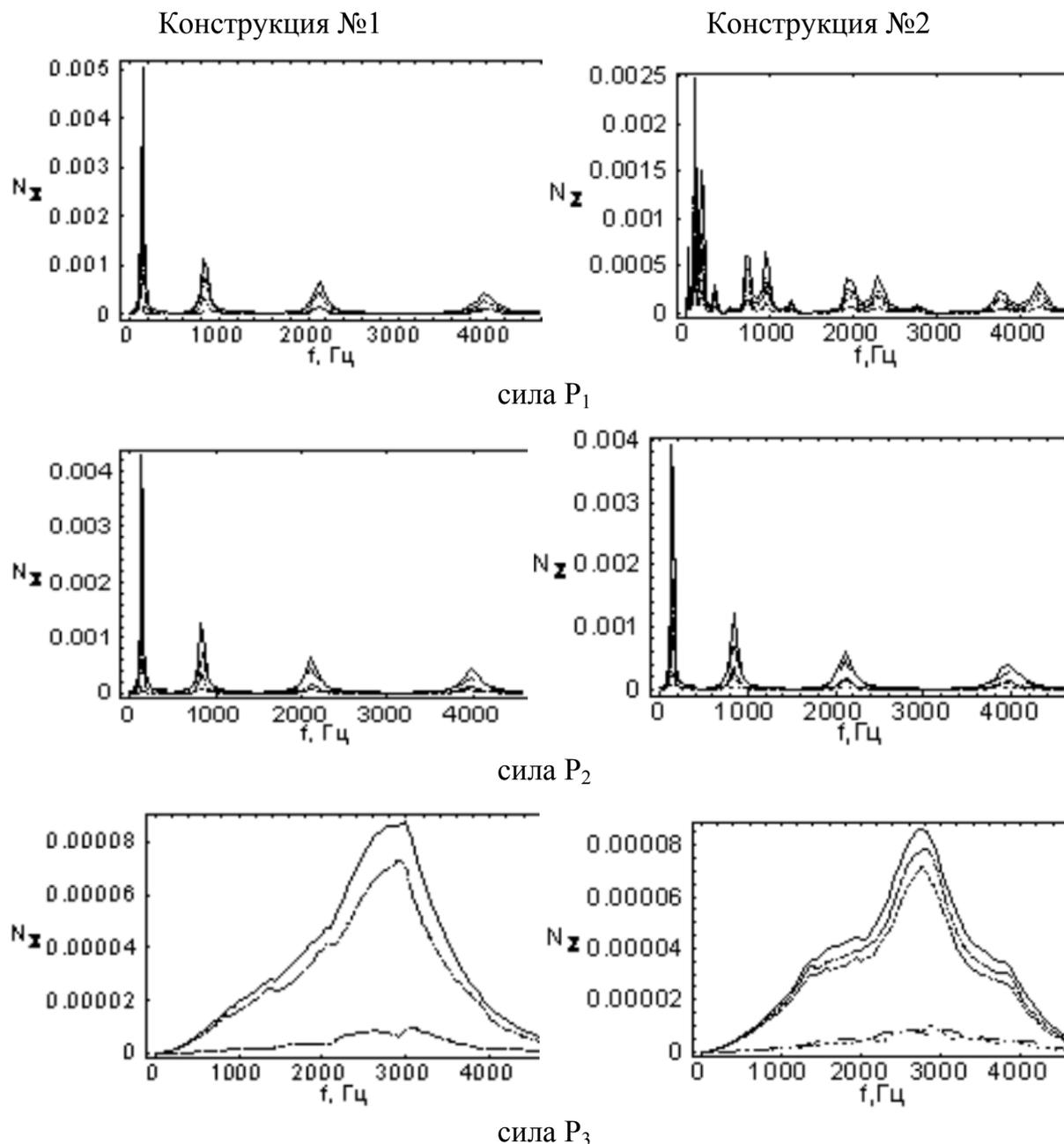


Рис. 2. Суммарные потоки энергии в зависимости от частоты:
 _____ - на стержне 1, _____ - на стержне 2; ____ . ____ . ____ - на стержне 3;
 _____ - на стержне 4; - на стержне 5

На графиках рис. 2 видно, что кривые суммарных потоков энергии на каждом стержне имеют резонансные пики вне зависимости от способа возбуждения при одних и тех же значениях частот. Это говорит о наличии дискретного спектра частот собственных колебаний в таких конструкциях. Таким образом, полубесконечные составные стержневые конструкции могут проявлять резонансные свойства, присущие конечным конструкциям.

Для конструкции №1 найденный спектр соответствует спектру средних значений собственных частот отдельно взятого стержня 1 в предположении, что его правая граница или жестко заделана, или свободна. Именно между соответствующими средними значениями частот собственных колебаний одинаковых номеров, присущих такому стержню, и наблюдаются максимумы суммарных потоков энергии на каждом стержне данной конструкции. Появление в ней такого спектра физически можно объяснить следующим образом: смежные стержни 2, 3 и 4 играют роль упругой заделки [4], и эффективные коэффициенты податливости и демпфирования могут быть найдены по полученным значениям резонансных частот.

Конструкция №2 в отличие от конструкции №1 при действии силы P_1 имеет гораздо больше резонансных пиков. Значения полученного спектра присущи частотам собственных колебаний длинного стержня в виде стыковки стержней 1 и 3, подкрепленного уже двумя упругими опорами. Параметры упругих опор для данной конструкции могут быть определены геометрическими и жесткостными характеристиками присоединенных 2 и 4, 5 стержней.

Выводы. МГУ позволяет изучать особенности распределения потоков энергии в одномерных полубесконечных пространственных стержневых конструкциях и исследовать резонансные явления в них.

Литература

1. Крылова О. В. Формирование системы линейных алгебраических уравнений в методе граничных уравнений при решении задач стационарных колебаний стержневых конструкций. СПбГМТУ. Деп. в ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова 12.01.05 ДР-3968. 7стр.
2. Крылова О. В. Анализ распространения потоков энергии в полубесконечных стержневых конструкциях методом граничных уравнений. СПбГМТУ. Деп. в ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова 12.01.05 ДР-3969. 7стр.
3. Индейцев Д. А., Сергеев А. Д., Литвин С. С. Особенности резонансных колебаний упругих волноводов с инерционными включениями // ЖТФ, 2000, т. 70, вып.8, с. 8-15.
4. Постнов В. А., Суслов В. П. Строительная механика корабля и теория упругости. Судостроение. Л., 1987.

КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

*Курков С.В., к.т.н., с.н.с.,
ООО НТП «ДИП» г. Санкт-Петербург, Россия*

Расчёт сложных конструкций предполагает необходимость моделирования контактов отдельных частей конструкции. Решению контактных задач методом конечных элементов посвящено значительное количество работ, что обусловлено важностью проблемы.

Анализ наиболее часто встречающихся расчётных случаев позволяет классифицировать их по следующим признакам.

1. По возможным сочетаниям контактирующих элементов можно выделить локальный и глобальный контакт. Локальный контакт предполагает возможности контакта строго определённых контактных пар. Основным признаком локального контакта считается малые относительные смещения контактирующих элементов, что позволяет считать топологию модели постоянной. Переменными, в этом случае, будут только геометрические параметры контакта. Имеет место в сборках. Например, посадки с натягом, шпонки и паза и т.д. Глобальный контакт имеет место в механизмах, где требуется рассматривать значительные относительные смещения контактирующих элементов, значительно превышающие размеры отдельного элемента.
2. По типу контактирующих элементов. Здесь выделяются элементы, моделирующие непосредственно контакт (контактные точки и поверхности) и специальные контактные элементы, в которых, наряду с контактными свойствами, учитываются упругие свойства и масса. К последним относятся шары, цилиндры, конусы, кольца (Рис.1в - д). Эти элементы могут вступать в контакт как с другими элементами того же типа, так и с узловыми точками. Позволяют моделировать различные элементы крепления и передающие элементы. Использование типовых контактных элементов позволяет значительно сократить размерность решаемых задач.
3. По типу контакта. Различаются обычный контакт и виртуальное кинематическое ограничение. Для обычного контакта полагается, что связь имеет неударивающий характер, упругая реакция действует только по нормали к поверхности, а также имеют место силы трения, препятствующие относительному смещению контактирующих элементов. Виртуальные кинематические ограничения могут обладать специальными искусственными свойствами, например, имитировать жёсткое или резьбовое соединение.

На рис. 1. представлены контактные конечные элементы, входящие в библиотеку конечных элементов программы “Зенит-95”.

Алгоритм формирования матриц таких элементов, входящих в общее уравнение равновесия, состоит из следующих операций.

1. Проверка условий наличия контакта.
2. Определение ориентации локальной системы координат.
3. Формирование матрицы жёсткости элемента. Основным допущением здесь является локальность упругой деформации, позволяющее определить связь между выбранным эквивалентом деформации и вектором деформационных перемещений в виде $\varepsilon = [b]\{v\}$, где $[b]$ - матрица связи деформации и узловых деформационных перемещений. Тогда выражение для матрицы жёсткости элемента запишется в виде $[k] = [b]^T k_p [b]$, где k_p - приведенная к точке контакта жёсткость элемента. Приведенная к точке контакта жёсткость для специальных элементов определяется по формулам Герца в соответствии с моделируемым случаем контакта (шар с шаром, шар с цилиндром). При этом контакт с точками и поверхностями рассматривается как контакт шара с плоскостью.
4. Определение вектора кинематических перемещений узлов $\{w\}$, определяющего перемещение узловых точек от исходного положения до момента начала контакта.
5. Вычисление вектора кинематических узловых усилий элемента $\{g\} = [k]\{w\}$.
6. Вычисление реакции в элементе и формирование матрицы демпфирования, описывающей потери на трение в элементе.

Контактные поверхности считаются безинерционными.

Построение матрицы масс специальных элементов не представляет трудностей, так как в данном случае целесообразно использование диагональной матрицы.

Затем матрицы элемента размещаются в общей системе уравнений в соответствии с общим алгоритмом МКЭ.

Процедуры построения матриц жёсткости и демпфирования элементарной поверхности, а также проблемы, связанные с возможностями изменения топологии модели в процессе вычислений, подробно рассмотрены в работе /4/.

Плоская контактная поверхность (Рис.1а) предназначена для моделирования контакта узловых точек и типовых контактных элементов с участком поверхности модели, состоящей из объёмных элементов или пластин. Условиями наличия контакта поверхности с узловой точкой являются отрицательное значение z – координаты точки в локальной системе координат КЭ и расположение точки внутри контура $ijkl$.

Осесимметричная контактная поверхность (Рис.1б), также как и предыдущий элемент, предназначена для моделирования контакта узловых точек и типовых контактных элементов с участком поверхности модели, состоящей из объёмных элементов или пластин для осесимметричных поверхностей. Необходимость присутствия такого элемента библиотеке обусловлена тем, что использование плоских поверхностей для подобных случаев приводит к большим погрешностям даже при достаточно мелких сетках, так как при смещении контактной точки от центра поверхности вектор реакции элемента точка поверхность смещается относительно оси поверхности, что приводит к нарушению симметрии. Условиями наличия контакта с узловой точкой являются расположение точки внутри контура $ijkl$, и $r \leq r(x, y)$, где r - радиус точки в локальной системе координат $r(x, y)$ - радиус поверхности в точке контакта.

Контактный шар (Рис.1в) представляет собой специальный конечный элемент со сферической контактной поверхностью, положение которого определяется перемещениями узла, расположенного в центре элемента. В узле определены шесть степеней свободы в виде перемещений и углов поворота относительно осей глобальной системы координат. Условие контакта с другими узлами имеет вид $r \leq R$, где R - радиус шара.

Контактный цилиндр (Рис.1г) представляет собой специальный конечный элемент, положение которого определяется двумя узловыми точками i и j . В узлах определены шесть степеней свободы в виде перемещений и углов поворота относительно осей глобальной системы координат. Условия контакта с другими узлами имеют вид $r \leq R$, где R - радиус цилиндра и $0 \leq x \leq L$, где L - длина элемента.

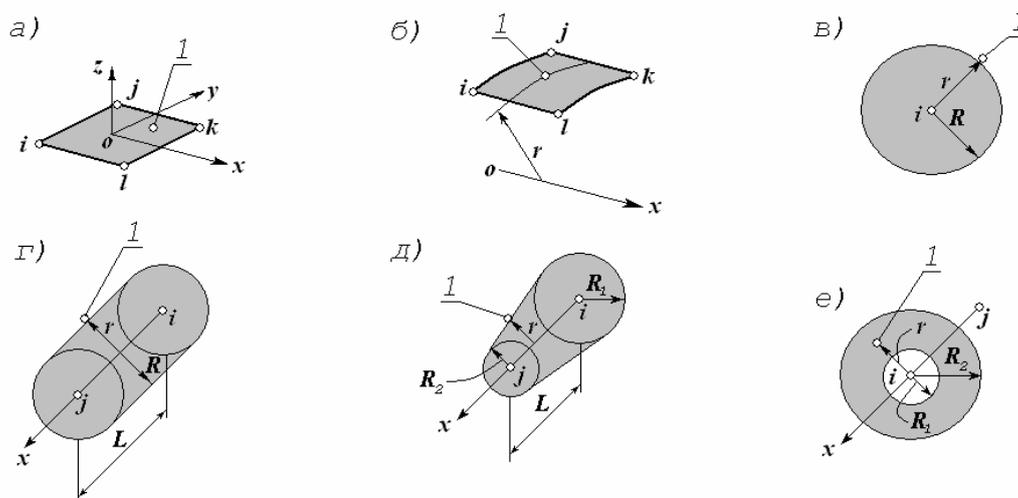


Рис. 1. Контактные элементы.

Контактный конус (Рис.1d) аналогичен цилиндру. Отличие заключается в том, что радиус поверхности является функцией x – координаты рассматриваемой точки поверхности.

Контактное кольцо (Рис.1e) - специальный конечный элемент, положение которого определяется двумя узловыми точками i и j . Контактная поверхность нормальна к оси элемента ox . В узлах определены шесть степеней свободы в виде перемещений и углов поворота относительно осей глобальной системы координат. Условия контакта с другими узлами имеют вид $x \leq 0$, и $R_1 \leq x \leq R_2$, где R_1 и R_2 - внутренний и наружный радиусы кольца соответственно.

На рис.2 представлен пример задачи о соударениях шаров, где рассматривается контакт типовых элементов. Здесь имеет место глобальный контакт, так как заранее неизвестно, какие именно шары будут контактировать между собой. Это зависит от начальных условий и расположения шаров.

В качестве примера, в котором необходимо моделирование контакта с использованием подобных элементов представлена модель шаровой опоры (Рис.3.). Здесь, жёсткость шара, изготовленного из стали, значительно выше жёсткости вкладышей, изготовленных из полимерного материала.

Пример использования контакта с другими контактными элементами для решения задачи о соударении шаров, перемещающихся на плоскости, представлен на рис.2. В исходном положении ($t = 0$) один из шаров имеет начальную скорость V_0 .

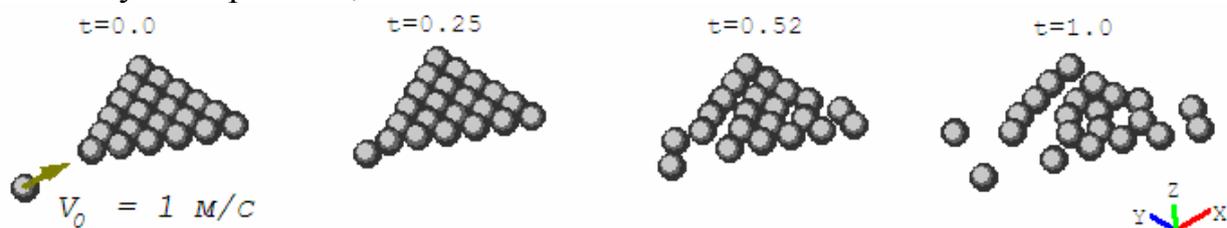


Рис. 2. Положения контактных шаров в задаче о множественных соударениях шаров.

Использование контакта с узловыми точками целесообразно в тех случаях, когда модуль упругости материала контактирующего с шаром элемента конструкции значительно ниже модуля упругости материала шара, или при размере элементов сопрягаемой поверхности менее $0.3D$. Примером может служить модель шаровой опоры, представленная на рис.3. Здесь рычаги 2 и 5, вкладыши 4 изготовлены из более податливого материала, чем палец 3, смоделированный стержнем и контактными элементами.

На рис.4. представлен пример использования контактных элементов для моделирования крепёжных элементов (шпилек и гаек) в модели фланцевого соединения. Использование элементов этой группы позволяет

значительно сократить число узлов и элементов модели при достаточно высоком уровне точности моделирования, так как сохраняются основные свойства элементов – учёт податливости резьбового соединения, возможность контакта цилиндрической части шпильки с внутренней поверхностью фланца и возможность учёта потери контакта части поверхностей гайки и фланца при изгибе шпильки. Распределение напряжений и перемещений в области крепёжных элементов в этом случае мало отличается от распределений, полученных на подробной модели, в которой все крепёжные элементы представлены объёмными конечными элементами.

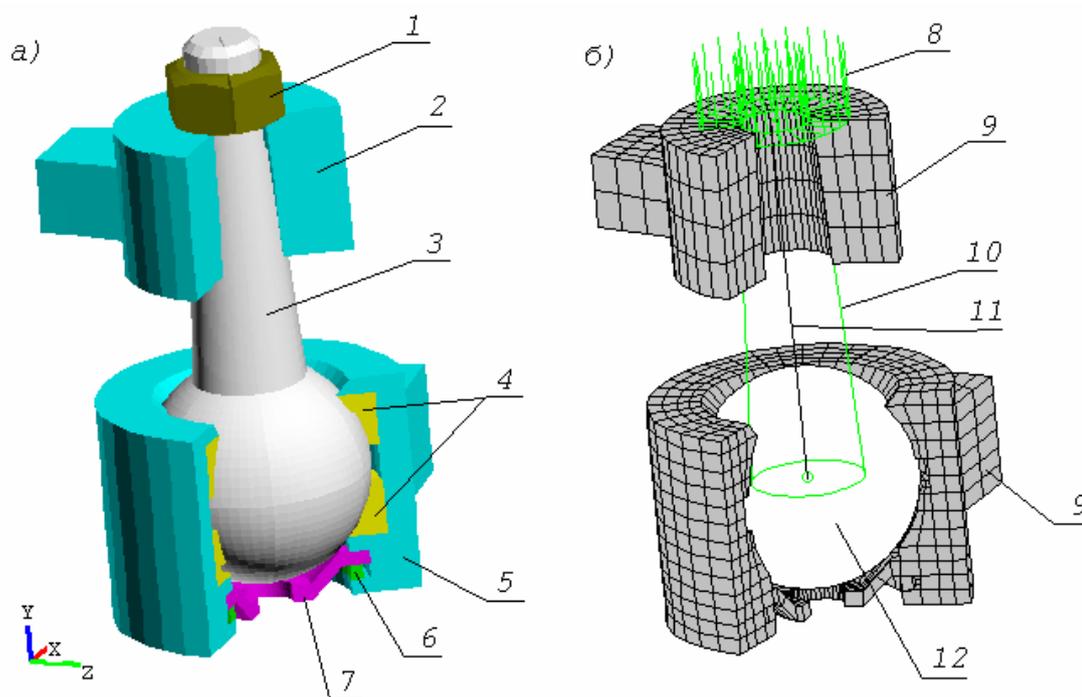


Рис. 3. Моделирование шаровой опоры с использованием контактных элементов: *а* – расчётная схема; *б* – конечно-элементная модель.

1 - гайка, 2 -рычаг, 3 - палец, 4 - вкладыши, 5 - рычаг -, 6 - стопорное кольцо, 7 - крышка, 8 – КЭ контактное кольцо, 9 – объёмные КЭ, 10 – КЭ контактный конус, 11 – КЭ стержень, 12 – КЭ контактный шар.

Литература

1. Курков С.В. Метод конечных элементов в задачах динамики механизмов и приводов. -Спб.: Политехника, 1991.-224с.-ISBN 5-7325-0176-2
2. Курков С.В. Применение метода конечных элементов для динамического анализа геометрически нелинейных систем. Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: доклады XVII международной конференции. Доклады. -СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999.-324с. ISBN 5-7997-0159-3
3. Курков С.В. Программный комплекс расчёта динамики и прочности сложных нелинейных физически неоднородных механических систем «Зенит-95». Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов

- граничных и конечных элементов: доклады XVIII международной конференции. Доклады. -СПб.: НИИХ СПбГУ, 2000.-324с. ISBN 5-7997-0159-3.
4. Курков С.В. Особенности решения контактных задач методом конечных элементов при больших перемещениях. Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: доклады XVIII международной конференции. Доклады. -СПб.: НИИХ СПбГУ, 2000.-324с. ISBN 5-7997-0159-3.
 5. С.В. Курков, Н.Н. Катилина. Универсальная программа расчётов конструкций методом конечных элементов «Зенит-95». Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Труды XX международной конференции. СПб: 24 – 26 сентября, 2003 г. ISBN 5-94158-054-1.

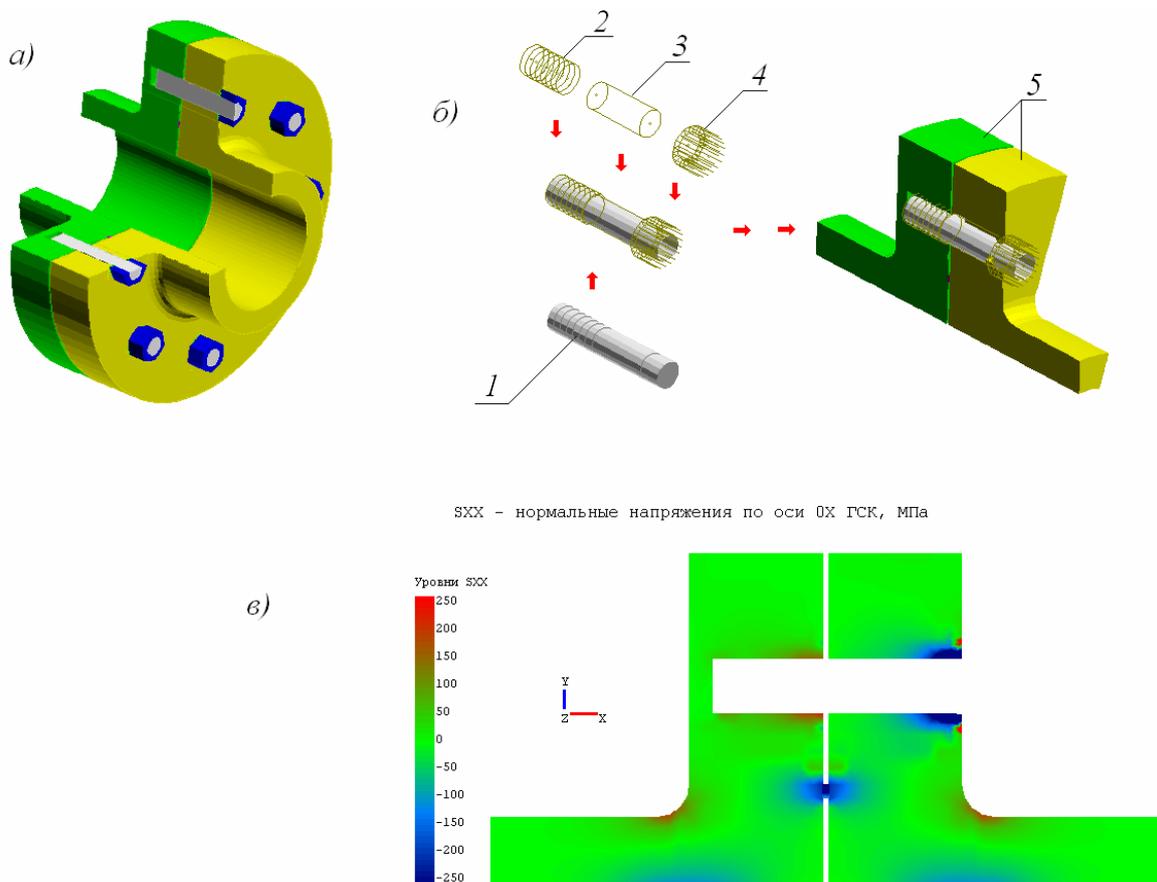


Рис.4. Моделирование крепёжных элементов при расчёте фланцевого соединения: *а* –общий вид модели; *б* – моделирование шпильки и гайки; *в* – распределение напряжений вокруг шпильки.
1 – стержневые элементы; *2, 3* –цилиндрические виртуальные кинематические ограничения; *4* – контактное кольцо; *5* -фланцы.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ РАЗВИТИЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРЕЩИН

*Лащенов В.К. (Санкт-Петербургский государственный университет
водных коммуникаций, Россия)*

В одном из подходов по описанию динамики разрушения процесс разрушения моделируется магистральной макротрещиной. Рост полубесконечной трещины в упругой полосе, распространение возбуждаемых при этом волн, перенос энергии – одна из модельных задач этого ряда. Данное сообщение близко по тематике указанной задаче, рассмотренной во многих работах ([1-4] и др.), и посвящено стационарной динамической задаче о движении полубесконечного продольного разреза в цилиндрической оболочке, посаженной с натягом на жесткий цилиндр.

Пусть в круговой цилиндрической оболочке $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ толщины h и радиуса R срединной поверхности, надетой с натягом δ на абсолютно жесткий круговой цилиндр, вдоль образующей цилиндра распространяется с постоянной дорелеевской скоростью c полубесконечный разрез. Берега разреза и внешняя поверхность оболочки свободны от нагрузки, контактное трение между оболочкой и цилиндром отсутствует, контакт предполагается безотрывным, локальная энергия в вершине разреза конечна.

В случае, когда площадка контакта занимает часть поверхности оболочки, в уравнениях оболочки необходимо учитывать деформации сдвига или поперечного сжатия [5]. Рассматривая безотрывный контакт, воспользуемся системой линейных уравнений движения тонких оболочек в перемещениях без учета сдвига и сжатия [6, 7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{h}{B} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{h}{B} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{R} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{R} \right) + \frac{q}{B} = \frac{h}{B} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь x, θ, z - координаты, отсчитываемые соответственно вдоль образующей, направляющей оболочки и по внутренней нормали к срединной поверхности, u, v, w - осевое, дуговое и радиальное смещение точек срединной поверхности, $B = Eh/(1-\nu^2)$ - цилиндрическая жесткость оболочки на растяжение, E - модуль продольной упругости, ν - коэффициент Пуассона, q - интенсивность распределенной поперечной нагрузки (продольные нагрузки отсутствуют), ρ - плотность, t - время.

Поставленную задачу разобьем на основную о сплошной оболочке, надетой с натягом δ на жесткий цилиндр, и смешанную корректирующую, снимающую кольцевое усилие на разрезанной части оболочки $x < 0$, $\theta = 0$. Обе задачи удобно рассматривать в системе координат $x_1 = x - ct$, $\theta_1 = \theta$, $z_1 = z$, связанной с вершинной разреза.

Решение основной задачи находится элементарно:

$$u = \frac{\nu\delta}{R}x, \quad \nu = 0, \quad w = \delta \quad (2)$$

Здесь и далее индексы текущих координат опускаем.

Решение (2) порождает кольцевое усилие $N_\theta = -Eh\delta/R$ и соответствующее ему контактное давление $q = Eh\delta/R^2$.

Граничные условия корректирующей задачи с учетом симметрии имеют вид

$$N_{x\theta} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \theta = 0), \quad (3)$$

$$N_\theta = Eh\delta/R, \quad Q_\theta = M_\theta = 0 \quad (x < 0, \theta = 0), \quad \nu = 0 \quad (x > 0, \theta = 0), \quad (4)$$

$$N_{x\theta} = \nu = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \theta = \pi), \quad (5)$$

$N_{x\theta}$ - сдвигающее усилие; Q_θ, M_θ - поперечная сила и изгибающий момент.

Будем рассматривать смешанную задачу (3) – (5) как задачу для упругой полосы $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq \pi R$ ($y = \theta R$) толщины h - развертки половины оболочки.

Решение системы (1) в координатах x, y запишем в виде интегралов Лапласа:

$$u_s(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L U_s(p, y) e^{px} dp \quad (6)$$

Трансформанты функций $u_1 = u$, $u_2 = \nu$, $u_3 = h\tau_{xy}$, $u_4 = h\sigma_y$ (u, ν - компоненты вектора смещения по осям x, y ; τ_{xy}, σ_y - компоненты тензора напряжений) приведены в [8]:

$$\begin{aligned} U_1(p, y) &= p\Phi_1(p, y) + \frac{2}{(a^2 - b^2)p} \Phi_2'(p, y), \\ U_2(p, y) &= \Phi_1'(p, y) - \frac{2}{a^2 - b^2} \Phi_2(p, y), \\ U_3(p, y) &= 2\mu hp \left[\Phi_1'(p, y) - \frac{1+b^2}{a^2 - b^2} \Phi_2(p, y) \right], \\ U_4(p, y) &= -\mu h \left[(1+b^2)p^2 \Phi_1(p, y) + \frac{4}{a^2 - b^2} \Phi_2'(p, y) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$\Phi_1(p, y) = A_1 \cos apy + B_1 \sin apy, \quad \Phi_2(p, y) = A_2 \cos bpy + B_2 \sin bpy,$
 где в силу (3), (5)

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 + b^2)C(p) \cos a\pi Rp \sin b\pi Rp, \\ B_1 &= (1 + b^2)C(p) \sin a\pi Rp \sin b\pi Rp, \\ A_2 &= ap(a^2 - b^2)C(p) \sin a\pi Rp \sin b\pi Rp, \\ B_2 &= -ap(a^2 - b^2)C(p) \sin a\pi Rp \cos b\pi Rp, \end{aligned} \quad (8)$$

$C(p)$ - функция, определяемая смешанными условиями (4),

$$a = \sqrt{1 - c^2/c_3^2}, \quad b = \sqrt{1 - c^2/c_2^2}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}, \quad c_3 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho},$$

где $\lambda = B/h$, $2\mu = E/(1 + \nu)$, штрих обозначает дифференцирование по y ,
 L - прямая $Re p = \alpha$, $\alpha < 0$.

Трансформанты U_2, U_4 при $y = 0$ приводят к уравнениям

$$N_{\theta}^+(p) + N_{\theta}^-(p) = C(p)N_1(p), \quad V^+(p) + V^-(p) = C(p)N_2(p), \quad p \in L, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} N_{\theta}^{\pm}(p) &= \pm h \int_0^{\pm\infty} \sigma_y(x, 0) e^{-px} dx, \quad V^{\pm}(p) = \pm \int_0^{\pm\infty} v(x, 0) e^{-px} dx, \\ N_1(p) &= \mu h p^2 \left[4ab \sin a\pi Rp \cos b\pi Rp - (1 + b^2)^2 \cos a\pi Rp \sin b\pi Rp \right], \\ N_2(p) &= -a(1 - b^2) p \sin a\pi Rp \sin b\pi Rp \end{aligned}$$

Верхние индексы $+$ и $-$ обозначают аналитичность функции в правой и левой полуплоскости соответственно.

В силу (4) уравнения (9) принимают вид

$$N_{\theta}(p) - \frac{Eh\delta}{Rp} = C(p)N_1(p), \quad V^-(p) = C(p)N_2(p), \quad p \in L \quad (10)$$

Исключение $C(p)$ приводит к уравнению Винера-Хопфа

$$N_{\theta}^+(p) - \frac{Eh\delta}{Rp} = K(p)V^-(p), \quad p \in L,$$

где $K(p) = N_1(p)/N_2(p)$.

Его решение

$$\begin{aligned} N_{\theta}^+(p) &= -\frac{Eh\delta}{Rp} \left[\frac{N_{\theta_0}^+(p)}{N_{\theta_0}^+(0)} - 1 \right], \quad Re p > 0; \\ V^-(p) &= -\frac{Eh\delta}{Rp N_{\theta_0}^+(0)} V_0^-(p), \quad Re p < 0; \end{aligned}$$

$$N_{\theta_0}^+(p) = A_0 \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1/2+p)} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln K_2(t)}{t-p} dt \right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

$$N_{\theta_0}^+(0) = \frac{A_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{4a^2 - (1+b^2)^2}{aR[4ab - (1+b^2)^2]}},$$

$$A_0 = -\mu h [4ab - (1+b^2)^2] [a(1-b^2)\pi R]^{-1}, \quad K_2(p) = K(p) \frac{\operatorname{tg} \pi p}{A_0 p}$$

позволяет согласно (10) найти

$$C(p) = -\frac{Eh\delta}{RpN_{\theta_0}^+(0)} F(p) \quad (11)$$

Здесь $F(p) = N_{\theta_0}^+(p)/N_1(p)$ при $\operatorname{Re} p > 0$ и $F(p) = V_0^-(p)/N_2(p)$ при $\operatorname{Re} p < 0$. Подстановка (11) в (6) – (8) завершает решение корректирующей задачи.

В заключении заметим, что согласно третьему уравнению системы (1) контактное давление между оболочкой и цилиндром выражается формулой

$$q(x, \theta) = -\frac{\mu h}{2\pi i R} \int_L C(p) p^2 [4ab \sin a\pi R p \cos b(\pi - \theta) R p - (1+b^2)^2 \cos a(\pi - \theta) R p \sin b\pi R p] e^{px} dp$$

Вопросы распространения волн и переноса энергии в рассматриваемом решении будут опубликованы отдельно.

Литература

1. Гольдштейн Р.В. Матчинский М. О стационарном движении трещины в полосе//Инж.ж.МТТ.1967..№4.С.98-107.
2. Гольдштейн Р.В. Стационарное движение трещины в полосе. Предельная скорость трещины// Инж.ж.МТТ.1968..№2.С.76-87.
3. Симонов И.В. Стационарное дозвуковое движение разреза в упругой полосе// Изв. РАН. МТТ.1982. №6.С.90-99.
4. Лашенов В.К., Нуллер Б.М. Стационарное движение трещины в упругой полосе (однородные задачи)//ПММ.2004. Т.68.Вып.1.с.155-169.
5. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. с.
6. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
7. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.98 с.
8. Лашенов В.К. О стационарном движении упругих балок по границе изотропной упругой полосы//Изв. РАН. МТТ.2002. №4.С.163-175.

СРАВНЕНИЕ СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО ПОДХОДОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК НАНОСТРУКТУР

Лобода О.С. (Институт Проблем Машиноведения РАН, Россия)

COMPARISON OF STATIC AND DYNAMIC APPROACHES TO DETERMINATION ELASTIC CHARACTERISTICS FOR NANOSTRUCTURES

*Loboda O.S. (Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS,
St.-Petersburg, Russia)*

С помощью различных подходов (статического и динамического) аналитически исследуются зависимости механических характеристик нанокристалла от его размеров для треугольной (гексагональной плотноупакованной) кристаллической решетки. Полученные результаты сравниваются и оцениваются. Так же рассматриваются колебания атомов решетки в длинноволновом приближении, что позволяет получить континуальные уравнения.

1. Сравнение результатов, полученных с помощью дискретного подхода динамическим путем, с результатами, полученными статическим путем, а также с макроскопической теорией стержней. Рассмотрим двумерный монокристалл. Будем считать, что он имеет бесконечную длину в направлении x и содержит 2 слоя в направлении y . В качестве кристаллической решетки выберем треугольную решетку (рис. 1).

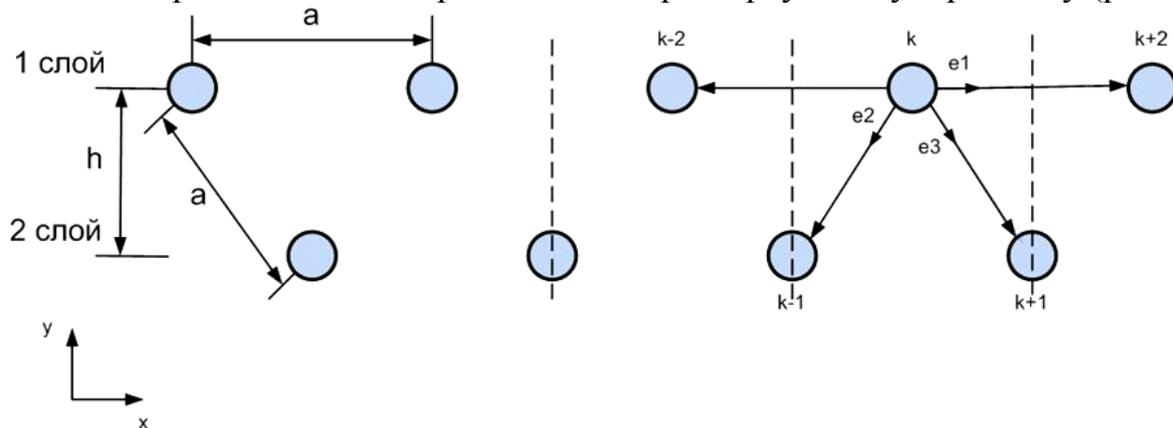


Рисунок 1. Двумерная монокристаллическая полоса.

Расстояние между ближайшими атомами в недеформированном кристалле обозначим a , h - расстояние между горизонтальными слоями, в данном случае $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Уравнение движения для k -го атома первого (верхнего) слоя имеет вид:

$$m\ddot{u}_k^1 = Ce_1e_1 \cdot (u_{k-1}^1 - 2u_k^1 + u_{k+1}^1) + Ce_2e_2 \cdot (u_{k-1}^2 - u_k^1) + Ce_3e_3 \cdot (u_{k+1}^2 - u_k^1) \quad (1)$$

$$\text{где } e_1 = i, \quad e_2 = -\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}j, \quad e_3 = \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}j \quad (2)$$

- единичные векторы, $\underline{u} = xi + yj$ - вектор перемещения атома, C имеет смысл жесткости межатомных связей. Аналогичное уравнение можно записать для атома второго (нижнего) слоя. Получаем систему из двух векторных уравнений. Подставляем решения в виде бегущей волны с частотой ω , волновым вектором \underline{q} и вектором амплитуды \underline{u}_0

$$\underline{u} = \underline{u}_0 e^{i\omega t} e^{i\underline{q}\underline{r}} \quad (3)$$

и находим дисперсионные характеристики для данной модели. Поскольку кристаллическая полоса имеет всего два слоя вдоль оси y , можно считать, что y -компонента \underline{u} волнового вектора равна нулю.

Макроскопическое уравнение продольных колебаний стержня выглядит следующим образом

$$\ddot{u} - \frac{E}{\rho} u'' = 0 \quad (4)$$

где u - смещение, E - модуль Юнга, ρ - плотность. При граничных условиях $u(0) = 0$, $u(l) = 0$ (l —длина стержня) получаем волновое число

$q = \frac{n\pi}{l}$, тогда собственные частоты определяются формулой

$$\omega_n = q \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (5)$$

Подставляя в (5) собственную частоту, найденную с помощью дискретного подхода при $n=1$, получаем условие, из которого определяется модуль Юнга. Зависимость модуля Юнга от длины нанокристаллической полосы (числа слоев вдоль оси x) для треугольной решетки изображена на рисунке 2, (кривая 2).

Из макроскопической теории известно значение модуля Юнга для бесконечной треугольной решетки

$$E_\infty = \frac{\sqrt{2}}{3} C, \quad (6)$$

На рисунке 2 это значение обозначено прямой 1.

Как показано в статье [1] модуль Юнга E_1 , соответствующий растяжению вдоль оси x бесконечной в этом направлении полосы, связан с макроскопическим значением модуля Юнга зависимостью

$$E_1 = \frac{N}{N_*} E, \quad H = N_* h, \quad N-1 \leq N_* \leq N \quad (7)$$

Здесь N_* - безразмерный параметр, отражающий неоднозначность в определении толщины полосы H . Действительно, с одной стороны толщину монокристалла можно определить как расстояние между слоями атомов на противоположных торцах $H = (N-1)h_0$; с другой стороны, толщину монокристалла разумно определить как произведение числа слоев на толщину одного атомарного слоя $H = Nh_0$. Поскольку трудно отдать предпочтение одному из сформулированных определений, для толщины нанокристалла было принято определение (7).

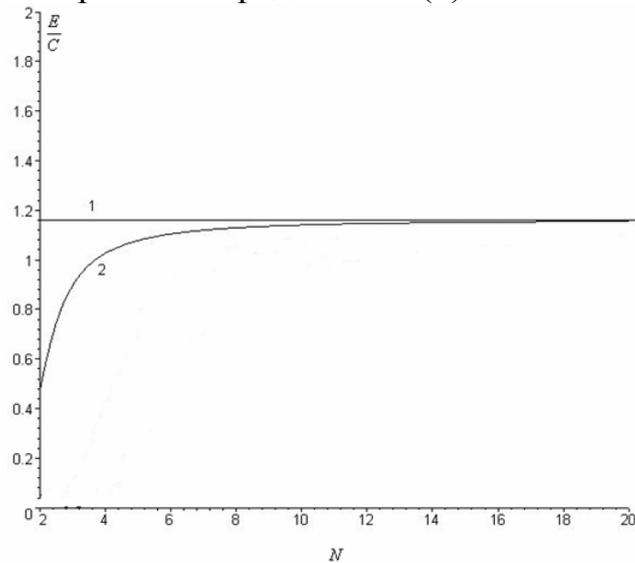


Рисунок 2. Зависимости значений модуля Юнга, найденных разными способами, от длины нанокристалла.

Значение модуля Юнга для $N = N_* = 2$ совпадает с макроскопическим значением. Из рисунка 2 видно, что все три значения модуля Юнга совпадают при длине полосы (числе слоев атомов вдоль оси x) больше 10.

Рассмотрим изгибные колебания. Макроскопическое уравнение изгибных колебаний стержня выглядит следующим образом

$$\ddot{u} - \frac{D}{\rho_0} u^{IV} = 0, \quad (8)$$

где u - поперечный прогиб, D - изгибная жесткость, ρ_0 - погонная плотность. Граничные условия для балки, лежащей на двух опорах

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad u''(l) = 0$$

где l - длина стержня. Собственные частоты, соответствующие данной задаче:

$$\omega_n = q^2 \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_0}}, \quad (9)$$

Подставляя в (9) собственную частоту, найденную с помощью дискретного подхода при $n=1$, получаем условие, из которого определяется изгибная жесткость. Зависимость изгибной жесткости от длины нанокристаллической полосы (числа слоев вдоль оси x) для треугольной решетки изображена на рисунке 3 (кривая 3).

Макроскопическая формула для изгибной жесткости имеет вид:

$$D_{\infty} = \frac{EH^3}{12}, \quad (10)$$

Для двухслойной нанокристаллической полосы $D_1 = \frac{1}{2}Ca^3$ (кривая 1 на рисунке 3).

В работе [2] решена задача об изгибе монокристаллической полосы и получено выражение для изгибной жесткости дискретной модели

$$D_2 = \frac{EH^3}{12} \frac{N^2 - 1}{N_*^3} \quad (11)$$

В данном случае $D_2 = \frac{3}{8}Ca^3$ (кривая 2 на рисунке 3).

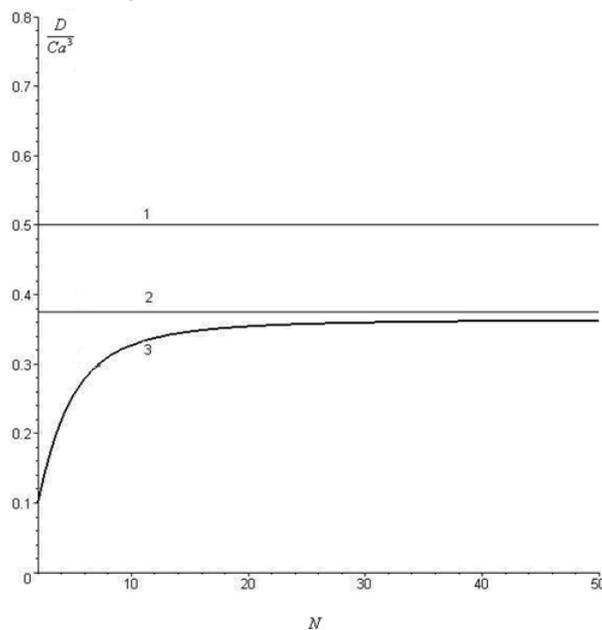


Рисунок 3. Зависимости значений изгибной жесткости, найденных разными способами, от длины нанокристалла.

2. Длинноволновое приближение. Получим уравнения колебаний стержня с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига, используя длинноволновое приближение.

Выберем в качестве элементарной ячейки равносторонний треугольник (рисунок 1). Координаты точки на средней линии задаются с помощью трех величин, определяющих координаты вершин треугольника:

$$x_k^0 = \frac{1}{2}(x_k^1 + \frac{1}{2}(x_{k-1}^2 + x_{k+1}^2)), \quad y_k^0 = \frac{1}{2}(y_k^1 + \frac{1}{2}(y_{k-1}^2 + y_{k+1}^2)) \quad (12)$$

Угол поворота сечения находим из выражения для кинетического момента системы трех тел, находящихся в вершинах треугольника:

$$\varphi_k^0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}(x_k^1 - \frac{1}{2}(x_{k-1}^2 + x_{k+1}^2)) \quad (13)$$

Используя разложение в ряд по малому параметру и уравнение (1) из уравнений в конечных разностях получаем уравнения колебаний стержня с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига для треугольной решетки в длинноволновом приближении

$$\frac{2m}{a}\ddot{x} = \frac{17}{8}Cax''; \quad \frac{2m}{a}\ddot{y} = \frac{3}{8}Cay'' - \frac{3}{8}Ca\varphi'; \quad (14)$$

$$\frac{3ma}{8}\ddot{\varphi} = \left(\frac{15}{16}Ca^3\right)\frac{3}{8}\varphi'' + \frac{3}{8}Ca\varphi' - \frac{3}{8}Ca\varphi.$$

Уравнение колебаний стержня в общем виде выглядят следующим образом

$$\rho_0\ddot{x} = A_x x'' \quad \rho_0\ddot{y} = A_y y'' - A_y \varphi' \quad \rho_0\Theta\ddot{\varphi} = C^* \varphi'' + A_y y' - A_y \varphi \quad (15)$$

ρ_0 - погонная плотность, $\underline{A} = A_x \underline{ii} + A_y \underline{jj}$ - тензор жесткости растяжения-сдвига, $\underline{C}^* = C^* \underline{kk}$ - тензор жесткости изгиба-кручения, Θ - момент инерции.

В статье [1] были получены выражения для коэффициентов жесткости, в частности для C_{11} , соответствующего растяжению вдоль оси x бесконечной в этом направлении полосы

$$C_{11} = \frac{\sqrt{3}C}{12N_*}(9N - 1) \quad (16)$$

Коэффициент тензора жесткости A_x связан с C_{11} соотношением

$$A_x = C_{11}hN_*. \text{ При подстановке в (16) } h = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad N_* = N = 2 \text{ получаем}$$

$$A_x = \frac{17}{8}Ca \quad (17)$$

что совпадает с результатом из (14).

Заключение. Проведено сравнение упругих характеристик наноструктур (модуля Юнга и изгибной жесткости), полученных с помощью статического и динамического подходов для двуслойной полосы.

Значения модуля Юнга, полученные с помощью различных подходов, совпадают между собой и с макроскопическим значением.

Макроскопическое значение изгибной жесткости для двуслойной нанокристаллической полосы несколько больше значений, полученных с

помощью дискретного подхода. Значения изгибной жесткости, полученные статическим и динамическим путем, также не совпадают, хотя и близки при длине полосы (числа слоев вдоль оси x) больше 20.

Используя длинноволновое приближение, из уравнений в конечных разностях для дискретной модели получены уравнения колебаний стержня с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига для треугольной решетки.

Автор благодарна А. М. Кривцову и Е. А. Ивановой за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-0094-а.

Литература

1. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. О механических характеристиках наноразмерных объектов // Физика твердого тела, 2002, Т. 44, №12, С. 2158-2163.
2. Е.А.Иванова, Н.Ф.Морозов. Об одном подходе к экспериментальному определению изгибной жесткости нанооболочек // ДАН. 2005. Т.,400, №4, 475-479.

УДК 539.3, 519.6

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕТОДА НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Матросов А.В. (Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики–процессов управления)

COMPUTATIONAL PROBLEMS OF THE METHOD OF INITIAL FUNCTIONS

Matrosova Alexander V. (Saint-Petersburg State University, Department of Applied Mathematics and Control Processes)

Рассматриваются вычислительные проблемы реализации метода начальных функций для решения плоских и пространственных задач теории упругости соответственно в одинарных и двойных тригонометрических рядах, связанные с катастрофической потерей верных знаков в процессе построения численно-аналитического решения задачи. Приводятся результаты проведенной серии вычислительных экспериментов в среде Maple с мантисой разной длины, позволившие для широкого класса задач определить ее минимальную длину, необходимую для проведения достоверных расчетов с помощью рассматриваемого метода.

Математическая модель. Основное соотношение метода начальных функций (МНФ) для линейно-упругого анизотропного тела в прямоугольной декартовой системе координат может быть получено в следующем виде [1]:

$$U = LU^0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{U} вектор-столбец размерности k_1 перемещений и напряжений в произвольной точке прямоугольного тела, \mathbf{U}^0 вектор-столбец размерности k_2 начальных функций, определенных на плоскости $x=0$, $\mathbf{L} = [L_{ij}]$ матрица размерности $k_1 \times k_2$ операторов МНФ вида

$$L_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} l_{ij}^k (A_p, \partial/\partial y, \partial/\partial z) x^k, \quad (2)$$

где A_p ($p=1..p_0$) упругие константы анизотропного тела, а $\partial/\partial y$ и $\partial/\partial z$ операторы дифференцирования по соответствующим переменным.

Формулами (1), (2) представлено общее решение как плоской ($k_1 = 5$, $k_2 = 4$, $p_0 = 6$), причем коэффициенты l_{ij}^k в рядах (2) в этом случае зависят только от одного оператора $\partial/\partial y$, так и пространственной ($k_1 = 9$, $k_2 = 6$, $p_0 = 21$) задач теории упругости. При этом векторы начальных функций и перемещений и напряжений имеют в случае пространственной задачи вид $\mathbf{U}^0 = \{u^0, v^0, w^0, \sigma_x^0, \tau_{yx}^0, \tau_{zx}^0\}$, $\mathbf{U} = \{u, v, w, \sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}\}$, а в случае плоской $\mathbf{U}^0 = \{u^0, v^0, \sigma_x^0, \tau_{xy}^0\}$, $\mathbf{U} = \{u, v, \sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y\}$.

Для тел с произвольной степенью анизотропии операторы матрицы \mathbf{L} в соотношении (1) замкнуты в случае плоской задачи относительно линейной комбинации тригонометрических функций $s_m = \sin(m\pi y/a)$ и $c_m = \cos(m\pi y/a)$, а в случае пространственной задачи относительно линейной комбинации попарных произведений указанных функций с функциями $s_n = \sin(n\pi z/b)$ и $c_n = \cos(n\pi z/b)$ (здесь a и b размеры тела вдоль соответствующих координат).

Для ортотропных, трансверсально-изотропных и изотропных тел операторы МНФ замкнуты не только относительно указанных линейных комбинаций, но и относительно определенного упорядоченного списка тригонометрических функций. Например, если в случае пространственной задачи вектор начальных функций представить в виде $\mathbf{U}^0 = \{s_m c_n, c_m s_n, s_m s_n, s_m s_n, c_m s_n, s_m c_n\}$, то вектор перемещений и напряжений будет иметь вид $\mathbf{U} = \{s_m c_n, c_m s_n, s_m s_n, s_m s_n, c_m s_n, s_m c_n, s_m s_n, s_m s_n, c_m c_n\}$. Для плоской задачи эти же векторы могут быть взяты в виде $\mathbf{U}^0 = \{s_m, c_m, s_m, c_m\}$, $\mathbf{U} = \{s_m, c_m, s_m, c_m, s_m\}$. При этом ряды (2) превращаются в обычные числовые ряды, а матрица \mathbf{L} в числовую.

Обычно не все компоненты вектора начальных функций известны. Недостающие могут быть определены из условия удовлетворения

граничным условиям на противоположной начальной плоскости грани рассчитываемого тела [1]. Зная все компоненты вектора начальных функций U^0 , по формуле (1) можно рассчитать напряженно-деформированное состояние в любой точке упругого анизотропного тела.

С увеличением гармоник тригонометрических функций (параметры m и n) оказывается невозможным получить достоверные значения компонентов НДС в области, отдаленной от начальной плоскости. Это связано как с накоплением ошибок при расчете числовых коэффициентов в рядах (2), так и с характером сходимости самих этих рядов, приводящим к катастрофической потере верных цифр в получаемой сумме этих рядов [2]. Анализ указанной проблемы и ее решение рассмотрено на модельной плоской задаче деформирования изотропного тела.

Модельная задача исследования. Рассмотрим задачу расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) прямоугольного в сечении с размерами $h \times a$ ($h/a = 1$) изотропного тела ($E = E_0$, $\nu = 1/3$), находящегося в условиях плоской деформации. По грани $x = 0$ (начальная плоскость) к телу приложены усилия $\sigma_x^0 = q_0 \sin(m\pi y/a)$, $\tau_{xy}^0 = \tau_0 \cos(m\pi y/a)$ ($\tau_0 = 0$), а по грани $x = h$ усилия $\sigma_x^h = -(q_0/2) \sin(m\pi y/a)$, $\tau_{xy}^h = q_0 \cos(m\pi y/a)$. Неизвестные перемещения начальной плоскости $x = 0$ ищутся в виде $u^0 = u_0 \sin(m\pi y/a)$, $v^0 = v_0 \cos(m\pi y/a)$. На двух других гранях тела граничные условия продиктованы выбранными тригонометрическими функциями представления компонентов вектора начальных функций.

Вычислительные эксперименты. Расчеты НДС с удвоенной точностью представления вещественных чисел (16 цифр в мантиссе) показывают наличие вычислительной неустойчивости при $m \geq 10$ (графики безразмерных перемещений $uE_0/h/q_0$ рис. 1 и касательных напряжений τ_{xy}/q_0 рис. 2 в центральном сечении тела $y = a/2$).

Это связано с катастрофической потерей верных цифр в вычисляемых суммах рядов (2), что, в свою очередь, связано с характером их сходимости — частичные суммы сначала возрастают до чисел больших порядков, а потом убывают до значений сумм рядов.

Максимальные значения частичных сумм достигают порядка $10^{13} \div 10^{16}$ уже при $m = 10$ для различных компонентов НДС, а это и является причиной того, что суммы соответствующих степенных рядов вычисляются с большой погрешностью. На рис. 3 представлены в логарифмической шкале частичные суммы степенных рядов (2) для

вычисления перемещения u , а на рис. 4 для вычисления касательного напряжения τ_{xy} в середине грани $x = h$ рассчитываемого тела.

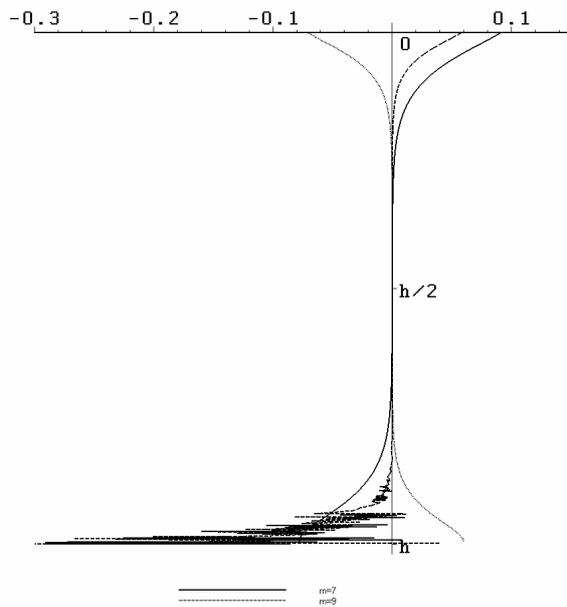


Рис. 1.

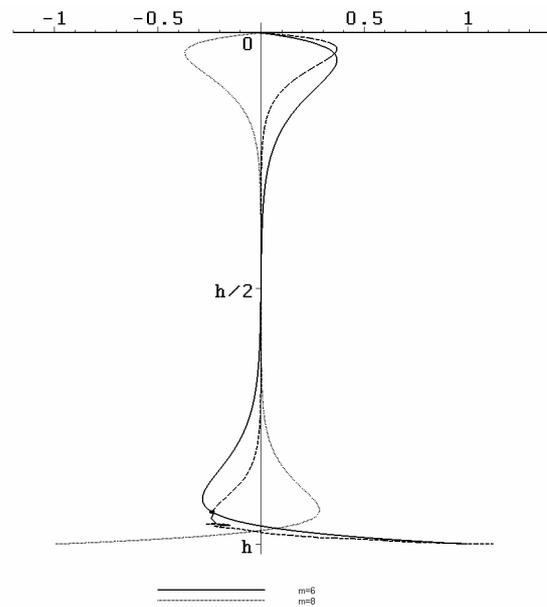


Рис. 2.

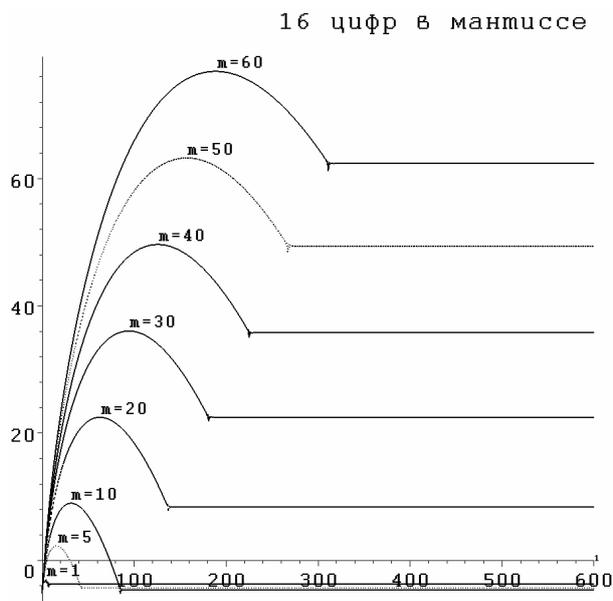


Рис. 3.

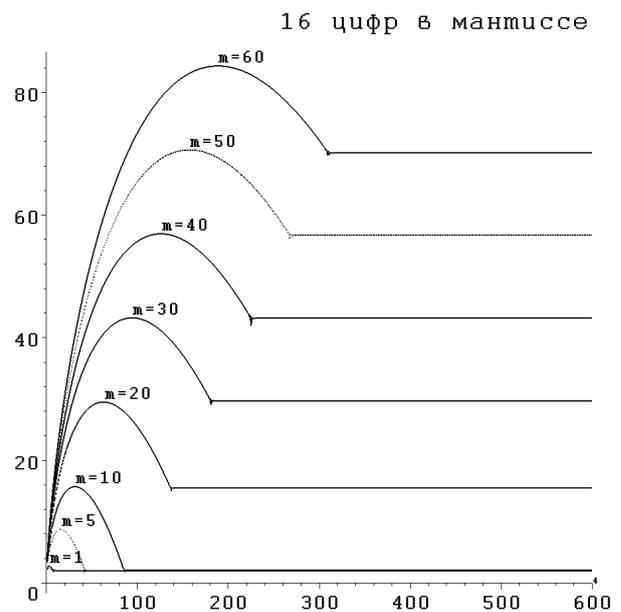


Рис. 4.

Простое увеличение в расчетах мантиссы вещественных чисел до 20 цифр позволяет получить достоверные результаты при $m \leq 12$. Неустойчивость вычислений перемещений в этом случае проявляется при $m = 13$ (безразмерные перемещения $uE_0/h/q_0$ в центральном сечении тела $y = a/2$ на рис. 5), а расчет касательных напряжений становится

неустойчивым при $m=14$ (безразмерные напряжения τ_{xy}/q_0 в центральном сечении тела $y = a/2$ на рис. 6).

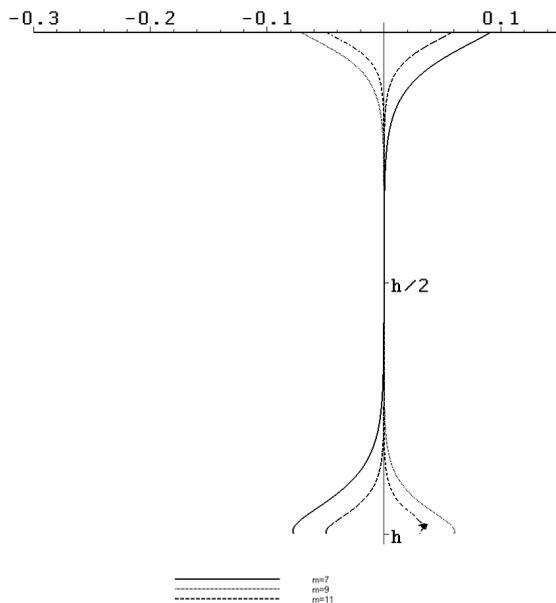


Рис. 5.

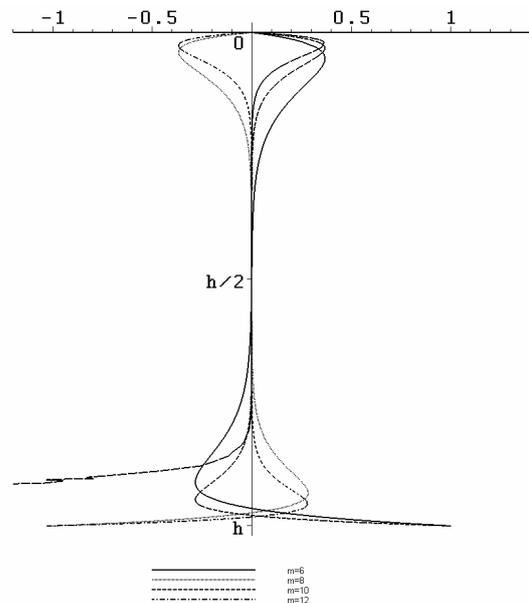


Рис. 6.

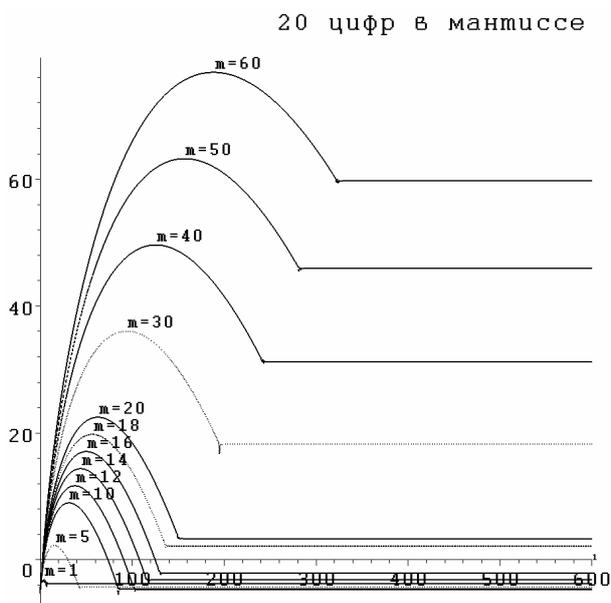


Рис. 7.

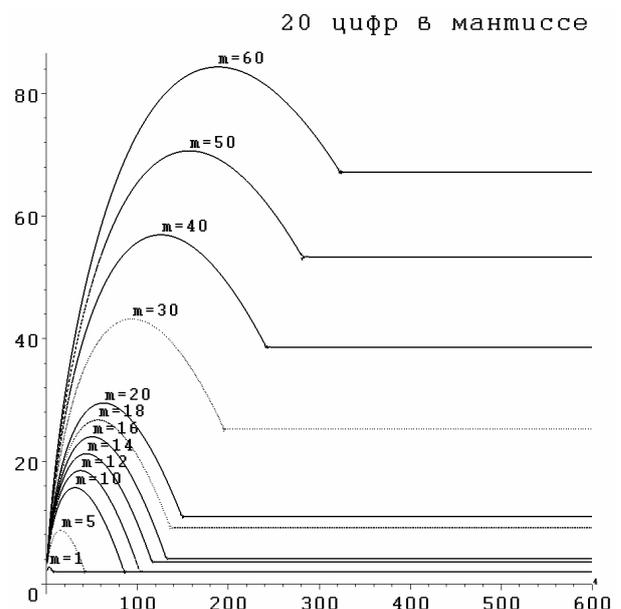


Рис. 8.

Увеличение мантиссы до 20 цифр позволяет с удовлетворительной точностью вычислять суммы степенных рядов при $m \leq 12$. Однако при больших значениях m результат все еще остается неудовлетворительным, так как максимальные значения частичных сумм рядов (для разных компонентов НДС) при $m=13$ достигают порядков $10^{18} \div 10^{20}$, а длина используемой при вычислениях мантиссы вещественных чисел не позволяет учесть в суммах рядов члены порядка ниже $10^{-2} \div 10^0$, которые

продолжают еще однако вносить существенный вклад в суммы соответствующих рядов (рис. 7 и 8 частичных сумм рядов для вычисления соответственно перемещения u и касательного напряжения τ_{xy} в середине грани $x = h$ рассчитываемого тела).

90 цифр в мантиссе

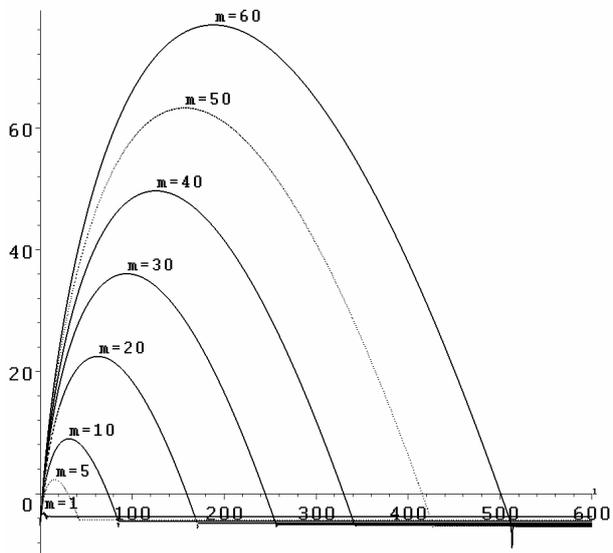


Рис. 9.

90 цифр в мантиссе

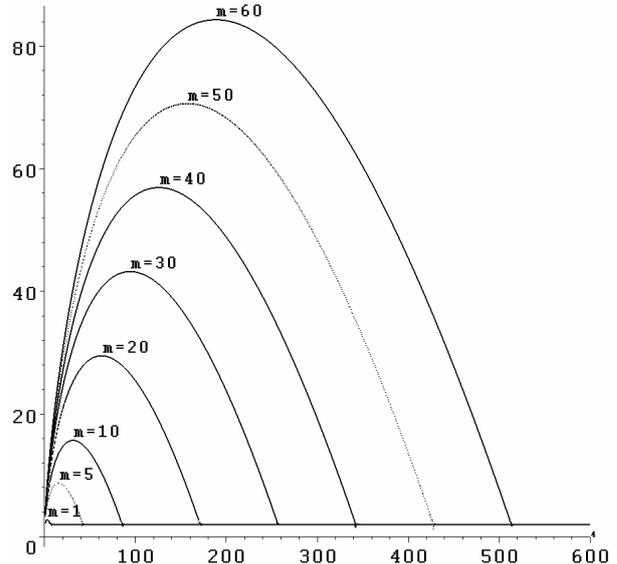


Рис. 10.

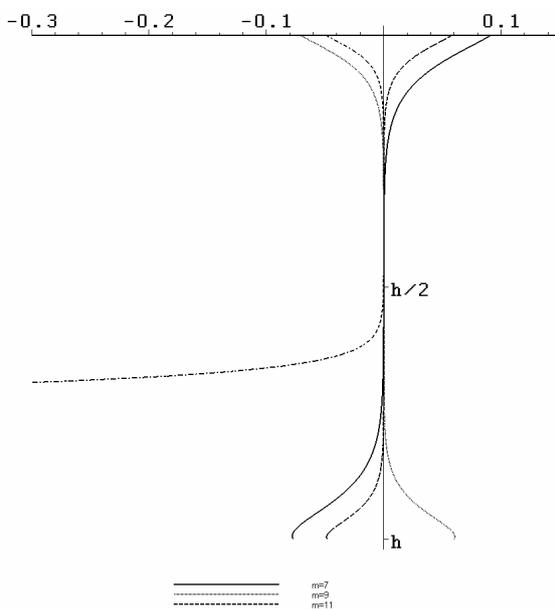


Рис. 11.

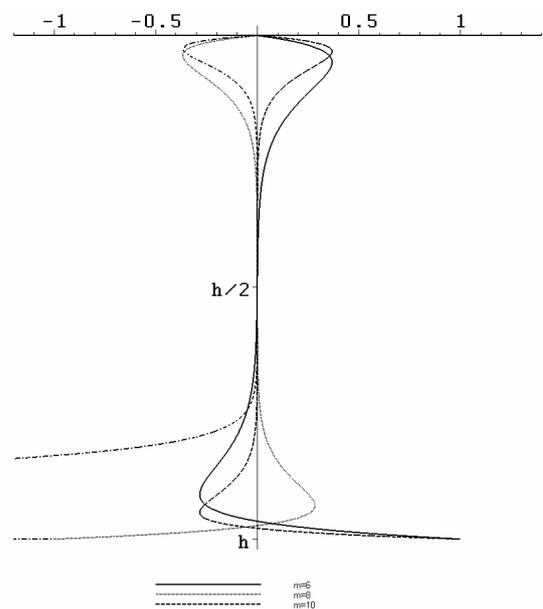


Рис. 12.

Вычисления с мантиссой длиной в 90 цифр приводят к достоверным суммам степенных рядов (2) и для гармонике 60 , что видно из рис. 9 и 10 частичных сумм рядов для определения перемещения u и касательного напряжения τ_{xy} в середине грани $x = h$ рассчитываемого тела.

Из приведенных графиков частичных сумм степенных рядов (2) видно, что для вычисления правильного значения их сумм следует при больших гармониках учитывать большее количество членов рядов. Так, выполняя вычисления с длиной мантиссы в 90 цифр, но учитывая только 101 член в указанных рядах, уже при гармониках $m \geq 13$ будут получены недостоверные результаты (графики безразмерных перемещений $uE_0/h/q_0$ на рис. 11 и графики безразмерных напряжений τ_{xy}/q_0 на рис. 12 в центральном сечении тела).

Аналогичная методика исследования поведения получаемых методом начальных функций компонентов НДС была применена и для пространственной задачи. Все полученные результаты сведены в табл. 1. В ней представлены предельные значения гармоник m и n тригонометрических функций, при которых получают достоверные результаты, для вычислений с мантиссой различной длины.

Таблица 1

кол.членов\мантисса	16	30	60	100
101	$m, n = 7$	$m, n = 7$	$m, n = 7$	$m, n = 7$
151	$m, n = 7$	$m, n = 11$	$m, n = 11$	$m, n = 11$
201	$m, n = 7$	$m, n = 11$	$m, n = 15$	$m, n = 15$
251	$m, n = 7$	$m, n = 11$	$m, n = 15$	$m, n = 19$
301	$m, n = 7$	$m, n = 11$	$m, n = 15$	$m, n = 19$

Заключение. В работе рассмотрен один из возможных способов борьбы с вычислительной неустойчивостью алгоритма МНФ — увеличение длины мантиссы при числовых расчетах. Все расчетные схемы метода реализованы в системе аналитических вычислений Maple, позволяющей легко манипулировать длиной мантиссы.

Литература

1. Галилеев С.М., Матросов А.В. Метод начальных функций в расчете слоистых плит // Прикладная механика. 1995. Т.31 (41), №6, июнь. С. 64 – 71.
2. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.;Мир,1980. 279 с.

ГИПОТЕЗА ТОНКОГО СЛОЯ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ АКУСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ.

Медведский А.Л. (Московский авиационный институт (ГТУ), Москва).

При построении переходных функций в задачах гидродинамического взаимодействия часто используются различные упрощающие гипотезы. Построение гипотез связано с получением упрощенных уравнений движения акустической среды. Одной из наиболее эффективных является гипотеза тонкого слоя [1,2]. В данной работе получены разрешающие уравнения

гипотезы тонкого слоя на основе рассмотрения движения акустической среды в малой окрестности гладкой криволинейной границы.

Рассмотрим уравнения акустической среды в криволинейной системе координат ξ^1, ξ^2, ζ , связанной с поверхностью Π , которая задана в общем случае не в главных координатах:

$$\rho_0 \dot{v}_i = -\frac{\partial p}{\partial \xi^i}, \quad \xi^3 = \zeta, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\dot{p} = -\rho_0 c_0^2 \nabla_i v^i, \quad \mathbf{V} = v_i \mathbf{e}^i = v^i \mathbf{e}_i \quad (2)$$

Здесь ρ_0 , p , \mathbf{V} - соответственно плотность, давление и вектор скорости акустической среды, ξ^1, ξ^2 - криволинейные координаты поверхности Π , ζ - координата, отсчитываемая по нормали к поверхности Π (ориентация поверхности выбрана так, чтобы единичная нормаль \mathbf{n} была направлена в сторону жидкости), \mathbf{e}_i и \mathbf{e}^i - ковариантный и контравариантный базисы касательного пространства.

Введем единичные ковариантный \mathbf{e}_{i0} и контравариантный \mathbf{e}_0^i базисы пространства:

$$\mathbf{e}_{\alpha 0} = \frac{\mathbf{e}_\alpha}{|\mathbf{e}_\alpha|} = \frac{\mathbf{e}_\alpha}{\sqrt{\hat{g}_{\alpha\alpha}}}, \quad \mathbf{e}_0^\alpha = \frac{\mathbf{e}_0^\alpha}{|\mathbf{e}_0^\alpha|} = \frac{\mathbf{e}_\alpha}{\sqrt{\hat{g}^{\alpha\alpha}}}, \quad (3)$$

$$\hat{g}_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad \hat{g} = \det(\hat{g}_{ij})$$

где $\hat{g}_{\alpha\alpha}$ - ковариантные компоненты метрического тензора пространства.

Тогда в проекциях на построенный базис уравнения (1) – (2) примут вид:

$$\rho_0 \dot{v}_{\alpha 0} = -\frac{\partial p}{\partial \xi^\alpha} \sqrt{\hat{g}^{\alpha\alpha}}, \quad \xi^3 = \zeta, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (4)$$

$$\dot{p} = -\frac{\rho_0 c_0^2}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(v_{k0} \hat{g}^{ik} \sqrt{\frac{\hat{g}}{\hat{g}^{kk}}} \right), \quad v_{\alpha 0} = v_\alpha \sqrt{g^{\alpha\alpha}} \quad (5)$$

Введенные компоненты вектора скорости $v_{\alpha 0}$ являются аналогом физических компонент, которые используются в ортогональных системах координат.

Далее рассмотрим движение акустической среды в некоторой малой окрестности поверхности Π (тонком слое), характеризуемой толщиной δ . Также введем характерный линейный размер поверхности L . В частности для замкнутых поверхностей в качестве L может быть использован $L = \text{diam } \Pi$.

Введем следующие безразмерные параметры (далее тильда везде, где не указано особо, опущена):

$$\tilde{v}_{\alpha 0} = \frac{v_{\alpha 0}}{c_0}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_0 c_0^2}, \quad \tilde{\xi}^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{L^{m_\alpha}}, \quad \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{\delta}, \quad \tilde{x}^i = \frac{x^i}{L} \tau = \frac{c_0 t}{\delta}, \quad \gamma = \frac{\delta}{L}, \quad (6)$$

$$\alpha = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3; \quad m_\alpha \in \mathbb{R}$$

Введение величин m_α связано с тем, что криволинейные координаты ξ^α по физическому смыслу имеют размерность длины L в некоторой действительной степени m_α . Параметр γ характеризует толщину тонкого слоя и является малым.

Для компонент метрического тензора \hat{g}_{ij} и \hat{g}^{ij} будем иметь:

$$\hat{g}_{ij} = (\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \frac{\partial x^n}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^j} \delta_{nm} = \frac{\partial x^n}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^j} = L^{2-m_i-m_j} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \tilde{\xi}^i} \frac{\partial \tilde{x}^n}{\partial \tilde{\xi}^j} = L^{2-m_i-m_j} \tilde{g}_{ij}, \quad (7)$$

$$\hat{g}^{ij} = L^{m_i+m_j-2} \tilde{g}^{ij}.$$

При этом для введенной системы координат справедливы следующие соотношения:

$$\hat{g}^{i3} = 0, \quad \hat{g}^{33} = 1 \quad (8)$$

Подставляя проведенные выкладки в (4) и (5) получим уравнения движения в безразмерном виде (тильда далее везде опущена):

$$\dot{v}_{\alpha 0} = -\gamma \frac{\partial p}{\partial \xi^\alpha} \sqrt{\hat{g}^{\alpha\alpha}}, \quad \dot{v}_{\alpha 0} = -\frac{\partial p}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (9)$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \left[\gamma \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(v_{k0} \hat{g}^{ik} \sqrt{\frac{\hat{g}}{\hat{g}^{kk}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (v_{30} \sqrt{\hat{g}}) \right] \quad (10)$$

Как следует из (9) – (10), при малости параметра γ слагаемые уравнений дают различный вклад в общий результат. В частности, в нулевом приближении можно положить $\gamma = 0$. Тогда получим разрешающие уравнения теории тонкого слоя для произвольной гладкой поверхности Π :

$$\dot{v}_{\alpha 0} = 0, \quad \dot{v}_{30} = -\frac{\partial p}{\partial \zeta}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (11)$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial \zeta} (v_{30} \sqrt{\hat{g}}) \quad (12)$$

Также можно получить дифференциальное уравнение в частных производных относительно давления p . Для этого продифференцируем по времени уравнение (10)

$$\ddot{p} = -\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \left[\gamma \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\dot{v}_{k0} \hat{g}^{ik} \sqrt{\frac{\hat{g}}{\hat{g}^{kk}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\dot{v}_{30} \sqrt{\hat{g}} \right) \right], \quad (13)$$

и воспользуемся (9). В результате получим:

$$\ddot{p} = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \left[\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\hat{g}^{ik} \sqrt{\hat{g}} \frac{\partial p}{\partial \xi^k} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\sqrt{\hat{g}} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (14)$$

Как следует из (14), первое слагаемое в правой части имеет более высокий порядок малости $O(\gamma^2)$, чем второе. Поэтому данным слагаемым в первом приближении также можно пренебречь. Следовательно, разрешающее уравнение гипотезы тонкого слоя для давления примет вид:

$$\ddot{p} = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\sqrt{\hat{g}} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) \quad (15)$$

Выполняя дифференцирование в правой части (15), окончательно получим:

$$\ddot{p} = \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2\hat{g}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \zeta} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \quad (16)$$

Полученное уравнение запишем в виде:

$$\ddot{p} = \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} + 2a(\xi^j, \zeta) \frac{\partial p}{\partial \zeta}, \quad a(\xi^j, \zeta) = \frac{1}{4\hat{g}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial \zeta} \quad (17)$$

Указанное уравнение имеет переменный коэффициент $a(\xi^j, \zeta)$. Воспользуемся тем, что решение ищется в достаточно тонком слое поверхности Π . Поэтому значение данного коэффициента в первом приближении можно «заморозить» $a(\xi^j, \zeta_0)$, взяв его значение при фиксированном $\zeta = \zeta_0$. В частности возьмем значение коэффициента на поверхности Π , т.е. при $\zeta = 0$:

$$a_0(\xi^j) = a(\xi^j, 0) \quad (18)$$

Найдем величину $a_0(\xi^j)$. Для этого получим выражение для \hat{g} и ее производной $\partial \hat{g} / \partial \zeta$ на поверхности Π :

$$\hat{g} = \hat{g}_{11} \hat{g}_{22} - \hat{g}_{12}^2, \quad g = \hat{g} \Big|_{\zeta=0} = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \quad (19)$$

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\hat{g}_{11} \hat{g}_{22} - \hat{g}_{12}^2 \right) \Big|_{\zeta=0} = -2(g_{22} b_{11} + g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{12})$$

Следовательно, для коэффициента $a_0(\xi^j)$ получим выражение:

$$a_0(\xi^j) = -\frac{1}{2g} (g_{22} b_{11} + g_{11} b_{22} - 2g_{12} b_{12}) \quad (20)$$

Покажем, что коэффициент $a_0(\xi^j)$ непосредственно связан со средней кривизной поверхности Π . Для этого найдем связь ковариантных g_{ij} и контравариантных компонент g^{ij} метрического тензора поверхности:

$$g_{11} = gg^{22}, \quad g_{22} = gg^{11}, \quad g_{12} = -gg^{12}, \quad (21)$$

Подставляя (21) в (22), найдем:

$$\begin{aligned} a_0(\xi^j) &= -\frac{1}{2g} \left(gg^{11}b_{11} + 2gg^{12}b_{12} + gg^{22}b_{22} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(g^{11}b_{11} + 2g^{12}b_{12} + g^{22}b_{22} \right) = -\frac{1}{2} b_{ij} g^{ij} = -\frac{1}{2} b_i^i = -\frac{b_1^1 + b_2^2}{2} = -k_{cp}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$k_{cp} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k_1 = b_1^1, \quad k_2 = b_2^2 \quad (23)$$

Здесь k_α - главные кривизны поверхности Π , k_{cp} - средняя кривизна.

Средняя кривизна поверхности k_{cp} является инвариантной величиной и не зависит от вида параметризации. Поэтому разрешающие уравнения теории тонкого слоя определяются только внутренней геометрией поверхности, в данном случае кривизной k_{cp} .

В акустической среде волновому уравнению (14) удовлетворяет не только давление p , но и скалярный потенциал вектора скорости φ . Поэтому в теории тонкого слоя акустической среды справедливо следующее уравнение:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + 2a(\xi^j, \zeta) \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}, \quad (24)$$

где параметр $a(\xi^j, \zeta)$ может быть «заморожен» и определяется средней кривизной k_{cp} (23).

Полученные уравнения (11) – (12), (17) и (24) допускают аналитические решения. В частности, построим поверхностные функции влияния I и II рода для акустической среды в рамках гипотезы тонкого слоя, границей которой является гладкая выпуклая поверхность Π . Для этого решим следующую начально-краевую задачу:

$$\ddot{G}^{(k)} = \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial \zeta^2} + 2a_0(\xi^j) \frac{\partial G^{(k)}}{\partial \zeta}, \quad (25)$$

$$G|_{t=0} = \dot{G}|_{t=0} = 0 \quad (26)$$

$$(\delta_{1k} v_n + \delta_{2k} p)|_{\zeta=0} = \delta(t) \delta(\xi^1 - \xi_0^1) \delta(\xi^2 - \xi_0^2) \quad (27)$$

$$G^{(k)}(t, r) = O(1) \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad r^2 = x^i(\xi^j)x^i(\xi^k) \quad (28)$$

Здесь $\delta(x)$ - дельта-функция Дирака, $G^{(k)}(t, r)$ - давление в среде, причем при $k=1$ на границе области задана нормальная составляющая вектора скорости

$$v_n = (\mathbf{V}, \mathbf{n})|_{\zeta=0} = v_{30}|_{\zeta=0}, \quad \dot{v}_{30} = -\frac{\partial G}{\partial \zeta}, \quad (29)$$

а при $k=1$ на поверхности задано давление p :

Применим к задаче (25) – (28) преобразование Лапласа по времени t . Тогда в пространстве изображений получим следующую краевую задачу (s - параметр преобразования, чертой обозначена трансформанта по Лапласу):

$$\frac{d^2 \bar{G}^{(k)}}{d\zeta^2} + 2a_0(\xi^j) \frac{d\bar{G}^{(k)}}{d\zeta} - s^2 \bar{G}^{(k)} = 0 \quad (30)$$

$$(\delta_{1k} \bar{v}_{30} + \delta_{2k} \bar{p})|_{\zeta=0} = \delta(\xi^1 - \xi_0^1) \delta(\xi^2 - \xi_0^2), \quad (31)$$

$$\bar{G}(s, r; \xi_0^j) = O(1) \quad r \rightarrow \infty, \quad r^2 = x^i(\xi^j)x^i(\xi^k) \quad (32)$$

где в силу (29)

$$\bar{v}_{30} = -\frac{1}{s} \frac{d\bar{G}}{d\zeta} \quad (33)$$

Общее решение уравнения (30) имеет вид:

$$\bar{G}^{(k)}(s, \xi^i; \xi_0^j) = C_1^{(k)} e^{-\lambda_1 \zeta} + C_2^{(k)} e^{\lambda_2 \zeta} \quad (34)$$

$$\lambda_j = \lambda_j(\xi^1, \xi^2, s) = \left[(-1)^{j+1} a_0(\xi^j) + \sqrt{a_0^2(\xi^j) + s^2} \right] \quad (j=1,2) \quad (35)$$

В выражении (35) ветвь корня выбирается из условия $\text{Re} \sqrt{\cdot} > 0$.

Так как решение (34) описывает расходящиеся волны, затухающее на бесконечности, то для удовлетворения граничному условию (32) необходимо принять $C_2^{(k)} = 0$. И, следовательно, общее решение (34) примет вид:

$$\bar{G}^{(k)}(s, \xi^i; \xi_0^j) = C_1^{(k)} e^{-\lambda_1 \zeta} \quad (36)$$

Константу $C_1^{(k)}$ найдем из граничного условия (31)

$$C_1^{(k)} = \frac{s}{\delta_{1k} \lambda_1 + \delta_{2k} s} \delta(\xi^1 - \xi_0^1) \delta(\xi^2 - \xi_0^2) \quad (37)$$

Тогда для давления $\bar{G}_p^{(k)}$ и компоненты вектора скорости $\bar{G}_v^{(k)}$ получим следующие выражения:

$$\bar{G}_p^{(k)} = \bar{G}^{(k)} = \frac{se^{-\lambda_1 \zeta}}{\delta_{1k}\lambda_1 + \delta_{2k}s} \delta(\xi^1 - \xi_0^1) \delta(\xi^2 - \xi_0^2) \quad (38)$$

$$\bar{G}_v^{(k)} = \bar{v}_{30} = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 \zeta}}{\delta_{1k}\lambda_1 + \delta_{2k}s} \delta(\xi^1 - \xi_0^1) \delta(\xi^2 - \xi_0^2) \quad (39)$$

Полагая в (38) и (39) $\zeta = 0$, найдем значения соответствующих функций влияния на поверхности Π :

$$\bar{G}_{p0}^{(k)} = \bar{G}_p^{(k)} \Big|_{\zeta=0} = s \bar{F}_{p0}^{(k)} \delta(\xi^1 - \xi_0^1) \delta(\xi^2 - \xi_0^2), \quad (40)$$

$$\bar{G}_{v0}^{(k)} = \bar{G}_v^{(k)} \Big|_{\zeta=0} = \bar{F}_{v0}^{(k)} \delta(\xi^1 - \xi_0^1) \delta(\xi^2 - \xi_0^2), \quad (41)$$

где

$$\bar{F}_{p0}^{(k)} = \frac{1}{\delta_{1k}\lambda_1 + \delta_{2k}s}, \quad \bar{F}_{v0}^{(k)} = \frac{\lambda_1}{\delta_{1k}\lambda_1 + \delta_{2k}s} \quad (42)$$

В частности, для первой и второй краевых задач получим следующие выражения.

- I краевая задача ($k = 1$):

$$\bar{F}_{p0}^{(1)} = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{a_0 + \sqrt{a_0^2 + s^2}}, \quad \bar{F}_{v0}^{(1)} = 1, \quad (43)$$

- II краевая задача ($k = 2$):

$$\bar{F}_{p0}^{(2)} = 1, \quad \bar{F}_{v0}^{(2)} = \frac{\lambda_1}{s} = \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + s^2}}{s}, \quad a_0 = a_0(\xi^j) > 0 \quad (44)$$

Далее ограничимся функцией влияния для I краевой задачи ($k = 1$).

Оригинал функции $\bar{F}_{p0}^{(1)}(s, \xi^j)$ в (43) может быть вычислен аналитически в замкнутом виде. Для этого представим выражение $\bar{F}_{p0}^{(1)}(s, \xi^j)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{p0}^{(1)}(s, \xi^j) &= \frac{1}{a_0 + \sqrt{a_0^2 + s^2}} = -\frac{1}{s^2} \left(a_0 - \sqrt{a_0^2 + s^2} \right) = \\ &= \frac{a_0}{s^2} + \frac{\sqrt{a_0^2 + s^2}}{s^2} = \frac{a_0}{s^2} + \frac{a_0^2 + s^2}{s^2 \sqrt{a_0^2 + s^2}} = \\ &= \frac{a_0}{s^2} + \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + s^2}} + \frac{a_0^2}{s^2 \sqrt{a_0^2 + s^2}} \end{aligned} \quad (45)$$

Оригиналы первых двух слагаемых табличны:

$$\frac{a_0}{s^2} \div a_0 \tau, \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + s^2}} \div J_0(a_0 \tau), \quad (46)$$

где $J_0(z)$ - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для нахождения оригинала третьего слагаемого в (45) воспользуемся теоремой о произведении изображений по Лапласу. Тогда будем иметь:

$$\frac{a_0^2}{s^2 \sqrt{a_0^2 + s^2}} \div a_0^2 \int_0^\tau (\tau - t) J_0(a_0 t) dt \quad (47)$$

Вычисление последнего интеграла приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau (\tau - t) J_0(a_0 t) dt = \\ & = \tau^2 \left[J_0(z) - \frac{\pi}{2} [J_0(z) H_1(z) - J_1(z) H_0(z)] \right] - \frac{\tau}{a_0} J_0(z), \quad z = a_0 \tau \end{aligned} \quad (48)$$

где $J_1(z)$, $H_0(z)$, $H_1(z)$ - функции Бесселя и Струве соответствующего порядка [3]

Тогда для переходной функции $G_{p0}^{(1)}(\tau, \xi^j; \xi_0^j)$ из (40) - (48) окончательно получим:

$$G_{p0}^{(1)}(\tau, \xi^1, \xi^2; \xi_0^j) = \dot{F}_{p0}^{(1)}(\tau, \xi^1, \xi^2) \delta(\xi^1 - \xi_0^1) \delta(\xi^2 - \xi_0^2) \quad (49)$$

$$\dot{F}_{p0}^{(1)}(\tau, \xi^1, \xi^2) = -H(\tau) R(z),$$

$$\begin{aligned} R(z) = & J_0(z) - z [1 + J_1(z)] + \\ & + z^2 \left\{ J_0(z) - \frac{\pi}{2} [J_0(z) H_1(z) - J_1(z) H_0(z)] \right\}, \end{aligned} \quad (50)$$

где $H(t)$ - функция Хевисайда.

Следовательно, давление на поверхности Π p_0 в I краевой задаче при произвольных граничных условиях на поверхности Π

$$v_n|_{\zeta=0} = h(\tau, \xi^1, \xi^2) \quad (51)$$

определяется следующим соотношением [4]:

$$\begin{aligned} p_0(\tau, \xi^j) &= \int_0^\tau dt \iint_D G_{p0}^{(1)}(\tau - t, \xi^j; \xi_0^j) h(t, \xi_0^1, \xi_0^2) \sqrt{g} d\xi_0^1 d\xi_0^2 = \\ &= \iint_D \dot{F}_{p0}^{(1)}(\tau - t, \xi^1, \xi^2) \delta(\xi^1 - \xi_0^1) \delta(\xi^2 - \xi_0^2) h(t, \xi_0^1, \xi_0^2) \sqrt{g} d\xi_0^1 d\xi_0^2 = \\ &= \int_0^\tau \dot{F}_{p0}^{(1)}(\tau - t, \xi^i) h(t, \xi^j) dt. \end{aligned} \quad (52)$$

Входящая в (52) производная переходной функции $\dot{F}_{p0}^{(1)}(\tau, \xi^j)$ имеет вид:

$$\dot{F}_{p0}^{(1)}(\tau, \xi^j) = -a_0 [\delta(\tau) + H(t)R'(z)], \quad (53)$$

$$R'(z) = 1 + J_1(z) - z \left\{ J_0(z) - \frac{\pi}{2} [J_0(z)\mathbf{H}_1(z) - J_1(z)\mathbf{H}_0(z)] \right\}. \quad (54)$$

Формула (52) дает возможность приближенно определить давление на поверхности жесткой преграды Π при задании нормальной составляющей вектора скорости $h(\tau, \xi^j)$.

График функции $R(z)$ изображен на рисунке 1.

Построенная функция влияния позволяет определить гидродинамическое давление, действующее на абсолютно твердое тело, ограниченное гладкой выпуклой поверхностью Π . Причем, в отличие от гипотезы плоского отражения [1], давление в среде p зависит от местной кривизны поверхности твердого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-08-01497).

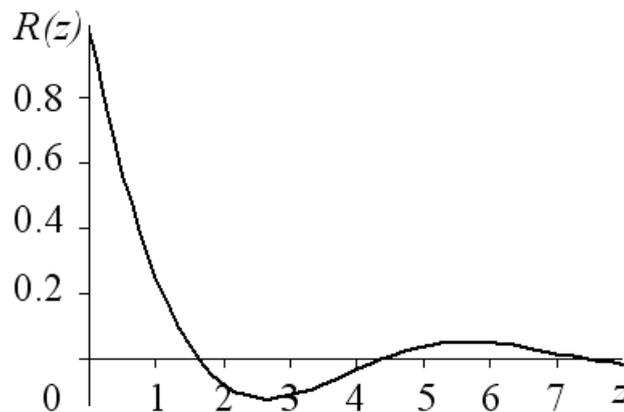


Рис. 1.

Литература

1. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение. 208 с.
2. Горшков А.Г., Жаворонок С.И., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Плоская задача дифракции акустической волны давления на тонкой ортотропной панели, помещенной в жесткий экран. Изв. РАН. МТТ. №1. 2004. С.209-220.
3. Справочник по специальным функциям. Под ред. Абрамовица М., Стиган И. – М.:Наука. – 1979. – 830 с.
4. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.- 632 с.

ВЛИЯНИЕ УГЛА ДАВЛЕНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ В ШАРИКОВИНТОВЫХ МЕХАНИЗМАХ

Пеньков И.В., Стрижак В.И.

(Таллиннский Технический Университет, Таллинн, Эстония)

INFLUENCE OF PRESSURE ANGLE ON LOAD DISTRIBUTION IN BALLSCREW MECHANISMS

Penkov I.V. and Strizhak V.I.

(Tallinn University of Technology, Tallinn, Estonia)

The article discusses a calculation procedure for determining the load distribution on the threads of a ballscrew under general load condition. The equations for calculating of axial load distribution for two types of loading are presented. The factors influencing the pliability of threads are calculated and their dependence on the pressure angle between balls and elements of transmission is shown. The value of the increment of pressure angle is calculated and the load distribution in a ballscrew and a sliding screw is shown. For the ballscrew the change of loading for constant and variable pressure angles are considered.

1. Введение. Соосные шариковинтовые механизмы широко применяются в машиностроении и приборостроении для преобразования вращательного движения в поступательное и наоборот. Принцип действия таких механизмов заключается в том, что в резьбовые канавки винта и гайки закладываются шарики, цепь которых замыкается с помощью специального перепускного канала. Шариковинтовые пары формируются с одним, двумя или тремя перепускными каналами, каждый из которых замыкает 2 – 4 витка резьбы [1, 2]. В специальных шариковинтовых механизмах высокой грузоподъемности используется один перепускной канал на 9 – 10 витков [3]. Кинематическая точность обеспечивается конструкцией гайки, позволяющей полностью исключить осевой зазор в передаче с двух- и четырехточечным контактом при использовании резьбы как прямоугольного, так и овального профиля. Последний формируется исходя из разности кривизны дорожек и тел качения. Прилегание шарика к поверхности характеризуется коэффициентом $\nu = r_b / r_n$, где r_b - радиус шарика, r_n - наименьший радиус профиля резьбы в нормальном сечении. Значение ν выбирается в пределах 0,96 – 0,97 [9].

Работоспособность и долговечность шариковинтовой передачи зависит от многих факторов [4, 5] и прежде всего от характера распределения нагрузки между шариками, вызывающего неравномерную деформацию винта и гайки как в осевом, так и в радиальном направлении. Уравнение совместности деформаций элементов винтовой пары имеет вид [8]

$$\Delta_1 - \Delta_2 = [\delta_1(z) + \delta_2(z)] - [\delta_1(0) + \delta_2(0)] \quad (1)$$

где Δ_i – деформации винта и гайки; $\delta_i(z)$ и $\delta_i(0)$ – прогибы витков в сечениях z и $z = 0$. Индекс 1 относится к винту, 2 – к гайке. Деформации витков в осевом направлении можно представить в виде

$$\delta_i(z) = \lambda_i \frac{p_i P}{E_i} + \frac{\sigma_i(z) \cdot d_{ci}}{2E_i} \mu_i \cdot \tan \alpha \quad (2)$$

где $i = 1; 2$; $\sigma_i(z)$ – напряжения в сечении z винта и гайки; E_i, μ_i – модуль упругости и коэффициент Пуассона материалы детали; p_i – давление на шарик; P – расстояние между соседними шариками в нормальном сечении винта; d_{ci} – диаметр контакта шарика с винтом или гайкой; α – угол давления. Безразмерные коэффициенты λ_i учитывают смещения витков от изгиба, сдвига, радиальных и контактных деформаций. Выражая давление $p(z)$ через интенсивность распределения осевых сил $q(z)$ из уравнения (1) получим известные зависимости [7] распределения нагрузки по длине винтовой пары. В случае нагружения винта растягивающими, а гайки сжимающими силами закон распределения осевых сил имеет вид

$$q(z) = \frac{F \cdot e^{a(H-z)}}{\sinh bH} \left[b \cosh bz - a \sinh bz \right] \quad (3)$$

и в случае растяжения как винта, так и гайки

$$q(z) = F \cdot e^{-az} \left[\frac{b \cosh bz - a \sinh bz}{\beta \cdot e^{aH} \sinh bH} \left(\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{e^{(b-a)H}}{E_2 A_2} \right) - \frac{b^{bz}}{\gamma (b+a) E_2 A_2} \right] \quad (4)$$

Здесь $e \approx 2,71$ – основание натурального логарифма; F – нагрузка на винтовую передачу; H – высота гайки; A_1 и A_2 – площадь поперечного сечения винта и гайки соответственно; β, γ, a, b – коэффициенты, учитывающие геометрические особенности элементов винтовой пары и механические свойства материалов [7].

Следует помнить, что в шариковинтовой паре имеются те же вредные явления, что и у радиальных и радиально-упорных подшипников с двухточечным контактом. Под действием внешних нагрузок тела качения занимают в винтовых канавках иное положение, чем это следует из геометрической схемы шариковинтовой пары. С учетом этого нагрузка на шарики может быть представлена в виде

$$F_b = f(\rho, \Theta, \gamma, \alpha, K)$$

где ρ – радиус качения шариков, Θ – угол поворота винта, γ – угол подъема винтовой линии, α – угол давления, K – коэффициент, характеризующий жесткость деталей передачи.

Поскольку угол давления изменяется с продвижением тел качения от менее нагруженных витков к более нагруженным и нелинейность распределения контактных напряжений оказывает влияние на распределение нагрузки между витками и отдельными шариками, то эти

явления необходимо учитывать при определении напряжений в опасном сечении деталей.

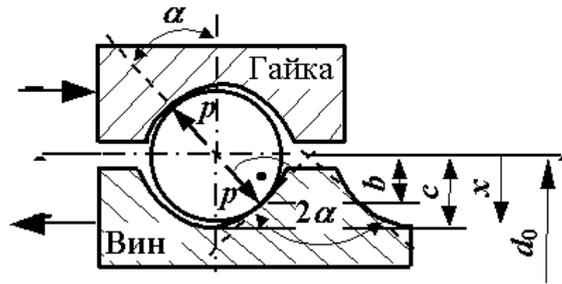


Рис. 1. Двухточечный контакт в шариковинтовой паре овального профиля

2. Изменение угла давления. Определив деформации изгиба и сдвига витков из интеграла Мора и решив задачи Ламе и Герца можно для шариковинтовой пары с овальным профилем резьбы (Рис. 1) представить входящие в уравнение (2) коэффициенты λ в виде [6]

$$\lambda = 0,002 + \frac{p \cos \alpha}{2E} \left[\frac{15}{\tan^2 \alpha} \left(\ln \frac{c}{b} - \frac{b^2}{c^2} + 3 \frac{b}{c} - 2 \right) + \right. \\ \left. + 12(1 + \mu) \ln \frac{c}{b} + \frac{d_c \tan \alpha}{P} \left(\frac{d_{ex}^2 + d_{in}^2}{d_{ex}^2 - d_{in}^2} \pm \mu \right) \right]$$

где для винта $d_{ex} = d_c$ и d_{in} – диаметр отверстия полого винта (для сплошного винта $d_{in} = 0$) и для гайки $d_{in} = d_c$ и d_{ex} – наружный диаметр гайки. Знак " + " используется при расчете деформаций гайки.

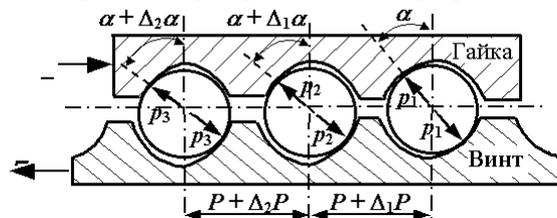


Рис. 2. Изменение угла давления по длине шариковинтовой передачи

Выяснив таким образом законы, связывающие величины осевых деформаций витков с действующими на них внешними нагрузками можно из уравнений (3) и (4) определить характер изменения интенсивности распределения сил и, после интегрирования в пределах каждого витка, величину приходящейся на него нагрузки. Принимая во внимание зависимость осевых деформаций от угла давления и изменяемость его величины по длине передачи (Рис. 2), нагрузку в сечении z можно представить в виде

$$F(z) = \int_0^z \int_0^{z_1} q(z_1) dz_1 dz$$

Величина приращения угла давления зависит, главным образом, от радиальных деформаций элементов передачи, радиальных составляющих контактных деформаций и величины ν . Тогда смещение точки контакта шарика с поверхностью впадины резьбы можно представить как

$$\chi = \delta_f + \delta_\mu + \delta_c \quad (5)$$

где δ_f – радиальные деформации от давления на виток; δ_μ – радиальные деформации, вызванные осевыми деформациями растяжения или сжатия элементов передачи; δ_c – радиальные составляющие контактных деформаций.

С другой стороны величина χ может быть представлена как разность углов давления α и $\alpha + \Delta\alpha$ (Рис. 3)

$$\chi = [\cos \alpha - \cos(\alpha + \Delta\alpha)] \cdot r_n \quad (6)$$

Решив совместно уравнения (5) и (6) определим величину приращения угла давления

$$\Delta\alpha = \arccos \left[\cos \alpha - \frac{(\delta_f + \delta_\mu + \delta_c)}{r_n} \right] - \alpha \quad (7)$$

где $\delta_f = \frac{pd_c \cos \alpha}{2E} (1 - \mu)$; $\delta_\mu = \frac{\sigma \cdot d_c \mu}{2E}$; $\delta_c = 0,977 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{r_b} \left(\frac{p}{E}\right)^2} \cos \alpha$

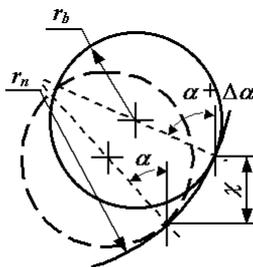


Рис. 3. Смещение точки контакта элементов передачи

Из анализа уравнения (7) следует, что значительные изменения угла давления возможны при давлениях, близких к модулю упругости. Поскольку реальные нагрузки в шариковинтовых передачах значительно меньше величины E , угол α изменяется несущественно и для винтовой пары диаметром $d_0 = 16$ mm и шагом $P = 5$ mm приращение $\Delta\alpha \approx 1^\circ$ при давлении $p \approx 200$ МПа.

3. Распределение нагрузки. Распределение нагрузки по длине шариковинтовых передач в значительной степени зависит от величины угла давления поскольку с этим связаны величины осевых деформаций элементов винтовой пары. Вместе с тем незначительные приращения угла давления существенного выравнивания распределения нагрузки не вызывают. В таблице 1 представлены величины нагрузок на наиболее нагруженный виток (в процентном отношении к полной осевой нагрузке) пятивитковых шариковинтовых передач 16×5 и 80×16 . Расчеты проведены

для передач с постоянным $\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \dots = \Delta\alpha_5 = 0$ и переменным углами давления $\Delta\alpha_1 < \Delta\alpha_2 < \dots < \Delta\alpha_5$. В последнем случае принято $\Delta\alpha_1 = 0$ и $\Delta\alpha_5 - \Delta\alpha_1 = 1^\circ$ или 2° . Из таблицы видно, что величина наибольшей нагрузки изменяется незначительно – в пределах $0,3 \dots 0,5\%$.

Таблица 1. Нагрузка на наиболее нагруженный виток. $F_5/F, \%$.

Винт	$\Delta\alpha_5 = 0$	$\Delta\alpha_5 = 1^\circ$	$\Delta\alpha_5 = 2^\circ$
16 x 5	40,4	40,3	40,2
80 x 16	30,3	30,3	30,2

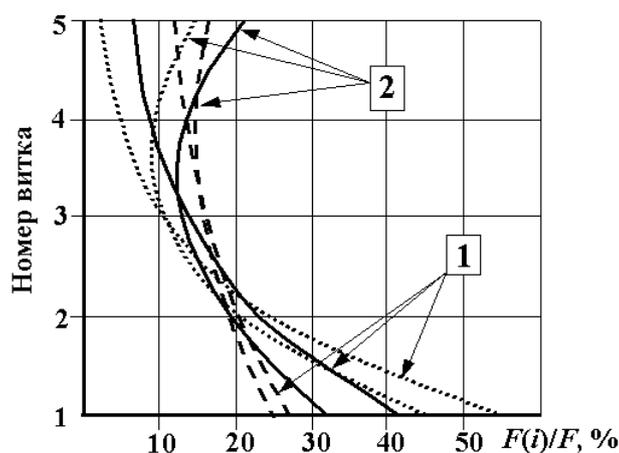


Рис. 4. Распределение нагрузки между витками.

1 – винт растянут, гайка сжата;

2 – винт и гайка растянуты.

- шариковинтовая пара с двухточечным контактом и овальным профилем резьбы;
- - - шариковинтовая пара с четырехточечным контактом и прямоугольным профилем резьбы;
- винтовая пара скольжения с резьбой Tr16x4.

На рис. 4 представлено распределение нагрузки между витками пятивитковой шариковинтовой передачи с номинальным диаметром $d_0 = 16 \text{ mm}$ и шагом $P = 5 \text{ mm}$. Максимальное изменение угла давления принято $\Delta\alpha_5 = 1^\circ$. Для сравнения там же показано распределение нагрузки в шариковинтовой паре прямоугольного профиля тех же геометрических размеров и в винтовой паре скольжения с резьбой Tr16x4. В случае прямоугольного и трапецеидального профилей величина угла давления не изменяется и силы взаимодействия элементов передачи направлены по нормали к контактной поверхности. Видно, что наиболее равномерное распределение сил достигается при использовании винтовой пары с прямоугольным профилем резьбы. Это объясняется тем, что в этом случае

направление контактных деформаций параллельно оси передачи. Наиболее неравномерное распределение сил наблюдается в паре скольжения. Здесь площадь контакта витков винта и гайки значительно больше, чем в паре качения и влияние контактных деформаций невелико.

Литература

1. <http://www.skf.com>, september 2005.
2. <http://www.ina.com>, september 2005.
3. <http://www.tsubaki.com/ballscrew.htm>, september 2005.
4. Hung J.P., Wu J.S. and Chiu J.Y. Impact failure analysis of recirculating mechanism in ball screw. *Engineering Failure Analysis*, Vol. 11, No. 4, pp. 561 – 573, 2004.
5. Kim S. K. and Cho D. W. Real - time estimation of temperature distribution in a ball - screw system. *International Journal of MachineTools and Manufacture*. Vol. 37, No. 4, pp. 451 – 464, 1997.
6. Penkov I. and Strizhak V. Intensity of Load Distribution in Ballscrews. *Machine-building and Electrotechnics*, ISSN 025-455X, 2005, (in print).
7. Strizhak V. and Penkov I. Dependence of Load Capacity of Threaded Joints on Design Parameters. *Proceedings of the OST- 95 Symposium on Machine Design*, Oulu, Finland, pp. 66 – 75, 1995.
8. Биргер И. А., Иосилевич Г. Б. Резьбовые и фланцевые соединения. М., Машиностроение. 1990.
9. Павлов Б. И. Шариковинтовые механизмы в приборостроении. Л., Машиностроение, 1968.

УДК 539.3, 624.04

ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФУНКЦИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Пеньковой С.Б. (МГСУ, Москва, Россия)

COMPUTING OF EIGENVALUES AND EIGENFUNCTION IN BOUNDARY PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ARBITRARY BOUNDARY CONDITIONS

Penkovoy S.B. (MGSU, Moscow, Russia)

Приводится новый подход для вычисления собственных значений и функций многоточечных краевых задач, с использованием обобщенных функций.

1. Введение. Важной составляющей решения краевых задач динамики в строительной механике, является вычисление собственных функций и собственных значений дифференциального оператора.

Если соответствующее дифференциальное уравнение имеет постоянные коэффициенты, то существует возможность решения задачи в аналитическом виде. При этом вся вычислительная проблема сводится к

определению параметров в соответствии с краевыми условиями. Это, как правило, нелинейная проблема. Предлагается удобный алгоритм их вычисления с использованием обобщенных функций и фундаментального решения.

2. Постановка задачи. Общий вид оператора одномерной задачи имеет вид:

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_0 \cdot y$$

$$Ly = (\tilde{\alpha}, \tilde{y})$$

$$\text{где } \tilde{\alpha} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1} \ 1]^T; \quad \tilde{y} = [y \ y^{(1)} \ \dots \ y^{(n-1)} \ y^{(n)}]^T$$

или

$$Ly = y^{(n)} + (\bar{\alpha}, \bar{y})$$

$$\text{где } \bar{\alpha} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]^T; \quad \bar{y} = [y^{(0)} \ y^{(1)} \ \dots \ y^{(n-1)}]^T$$

С учетом этого поставим спектральную задачу

$$Ly = s^n \cdot y,$$

где s^n - собственное число ($y(x) \neq 0$), приведем эту задачу к системе.

Введем следующие обозначения

$$y^{(0)} = y_1; \ y^{(I)} = y_2; \ y^{(II)} = y_3; \ \dots \ y^{(n-1)} = y_n,$$

тогда получим систему следующего вида

$$y_1^{(I)} = y_2; \ y_2^{(I)} = y_3; \ \dots \ y_{n-1}^{(I)} = y_n; \ y_n^{(I)} = -a_0 \cdot y_1 - a_1 \cdot y_2 - \dots$$

$$- a_{n-1} \cdot y_n + s^n \cdot y_1$$

или в матричной форме

$$\bar{y}^{(I)} = A_s \cdot \bar{y},$$

$$\text{где } A_s = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & & & \dots & 0 & 1 \\ (s^n - a_0) & -a_1 & & \dots & & -a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Запишем краевые условия общего вида

$$B_0 \cdot \bar{y}(0) + B_L \cdot \bar{y}(l) = 0,$$

где: B_0 и B_L - матрицы граничных условий порядка n ; $\bar{y}(0)$ и $\bar{y}(l)$ - вектор-функция, содержащая значения искомой функции и ее производных до $n-1$ - го порядка в точках $x = 0$, $x = l$.

3.Вычисление собственных чисел и векторов матрицы A. Для нахождения собственных чисел и векторов необходимо найти решить систему

$$\det(A_s - \lambda \cdot E) = 0,$$

$$\text{где } A_s - \lambda \cdot E = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \dots & \\ 0 & & & \dots & -\lambda & 1 \\ (s^n - a_0) & -a_1 & & \dots & & -a_{n-1} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получим

$$a_{n-1} \cdot \lambda^n + a_{n-2} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \cdot \lambda + (a_0 - s^n) = 0.$$

Корни данного полинома $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - являются собственными значениями.

Зная собственные числа λ решаем систему. Предполагая, что $x_1 = 1$, тогда $x_2 = \lambda$, $x_3 = \lambda^2 \dots x_n = \lambda^{n-1}$. Таким образом, k -й собственный вектор равен

$$\bar{x}^k = [1 \quad \lambda_k \quad \lambda_k^2 \quad \dots \quad \lambda_k^{n-1}]^T$$

То есть, матрица собственных векторов T имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Запишем соотношение

$$L\theta\bar{y} = (\theta\bar{y})^{(I)} - A \cdot \theta\bar{y} = \delta_\Gamma \cdot \bar{y} + \theta\bar{y}^{(I)} - \theta \cdot A \cdot \bar{y} = \theta \cdot L\bar{y} + \delta_\Gamma \cdot \bar{y} \quad (1)$$

где

$$\theta = \begin{cases} 1, & 0 < x < l \\ 0, & 0 \geq x \geq l \end{cases} \quad \text{- характеристическая функция отрезка. Поскольку}$$

$$\theta \cdot L\bar{y} = 0, \text{ тогда } L\theta\bar{y} = \delta_\Gamma \cdot \bar{y},$$

$$\text{где } \delta_\Gamma = \delta(x) - \delta(x-l)$$

Пусть $\varepsilon(x)$ - матрица-функция определяемая уравнением

$$L\varepsilon(x) = \delta(x)E$$

Действуем оператором свертки $\varepsilon^* = L^{-1}$ на соотношение [1]

$$\theta\bar{y} = \varepsilon^* \delta_\Gamma \cdot \bar{y} = \varepsilon(x) \cdot \bar{y}_0 - \varepsilon(x-l) \cdot \bar{y}_l$$

$$\theta\bar{y} = \varepsilon(x) \cdot \bar{y}_0 - \varepsilon(x-l) \cdot \bar{y}_l$$

Матрицы $\varepsilon_0(+0)$, $\varepsilon_0(-0)$, $\varepsilon(+0)$, $\varepsilon(-0)$ являются проекторами, где $P_+ = \varepsilon(+0)$, $P_- = \varepsilon(-0)$

В данном случае проекторы обладают еще следующими свойствами:

$$P_+ + P_- = E, \quad P_+ \cdot P_- = 0$$

Учитывая все перечисленные свойства, запишем вектор коэффициентов C следующим образом:

$$\text{пусть } \bar{C} = P_+ \cdot \bar{y}_0 + P_- \cdot \bar{y}_l,$$

$$\text{тогда: } P_+ \cdot \bar{C} = P_+ \cdot \bar{y}_0; \quad P_- \cdot \bar{C} = P_- \cdot \bar{y}_l.$$

Перепишем с учетом выше сказанного соотношение [1]

$$\begin{aligned} \bar{y}(x) &= \varepsilon(x) \cdot \bar{y}_0 - \varepsilon(x-l) \cdot \bar{y}_l = \varepsilon(x) \cdot \varepsilon(+0) \cdot \bar{y}_0 - \varepsilon(x-l) \cdot \varepsilon(-0) \cdot \bar{y}_l = \\ &= \varepsilon(x) \cdot \bar{C} - \varepsilon(x-l) \cdot \bar{C} = [\varepsilon(x) - \varepsilon(x-l)] \cdot \bar{C} \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение примет вид: $\bar{y}(x) = [\varepsilon(x) - \varepsilon(x-l)] \cdot \bar{C}$.

$$\text{Условия на краях имеют вид: } B_0 \cdot \bar{y}(0) + B_L \cdot \bar{y}(l) = 0$$

Данное уравнение и является основной постановкой задачи.

Подставляя общее решение в краевые условия, получаем систему уравнений

$$B_0 \cdot [\varepsilon(0) - \varepsilon(0-l)] \cdot \bar{C} + B_L \cdot [\varepsilon(+l) - \varepsilon(-0)] \cdot \bar{C} = 0,$$

введем обозначение

$$A_r = B_0 \cdot [\varepsilon(0) - \varepsilon(0-l)] + B_L \cdot [\varepsilon(+l) - \varepsilon(-0)], \text{ где } A_r = A_r(s).$$

Тогда система уравнений примет вид

$$A_r \cdot \bar{C} = 0$$

Ищем нетривиальное решение. Для этого необходимо, чтобы определитель был равен нулю

$$\det(A_r) = 0.$$

4. Постановка задачи с внутренними условиями. Пусть балка имеет $n-2$ внутренние точки. Тогда решение на $k-m$ участке запишется

$$\bar{y}_k(\tilde{x}) = [\varepsilon(\tilde{x}) - \varepsilon(\tilde{x} - l_k)] \bar{C}^k,$$

где $\tilde{x} = x - x_k$, $\tilde{x} \in (0, l_k)$, \bar{C}^k - соответствующий вектор постоянных.

Граничные условия в $k-i$ точке:

$$B_k^+ \cdot \bar{y}_k(+0) + B_k^- \cdot \bar{y}_{k-1}(l_{k-1}) = 0$$

Подставляя общее решение в граничные условия, получаем систему $A_r(s) \cdot \bar{C} = 0$, здесь \bar{C} - глобальный вектор постоянных.

Находим шаговым методом такие собственные числа s^n , при которых $\det(A_r) = 0$

Получив вектор неизвестных \bar{C} . Строим графики перемещений, углов поворота, момента и поперечной силы.

5. Двумерная постановка.

$Lu = \omega^2 \cdot u$, где ω^2 собственное число ($u(x_1, x_2) \neq 0$), $\omega > 0$, L – оператор задачи теории упругости.

Запишем соотношение $L\theta u = \theta Lu + \delta_\Gamma \cdot lu - l^*(\delta_\Gamma u)$,

где

$$L = \mu \nabla^2 E + \mu \begin{vmatrix} \partial_1^2 & \partial_2 \partial_1 \\ \partial_1 \partial_2 & \partial_2^2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \partial_1^2 & \partial_1 \partial_2 \\ \partial_2 \partial_1 & \partial_2^2 \end{vmatrix}$$

$$l = \mu \partial_\nu E + \mu \begin{vmatrix} \nu_1 \partial_1 & \nu_2 \partial_1 \\ \nu_1 \partial_2 & \nu_2 \partial_2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \nu_1 \partial_1 & \nu_1 \partial_2 \\ \nu_2 \partial_1 & \nu_2 \partial_2 \end{vmatrix},$$

здесь μ и λ – коэффициенты Ламе; $\partial_\nu = \nu_1 \partial_1 + \nu_2 \partial_2$, ν_1 и ν_2 – компоненты вектора внутренней нормали; ∇^2 – оператор Лапласа,

$\theta = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$ – характеристическая функция области

Фундаментальная функция задачи теории упругости имеет вид

$$\varepsilon_\omega(x) = \frac{1}{\mu} \varepsilon_{H1}(x) + \left(\frac{1}{\lambda + 2\mu} \varepsilon_{H1}(x) - \frac{1}{\mu} \varepsilon_{H1}(x) \right) \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} (\partial_1 \quad \partial_2) \nabla^{-4}$$

$$\varepsilon_H(x) = -\frac{i}{4} H_0^1(kr) \text{ или } \varepsilon_H(x) = \frac{i}{4} H_0^2(kr),$$

где: $\varepsilon_H(x)$ – фундаментальные решения оператора Гельмгольца; H_0^j , $j = 1, 2$ – функции Ханкеля; ∇^4 – бигармонический оператор.

Фундаментальная функция соответствует матрице Купрадзе.

Действуем на последнее равенство оператором свертки $\varepsilon^* = L^{-1}$

$$\theta u = \varepsilon^* (\delta_\Gamma \cdot lu) - \varepsilon^* l^* (\delta_\Gamma u)$$

или в интегральном виде

$$u(x) = \int_\Gamma \varepsilon(x, \zeta) \cdot v(\zeta) d\Gamma_\zeta - \int_\Gamma l_\zeta \varepsilon(x, \zeta) \cdot w(\zeta) d\Gamma_\zeta$$

$$v(x) = \int_\Gamma l_x \varepsilon(x, \zeta) \cdot v(\zeta) d\Gamma_\zeta - \int_\Gamma l_x l_\zeta \varepsilon(x, \zeta) \cdot w(\zeta) d\Gamma_\zeta,$$

где: $v(x) = lu(x)$, $w(\zeta) = u(\zeta)$

На основе приведенных интегральных представлений, формируется граничные интегральные уравнения, из которых определяются функции плотности слоев потенциалов. Поскольку эти решения зависят от ω , то последняя определяется из равенства нулю определителя системы.

Поскольку ядра интегральных операторов имеют особенности, то рекомендуется представить $\varepsilon_\omega(x)$ как сумму

$$\varepsilon_\omega(x) = \varepsilon_0(x) + \Delta \varepsilon(x)$$

при этом вычисления интегралов с $\varepsilon_0(x)$ имеют хорошие алгоритмы. А $\Delta\varepsilon(x)$ является функцией без особенностей и вычисление с ней не вызывает трудностей.

Литература

1. Золотов А.Б., Акимов П.А. Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики. Москва: Издательство АСВ, 2004, 200с.
2. Ржаницын А.Р. Строительная механика. Москва: «Высшая Школа», 1982, 400с.
3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Москва: Издательство «Наука», 1970, 672с.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. –М.: Наука, 1979. 320с.

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Полякова Ю.В., Улитин В.В.

*(Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных технологий, Санкт-Петербург, Россия)*

STABILITY OF COMPOUND BEAMSES IN VIEW OF PHYSICAL NONLINEARITY

Polyakova J.V., Ulitin V.V.

(Saint Petersburg State University of Refrigeration, Saint Petersburg, Russia)

Рассматриваются составные стержни постоянного сечения, закрепленные снизу и нагруженные сверху сжимающей силой. С помощью метода конечных элементов решается задача устойчивости с учетом физической нелинейности. Исследованы изменение величины критических напряжений и формы нарушения устойчивости при различной длине составного стержня.

Рассматриваются вертикальные составные стержни постоянного сечения из четырех уголков, закрепленные снизу и нагруженные сверху сжимающей силой, приложенной в точке пересечения верхних горизонтальных элементов (рис 1). По высоте стержни разделены поперечинами на ряд секций с диагоналями в поперечных и боковых плоскостях. Длина вертикальных и горизонтальных стержней l м., уголок № 10, $t = 10$ мм. Материал строительная сталь С38/23; предел текучести $\sigma_m = 230$ МПа, предел пропорциональности $\sigma_{nc} = 184$ МПа, предельная гибкость

$\lambda^* = 103,6$.

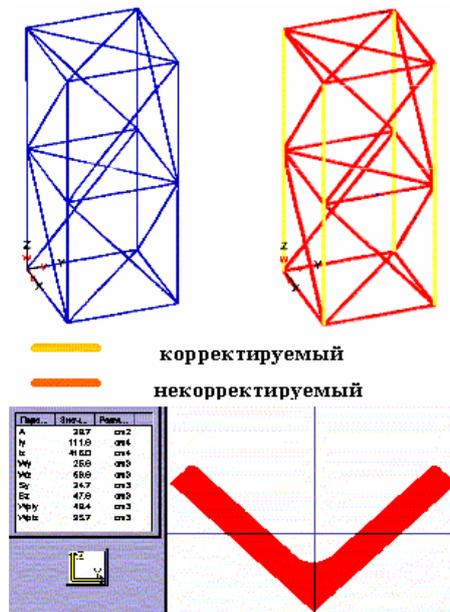


Рис 1. Схема составного стержня.

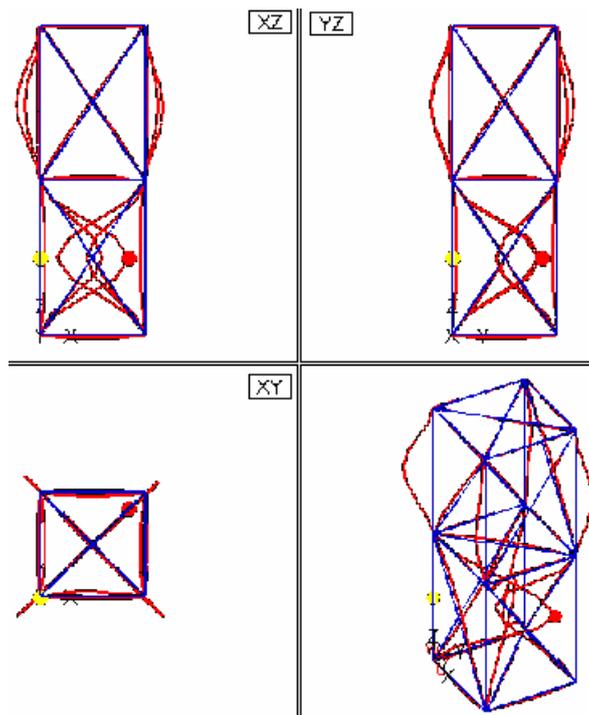


Рис 2. Составной решетчатый стержень – 2 секции.

При решении подобных задач обычно предполагается, что такой составной стержень работает как единое целое, а жесткость на изгиб определяется моментом инерции сечения из четырех уголков. Предполагается также, что его гибкость больше предельной и, следовательно, критические напряжения меньше предела пропорциональности. Пределы применимости этих допущений, как правило, не указываются [1, 2]. Однако, если число секций невелико, эти

предположения оказываются неверны. Так при малом числе секций система работает как пространственная ферма (рис 2). Причем следует обратить внимание, что выпучивание (продольный изгиб стоек) происходит в плоскости, проходящей через соответствующую главную ось сечения. Устойчивость ее определяется устойчивостью отдельных стержней, гибкость которых, как правило, меньше предельной. При расчете такой системы на устойчивость необходимо учитывать физическую нелинейность, поскольку в противном случае критическая нагрузка может быть завышена в несколько раз.

Таким образом, возникает, по крайней мере, два вопроса: при каком числе секций стержень можно рассматривать как единое целое, и при каких условиях можно не учитывать физическую нелинейность.

Обычно, считают, что стержень работает как единое целое, если число секций 6 и более. Однако моделирование на ЭВМ показало, что число секций должно быть не менее 12. В различных источниках указывается, что при расчете составного стержня следует принимать гибкость равной 70, но эта рекомендация сомнительна, поскольку в действительности система ведет себя весьма сложным способом.

Для решения задачи использовался метод конечных элементов (пакет предметно-ориентированных программ **STARK**). Физическая нелинейность учитывалась с помощью метода корректировки жесткости [3]. Алгоритм корректировки жесткости предполагает ряд последовательных приближений, с учетом перераспределения усилий между элементами системы на каждом шаге.

Сначала просчитывается статическая нагрузка и устойчивость в естественном состоянии системы. По результатам этих расчетов выбираются стержни с критическими напряжениями выше предела упругости (на рис 1 они показаны желтым цветом). Таким образом, материал был разделен на две группы: корректируемый, в котором производилась корректировка модулей, и некорректируемый. Изменение жесткости в выбранных стержнях производится пропорционально отношению критического напряжения при данной гибкости, т.е. с учетом физической нелинейности, к напряжению, полученному при решении статической задачи. Для определения критических напряжений использовалась универсальная обобщенная диаграмма критических напряжений для конструкций из строительных сталей, полученная на основе концепции Шенли [4].

Определялись критические нагрузки и изучались формы, которые принимали стержни, при различном числе секций n_S . Так при $n_S \leq 6$ (рис 2 - 4) ось составного стержня остается прямой, а устойчивость теряют два вертикальных уголка, расположенных по диагонали сечения, в плоскости, проходящей через эту диагональ (то есть в плоскости минимального момента инерции уголков).

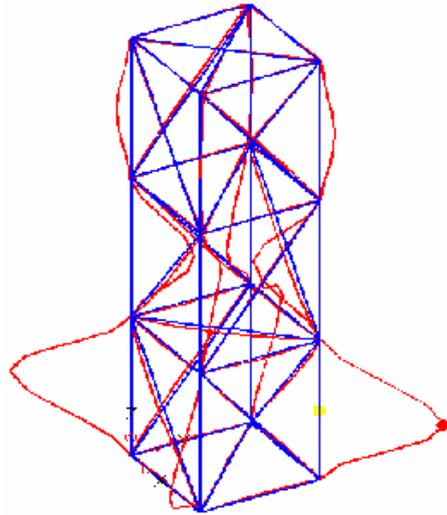


Рис 3. Составной решетчатый стержень – 3 секции.

Только при $n_S \geq 12$ (рис 5) стержень теряет устойчивость как единое целое в плоскости продольного сечения, как это принимается в классической расчетной схеме. Однако и в этом случае критические напряжения превышают предел пропорциональности, например при $n_S = 12$ $\sigma_{кр} = 253$ МПа .

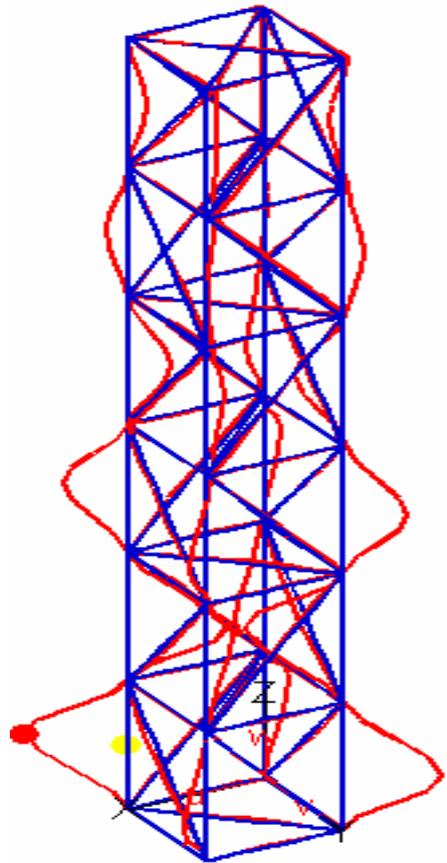


Рис 4. Составной решетчатый стержень – 6 секций.

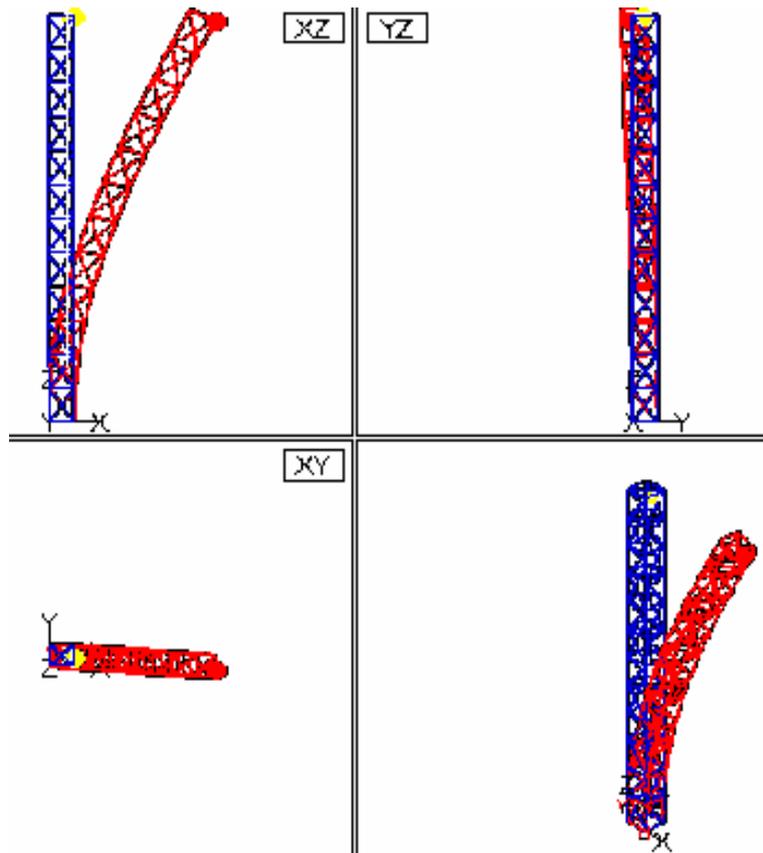


Рис 5. Составной решетчатый стержень – 12 секций.

В этих случаях (рис. 2-4) происходит местное нарушение устойчивости, поскольку вся конструкция в целом сохраняет свою форму. Однако такое состояние является фатальным, поскольку дальнейшее увеличение нагрузки невозможно.

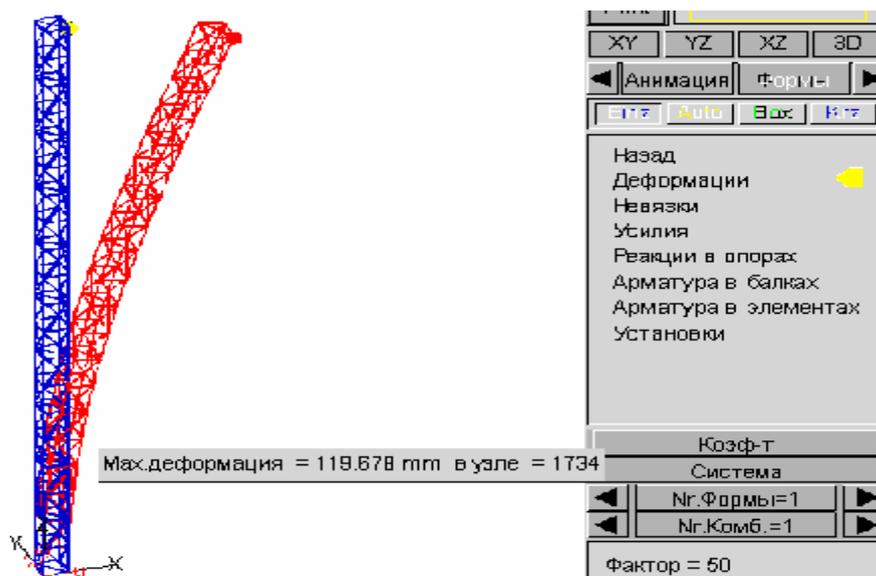


Рис 6. Составной решетчатый стержень – 20 секций. Показаны величина прогиба и величина критического параметра.

В случаях, представленных на рис. 5-6 конструкция теряет устойчивость в целом.

Результаты численных экспериментов (таблица 1) показывают, что при числе секций $n_S \leq 6$ критическая сила практически одинакова, поскольку устойчивость определяется устойчивостью уголка стойки. Коэффициент K_p показывает, во сколько раз критическая нагрузка, полученная без учета физической нелинейности, больше действительной.

Таблица 1.

Количество секций	Критическая сила		Критическое напряжение		K_p	Сходимость, % (шаги)
	на 0-м шаге, кН	на последнем шаге, кН	на 0-м шаге, МПа	на последнем шаге, МПа		
2	12630	3021	1024	237	4,18	0,9998 (3)
3	12322	2988	1012	237	4,12	0,9993 (3)
6	12018	2983	984	237	4,03	1,0004 (4)
8	10123	2992	830	240	3,38	0,9996 (2)
12	4650	3098	381	253	1,5	0,9999 (2)
20	1700		139		1.0	

Таким образом, вычислительные эксперименты на базе МКЭ показывают, что при расчете составных стержней на устойчивость необходимо учитывать местные формы нарушения устойчивости и физическую нелинейность. Классическая схема расчета таких стержней может использоваться только при достаточно большом числе секций и при обязательном контроле уровня критических напряжений.

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
2. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов/ Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984, - 416 с.
3. Ю.В. Полякова, В.В. Улитин. Анализ устойчивости систем с стержневыми элементами средней гибкости. // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Труды XX Международной конференции. – СПб: СПбГУ, 2003. С 98-102.
4. Ю.В. Полякова, В.В. Улитин. Универсальная обобщенная диаграмма критических напряжений для конструкций из строительных сталей. // Вестник гражданских инженеров. Научно-технический журнал. № 2. - СПб: СПбГАСУ, 2005. С 36-41.

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И КАСАТЕЛЬНЫМ МОДУЛЕМ ДЛЯ СТАЛЕЙ И ДРУГИХ МЕТАЛЛОВ

Полякова Ю.В., Улитин В.В.

*(Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных технологий, Санкт-Петербург, Россия)*

PIESE-LINEAR DEPENDENCE BETWEEN THE PRESSURE AND THE MODULE FOR STEEL AND OTHER METALS

Polyakova J.V., Ulitin V.V.

*(Saint Petersburg State University of Refrigeration,
Saint Petersburg, Russia)*

Рассматривается кусочно-линейная зависимость между напряжением и модулем упругости, которая обычно используется при расчетах на устойчивость с учетом физической нелинейности на начальном участке диаграммы сжатия материала. Показано, что для большинства материалов эта зависимость подтверждается экспериментом.

При построении обобщенной диаграммы критических напряжений для расчета конструкций из строительных сталей [1,2], на основе универсальной диаграммы деформирования строительных сталей [3], получены следующие линейные зависимости между безразмерным напряжением и безразмерным касательным модулем упругости:

$$\frac{\bar{y} - 1}{\bar{y}_M - 1} = \frac{1 - m}{1 - m_M}, \quad (1)$$

$$\bar{y}_M = \frac{y_M}{y_{пц}}, \quad m = \frac{E'}{E}, \quad E' = \frac{dy}{de}, \quad m_M = \frac{E_m}{E}, \quad \bar{e} = \frac{e}{e_{пц}} \quad (2)$$

В этих выражениях y_M – наибольшее напряжение на рассматриваемом участке, E_m – минимальный модуль упругости в конце участка, соответствующий y_M . Указанные зависимости рассматриваются при относительной деформации $\bar{e} \leq 3$.

Интересно посмотреть, насколько адекватно зависимость (1) отражает реальное поведение различных материалов. С этой целью ниже подобные зависимости для ряда материалов построены по экспериментальным данным (рис. 1-4).

Таким образом, для металлов и сплавов в зоне малой физической нелинейности всегда в той или иной степени выполняется кусочно-линейная зависимость между напряжением и касательным модулем (1), описать которую в общем случае логично при помощи следующего графика (рис. 5).

То есть на интересующем нас участке можно использовать три прямые, имея в виду, что последний горизонтальный участок в большинстве случаев не реализуется, поскольку разные материалы имеют разные законы упрочнения.

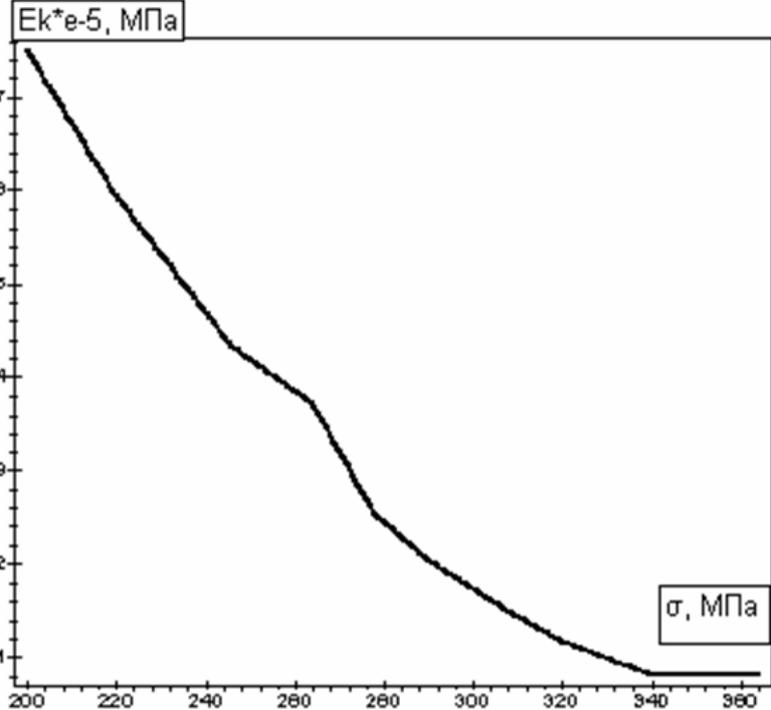


Рис.1. Диаграмма E(σ) для дурлюмина Д16Т [4, таблица 2.1].

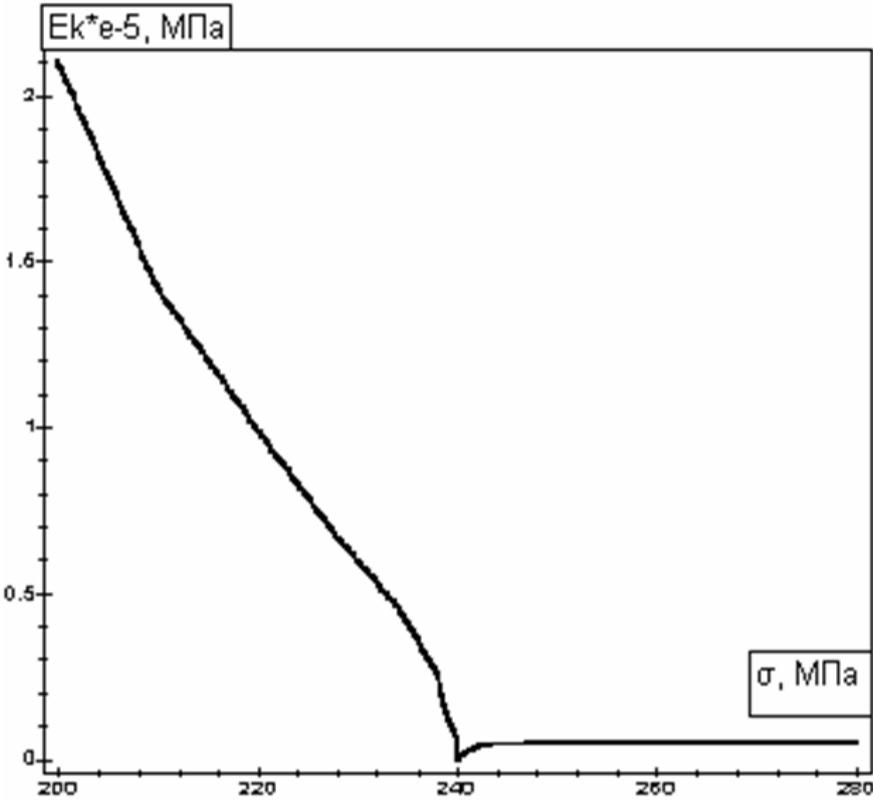


Рис.2. Диаграмма E(σ) для стали Ст.3 [4, таблица 2.2].

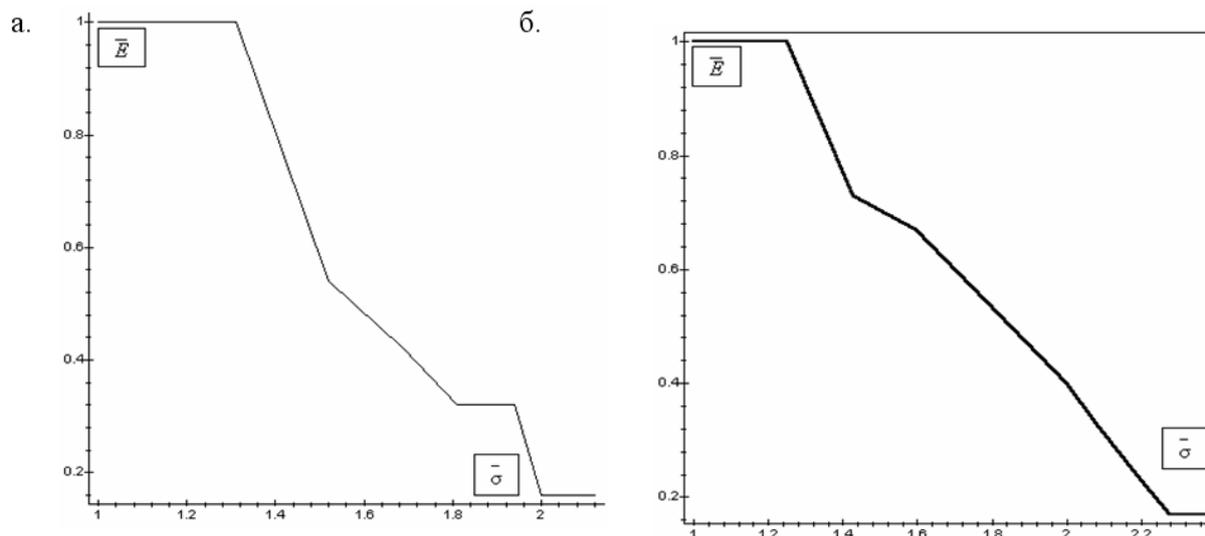


Рис.3. Диаграмма $\bar{E}(\bar{\sigma})$ для: а- латуни ДА77-2, б- ОФ 6,5-0,4.

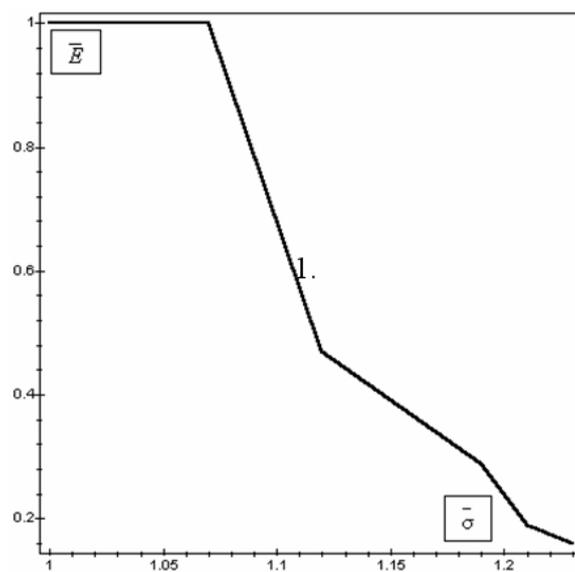


Рис.4. Диаграмма $\bar{E}(\bar{\sigma})$ для стали45.

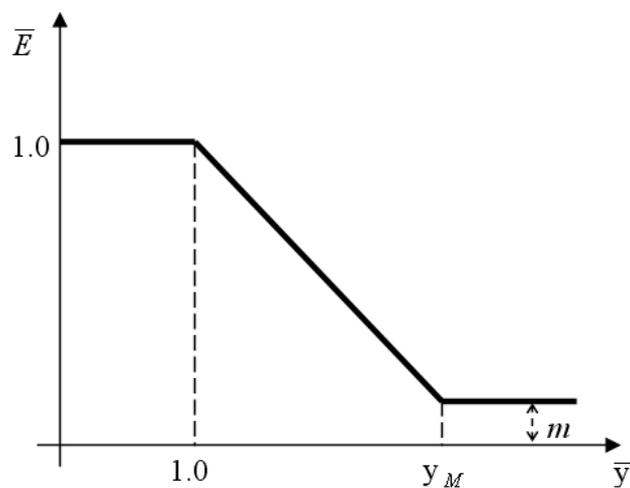


Рис.5. Кусочно-линейная аппроксимация зависимости между напряжением и касательным модулем

Литература

1. Полякова Ю. В., Улитин В. В. Обобщенная диаграмма критических напряжений для расчета на устойчивость конструкций из строительных сталей. // Труды X научно – технической конференции «Проблемы ресурса и безопасной эксплуатации материалов» СПб.: СПбГУНПТ, 2004. С. 23-27.
2. Полякова Ю. В., Улитин В. В. Универсальная обобщенная диаграмма критических напряжений для конструкций из строительных сталей. / Вестник гражданских инженеров. № 1, СПб.: СПбГАСУ, 2005. С. 36-41.
3. Одесский П. Д., Бельский Г. Е. О едином подходе к использованию диаграмм работы строительных сталей. «Промышленное строительство», №7, М.: 1980, С. 4 – 6.
4. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М.: «Физматгиз», 1963, 880 с.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО КРИТЕРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, ПОДВЕРЖЕННОГО ДЕЙСТВИЮ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛЫ, ПРИ КОНТРОЛЕ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА.

Постнов В.А., Тумашик Г.А. (Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия)

Для консольного стержня, находящегося под действием следящей силы с запаздыванием, рассмотрена задача повышения критической нагрузки путем перераспределения материала по длине. Приведено решение задачи для ряда значений параметра запаздывания. Показано, что при неконсервативной нагрузке оптимальные по критерию устойчивости стержни теряют устойчивость путем флаттера.

OPTIMIZATION OF A CANTILEVERED BEAM UNDER NONCONSERVATIVE COMPRESSING FORCE ACCORDING STABILITY CRITERION AT THE CONTROL OF A FREQUENCY SPECTRUM.

*Postnov V.A., Tumashik G.A.
(St.-Petersburg state marine engineering university, St-Peterburg, Russia)*

The problem of the buckling load increasing for a cantilevered beam under partial follower force by optimum distribution of a material along its length is studied. The solution of the problem is presented for a number of delay parameters. It is shown that the optimal according stability criterion beams have flutter type instability at nonconservative load.

1. Введение. Значительное место среди исследований, относящихся к теории устойчивости, занимают работы, связанные с вопросами повышения устойчивости конструкций, в частности, посвященные оптимизации, т.е. перераспределению материала конструкций с целью повышения их устойчивости. К настоящему времени для стержня при различных граничных условиях получены как аналитические, так и численные решения задачи оптимизации с целью повышения критической

силы дивергенции стержня в случае действия консервативных сжимающих нагрузок.

Оптимизация стержня под действием неконсервативной силы при возможной флаттерной потере устойчивости оказывается значительно более сложной задачей. Прежде всего, это связано с большей сложностью самого расчета динамической потери устойчивости по сравнению с дивергенцией, а также с необходимостью учета возможных взаимодействий между собой частот системы, которые приводят к большому числу локальных оптимумов и возможным резким изменениям критической нагрузки при незначительном изменении параметров проектирования.

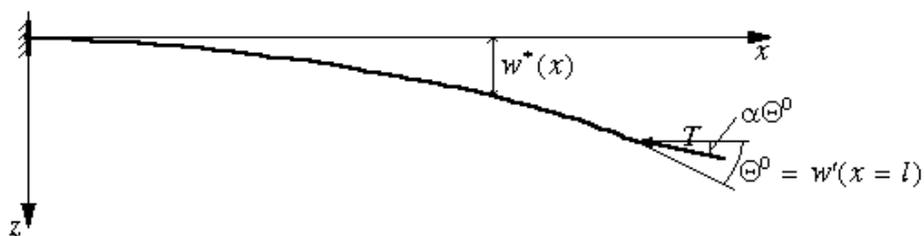


Рис. 1. Консоль под действием следящей силы с запаздыванием.

2. Объект исследования. В настоящей работе в качестве основного объекта выбран консольный стержень, описываемый балочной моделью Эйлера, находящийся под действием следящей силы с запаздыванием (рис. 1). Введение запаздывания следящей силы от поворота конца стержня позволяет рассмотреть случай одновременного приложения консервативной и неконсервативной нагрузки, а параметр запаздывания выступает в качестве параметра неконсервативности. При изменении параметра запаздывания от нуля до единицы характер сжимающей силы меняется от консервативного до неконсервативного, чисто следящего, а дивергентная потеря устойчивости при малой неконсервативности системы сменяется флаттером для больших степеней неконсервативности. Моделирование стержня осуществляется с использованием метода конечных элементов, при этом учет неконсервативности следящей силы обеспечивается введением для граничных балочных конечных элементов дополнительных несимметричных силовых матриц. Уравнения движения исходной и сопряженной с ней задач в предположении внешнего и внутреннего вязкого демпфирования имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \left[[K] + \lambda^2 [B] + \lambda \langle \beta [B] + \gamma [K] \rangle - T_{кр} [H] \right] \{ Q \} = \{ 0 \} \right. \\ & \left. \left\{ Q^T \left[[K] + \lambda^2 [B] + \lambda \langle \beta [B] + \gamma [K] \rangle - T_{кр} [H] \right]^T = \{ 0 \} \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $[K]$, $[B]$ и $[H]$ - соответственно симметричные матрицы жесткости и масс и несимметричная силовая матрица системы, β и γ - относительные

коэффициенты внешнего и внутреннего вязкого сопротивления, $T_{кр}$ - критическая сила, $\{Q\}$ и $\{Q^T\}$ - вектора-формы потери устойчивости исходной и сопряженной задач.

Сечение стержня принято прямоугольным, постоянной ширины и меняющейся в ходе оптимизации высоты. Задача оптимизации формулируется, как задача повышения критической силы стержня при сохранении его начальной массы. В качестве параметров проектирования выбраны высоты отдельных конечных элементов.

3. Алгоритм оптимизации. Поставленная задача оптимизации является нелинейной, для ее решения используется метод локальной линеаризации, в соответствии с которым итерационный процесс реализуется следующим образом:

1. Определение критической силы при заданных или полученных на предыдущем шаге высотах конечных балочных элементов.
2. Вычисление коэффициентов чувствительности – функций влияния переменных проектирования на критическую силу:

$$\frac{\partial T_{кр}}{\partial h_j} = \frac{\{Q^T\}^T \left[\frac{\partial [K]}{\partial h_j} + \lambda^2 \frac{\partial [B]}{\partial h_j} + \lambda \left\langle \beta \frac{\partial [B]}{\partial h_j} + \gamma \frac{\partial [K]}{\partial h_j} \right\rangle \right] \{Q\} / A}{\{Q^T\}^T [H] \{Q\} / A}, \quad (2)$$

$$\text{где } A = \{Q^T\}^T \left[2\lambda [B] + \left\langle \beta \frac{\partial [B]}{\partial h_j} + \gamma \frac{\partial [K]}{\partial h_j} \right\rangle \right] \{Q\}.$$

3. Определение приращений параметров проектирования dh_j , при которых оказывается максимальным приращение линейной функции

$$dT_{кр}^{лин} = \sum_j \frac{\partial T_{кр}}{\partial h_j} dh_j,$$

при ограничениях на приращения параметров проектирования $\max(h_{\min} - h_j, dh_{уага}) \leq dh_j \leq \min(h_{\max} - h_j, dh_{уага})$

и ограничениях на частотный спектр системы при значениях нагрузки меньших критической: условия ненулевой низшей частоты для исключения дивергентного падения критической силы $\lambda_1 > 0$, $T \leq T_{кр}$

$$\sum_i \frac{\partial \lambda_1(\{h\}^j, T_k)}{\partial \{h\}^i} \Big|_{\{h\}^j = \{h\}^{j(s)}} \{dh\}^{i(s)} > -\lambda_1(\{h\}^j, T_k) \quad (3)$$

и условия несовпадения соседних частот для исключения флаттерного падения критической силы $\lambda_{r+1} - \lambda_r > 0$, $T \leq T_{кр}$

$$\sum_i \left(\frac{\partial \lambda_{r+1}(\{h\}^j, T_k)}{\partial \{h\}^i} - \frac{\partial \lambda_r(\{h\}^j, T_k)}{\partial \{h\}^i} \right) \Big|_{\{h\}^j = \{h\}^{j(s)}} \{dh\}^{i(s)} > 0, \quad (4)$$

$$> - \left(\lambda_{r+1}(\{h\}^{j(s)}, T_k) - \lambda_r(\{h\}^{j(s)}, T_k) \right)$$

где T_k - ряд контрольных значений сжимающей силы, выбираемых на каждой итерации после анализа частотного спектра и выявления частотных взаимодействий, которые могут привести к падению критической силы. Входящие в выражения (3)-(4) производные частот системы по параметрам проектирования определяются из анализа чувствительности

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial \{h\}^i} = - \frac{\left\{ Q^T \right\}^T \left[\frac{\partial [K]}{\partial \{h\}^i} + \lambda_r^2 \frac{\partial [B]}{\partial \{h\}^i} + \lambda_r \left\langle \beta \frac{\partial [B]}{\partial \{h\}^i} + \gamma \frac{\partial [K]}{\partial \{h\}^i} \right\rangle \right] \{Q\}}{\left\{ Q^T \right\}^T \left[2\lambda_r [B] + \left\langle \beta \frac{\partial [B]}{\partial \{h\}^i} + \gamma \frac{\partial [K]}{\partial \{h\}^i} \right\rangle \right] \{Q\}}. \quad (5)$$

Проверка критерия окончания итерационного процесса, в качестве которого принята малая разность между двумя последовательными значениями функции цели. В случае его удовлетворения процесс оптимизации прекращается, в противном случае происходит переход к шагу 1.

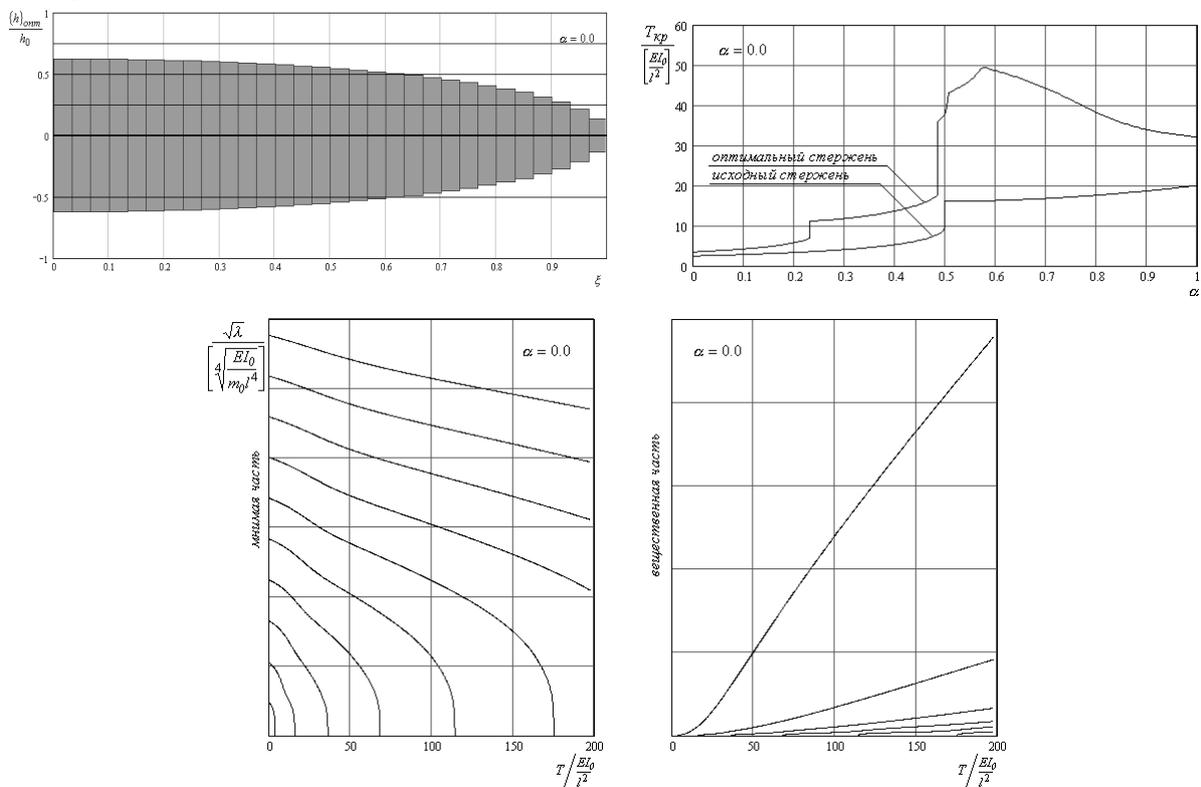


Рис. 2. Оптимизация при $\alpha = 0.0$.

4. Результаты. Для стержня прямоугольного сечения с меняющейся в процессе оптимизации высотой рассмотрены задачи оптимизации при различных степенях неконсервативности нагрузки. Ряд полученных результатов представлен на рис. 2-5. В частности, на них приведены оптимальные формы стержней и соответствующие им зависимости критических сил от параметра запаздывания и частотные спектры при заданном параметре запаздывания. Первым представлен стержень, оптимизированный для случая действия консервативной нагрузки (рис. 2). Полученный оптимальный вариант совпал с полученным в свое время И. Таджбакшем и Й.Б. Келлером [7]. Как видно, оптимизация в предположении консервативной силы позволила повысить устойчивость и в неконсервативной области. При этом наблюдается уменьшение дивергентной зоны потери устойчивости. Следует также отметить, что оптимизация для случая консервативной нагрузки оказалась единственной, для которой оптимальный вариант имеет дивергентную потерю устойчивости.

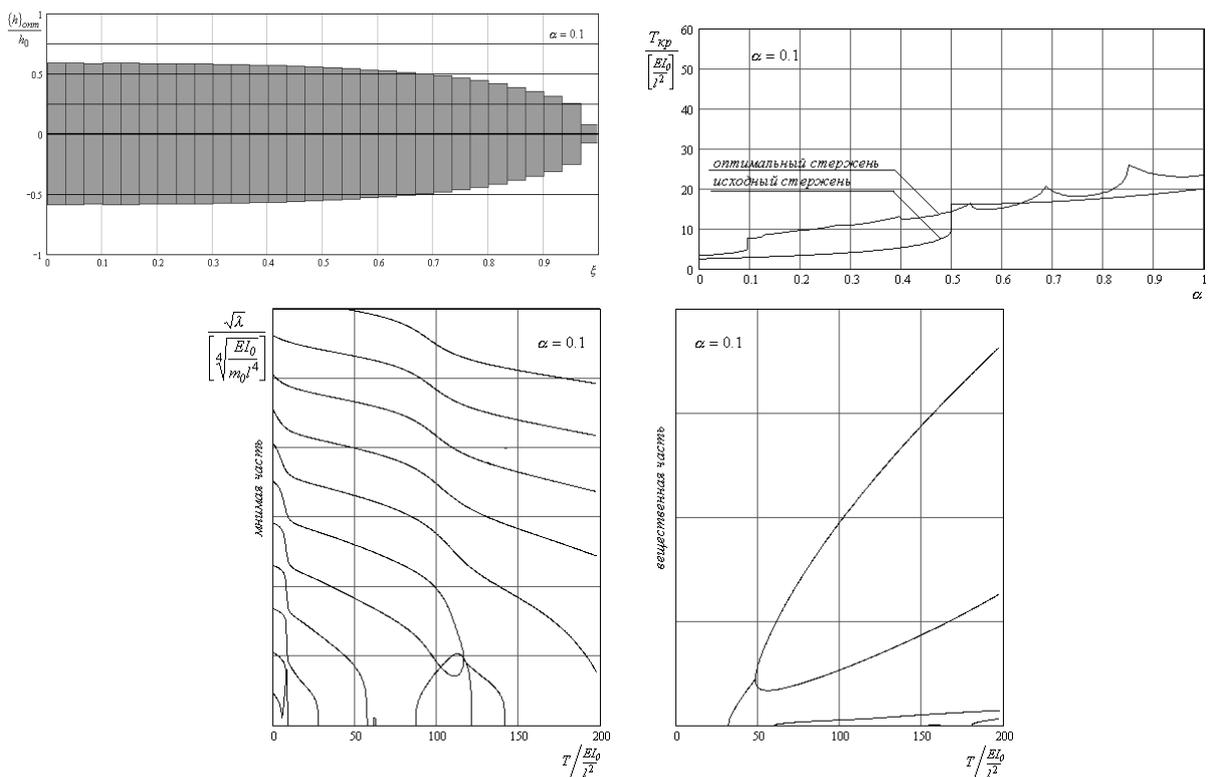


Рис. 3. Оптимизация при $\alpha = 0.1$

При наличии даже малой неконсервативности ($\alpha = 0.1$) в оптимальной варианте зона дивергенции уменьшается настолько, что для рассматриваемого параметра запаздывания имеет место флаттерная потеря устойчивости (рис. 3). При оптимизации с большим значением параметра запаздывания флаттер смещается от первой и второй к высшим частотам. Так при оптимизации для параметра запаздывания $\alpha = 0.2$ в оптимальном

стержне флаттер происходит при взаимодействии второй и третьей частоты.

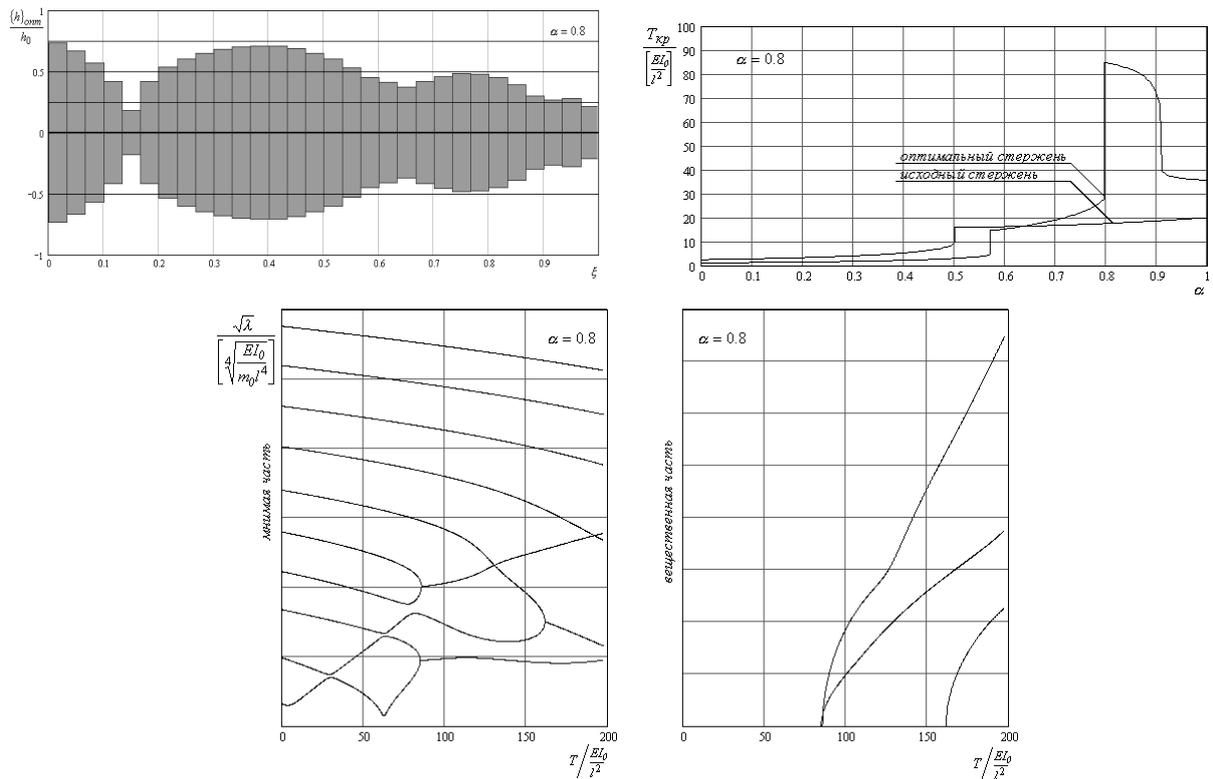


Рис. 4. Оптимизация при $\alpha = 0.8$

С дальнейшим увеличением параметра неконсервативности в оптимальных вариантах имеет место кратная критическая сила. При $\alpha = 0.4$ в оптимальном варианте совпадают критические силы флаттера для первой-второй и пятой-шестой частот. А для параметра запаздывания $\alpha = 0.8$ (рис. 4) оптимальный проект определяется совпадением флаттерных сил для пар первой-второй и четвертой-пятой частот. При этом последовательно пройдены точка одномодального флаттера для первой-второй частот, и точка одновременных флаттера для пары второй-третьей частот и дивергенции.

При оптимизации стержня Бека ($\alpha = 1.0$) был получен проект, у которого совпадают три флаттерные критические силы для пар первой-второй, четвертой-пятой и девятой-десятой частот (рис. 5). Имеющиеся на настоящий момент наилучшие результаты У.Т. Рингертца [5] и М. Лангтьема [6] имеют совпадение двух флаттерных критических сил (оптимальный стержень У.Т. Рингертца характеризуется кратной критической силой для первой и четвертой пар частот, оптимальный стержень М. Лангтьема - кратной критической силой для второй и четвертой пар). По сравнению с ними полученная в работе критическая сила оптимального проекта больше на 15%, общий выигрыш по критической силе – 800%.

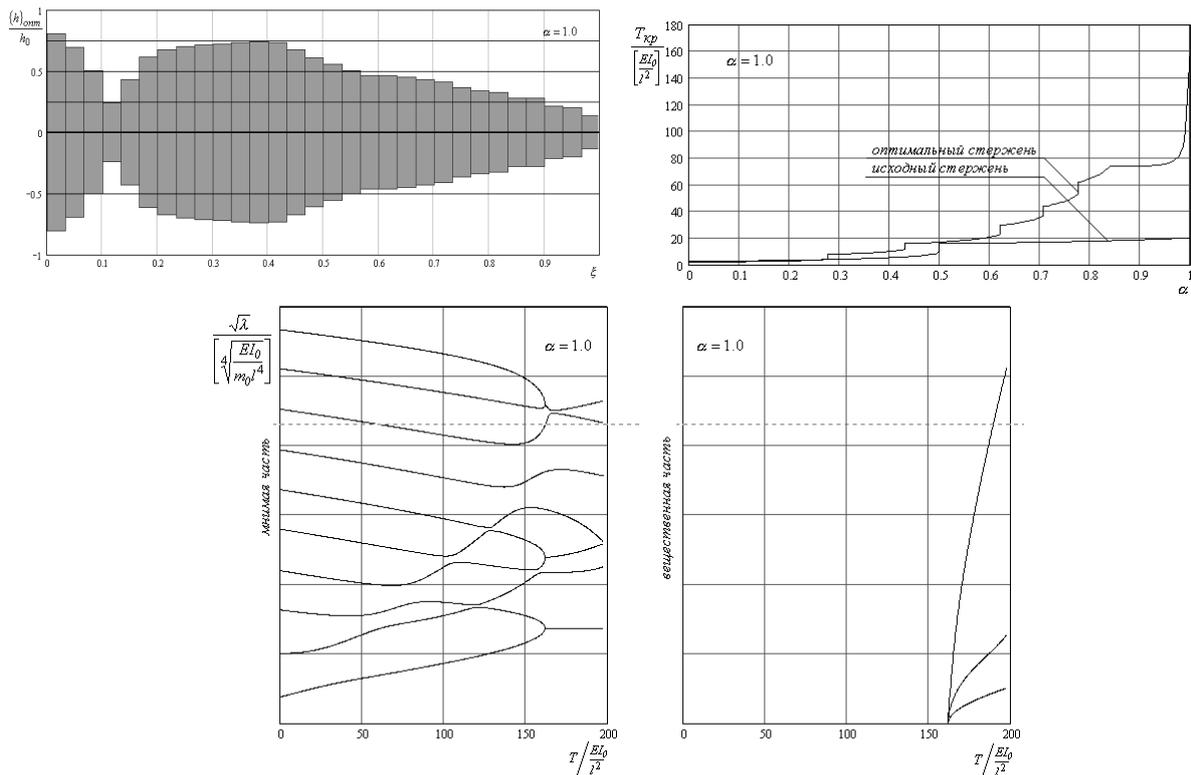


Рис. 5. Оптимизация при $\alpha = 1.0$

Отношения критических сил, полученных в ходе оптимизации при различных значениях параметра запаздывания α , критическим силам исходного стержня представлены в таблице 1.

Табл. 1. Отношение критических сил оптимальных вариантов к критическим силам исходного стержня (%).

		Значения параметра запаздывания, при которых проводилась оптимизация						
		$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1.0$
Значения параметра запаздывания	$\alpha = 0.0$	140	132.2	96.5	72.1	51.7	44.8	74.7
	$\alpha = 0.1$	149.1	143.6	98	72.1	51.2	44.3	77.8
	$\alpha = 0.2$	173	487.9	100.5	72.2	50.5	43.8	84.2
	$\alpha = 0.3$	290.5	506.7	105.7	72.3	49.3	42.9	195.3
	$\alpha = 0.4$	258.5	453.7	1037	72.5	46.9	41.1	187.7
	$\alpha = 0.5$	387	284.3	529.5	702.1	33.8	30.1	171.4
	$\alpha = 0.6$	298.7	191.1	300.1	400	467.2	94.5	127.9
	$\alpha = 0.7$	263.1	206.4	270.8	352.8	418.5	114.3	211.1
	$\alpha = 0.8$	217.2	211.4	244.7	296.7	343.4	481.3	367.5
	$\alpha = 0.9$	181.9	183	222.7	254.1	269.4	377.9	395.7
	$\alpha = 1.0$	160.1	159.7	202.9	225.3	234.1	178.2	805.5

Таким образом, оптимизация системы с неконсервативным нагружением связана с необходимостью контроля частотного спектра в

диапазоне нагрузок до критической. При этом в случае мультимодальной оптимизации оптимальными проектами будут такие, для которых будет наблюдаться совпадение как можно большего числа критических нагрузок для различных пар частот. Однако следует отметить, что подобные оптимальные проекты обычно оказываются чрезвычайно чувствительны к малым изменениям в распределении материала, и малые вариации профиля стержня могут приводить к значительному падению критической силы. В связи с этим практический интерес могут представлять менее выигрышные с позиции увеличения критической силы, но более устойчивые к вариациям профиля результаты оптимизации без учета ограничений на частотный спектр [8].

Литература

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961.
2. Anderson G.L. Optimal design of a cantilever subjected to dissipative and non-conservative forces. //Journal of Sound and Vibration, 1974, V. 33, № 2, 155-169.
3. Claudon J.L. Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads //Journal de Mécanique, 1975, V. 14, № 3, pp. 531-543.
4. Pedersen P., Seyranian A.P. Sensitivity analysis for problems of dynamic stability //Int. J. Solids and Structures, 1983, V. 19, № 4, pp. 315-335.
5. Ringertz U.T. On the design of Beck's column //Structural Optimization, 1994, № 8, pp. 120-124.
6. Langthjem M., Sugiyama Y. Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads//Computers & Structures, 74 (2000), 385-408.
7. Tadjbakhsh I., Keller J.B. Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues //Trans. ASME. Ser. E. J. Applied Mechanics, 1962, V. 29, № 1, pp. 159-164.
8. Постнов В.А., Тумашик Г.А. Оптимизация консольного призматического стержня по критической силе флаттера //Проблемы прочности и пластичности. Межвузовский сб. трудов Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Вып 63, 2001, стр. 104-111.

УДК 539.3

ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ И КВАЗИ-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Постнов В.А., Тумашик Г.А.

*(С.-Петербургский государственный морской технический университет,
Россия)*

Дан вывод "обобщенной" матрицы жесткости для анализа напряженно-деформированного состояния стержневых систем.

GENERALIZED STIFFNESS MATRIX FOR CALCULATION BEAM AND QUASI-BEAM SYSTEMS

Postnov V.A., Tumashik G.A.

St.-Petersburg state marine technical university, Russia)

The generalized stiffness matrix for analysis of stress-strained state of beam systems is derived.

1. Введение. Длительное время (вплоть до настоящего времени) в литературе под динамической матрицей жесткости в методе конечных элементов (МКЭ) при расчете колебаний стержневых систем понималась матрица, получаемая при формальном объединении матрицы жесткости базисного конечного элемента (K) и матрицы масс (M): $KD = K - \omega^2 M$, где ω - частота свободных колебаний или частота внешней гармонической силы. Естественно, что в вычислительном отношении такой подход не имеет каких-либо дополнительных преимуществ.

Предпринимались также попытки уточнения значений матриц жесткости и масс путем использования форм свободных колебаний в качестве аппроксимирующих функций прогиба конечного элемента. Это позволило лишь ненамного уточнить соответствующие матрицы базисного конечного элемента.

И лишь, так называемые динамические матрицы, получаемые на основе решения уравнений динамики балки, позволяют точно описать поведение выбранной модели конечного элемента.

Использование динамической матрицы жесткости позволяет не только повысить точность, но и сократить трудоемкость расчета. Снижение трудоемкости связано с возможностью увеличения длин конечных элементов, что приводит к уменьшению числа степеней свободы. Например, при рассмотрении свободных колебаний призматической балки во всем частотном диапазоне при использовании динамической матрицы жесткости имеем лишь один конечный элемент. При использовании же традиционного МКЭ с ростом номера тона свободных колебаний число конечных элементов, необходимых для получения требуемой точности расчета, резко возрастает. При этом возрастает число степеней свободы рассматриваемой конструкции, а, следовательно, возрастает и общая трудоемкость расчета.

Коротко об истории вопроса о динамической матрице. В пятидесятые годы прошлого столетия, в связи с развитием вычислительной техники, возникла необходимость в разработке матричных методов расчета инженерных конструкций. И эта брешь была закрыта благодаря работам А.Ф. Смирнова, А.П. Филина, И.М. Рабиновича, Н.К. Снитко, А.А. Чираса, Л.А. Розина, А.В. Александрова, Н.Н. Шапошникова. Указанные работы по матричным методам основывались на дискретном представлении стержневых систем. Примерно в те же годы появились первые публикации

по матричным методам расчета стержневых систем с использованием континуальных теорий при описании поведения стержня: работы Ф.М. Диментберга, И.М. Бабакова, А.П. Филиппова, Н.К. Снитко, В.А. Троицкого, Ю.Н. Санкина, В.М. Фридмана, Б.Е. Цейтлина и многих других. В этих работах были заложены основы использования динамических матриц в процедуре метода конечных элементов.

В последние десятилетия в иностранной литературе появилось десятки публикаций, посвященных динамическим матрицам жесткости балок Бернулли-Эйлера и С.П. Тимошенко. Рассмотрены случаи их поперечных, крутильных и изгибно-крутильных колебаний, дана оценка влияния изгибной, сдвиговой жесткостей и инерции вращения масс на частотный спектр. Также рассмотрены вопросы построения динамических матриц для непризматических балок, учета влияния вязкоупругого основания и сил сопротивления. В ряде работ, наряду с построением алгоритмов определения динамических матриц, приведены зависимости для определения приведенных узловых динамических усилий для равномерно распределенной и экспонентной поперечной гармонической внешней нагрузки. Информация по иностранным публикациям содержится в публикациях [1,2]

Теперь пришло время объяснить название термина «обобщенная матрица жесткости», что собственно и является темой данной публикации.

Вместо традиционных матриц жесткости и матриц масс при динамическом анализе стержневых конструкций, дополнительного введения геометрической матрицы при исследовании устойчивости этих систем, матрицы, учитывающей упруго-вязкое сопротивление среды, предлагается использовать «единую» матрицу жесткости, которую в дальнейшем и будем называть обобщенной матрицей жесткости. Она будет получена путем точного интегрирования системы дифференциальных зависимостей, описывающих поведение конечного элемента. И, следовательно, в отличие от используемых сегодня в процедурах метода конечных элементов упомянутых выше матриц, которые приближенно описывают участие в исследуемом процессе жесткостных и инерционных свойств упругой системы, обобщенная матрица точно описывает поведение конечного элемента (естественно, в рамках используемых стержневых моделей). Она приспособлена для решения любого класса задач: изгиба, устойчивости и колебаний стержневых систем.

Элементы обобщенной матрицы жесткости являются функциями влияния изменений кинематических параметров (перемещений и углов поворота) в узловых точках на силовые усилия (перерезывающих сил и изгибающих моментов) в тех же точках (сечениях).

В расчетах стержневых систем использование таких функций влияния при решении отдельных задач статики, динамики и устойчивости не

является чем-то новым. Наша цель получить функции влияния и на их основе построить матрицу, приспособленную для решения практически любого класса задач расчета стержневых систем.

Нам представляется, что заслуживает внимания сама идея введения такой обобщенной матрицы в конечно-элементных процедурах. Конечно, трудно ожидать в ближайшие годы использования обобщенной матрицы жесткости при расчете конструкций методом конечных элементов. И все же можно надеяться, что постепенно эта матрица будет внедряться в программы расчета по методу конечных элементов. Подкупающим моментом здесь может служить как повышение точности расчета, так и снижение его общей трудоемкости. Естественно, как и в любом новом подходе здесь есть свои «подводные камни». Не лишена этой «прелести» и обобщенная матрица жесткости. Однако все эти негативные стороны обобщенной матрицы имеют временный аспект и в дальнейшем будут преодолены.

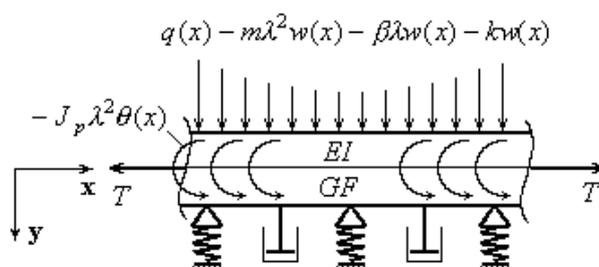


Рис. 1.

2. Обобщенная матрица жесткости балки С.П. Тимошенко.

Уравнения вынужденных колебаний призматической балки с учетом поперечного сдвига и сил инерции вращения масс, при наличии упруго-вязкого основания, поперечной $q(x,t)$ и осевой T нагрузок (см. рис. 1) запишутся в виде:

$$GF \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \theta(x,t) \right) + T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial w(x,t)}{\partial t^2} - kw(x,t) - \beta \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -q(x,t); \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^3 \theta(x,t)}{\partial x^3} - J_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + kw(x,t) = q(x,t) \quad (2)$$

где EI, GF - жесткости балки на изгиб и сдвиг соответственно; J_p - момент инерции масс вращения; погонная масса балки m ; $w(x,t)$ - поперечный прогиб оси балки; $\theta(x,t)$ - угол поворота поперечного сечения балки от деформаций изгиба; k - интенсивность жесткого упругого основания; β - коэффициент внешнего сопротивления; $q(x,t)$ - интенсивность поперечной внешней нагрузки. Наличие внутреннего вязко-упругого сопротивления

можно без особых дополнительных трудностей учесть путем введения комплексных модулей упругости.

Полагая $q(x,t) = q(x)e^{\lambda t}$, решение выписанных выше уравнений ищем в виде

$$w(x,t) = w(x)e^{\lambda t}, \quad \theta(x,t) = \theta(x)e^{\lambda t}. \quad (3)$$

В общем случае λ комплексная величина, при отсутствии вязкого сопротивления – чисто мнимая. Подстановка (3) в уравнения (1) и (2) приводит к следующим уравнениям для определения функций $w(x)$ и $\theta(x)$:

$$\left. \begin{aligned} a_1 w^{IV}(x) + a_2 w''(x) + a_3 w(x) &= q(x) - \frac{EI}{GF} q''(x) \\ a_1 \theta^{IV}(x) + a_2 \theta''(x) + a_3 \theta(x) &= q'(x) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1(\lambda) &= EI \left(1 + \frac{T}{GF} \right); \\ a_2(\lambda) &= - \left[\left(J_p + \frac{J_p T}{GF} + \frac{mEI}{GF} \right) \lambda^2 + \frac{\beta EI}{GF} \lambda + \left(-T + \frac{k_{ef} EI}{GF} \right) \right]; \\ a_3(\lambda) &= \left[\frac{J_p m}{GF} \lambda^4 + \frac{J_p \beta}{GF} \lambda^3 + \left(m + \frac{J_p k_{ef}}{GF} \right) \lambda^2 + \beta \lambda + k_{ef} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Общее решение каждого из последних двух уравнений складывается из частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Решение однородных уравнений системы (4) ищем в виде:

$$w(x) = \sum_i^{i=4} C_i e^{k_i x}, \quad \theta(x) = \sum_i^{i=4} D_i e^{k_i x} \quad (6)$$

где $k_i = k_i(\lambda)$ есть функции частоты λ и, естественно, всех остальных проектных параметров балки:

$$k_1(\lambda) = -k_3(\lambda) = \sqrt{\frac{-a_2(\lambda) + \sqrt{a_2(\lambda)^2 - 4a_1(\lambda)a_3(\lambda)}}{2 \cdot a_1(\lambda)}}; \quad (7)$$

$$k_2(T, \lambda) = -k_4(\lambda) = \sqrt{\frac{-a_2(\lambda) - \sqrt{a_2(\lambda)^2 - 4a_1(\lambda)a_3(\lambda)}}{2 \cdot a_1(\lambda)}}$$

Постоянные C_i, D_i , как и формы колебаний при учете вязкого сопротивления являются комплексными величинами.

Непосредственно из уравнения (2), если учесть (3) и (6), получаем связь коэффициентов C_i и D_i

$$D_i = S_i(\lambda)C_i, \quad S_i(\lambda) = \left(1 - \frac{EI}{GF} k_i(\lambda)^2 + \frac{J_p}{GF} \lambda^2 \right) \quad (8)$$

Для балки Бернулли-Эйлера $S_i = 1$.

Далее, для построения обобщенной матрицы жесткости конечного элемента воспользуемся прямым методом, т.е. будем определять её элементы как соответствующие узловые реакции R_j (перерезывающие силы и изгибающие моменты) при последовательно задаваемых единичных узловых перемещениях (прогибы и углы поворота от изгибной деформации). Таким образом, при получении элементов обобщенной матрицы $K(\lambda)$ используется следующая последовательность операций:

1. Для каждого последовательно задаваемого единичного (при прочих нулевых) узлового перемещения из граничных условий

$$w(0) = q_1 \quad w(b) = q_3 \quad (9)$$

$$\theta(0) = q_2 \quad \theta(b) = q_4$$

определяются постоянные интегрирования в выражениях (6). Для этого в левые части зависимостей (9) подставляются их значения из (6) при дополнительном учете зависимости (8). В результате получаем необходимую систему алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных C_i ($i=1,2,3,4$), а, следовательно, и D_i ($i=1,2,3,4$) в выражениях (6). В матричном виде эту систему можно представить так:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{k_1(\lambda)}{S(T,\lambda)_1} & -\frac{k_1(\lambda)}{S(\lambda)_1} & \frac{k_2(\lambda)}{S(\lambda)_2} & -\frac{k_2(\lambda)}{S(\lambda)_2} \\ e^{k_1(\lambda)\cdot b} & e^{-k_1(\lambda)\cdot b} & e^{k_2(\lambda)\cdot b} & e^{-k_2(\lambda)\cdot b} \\ \frac{k_1(\lambda)e^{k_1(\lambda)\cdot b}}{S(\lambda)_1} & -\frac{k_1(\lambda)e^{-k_1(\lambda)\cdot b}}{S(\lambda)_1} & \frac{k_2(\lambda)e^{k_2(\lambda)\cdot b}}{S(\lambda)_2} & -\frac{k_2(\lambda)e^{-k_2(\lambda)\cdot b}}{S(\lambda)_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

2. Найденные постоянные будут комплексными линейными функциями узловых перемещений. В результате могут быть получены следующие выражения для определения комплексных форм $w(x, \lambda)$ и $\theta(x, \lambda)$:

$$w(x, \lambda) = q_1 w_1(x, \lambda) + q_2 w_2(x, \lambda) + q_3 w_3(x, \lambda) + q_4 w_4(x, \lambda), \quad (11)$$

$$\theta(x, \lambda) = q_1 \theta_1(x, \lambda) + q_2 \theta_2(x, \lambda) + q_3 \theta_3(x, \lambda) + q_4 \theta_4(x, \lambda). \quad (12)$$

Функции $w_i(x, \lambda)$ и $\theta_i(x, \lambda)$ - комплексные функции.

3. Далее с использованием известных соотношений теории балок, определяются внутренние изгибающие моменты и перерезывающие силы:

$$M(x, \lambda) = EI \frac{d\theta(x, \lambda)}{dx}, \quad N(x, \lambda) = EI \frac{d^2\theta(x, \lambda)}{dx^2} + T \frac{dw(x, \lambda)}{dx} - J_p \lambda^2 \theta(x, \lambda). \quad (13)$$

Отсюда получаем выражения для определения комплексных узловых усилий:

$$N(0, \lambda) = \left(EI \frac{\partial^2 \theta(x, \lambda)}{\partial x^2} + T \frac{\partial w(x, \lambda)}{\partial x} - J_p \lambda^2 \theta(x, \lambda) \right) \Big|_{x=0}, \quad M(0, \lambda) = EI \frac{\partial \theta(x, \lambda)}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (14)$$

$$N(a, \lambda) = \left(EI \frac{\partial^2 \theta(x, \lambda)}{\partial x^2} + T \frac{\partial w(x, \lambda)}{\partial x} - J_p \lambda^2 \theta(x, \lambda) \right) \Big|_{x=a}, \quad M(a, \lambda) = EI \frac{\partial \theta(x, \lambda)}{\partial x} \Big|_{x=a}$$

Окончательные вещественные значения узловых усилий, с учетом правила знаков принятого в МКЭ, получим, используя следующие очевидные зависимости:

$$R_1 = -\operatorname{Re}(N(0, \lambda)e^{\lambda t}), \quad R_2 = \operatorname{Re}(M(0, \lambda)e^{\lambda t}), \quad (15)$$

$$R_3 = \operatorname{Re}(N(a, \lambda)e^{\lambda t}), \quad R_4 = -\operatorname{Re}(M(a, \lambda)e^{\lambda t}),$$

Каждое из выписанных выражений (15) для соответствующего узлового усилия может быть представлено в следующем виде:

$$R_k(\lambda) = K_{k1}(\lambda)q_1 + K_{k2}(\lambda)q_2 + K_{k3}(\lambda)q_3(\lambda) + K_{k4}(\lambda)q_4 \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Элементы $K_{ki} (k, i = 1, 2, \dots, 4)$ и есть искомые элементы обобщенной матрицы

Обобщенная матрица жесткости базисного конечного элемента $[K]$, связывает вектор узловых усилий $\{R\}$ с вектором перемещений $\{q\}$:

$$\{R\} = [K]\{q\}, \quad K_{ij} = K_{ji} \quad (16)$$

Полученная обобщенная матрица была использована для расчета изгиба, устойчивости и колебаний стержневых систем. Численные результаты некоторых из этих расчетов для балки, изображенной на рис.2., представлены в форме графиков на рис. 3-7 и в табл.1-3.

3. Числовые расчеты.

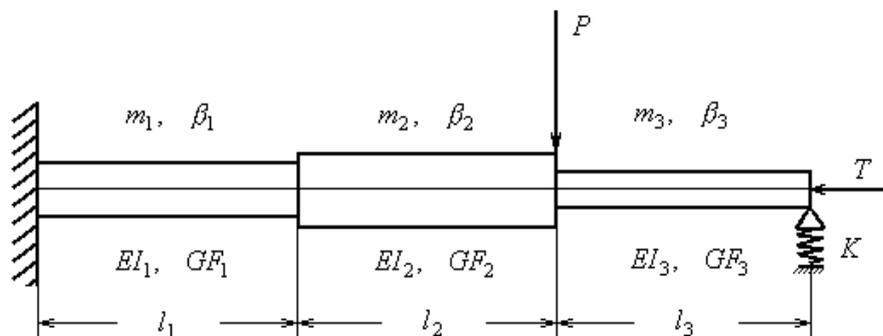


Рис. 2. Балка

$$(EI_1 = 100; EI_2 = 400; EI_3 = 700; m_1 = 3; m_2 = 5; m_3 = 1; l_1 = 2; l_2 = 4; l_3 = 6; K = 350)$$

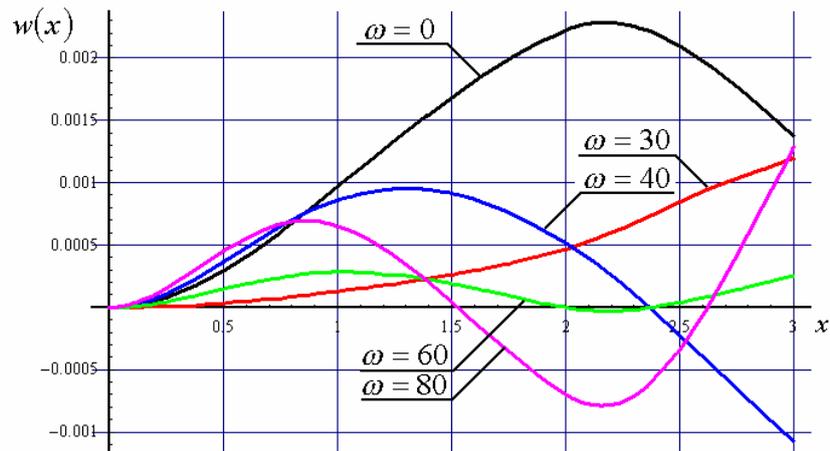


Рис. 3. Формы вынужденных колебаний балки при различных частотах возмущающей силы ($\omega = 0, 30, 40, 60, 80$)

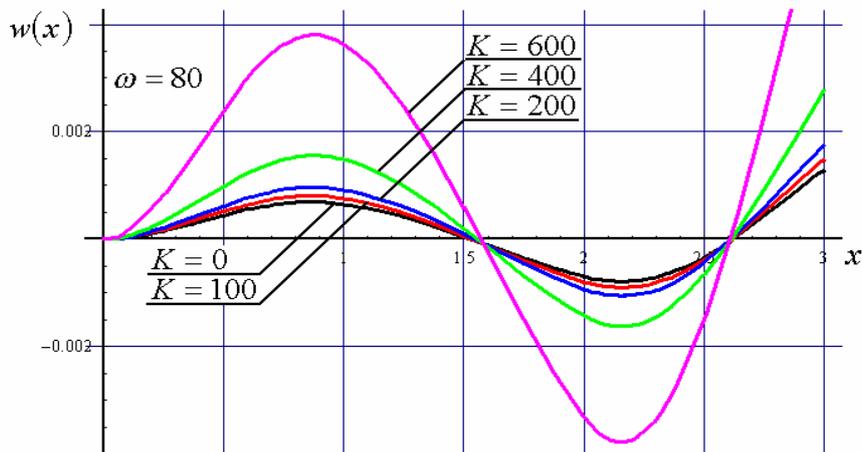


Рис. 4. Влияние жесткости упругого основания на форму вынужденных колебаний балки

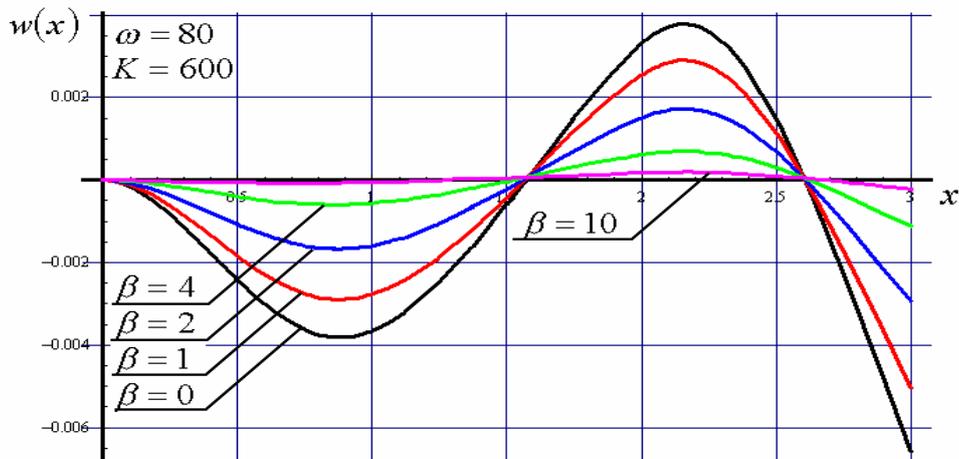


Рис. 5. Влияние сопротивления на форму вынужденных колебаний балки при $\omega = 80$, жесткости упругого основания $K = 600$

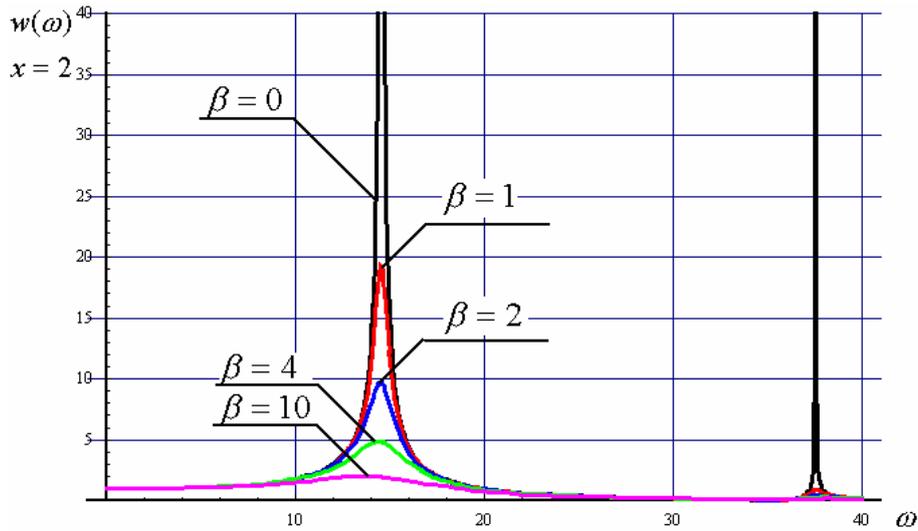


Рис. 6. Влияние сопротивления на амплитудно-частотные характеристики

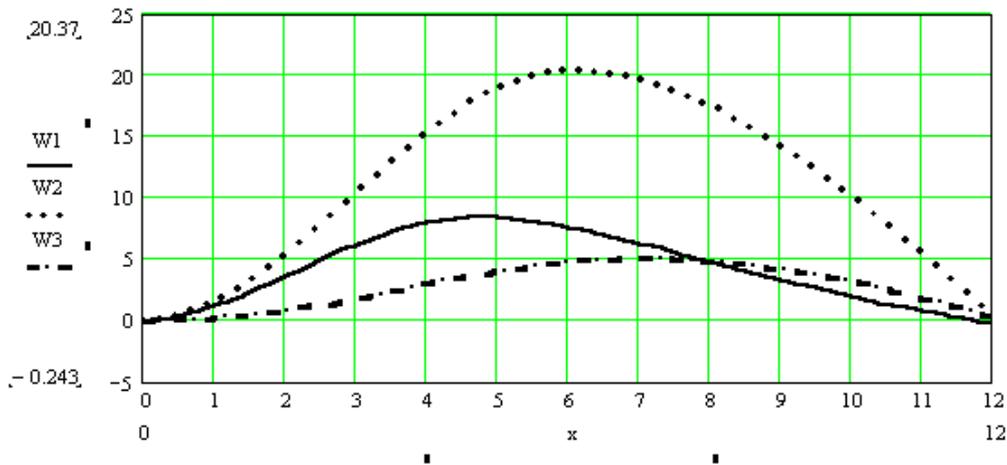


Рис. 7. Формы вынужденных колебаний балки при действии сосредоточенной силы $P(t) = 10^3 e^{-0.7t} (\sin 4t + \sin t)$ в моменты времени $t = 1 \text{сек.}(W1); t = 2 \text{сек.}(W2); t = 3 \text{сек.}(W3)$

Таблица 1. Оценка влияния сжимающей силы на частоты

Номер критической силы/частоты	Критическая сила с учетом/без учета сдвига	Частоты с учетом сдвига/без учета сдвига				
		$T = 0$	$T = 230$	$T = 450$	$T = 1390$	$T = 2300$
1	232/ 336	12.5/ 14.5	1.92/ 10.8			
2	455/ 920	28.1/ 37.5	19.8/ 27.2	3.40/ 14.9		
3	575/ 1397	48.4/ 76.6	33.1/ 65.1	15.6/ 52.7	-/ 1.87	
4	644/ 23073	73.3/ 154.2	55.7/ 144.7	31.6/ 134.9	-/ 85.1	-/ 3.78

Таблица 2. Оценка влияния сдвига на частоты

Номер частоты	$GF = 200$	$GF = 800$	$GF = 2000$	$GF = 40000$	$G = 1000000$
1	9.303	12.55	13.6	14.50	14.55
2	19.49	28.11	32.6	37.21	37.50
3	31.4	48.46	59.4	75.26	76.60
4	42.92	73.38	98.56	148.70	154.2

Таблица 3. Оценка влияния сопротивления на коэффициент динамичности

Коэффициент сопротивл. β	Частота без учета сопротивления ω_0	Частота с учетом сопротивления ω_β	$\mu = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_\beta^2}$	Коэффициент динамичности $\frac{\omega_0^2}{2 \cdot \mu \cdot \sqrt{1 - \mu^2}}$
0	12.55	12.55	0.	∞
1	12.55	12.54	0.383	16.37
4	12.55	12.46	1.466	4.310
20	12.55	10.88	6.256	1.157

Благодарность. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 04-01-00711).

Литература

1. Постнов В.А. Динамические матрицы жесткости балочных элементов и их использование в методе конечных элементов при расчете вынужденных колебаний стержневых систем // Вестник гражданских инженеров. 2005. №1 (2). Стр. 42-49.
2. Постнов В.А. Динамические матрицы жесткости балочных элементов и их использование в методе конечных элементов для расчета структурных повреждений стержневых систем // Проблемы прочности и пластичности. 2005. Вып. 67.

DYNAMIC STIFFNESS MATRICES AND THEIR USAGE IN THE FINITE ELEMENT METHOD FOR ACCOUNT OF STRUCTURAL DAMAGES OF BEAM SYSTEMS

Postnov V.A.

(Saint-Petersburg State Marine technical university, Russia)

Some approaches to definition of structural damages of elastic structures are presented. As the basic numerical method the method of finite element (FEM) is used. However, instead of matrices of rigidity and mass “dynamic stiffness matrices” [1,2,3], precisely describing the behavior of the finite element, are used. The results of numerical testing of the proposed methods of identification are given.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СТРУКТУРНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Постнов В.А.

(Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Россия)

Изложено несколько подходов к определению структурных повреждений упругих конструкций. В качестве основного расчетного метода используется метод конечных элементов (МКЭ). Однако при этом вместо матриц жесткости и массы вводится «динамическая матрица жесткости» [1,2,3], точно описывающая поведение конечного элемента. Приведены результаты численного тестирования изложенных методов идентификации.

Introduction. Usage of non-destructing controls: radioscopy, acoustic issue etc. allows to determine the presence in structure only local damages (cracks). But it does not allow to receive the information about its bearing ability, which it is necessary, for example, for decision of the question on the opportunity of further exploitation of the structure. Let's notice, that the change of bearing ability of the structure is connected with a lot of factors: structural damages, changes of rigidity of fastening between their separate elements etc. The total estimation to these changes can be carried out with the help of the methods using experimental data about changes of dynamic parameters of the structure as a result of received, during its exploitation, “damages”.

Let's explain the essence of this problem. As a result of damages an elastic system receives some changes of rigidity and inertial parameters, which lead to the certain changes of its modal parameters and its stress state. It is assumed that all these parameters for the damaged system can be determined experimentally. The information received from experiment in common with the information

about initial undamaged condition of the system, as it will be shown below, are quite enough to determine its structural “damages”.

Shortly, let's say about construction of the article. In the item 2 the necessary formulas for definition of functions of influence of rigidity changes of separate finite elements of an elastic system on its modal parameters are received. In the item 3 the method of definition of the structural damages based on experimental data about frequency spectrum of the damaged structure is presented. In the item 4 the other method of the structural damage identification is given.

2. Function of influence. Any change of the parameters of an elastic system leads to the certain change of its modal parameters. The connection between the changes of modal parameters and design parameters of the system is convenient to express with the help of so-called functions of sensitivity (functions of influence), which are the derivatives from natural frequencies (or shapes of free vibration) on design parameters of the system.

The matrix equation for free vibration of any elastic system without account of resistance forces can be written so

$$K(r, s_i)q_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (11)$$

where $K(r, s_i)$ is the global dynamic matrix constructed with use of the dynamic stiffness matrixes of finite elements of the considered elastic system; q_i is i -th form of free vibration; s_i - i -th frequency; $r = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ - the vector of design parameters of the system. As the last, at the identification of elastic systems the separate parameters determining stiffness and inertial parameters of the system are accepted.

Differentiating the equation (11) on r_j , we shall receive

$$K \frac{\partial q_i}{\partial r_j} + \frac{\partial K}{\partial r_j} q_i + \frac{\partial K}{\partial s_i} \frac{\partial s_i}{\partial r_j} q_i = 0 \quad (12)$$

From the equation (12) the expression for definition of the function of influence of design parameter of the system r_j on frequency s_i can be obtained:

$$f_{i,j} = \frac{\partial s_i}{\partial r_j} = -(q_i^T K \frac{\partial q_i}{\partial r_j} + q_i^T \frac{\partial K}{\partial r_j} q_i) / q_i^T \frac{\partial K}{\partial s_i} q_i \quad (13)$$

Usage of the expression (13) for practical calculation appears to be difficult enough. It is less labor-consuming to use successive approximation accepting on each step of iteration $\partial q_i / \partial r_j = 0$. In the result the expression (13) accepts the following form

$$f_{i,j} = \frac{\partial s_i}{\partial r_j} = q_i^T \frac{\partial K}{\partial r_j} q_i / q_i^T \frac{\partial K}{\partial s_i} q_i \quad (14)$$

Directly from the dependence (12) the expression for definition of the function of influence of design parameters of system on forms of free oscillation can be received:

$$F_{i,j} = \frac{\partial q_i}{\partial r_j} = -K^{-1} \left(\frac{\partial K}{\partial r_j} q_i + \frac{\partial K}{\partial s} \frac{\partial s_i}{\partial r_j} q_i \right), \quad (15)$$

3. Use frequency spectrum of the damaged system. It is supposed that modal parameters of the structure at its initial undamaged condition are known or can be calculated numerically. So the frequencies $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ and forms of free vibration $q_i (i = 1, 2, \dots, n)$ of the system at its undamaged state can be considered as known values. Further, it is supposed that the frequencies of the damaged system $s_i^* (i = 1, 2, \dots, n)$ can be determined experimentally. Thus, the change frequency spectrum as a result of structural damages will be equal to $ds_i = s_i^* - s_i, (i = 1, 2, \dots, n)$.

Further, by the formula (14) the influence function of the change of the i -th finite element rigidity on the i -th - frequency of the system can be determined. As the design parameter r_j it is accepted the parameters k_j - the bending and shearing rigidities of the finite elements.

The change of finite elements rigidities on dk_j causes the change of the i -th frequency of the system:

$$\sum_{j=1}^N f_{i,j} dk_j = ds_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (16)$$

Here N is the number of rigidity parameters of the system the values of which could be changed as a result of structural damages. The value n is the number of frequencies of free vibration of the damaged system which were determined from the experiment.

At usage of the dynamic stiffness matrices the system completely keeps its spatial continuity, and, hence, its number of degrees of freedom is equal to infinity. If $n = N$, then from the equations (16) the values $dk_j (i = 1, 2, \dots, N)$ can be determined. They define the values of structural damages. Further, on each step of iterative procedure the parameters of initial system are précised by results of previous step of iteration.

If the number of the equations (16) exceeds the number of unknowns, such system appears to be redefined. In this case for definition $dk_j (i = 1, 2, \dots, N)$ it is recommended to use the minimization of mean-root-square error of fulfillment of the equations (16):

$$P(dk_1, dk_2, \dots, dk_N) = \text{Minimize} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N f_{i,j} dk_j - ds_i \right)^2$$

In result it can be received the following system of algebraic equations for determination of structural damages dk_j :

$$\sum_{k=1}^N A_{jk} dk_k = B_j \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

where

$$A_{kj} = \sum_{i=1}^n f_{i,j} f_{i,k}, \quad B_k = \sum_{i=1}^n f_{i,k} ds_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j, k = 1, 2, \dots, N)$$

This iterative procedure should be proceeded till obtaining of the required accuracy of calculation.

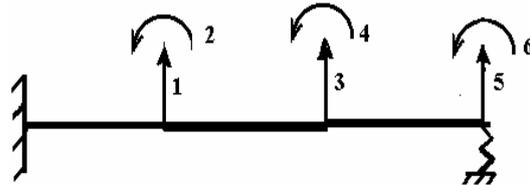


Fig. 1.

Numerical example. The beam shown in the fig. 1 in the initial condition had the following parameters: the mass per unit length $m = 1,4 \text{ кг/м}$, the bending and shearing rigidities $EI = 300 \text{ Нм}^2$, $GF = 800 \text{ Н}$ respectively, the rigidity of the elastic support $K = 350 \text{ Нм}^{-1}$, the length $L = 3 \text{ м}$. This beam is modeled by three prismatic elements of equal length $a = 1 \text{ м}$. Each finite element has four degrees of freedom. The positive directions of the generalized coordinates and generalized forces are shown on the fig.1. It is assumed that during its exploitation the beam has received some damages, which have been resulted in reduction of the bending rigidities of the second and third finite elements on the values: $dk_1 = 70 \text{ Нм}^2$, $dk_3 = 100 \text{ Нм}^2$ respectively and also the shearing rigidity of the first finite element on the value $dk_2 = 200 \text{ Н}$

Table 1.

Частоты	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
Исходная балка	13.8	28.79	52.58	105.1	131.1
Первая итерация	12.83	26.57	48.1	71.22	96.92
Вторая итерация	12.97	26.94	48.66	99.3	119.2
Поврежденная балка	12.99	26.96	48.75	98.47	123.5

The results of numerical calculation made according to stated above algorithm are submitted in the tables 1 and 2. In the table 1 the natural frequencies and in the table 2 the values of damages dk_i of the finite elements are given. It can be seen that the iterative procedure already on the second iteration step provides the convergence of the solution practically to the exact result.

Table 2.

Номер элемента	1	2	3
Исходная балка	0.00	0.00	0.00
Первая итерация	60.34	90.24	265.3
Вторая итерация	68.4	104.5	207.5
Действительное повреждение	70	100	200

4. Use of experimental data of the forced vibration. Let's present the other approach to the solution of the identification problem of elastic systems. The essence of such approach consists in the following. The external force (or some set of the concentrated or distributed loadings), varied in time under the given law, is put to the elastic system. From the experiment under the damaged structure and at the certain moments of time the displacements in some chosen points are determined. On the other hand, these displacements can be determined by the finite element method. This approach can be realized at the action of any external loadings. However, its labor input is essentially reduced in the case of the system loaded by harmonical forces $P(t) = P \cos(\omega t)$. In this case the displacements are presented in the form $q(t) = q \cos(\omega t)$. In result the matrix equation (11) will be transformed to

$$Kq = P \quad (18)$$

For the considered case the expression (15) for function of influence of change rigidity on the vector of the generalized displacements accepts the form:

$$F_{i,j} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial k_j} q_i, \quad (19)$$

From the equation (18) the vector of displacements q of the system at its initial undamaged state is determined. Further, from experiment under the damaged structure the vector of displacements q^* is defined.

Thus, the change of displacements as a result of structural damages will be equal to $\Delta q_i = q_i^* - q_i$. On the other hand it is possible to present this change, if to take into account the expression (19) for the function of influence, so:

$$\Delta q_i = \sum_{j=1}^N F_{i,j} dk_j \quad (20)$$

The unknown values of structural damages dk_j are determined from procedure of mean-root-square error of fulfillment of the equalities (20):

$$\text{Minimize } P = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\sum_{j=1}^N F_{i,j} dk_j - \Delta q_i \right]^2$$

In a result for definition of structural damages dk_j it can be received the following system of algebraic equations:

$$\sum_{k=1}^N A_{jk} dk_k = B_j \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (21)$$

where

$$A_{kj} = \sum_{i=1}^n F_{i,j} F_{i,k}, \quad B_k = \sum_{i=1}^n F_{i,k} (q_i^* - q_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j, k = 1, 2, \dots, N)$$

4.1. Complete information on displacements at experiment. The considered above beam was loaded by the harmonic force $P(t) = 1000 \cos(\omega t), H$; $\omega = 20c^{-1}$ at the joint of the second and third finite elements. By the finite element method the generalized displacements of the beam in its initial undamaged state q were calculated and the same displacements q^* but for the damaged beam has been measured from experiment:

$$q^T = \{1.392; 0.693, 1.751, 0.151; 1.816; -0.238\}^T, \\ q^{*T} = \{1.518; 0.519; 1.518; -0.142; 1.162; -0.52\}^T \quad (22)$$

The substitution (22) in (21) allows to define the values of structural damages: $dk_1 = 71.1$, $dk_2 = 101.8$, $dk_3 = 207$. This numerical example shows the high efficiency of the considered method for definition of the structural damages. It is seen that in order to obtain practically exact result it is sufficient to have only the first step of iteration.

4.2. Incomplete information on displacements at experiment. At experiment it can be frequently a situation, when it is practically impossible to measure some of general displacements. In this case the vector of displacements must be divided into two sub-vectors: q_1 and q_2 . The sub-vector q_1 includes all experimentally measured generalized displacements.

In accordance with dividing of the vector \bar{q} the general dynamic stiffness matrix and the vector of external forces P also is divided into separate sub-matrices:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

With account of (23) the equations (18) can be presented so:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Directly from (24) the following two matrix equations can be received:

$$K_{11}q_1 + K_{12}q_2 = P_1; \\ K_{21}q_1 + K_{22}q_2 = P_2 \quad (25)$$

From the second equation of the system (25) the following expression for q_2 can be obtained:

$$q_2 = [K_{22}]^{-1} \{P_2 - [K_{21}]q_1\} \quad (26)$$

Note that there is opportunity to put $P_2 = 0$. Then the dependence (26) becomes simpler and will be rewritten as

$$q_2 = -[K_{22}]^{-1}[K_{21}]q_1 \quad (27)$$

By analogy with (27) for definition of q_2^* the following approximate dependence can be written out:

$$q_2^* = [K_{22}^*]^{-1}[K_{21}^*]q_1^* \quad (28)$$

For definition of damage parameters dk_j the equations (21) and the data (22) are used. The vector q_2^* is defined by the iterative method.

Let for the beam, considered in the previous item, at the experiment only the displacements q_1^*, q_3^*, q_5^* were determined:

$$q_1^* = \{1.518; 1.518; 1.162\}^T. \quad (29)$$

For definition of the sub-vector \bar{q}_2^* the dependence (28) was used. On the first step of successive approximation it was assumed that $K_{21}^* = K_{21}$, $K_{22}^* = K_{22}$. In a result it was received

$$q_2^* = \{0.526; -0.138; -0.536\} \quad (30)$$

If to compare the approximate values (30) with their exact values (see (22)), it is seen that the error does not exceed 10%. Usage of (30) as the first approximation leads to following structural damages: $dk_1 = 79.5$; $dk_2 = 101.8$; $dk_3 = 212$. The error of the first step of iteration does not exceed 10 %.

Conclusion. The usage of dynamic stiffness matrices in the problem of beam systems identification has a high efficiency.

Acknowledgement. *The author is grateful to the Russian Fund of Fundamental Researches for the support of this work (Grant No 04-01-00711)*

References.

1. Postnov V.A., Rohr U., Schlottmann G. Inverse eigenvalue problem and identification of structures //Proceedings of 20-th International Conference Mathematical Modeling in Solid Mechanics. - 24-26 Sept. 2003, St. Petersburg. Vol. 3. - P. 107-120..
2. Postnov V.A. Use of experimental data about change of dynamic properties of elastic systems for definition of structural damages // the Bulletin of the Nizhniy Novgorod University named by N.N. Lobachevsky, Series MECHANICS. - 2003. Vol. 1 (6). P. 32-42.
3. Postnov V.A. Usage of the finite element method for definition of structural damages. //The Bulletin of the civil engineers. SPb. -2004. № 1. P. 70-76.

ДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА ШАРНИРНО ОПЕРТУЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Рабинский Л.Н.

(Московский авиационный институт (ГТУ) Москва, Россия)

Рассматривается нестационарная задача дифракции плоской акустической волны давления на тонкой шарнирно опертой эллиптической оболочке. На основании гипотезы тонкого слоя определяется гидродинамическое давление, действующее на оболочку [1-2,4]. В качестве уравнений движения оболочки используется модель типа Тимошенко, которая интегрируется методом конечных разностей средствами Matlab 6.5. [6].

1. Постановка задачи. Нестационарное движение акустической среды и эллиптической оболочки описывается системой уравнений [1-4].

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} = \sum_{j=1}^3 L_{ij} u_j + (p_* + p) \delta_{i3} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi, \quad p = -\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad \mathbf{v} = \text{grad} \varphi \quad (1.2)$$

$$\varphi|_{\tau=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (1.3)$$

$$u_i|_{\tau=0} = \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{N}_{\xi}^{(m)}(u_1, u_2, u_3) \Big|_{\xi^1 = \xi_k^1} = 0 \quad (k = 1, 2; m = 1, 2, \dots) \quad (1.5)$$

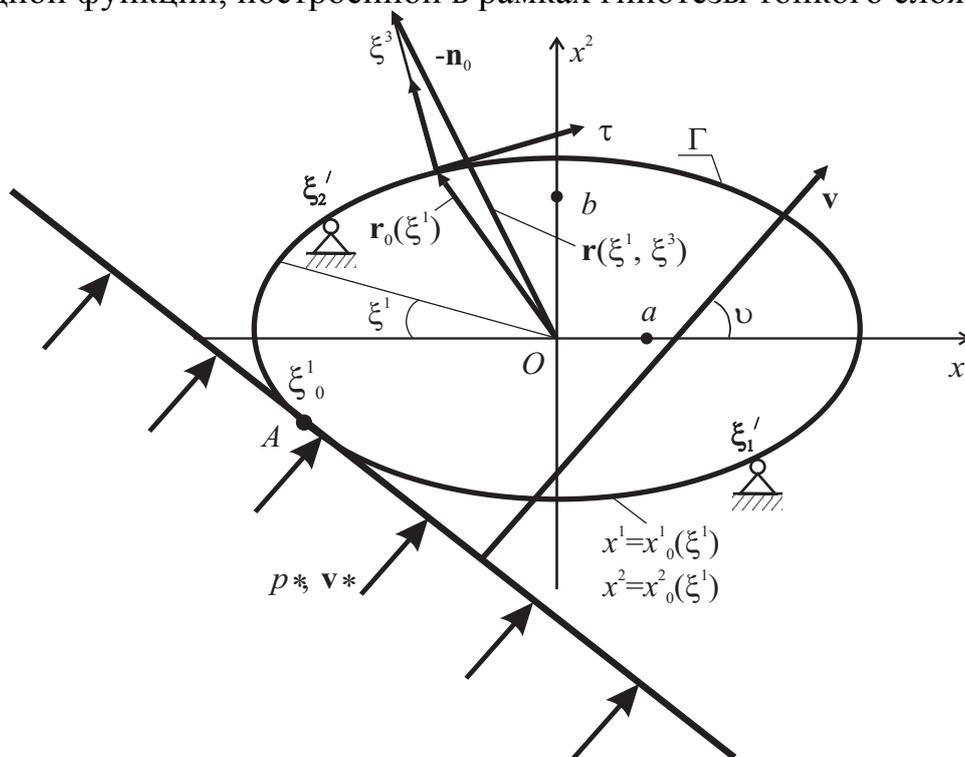
Здесь φ – потенциал скоростей акустической среды, p_* – давление в падающей волне, p – давление в отраженной и излученной волнах, \mathbf{v} – вектор скорости акустической среды, u_i – перемещения срединной поверхности оболочки, $u_1 = u$ – тангенциальное перемещение, $u_2 = \chi$ – прогиб оболочки, $u_3 = w$ – поворот нормали оболочки, L_{ij} – известные дифференциальные операторы, определяемые геометрией оболочки, δ_{ij} – символы Кронекера. Соотношения (1.5) определяют с помощью операторов $\mathbf{N}_{\xi}^{(m)}$ граничные условия, зависящие от формы оболочки Γ и ее закрепления в пространстве, (ξ^1, ξ^3) – криволинейная система координат (фиг 1), ξ_k^1 ($k = 1, 2$) – координаты границ панели в эллиптическом экране.

Задача решается в безразмерном виде. При этом все линейные размеры отнесены к длине большой полуоси эллиптической оболочки a , скорости – к скорости звука в акустической среде c_0 , величины, имеющие размерность давления – к комплексу $\rho_0 c_0^2$, времени τ – к tc_0/a .

В начальный момент времени $\tau=0$ оболочка и среда находятся в невозмущенном состоянии, что соответствует однородным начальным условиям (1.3) и (1.4).

Плоская акустическая волна с фронтом, составляющим угол ϑ с осью Ox^1 , в начальный момент времени $\tau=0$ касается поверхности оболочки (a, b – полуоси эллипса) с направляющей Γ в точке A (фиг. 1).

Из условий совместного движения оболочки и прилегающих к ней частиц акустической среды следуют условия непротекания, а давления в отраженной и излученной волнах могут быть найдены с помощью переходной функции, построенной в рамках гипотезы тонкого слоя [4].



Фиг. 1.

2. Определение гидродинамического давления, действующего на оболочку. Введем криволинейную систему координат (ξ^1, ξ^3) , связанную с кривой Γ . Пусть $\mathbf{r}_0(\xi^1)$ – радиус вектор кривой Γ , $\mathbf{n}_0(\xi^1)$ – вектор единичной нормали (фиг.1).

Считается, что основной вклад в гидродинамическую нагрузку дает движение среды по нормали к поверхности, а движением среды вдоль кривой Γ можно пренебречь. Поэтому производные по координате ξ^1 в

(1.2) можно положить тождественно равными нулю, а оператор Лапласа вычислить на поверхности цилиндра ($\xi^3 = 0$).

Следовательно, начально-краевая задача для определения функции влияния будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = \frac{1}{H_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(H_1 \frac{\partial G}{\partial \xi^1} \right) \right] \Big|_{\xi^3=0} \quad (2.1)$$

$$G|_{\tau=0} = \frac{\partial G}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi^3=0} = \delta(\tau), \quad G(r, t) = O(1) \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Переходная функция влияния $G_0(\xi^1, \tau)$ на поверхности препятствия Γ находится операционным методом и имеет вид [3, 4]:

$$G_0(\xi^1, \tau) = -H(\tau)R(z) \quad (2.4)$$

$$R(z) = -z + {}_1F_2 \left(\left[-\frac{1}{2} \right], \left[\frac{1}{2}, 1 \right], -\frac{z^2}{4} \right), \quad z = \frac{k(\xi^1)}{2} \tau$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда, ${}_1F_2([a], [b, c], z)$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

Выражения для давления в отраженной и излученной волнах представляются в виде [4]:

$$p_1(\xi^1, \tau) = -\int_0^\tau \frac{\partial \varphi^*(\xi^1, 0, \tau - \tau_1)}{\partial \xi^3} \frac{\partial G_0(\xi^1, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1 \quad (2.5)$$

$$p_2(\xi^1, \tau) = -\int_0^\tau \frac{\partial w(\xi^1, \tau - \tau_1)}{\partial \tau_1} \frac{\partial G_0(\xi^1, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial G_0(\xi^1, \tau)}{\partial \tau} = -[\delta(\tau) + R'(z)] \quad (2.7)$$

$$R'(z) = -1 + z {}_1F_2 \left(\left[\frac{1}{2} \right], \left[\frac{3}{2}, 2 \right], -\frac{z^2}{4} \right)$$

3. Дифракция плоской кривой волны давления на упругой эллиптической оболочке. В этом случае давление за фронтом волны в системе координат Ox^1x^2 задается следующим соотношением:

$$p^*(x^j, \tau) = p_0 H(\tau - f(x^j, \vartheta)) \quad j = 1, 2 \quad (3.1)$$

$$f(x^j, \vartheta) = x^1 \cos \vartheta + x^2 \sin \vartheta + C \quad (3.2)$$

где константа C определяет положение фронта волны в начальный момент времени.

С учетом (2.5) давление в отраженной волне определится следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1(\xi^1, \tau) &= -p_0 \left(n_0^1 \cos \vartheta + n_0^2 \sin \vartheta \right) \int_0^{\tau - f_0(\xi^1, \vartheta)} \frac{\partial G_0(\xi^1, \tau_1)}{\partial \tau_1} d\tau_1 = \\ &= -p_0 \left(n_0^1 \cos \vartheta + n_0^2 \sin \vartheta \right) G_0(\xi^1, \tau - f_0(\xi^1, \vartheta)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Давление в излученной волне p_2 будет определяться выражением:

$$p_2(\xi^1, \tau) = \frac{\partial w(\xi^1, \tau)}{\partial \tau} + \frac{k(\xi^1)}{2} \left[\int_0^{\tau} w(\xi^1, \tau_1) R''(z(\tau - \tau_1)) d\tau_1 - w(\xi^1, \tau) \right] \quad (3.4)$$

$$R''(z) = J_1(z) / z \quad (3.5)$$

где $J_n(z)$ – функции Бесселя I рода порядка n ,

Направляющая эллиптической оболочки Γ определяется соотношением $\Gamma: x_0^1(\xi) = -\cos \xi, x_0^2(\xi) = \beta \sin \xi, \xi \in [-\pi, \pi), \xi = \xi^1$ (3.12)

Кривизна $k(\xi)$, компоненты вектора единичной нормали $\mathbf{n}_0(\xi^1)$ и константа C , определяющая точку касания в (3.2), имеют стандартный вид [4].

Уравнения движения оболочки в операторной форме записываются следующим образом, наиболее пригодным для численного решения дискретного аналога задачи:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2} = \mathbf{L} \mathbf{u} + \mathbf{p} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{C} \frac{d}{d\xi^2} + \mathbf{B} \frac{d}{d\xi} + \mathbf{A} \quad (3.15)$$

где \mathbf{u} -вектор перемещений оболочки, \mathbf{L} – линейный оператор задачи, \mathbf{p} – вектор-функция правых частей.

Задача (3.14), (3.15) аппроксимируется решаемым численно дискретным аналогом. Для уравнения гиперболического типа используем явную конечно-разностную схему на пятиточечном шаблоне «крест». Область построения решения аппроксимируется множеством $\omega = \omega_\tau^K \times \omega_x^N$, где ω_τ^K – дискретизация временной области, ω_x^N – дискретизация пространственной области:

$$\omega_\tau^K = \{ \tau_k = kh_\tau \mid h_\tau = (\tau_K - \tau_0) / K \quad (k = 0, \dots, K) \}$$

$$\omega_{\xi}^N = \{ \xi_l = lh_{\xi} \mid h_{\xi} = (\xi_N - \xi_0)/N \quad (l = 0, 1, \dots, N) \}$$

Производные первого и второго порядка аппроксимируются конечно-разностными соотношениями порядка точности $o(h^2)$ [5]

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} \approx \frac{(u_l^{k+1} - 2u_l^k + u_l^{k-1}))}{h_{\tau}}, \quad \frac{du}{d\xi} \approx \frac{(u_{l+1}^k - u_{l-1}^k)}{2h_{\xi}}, \quad \frac{d^2 u}{d\xi^2} \approx \frac{(u_{l+1}^k - 2u_l^k + u_{l-1}^k)}{h_{\xi}^2} \quad (3.16)$$

Конечно-разностный аналог задачи (3.14), (3.15) с учетом (3.16) имеет вид

$$\mathbf{u}^{k+1} = (2\mathbf{I} + h_{\tau}^2 \mathbf{L}) \mathbf{u}^k + \mathbf{p}^k - \mathbf{u}^k \quad (3.17)$$

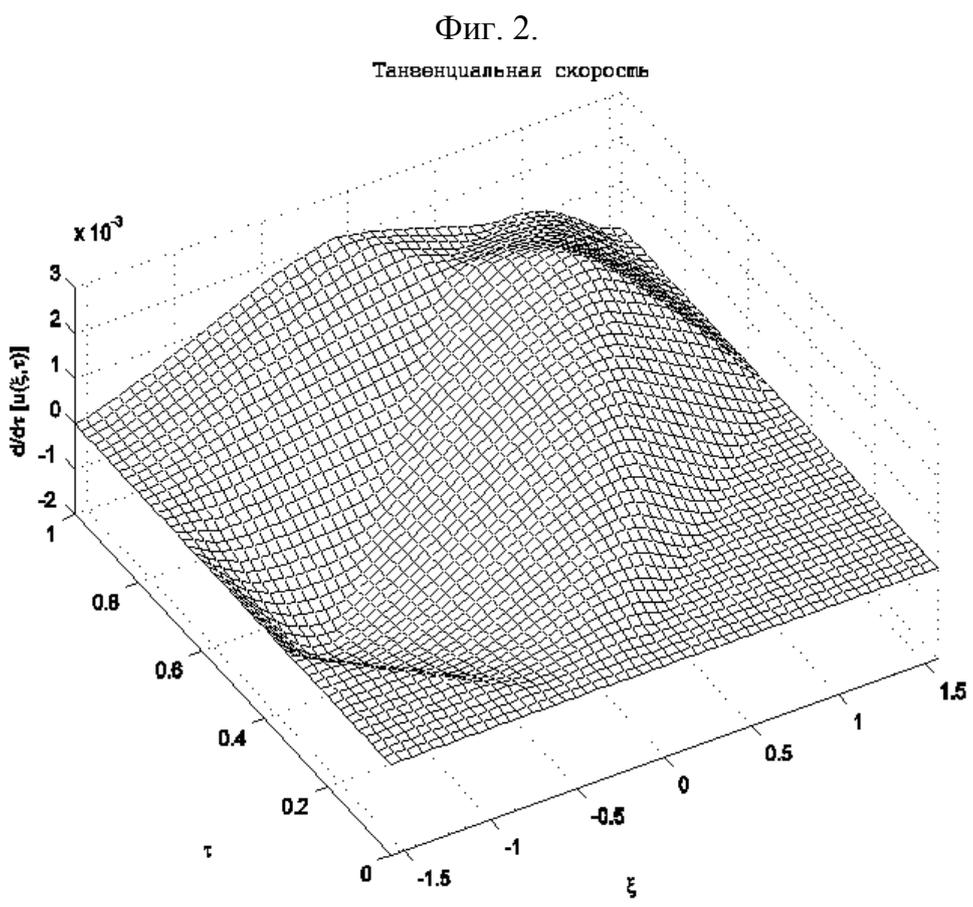
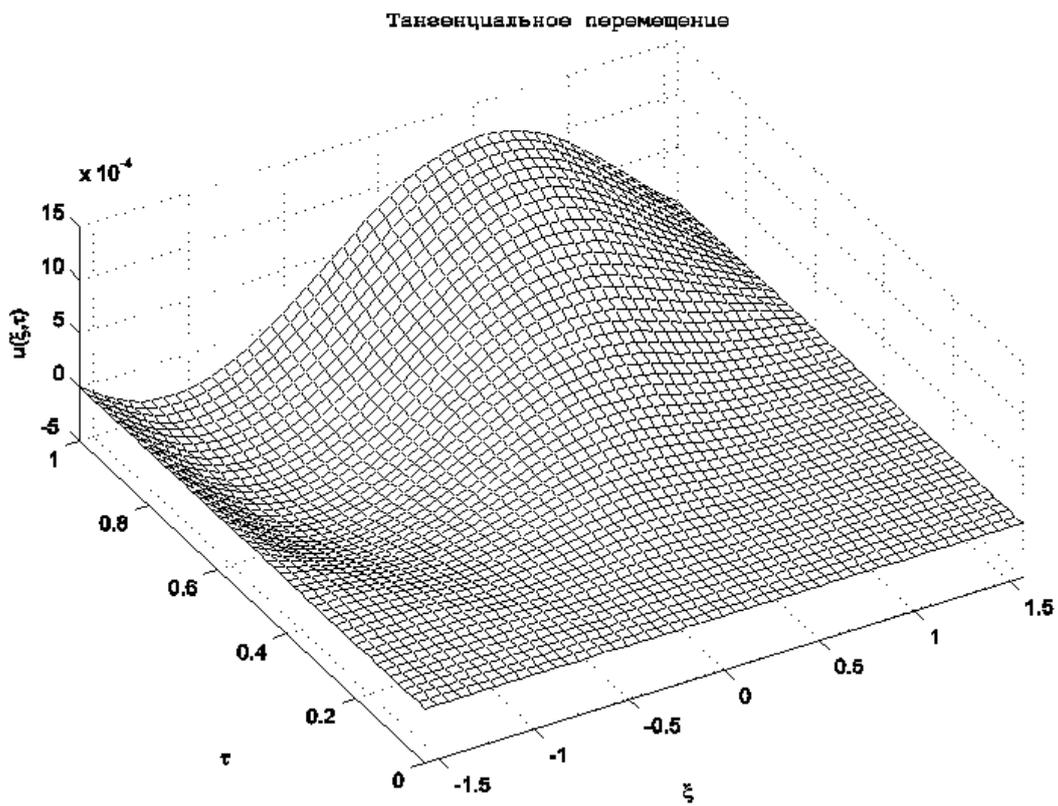
$$\mathbf{u}^k = (u_1^k, \dots, u_N^k, \chi_1^k, \dots, \chi_N^k, w_1^k, \dots, w_N^k)^T$$

$$\mathbf{p}^k = \frac{h_{\tau}^2}{m\rho_0 h} (0, \dots, 0, p_1^k, \dots, p_N^k, 0, \dots, 0)^T, \quad m = \frac{\rho}{\rho_0}$$

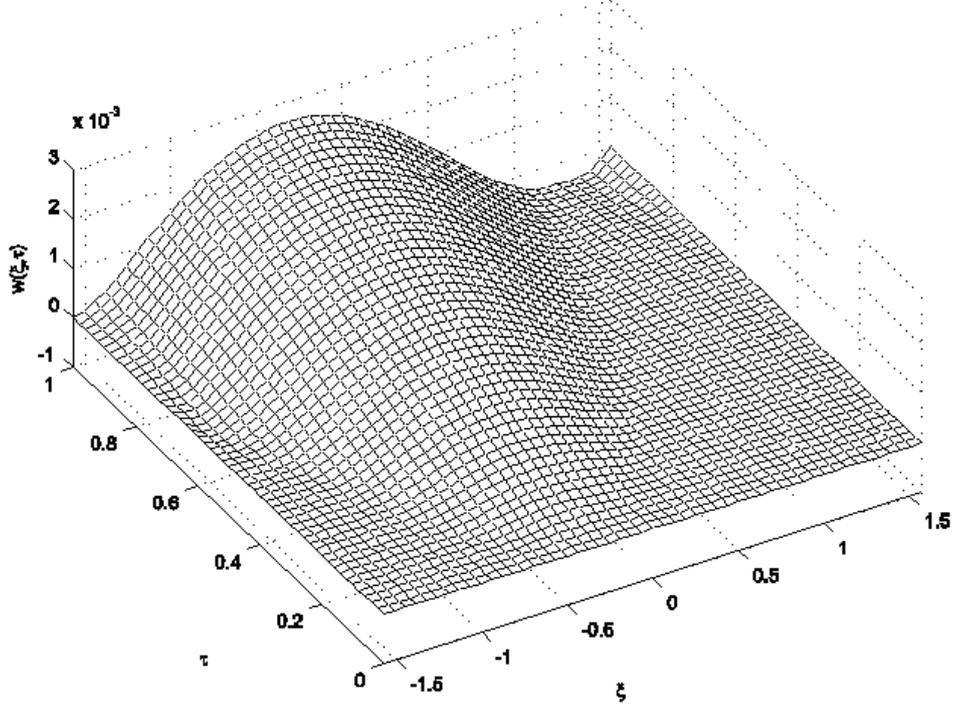
где \mathbf{u}^k – неизвестная сеточная вектор-функция, \mathbf{L} – матрица дискретного аналога дифференциального оператора (3.15), \mathbf{p}^k – вектор правых частей, ρ – плотность материала оболочки, \mathbf{I} – единичная матрица.

На фиг.2-6 представлены пространственно-временные зависимости обобщенных перемещений и скоростей для стальной эллиптической оболочки (плотность $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, толщина оболочки $h = 0.02 \text{ м}$, соотношение между полуосями $\beta = b/a = 0.5, a = 1 \text{ м}, \xi_0^1 = -\pi/2, \xi_1^1 = \pi/2$), помещенной в воду (плотность $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, скорость звука $c_0 = 1500 \text{ м/с}$) в зависимости от времени τ и криволинейной координаты ξ . Интенсивность давления на фронте падающей волны в начальный момент времени $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, угол падения плоской косо́й волны давления $\vartheta = 20^\circ$.

Эпюры суммарного давления $\bar{p}(\xi, \tau) = p_*(\xi, \tau) + p_1(\xi, \tau) + p_2(\xi, \tau)$ представлены на фиг.7.

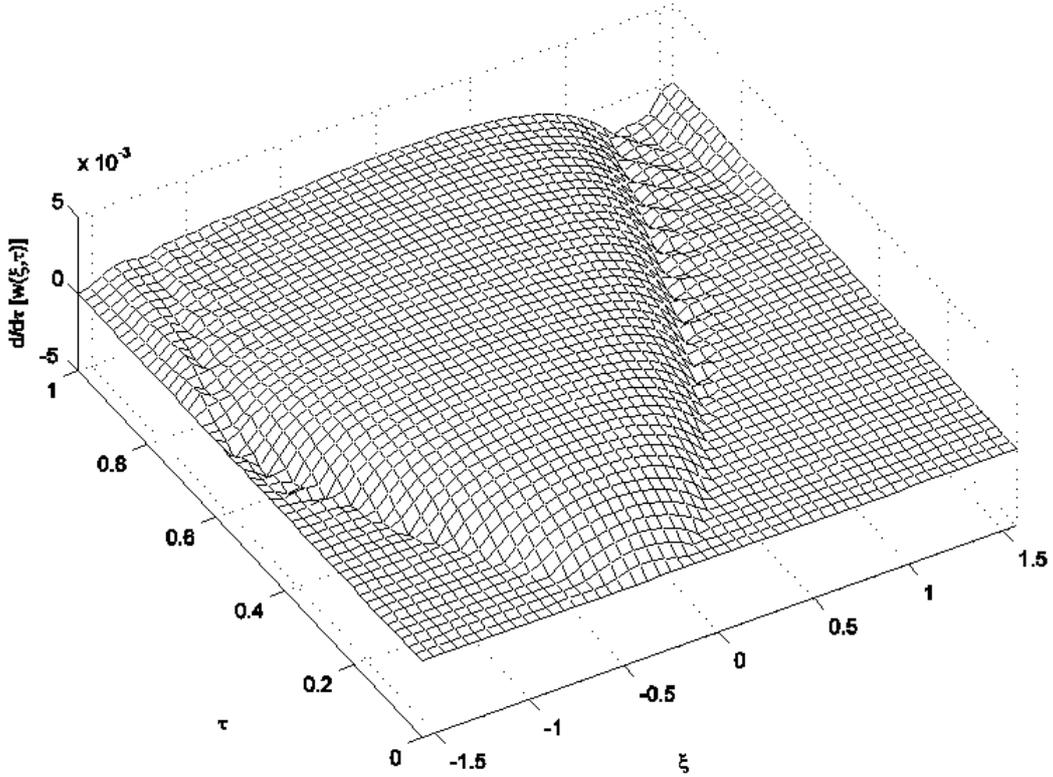


Нормальное перемещение



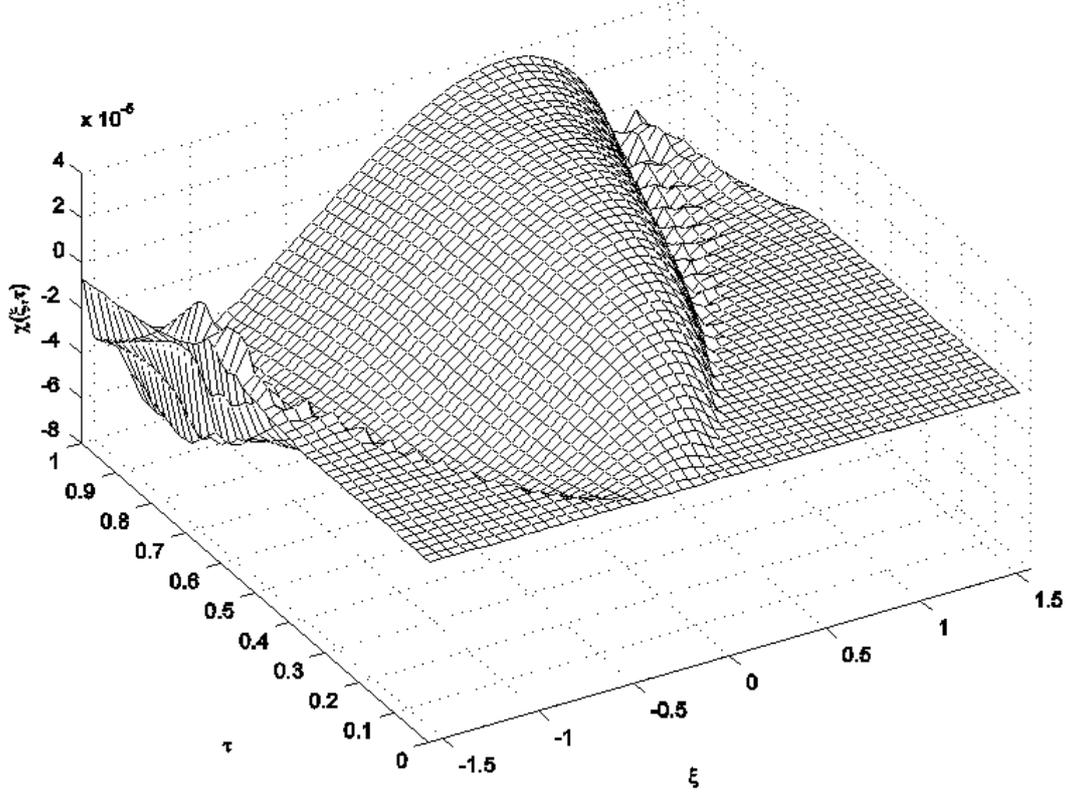
Фиг. 4.

Нормальная скорость



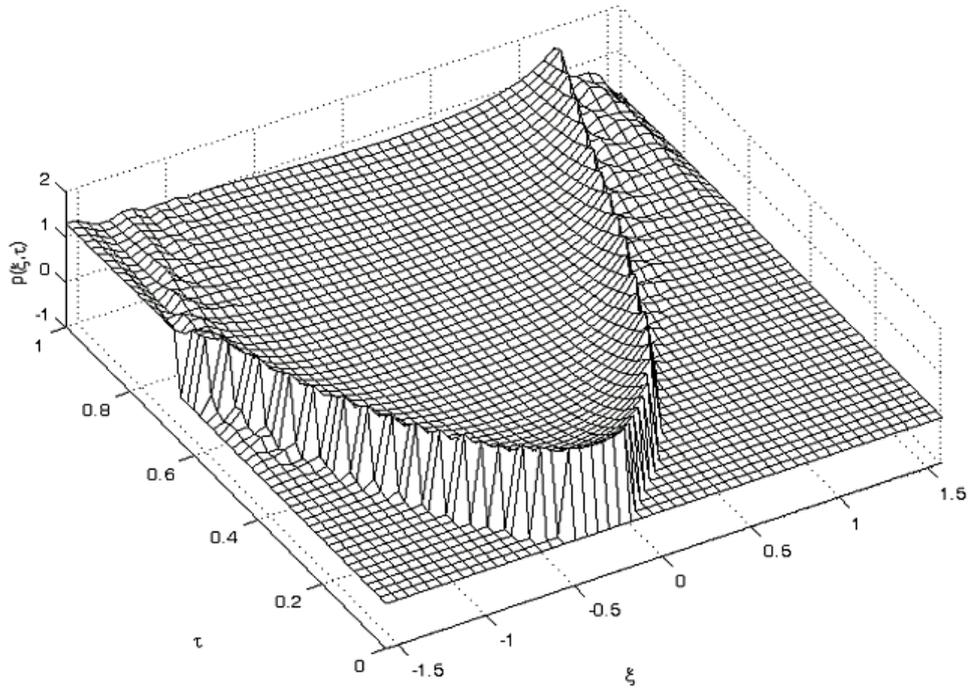
Фиг. 5.

Угол поворота нормали



Фиг. 6.

Давление



Фиг. 7.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-08-01497)

Литература

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев В.И., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.:Физматлит, 2000. 592 с.
2. Горшков А.Г., Жаворонок С.И., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. Плоская задача дифракции акустической волны давления на тонкой ортотропной панели, помещенной в жесткий экран// Изв. РАН. МТТ. 2004. №1. С. 209-220.
3. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004. 467 с.
4. Рабинский Л.Н. Нестационарная задача дифракции плоской акустической волны давления на тонкой эллиптической оболочке. Изв. РАН. МТТ. №5. 2005. С.184-191
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.
6. Потемкин В.Г. Matlab 6: Среда проектирования инженерных приложений М.: Диалог –МИФИ 2003. 448 с.

УДК 539.3

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ КУЛОНА

**Розин Л.А., *Ловцов А.Д.
(*СПбГПУ, Санкт-Петербург, Россия)*

DEFORMABLE SYSTEM INTERACTING WITH ELASTIC NONLINEAR MEDIA IN THE PRESENCE OF COULOMB FRICTION

**Rozin L.A., *Lovtsov A.D.
(*SPbSPU, Saint-Petersburg, Russia)*

Задача расчета деформируемого стержня, взаимодействующего с нелинейно-упругой средой, сведена к проблеме безусловной минимизации выпуклого недифференцируемого функционала. Показано применение данной модели к расчету трубопровода, заглубленного в грунт. Для решения задачи используется метод поточечной верхней релаксации по схеме, разработанной авторами.

Рассматривается изгиб балки – трубопровода, взаимодействующей с нелинейно-упругим основанием при учете трения Кулона. На практике возникает потребность в расчетной схеме показанной на рис. 1. В ней представлены три слоя грунта. Перемещения грунта в слоях 1, 2 становятся возможными только в результате их взаимодействием с трубопроводом посредством соответствующих сил трения. Балка-трубопровод расположена вдоль оси x и изгибается в плоскости yz вдоль оси z . Введем обозначения: L – длина балки; E , I – соответственно модуль упругости материала балки и момент инерции его поперечного сечения. Слои 1 и 2 над и под трубопроводом схематизируются нелинейно-упругими пружинами K_{1c} , K_{2c} . Взаимодействие между трубопроводом и

этими слоями осуществляется при помощи сил трения Кулона F_{1t} , F_{2t} с коэффициентами трения f_1, f_2 . Слой z грунта в пределах диаметра трубопровода схематизируется нелинейно-упругой пружиной K_z . На трубопровод действует нагрузка $p(x)$. Обозначим заданную силу, прижимающую трубопровод к слоям вдоль оси y через $F_n \leq 0$. Для всех сил (кроме F_n) и перемещений на рис. 1 указаны их положительные направления.

Величины возможного взаимного проскальзывания между балкой – трубопроводом и соответственно слоями 1 и 2 будут

$$\Delta w_{1z} = w_{1c} + w, \quad \Delta w_{2z} = w_{2c} + w. \quad (1)$$

На контактах балки со слоями $i = 1, 2$ при условии простого нагружения [1] имеем известные условия трения Кулона:

$$1_i) |F_{it}| \leq f_i |F_n| = -f_i F_n, \quad F_n \leq 0; \quad 2_i) (|F_{it}| + f_i F_n) \Delta w_{iz} = 0; \quad 3_i) F_{it} \Delta w_{iz} \leq 0, \quad (i=1,2) \quad (2)$$

Из условий (2) следует, что в случае допредельного трения, когда для слоя 1 в 1_1 (2) имеет место строгое неравенство из 2_1 (2) имеем $\Delta w_{1z} = 0$ и $w_{1c} = -w$. Другими словами трубопровод прилипает к слою 1. При этом пружина K_{1c} воздействует на трубопровод посредством силы трения F_{1t} . Аналогично для слоя 2.

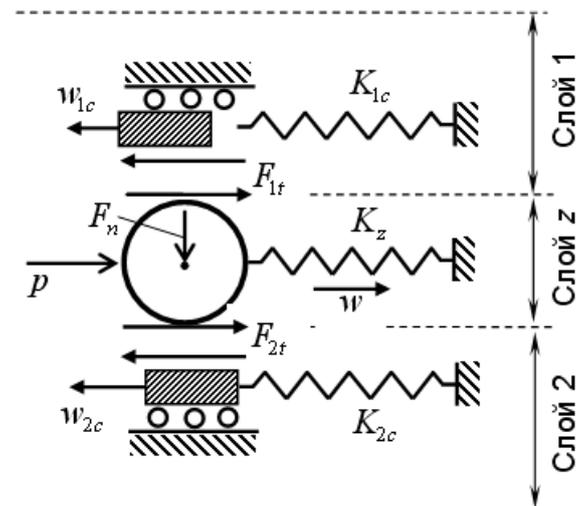


Рис. 1. Расчетная схема

В случае предельного трения, когда, например, для слоя 1 в условии 1_1 (2) имеет место строгое равенство, на основании 2_1 (2) возникает проскальзывание между трубопроводом и слоем 1. При этом к трубопроводу приложена сила трения $|F_{1t}| = f_1 |F_n|$, а пружина K_{1c} не взаимодействует с трубопроводом. Аналогичная ситуация имеет место для слоя 2.

Рассмотрим пружину, например, K_z . Обозначим силу в пружине $q_z(w)$, которую будем считать положительной при сжатии, т. е., при $w \geq 0$. Для того, чтобы в дальнейшем поставленная задача имела единственное решение, и предлагаемые ниже методы ее решения были математически корректными, требуется, чтобы функция $q_z(w)$ была вогнутой. Если обозначить энергию, накопленную пружиной K_z через $J_z(w)$, то очевидно

$$q_z(w) = dJ_z(w)/dw, \quad J_z(w) = \int_0^w q_z(\zeta) d\zeta. \quad (3)$$

Все сказанное относится также к пружинам K_{1c} и K_{2c} с той лишь разницей, что, согласно положительным направлениям перемещений w_{1c} , w_{2c} на рис. 1, функции $q_{1c}(w_{1c})$, $q_{2c}(w_{2c})$ будем считать положительными при растяжении этих пружин.

Основные соотношения для балки будут

$$dQ/dx = -(p - q_z + F_{1t} + F_{2t}), \quad dM/dx = Q, \quad \vartheta = -dw/dx, \quad d^2w/dx^2 = -M/EI. \quad (4)$$

Рассмотрим выражение

$$a(w, w^* - w) = \int_0^L EI d^2w/dx^2 \cdot d^2(w^* - w)/dx^2 dx, \quad (5)$$

где w – истинное, а w^* – геометрически возможные непрерывно дифференцируемые перемещения оси балки такие, что $w^*(0) = 0$, $(dw^*/dx)_{x=0} = 0$. Выполним в (5) интегрирование по частям. Тогда,

принимая во внимание граничные условия, будем иметь

$$a(w, w^* - w) - \int_0^L (p - q_z(w))(w^* - w) dx = \int_0^L [F_{1t}(w^* - w) + F_{2t}(w^* - w)] dx. \quad (6)$$

Пользуясь далее преобразованиями аналогичными выполненным для продольных деформаций в [3], получим следующее вариационное неравенство

$$\begin{aligned} a(w, w^* - w) - \int_0^L [p - q_z(w)](w^* - w) dx + \\ + \int_0^L [F_{1t}(w_{1c}^* - w_{1c}) + f_1 |F_n| (|w^* + w_{1c}^*| - |w + w_{1c}|)] dx + \\ + \int_0^L [F_{2t}(w_{2c}^* - w_{2c}) + f_2 |F_n| (|w^* + w_{2c}^*| - |w + w_{2c}|)] dx \geq 0, \quad \forall (w^*, w_{1c}^*, w_{2c}^*). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь w_{1c}^* , w_{2c}^* произвольные непрерывные перемещения соответствующих пружин, которые являются геометрически возможными. Поскольку $F_{1t} = q_{1c}(w_{1c})$, $F_{2t} = q_{2c}(w_{2c})$, то вариационное неравенство (7) формулируется относительно неизвестных w , w_{1c} , w_{2c} . Можно показать, что если $w(0) = (dw/dx)_{x=0} = 0$, то w , w_{1c} , w_{2c} удовлетворяют всем уравнениям и условиям трения (2) исходной задачи, т. е., являются ее решением. Вариационное неравенство (11) есть принцип возможных перемещений для данной задачи с трением Кулона.

Рассмотрим функционал

$$J(w^*, w_{1c}^*, w_{2c}^*) = \frac{1}{2} a(w^*, w^*) - \int_0^L p w^* dx + \int_0^L [J_z(w^*) + J_{1c}(w_{1c}^*) + J_{2c}(w_{2c}^*)] dx + \int_0^L [f_1 |F_n| |w^* + w_{1c}^*| + f_2 |F_n| |w^* + w_{2c}^*|] dx; \quad \forall (w^*, w_{1c}^*, w_{2c}^*). \quad (8)$$

Функционал (8), определенный на выпуклом множестве переменных w^*, w_{1c}^*, w_{2c}^* , является выпуклым, т. к. он представляет собой сумму трех выпуклых функционалов [2]. Первый из них включает в себя подчеркнутые члены и является обычным выпуклым функционалом Лагранжа для балки. Второй функционал состоит из интеграла, куда входят выпуклые функции $J_z(w^*), J_{1c}(w_{1c}^*), J_{2c}(w_{2c}^*)$. Третий функционал обусловлен силами трения Кулона и является выпуклым, т. к. в него входят модули переменных.

На основе известной теоремы Лионса [4] выпуклость функционала (8) позволяет заключить, что вариационная постановка задачи в виде неравенства (7) эквивалентна следующей вариационной задаче для функционала (8)

$$w(0) = 0, \quad dw/dx|_{x=0} = 0, \quad J(w, w_{1c}, w_{2c}) = \inf_{w^*, w_{1c}^*, w_{2c}^*} J(w^*, w_{1c}^*, w_{2c}^*). \quad (9)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на переходе к дискретной задаче при помощи использования квадратурных формул для функционала энергии. В результате получим схему балки с пролетами $i=1, \dots, m$, опорами и внешней нагрузкой на концах этих пролетов.

Вариационная задача для рассматриваемой балки уже на дискретных опорах вместо (9) примет вид

$$w(0) = 0, \quad dw/dx|_{x=0} = 0, \quad J^l(w, w_{1c1}, \dots, w_{1cm}, w_{2c1}, \dots, w_{2cm}) = \inf_{w^*, w_{1ci}^*, w_{2ci}^*} J^l(w^*, w_{1c1}^*, \dots, w_{1cm}^*, w_{2c1}^*, \dots, w_{2cm}^*), \quad (10)$$

где J^l есть функционал (8) после соответствующей дискретизации.

Поскольку балка разбита на пролеты $i=1, \dots, m$, то при заданных внешних воздействиях только на опорах функция перемещений $w = w^i$ на каждом участке i согласно (4) определяется концевыми значениями на опорах $w_{i-1}, w_i, (dw^i/dx)_{i-1} = -\mathfrak{G}_{i-1}, (dw^i/dx)_i = -\mathfrak{G}_i$. Аналогичные зависимости можно принять для w^i на каждом участке i , поскольку решение содержится именно в этом подмножестве геометрически возможных перемещений. Отсюда в качестве определяющих величин в функционале J^l будут фигурировать по четыре величины $w_i, \mathfrak{G}_i, w_{1ci}, w_{2ci}$ или $w_i^*, \mathfrak{G}_i^*, w_{1ci}^*, w_{2ci}^*$ для каждой опоры $i=1, \dots, m$. Обозначим эти четверки величин ω_i или ω_i^* . В результате вариационную задачу (10) можно записать в виде

$$w(0) = (dw/dx)_{x=0} = 0, \quad J^l(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m) = \inf_{\omega_i^*} J^l(\omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_m^*). \quad (11)$$

Поскольку функционал (8) является недифференцируемым из-за наличия членов с $|w^* + w_{1c}^*|$, $|w^* + w_{2c}^*|$, то при решении задачи (11) возникают затруднения. Применим итерационный метод поточечной релаксации, для которого доказана сходимость применительно к выпуклым и недифференцируемым функционалам, содержащим модули неизвестных [5]. Недифференцируемость функционала приводит к тому, что на каждом шаге итерации переход от приближения r к следующему приближению $r + 1$ для ω_i сводится к решению неравенства

$$J^l(\omega_1^{r+1}, \dots, \omega_{i-1}^{r+1}, \omega_i^{r+1}, \omega_{i+1}^r, \dots, \omega_m^r) \leq J^l(\omega_1^{r+1}, \dots, \omega_{i-1}^{r+1}, \omega_i^*, \omega_{i+1}^r, \dots, \omega_m^r) \quad \forall \omega_i^*, \quad (12)$$

где переменные на опоре с номером i отыскиваются в $r + 1$ приближении при условии, что все переменные на остальных опорах являются известными. Построим точное решение неравенства (12). Очевидно такое решение неравенства (12) для нахождения ω_i^{r+1} может быть осуществлено путем точного решения исходной задачи для двухпролетной балки с пролетами i и $i + 1$ когда на крайних опорах заданы ω_{i-1}^{r+1} и ω_{i+1}^r . При этом окажется, что знания $w_{c, i-1}^{r+1}$ и $w_{c, i+1}^r$ не требуется при нахождении ω_i^{r+1} .

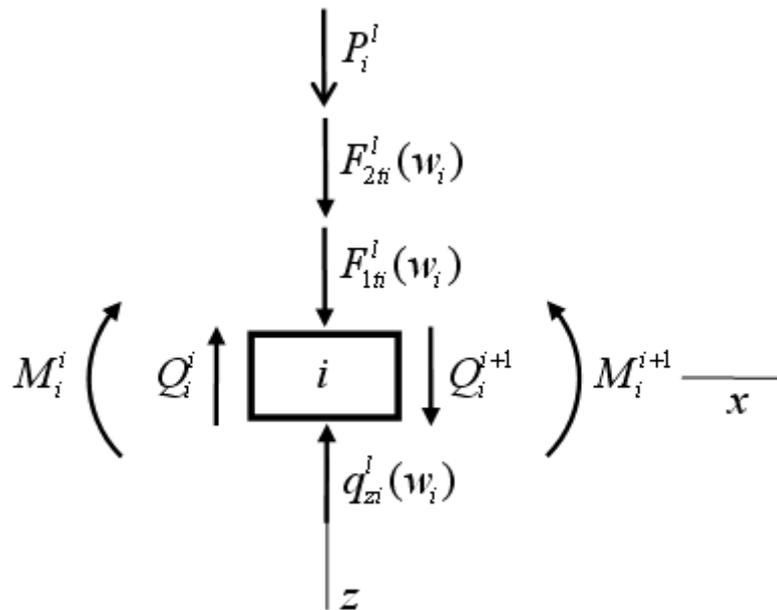


Рис. 2. Равновесие узла

Обратимся к двухпролетной балке с пролетами i , $i + 1$. Перерезывающие силы и изгибающие моменты, приходящиеся на опору i , выражаются через перемещения и углы поворота на опорах $i - 1$, i , $i + 1$. Из рис. 2 следуют условия равновесия узла i

$$P_i^l + F_{1i}^l + F_{2i}^l - q_{zi}^l = Q_i^i - Q_i^{i+1}, \quad M_i^i = M_i^{i+1}. \quad (13)$$

Подставляя выражения для перерезывающих сил и моментов в (13) будем иметь в $r+1$ приближении условия равновесия узла i в виде

$$a_{11}^i w_i^{r+1} + q_{zi}^l(w_i^{r+1}) - q_{1ci}^l(w_{1ci}^{r+1}) - q_{2ci}^l(w_{2ci}^{r+1}) = P_i^l + b_{1i}^{r+1}, \quad \mathcal{G}_i^{r+1} = b_{2i}^{r+1}/a_{22}^i, \quad (14)$$

где

$$a_{11}^i = 24EI/l^3, \quad a_{22}^i = 8/l, \quad b_{1i}^{r+1} = 12EI(w_{i-1}^{r+1} + w_{i+1}^r)/l^3 - 6EI(\mathcal{G}_{i-1}^{r+1} - \mathcal{G}_{i+1}^r)/l^2,$$

$$b_{2i}^{r+1} = 6(w_{i-1}^{r+1} - w_{i+1}^r)/l^2 - 2(\mathcal{G}_{i-1}^{r+1} + \mathcal{G}_{i+1}^r)/l.$$

Решение задачи на каждом шаге $r+1$ методом поточечной релаксации сводится к нахождению w_i^{r+1} , \mathcal{G}_i^{r+1} из уравнений (14), где правые части являются известными. Для этого аналогично [3] рассматриваются возможные варианты задания исходных данных.

Вариант 1. Если $f_{1i} = f_{2i} = 0$, то согласно (2) $F_{1i}^{l(r+1)} = F_{2i}^{l(r+1)} = 0$.

Вариант 2. Предположим полное сцепление трубопровода со слоями 1 и 2, когда имеет место допредельное трение и в (2) стоит знак неравенства, т. е. $|F_{1i}^{l(r+1)}| < f_{1i}|F_{ni}^l|$, $|F_{2i}^{l(r+1)}| < f_{2i}|F_{ni}^l|$.

Вариант 3. Рассмотрим вариант проскальзывания между балкой – трубопроводом и слоями 1, 2. Это означает, что силы трения равны своим предельным значениям, когда в (2) имеет место равенство, т. е. $F_{1i}^{l(r+1)} = \pm f_{1i}|F_{ni}^l|$, $F_{2i}^{l(r+1)} = \pm f_{2i}|F_{ni}^l|$.

Вариант 4. При расчете варианта 2 может оказаться, что трубопровод проскальзывает на контакте со слоем 1 и находится в сцеплении со слоем 2.

Вариант 5. При расчете варианта 2 может оказаться, что трубопровод находится в сцеплении со слоем 1 и проскальзывает относительно слоя 2.

Решение в каждом из перечисленных вариантов соответствующих нелинейных уравнений осуществляем путем интерполяции нелинейных функций комбинациями вогнутых ломаных.

Рассмотрим решение конкретной задачи. Расчетная длина балки – трубопровода $L = 300$ м. Длина, на которой задана отличная от нуля нагрузка, равна $L_w = 50$ м. Если начало балки расположено при $x = 0$, то L_w совпадает с участком $125 \leq x \leq 175$ м. Толщина слоя z равна внешнему диаметру трубопровода 1 м. Толщина стенки трубопровода составляет 0.02 м. Балка разбивается на 100 равных участков, по концам которых находятся соответствующие узлы i . Жесткостная характеристика пружины K_z близка к параболе. Жесткостная характеристика пружины K_{1c} принята равной K_z , а для пружины $K_{2c} = 2K_z$. Прижимающая сила $F_n = 20$ кН/м. Прделаны расчеты в двух предположениях, когда

коэффициент трения $f = 0$ и $f = 0.4$. На рис. 3, а показаны прогибы w_i , на рис 3, б – изгибающие моменты M_i при действии внешней нагрузки $p = 36 \text{ кН/м}$.

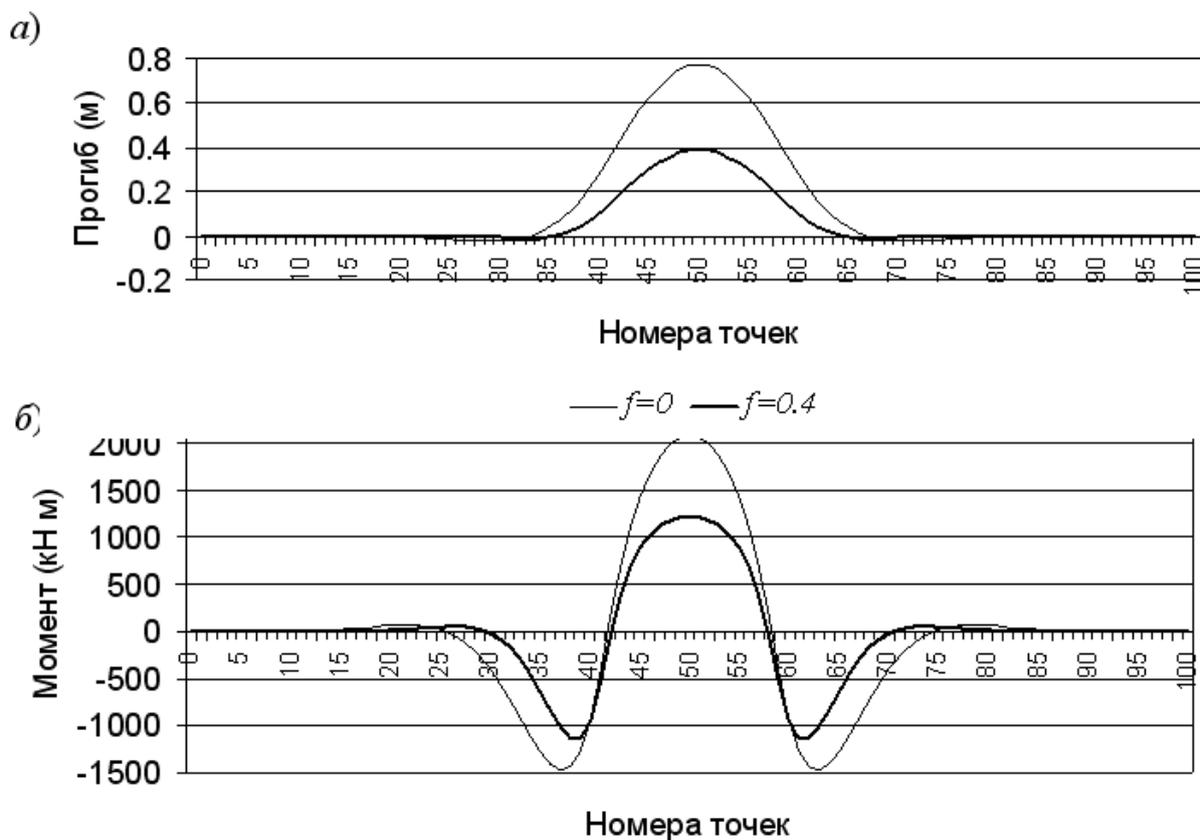


Рис. 3. Результаты расчета.

Литература

1. Вовкушевский А. В., Шойхет Б. А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. – М., Энергоиздат, 1981. – 136 с.
2. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир, 1967. – 506с.
3. Розин Л. А., Ловцов А. Д., Смирнов М. С. Продольная деформация многопролетной балки с трением и податливостью опор. Изв. вузов. Строительство. – 2004. № 8. – С. 17 – 22.
4. Дюво Г., Лионс Ж. Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
5. Гловенский Р. Г., Лион Ж., Трёмольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 576 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ГЛАВНЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ РАСЧЕТА СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ И ДРУГИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

**Рутман Ю.Л., **Лебедев В.Л., Семенов В.А.
(*ЗАО Конби, Санкт-Петербург, Россия,
**ООО Техсофт, Москва, Россия)*

Обсуждаются возможности использования для динамического расчета нелинейных механических систем во временной области обобщенного метода главных координат, предложенного в [1,2]. Главное достоинство этого метода состоит в резком сокращении вычислительных затрат за счет применения разложения по системе специально подобранных главных координат. Приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность реализованного алгоритма.

USING OF GENERAL METHOD OF MAIN COORDINATES FOR CALCULATION SYSTEMS WITH LOCAL NONLINEARITY DUE SEISMIC AND OTHER DYNAMIC FORCES

**Routman Y.L., ** Lebedev V.L., Semenov V.A.
(*AG Konbi, Saint-Petersburg, Russia,
**TechSoft Ltd., Moscow, Russia)(14 pt.)*

Possibility of using general method of main coordinates for dynamic calculation nonlinear mechanical systems are discussed. There are examples for illustration efficiency the algorithm.

В данной статье предложен метод расчета процесса сейсмозащиты, основанный на обобщении метода главных координат [1], [2]. В этом методе сложный характер распределения массовых и жесткостных характеристик модели учитывается интегрально при определении параметров собственных форм. Размерность динамической модели, описывающей нестационарные колебания здания при землетрясении, может быть невелика и физически прозрачна.

Обобщение метода главных координат возможно для систем с локальными нелинейностями. Под локальными нелинейностями понимаются элементы, воздействие которых на систему можно считать сосредоточенными силовыми факторами – силами или моментами. Такими элементами являются, например, опоры с предварительным поджатием, люфтом, нелинейной силовой характеристикой и т.д. Предполагается, что без этих элементов рассматриваемая система является линейноупругой.

Физическая идея предлагаемого метода расчета заключается в том, что в соответствии с принципом освобождаемости реакции нелинейных элементов рассматриваются как известные внешние силы по отношению к линейной части исходной системы. Таким образом, исходная нелинейная система заменяется линейной системой, внешняя нагрузка которой имеет неизвестные компоненты. Для расчета этой линейной системы

применяется метод главных координат (метод приведения к собственным формам). Для определения неизвестной части внешней нагрузки формируются уравнения, описывающие зависимость реакций нелинейных элементов от главных координат линейной части системы. В результате получаем единую бесконечную систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Ее решение – есть решение исходной задачи. Предлагаемый метод составления разрешающих уравнений можно назвать обобщенным методом главных координат (ОМГК). Покажем, как формируется система уравнений ОМГК на примере двухопорной линейноупругой балки с нелинейноупругой промежуточной опорой – рис.1.

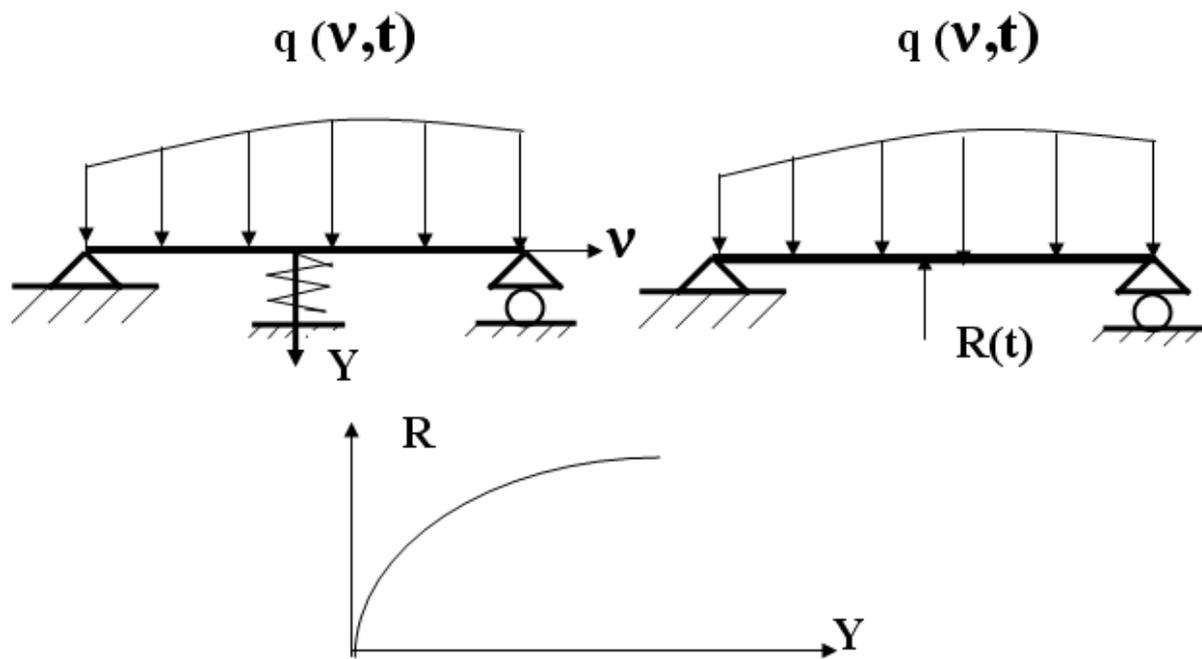


Рис. 1.

Решение ищем в виде:

$$f(v, t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(t) \varphi_i(v), \quad (1)$$

где $\varphi_i(v)$ - собственные формы балки без упругой опоры.

Уравнения для определения главных координат записываются следующим образом [3]:

$$m_i \ddot{x}_i + c_i x_i = -\alpha_i R(t) + \Phi_i(t). \quad (2)$$

$$x_i(0) = x_{i0}, \dot{x}_i(0) = \dot{x}_{i0},$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty,$$

$$m_i = \int_0^l \mu \varphi_i^2(v) dv; c_i = m_i p_i^2;$$

$$\Phi_i = \int_0^l q(v, t) \varphi_i(v) dv; \alpha_i = \varphi_i(v^*),$$

μ - погонная масса балки, $p_i - i^{\text{я}}$ собственная частота двухопорной балки, $R(t), v^*$ - реакция и координата промежуточной опоры. Уравнения, связывающие $R(t)$ и главные координаты x_i имеют вид:

$$R = g(y), \quad (3a)$$

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i(t), \quad (3b)$$

где y - вертикальное перемещение точки v^* .

Система уравнений (2), (3) является разрешающей. От дифференциальных уравнений (2), (3) можно перейти к интегральным уравнениям. Используя интеграл Дюамеля, из (2) получаем:

$$y(t) = \int_0^t k(t - \xi) g[y(\xi)] + F(t), \quad (4)$$

где

$$k(t - \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-\alpha_i \sin p_i(t - \xi)}{m_i p_i},$$

$$F(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Phi_i(\xi) \cdot \sin p_i(t - \xi)}{m_i p_i} d\xi + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (x_{i0} \cos p_i t + \frac{\dot{x}_{i0}}{p_i} \sin p_i t).$$

В общем случае система с локальными нелинейностями разделяется на « m » линейных систем, соединенных « q » нелинейными элементами. Таким образом, система уравнений ОМГК имеет вид:

$$m_{ir} \ddot{x}_{ir} + c_{ir} \dot{x}_{ir} = - \sum_{k=1}^q \alpha_{irk} R_k + \Phi_{ir}, \quad (5)$$

$$x_{ir}(0) = x_{ir0}, \dot{x}_{ir}(0) = \dot{x}_{ir0};$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \dots; r = 1, 2, \dots, m.$$

$$R_k = G_k(y_1, y_2, \dots, y_q; \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_q, t),$$

$$y_k = \sum_{\substack{i=1, 2, \dots, \infty \\ r=1, 2, \dots, m}} \alpha_{irk} x_{ir}.$$

Вводя сквозную нумерацию собственных форм, уравнения (5) можно записать в матричной форме:

$$M\ddot{X} + CX = -AR + \Phi, \quad (6a)$$

$$X(0) = X_0, \dot{X}(0) = \dot{X}_0;$$

$$R = G(Y, \dot{Y}, t), \quad (66)$$

$$Y = A^T X. \quad (6в)$$

Из (6) получаем

$$M\dot{X} + CX = -AG[A^T X, (A^T X)'_{t,t}] + \Phi. \quad (7)$$

Практически, решение уравнений (7) получаем, переходя к редуцированной (конечной) системе уравнений, т.е. учитывая конечное число собственных форм $(i) = 1, 2, \dots, n$.

Обобщая (4), получаем интегральную форму ОМГК в матричном виде:

$$Y(t) = -A^T(t) \int_0^t \Omega(t-\xi) A(\xi) G[Y(\xi), \dot{Y}(\xi), \xi] d\xi + \\ + A^T(t) \int_0^t \Omega(t-\xi) \Phi(\xi) d\xi + A^T(t) N(t). \quad (8)$$

В (8) компоненты диагональной матрицы Ω определяются параметрами собственных форм линейной системы, а матрица N начальными условиями. Для редуцированных систем уравнений получаем

$$Y(t) = \int_0^t K_n(t, \xi) G[Y(\xi), \dot{Y}(\xi)] d\xi + F_n(t), \quad (9)$$

где

$$K_n(t, \xi) = -A_n^T(t) \Omega_n(t-\xi) A_n(\xi),$$

$$F_n(t) = \int_0^t A_n^T(t) \Omega_n(t-\xi) \Phi_n(\xi) d\xi + A_n^T(t) N_n(t),$$

n – число учитываемых собственных форм.

Уравнения (9) могут быть использованы для оценки погрешности решения редуцированных уравнений. Используя теорему Мерсера [4], для большинства ядер можно показать, что:

$$|K_n(t, \xi)| \leq K, \quad n = 1, 2, \dots, \infty, 0 \leq \xi \leq T,$$

и $\int_0^t K_n(t, \xi) d\xi$ равномерно сходящиеся в себе последовательности при

любом $t \in [0, T]$. Если ядра K_n обладают такими свойствами, можно получить следующую оценку [1]:

$$|Y(t) - Y_n(t)| < e^{kLt} (\varepsilon_1 LDt + \varepsilon_2), \quad (10)$$

где

L – константа в неравенстве Липшица $|G(Y)| \leq L|Y|$,

D – константа в неравенстве $|Y_n(t)| \leq D, \quad n = 1, 2, \dots,$

$$\varepsilon_1 = \sup_{0 \leq \xi \leq t} |K_{n+m}(t, \xi) - K_n(t - \xi)|,$$

$$m = 1, 2, \dots, \infty.$$

$$\varepsilon_2 = \sup_{0 \leq \xi \leq t} |F_{n+m}(t) - F_n(t)|,$$

Неравенство (10) является обобщением неравенства Канторовича-Крылова, полученного для линейных интегральных уравнений [5].

Преимущества предлагаемого подхода заключается в том, что, исходя из физических соображений, можно выбрать для расчета лишь небольшое число собственных форм линейной части системы. Тем самым разумно уменьшается размерность задачи. При этом легко физически интерпретируются результаты решения.

Изложенный алгоритм реализован в программном комплексе MicroFe2005, предназначенном для расчета на прочность, устойчивость и колебания строительных и машиностроительных конструкций. Ниже приводится пример расчета 4-х этажного железобетонного здания с использованием обобщенного метода главных координат

Размеры здания в плане - $22 \times 14,5$ м, высота - $12,6$ м. Сечение колонн 40×40 см, сечения ребер жесткости - 42×52 см для верхней плиты и 25×32 см - для нижних плит, толщина плит - 20 см. Полная масса системы с учетом длительных нагрузок - 2480 т. Расчетная схема состоит из 4398 узлов, 932 стержневых конечных элементов и 3803 конечных элементов плоской оболочки.

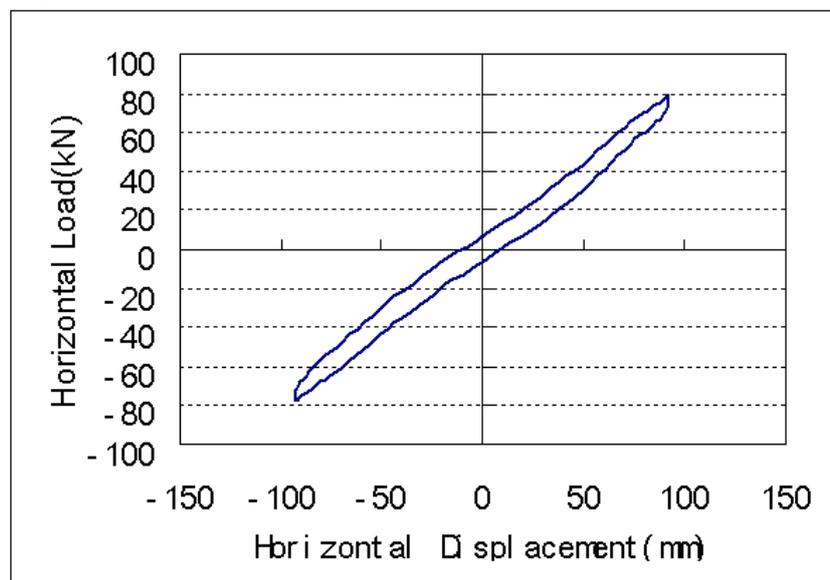


Рис. 2.

В качестве системы сейсмозащиты с учетом усилий в колоннах от статических нагрузок выбраны резинометаллические опоры GZP500V4A со следующими характеристиками: предельное смещение - 275 мм, вертикальная жесткость - 1500000 кН/м, горизонтальная жесткость - 750

кН/м. Зависимость горизонтального перемещения от горизонтального усилия приведена на рис. 2. Эту нелинейную гистерезисную характеристику можно аппроксимировать билинейной диаграммой с упругой разгрузкой.

Для расчета в качестве обобщенных главных координат выбраны формы свободных колебаний, полученные для линейно работающих резинометаллических опор.

В дальнейшем расчет выполнялся на сейсмическое воздействие одновременно приложенное ко всем опорам и заданное акселерограммой. Все расчеты выполнялись при отсутствии внешнего демпфирования. Далее приводятся сравнительные результаты расчетов, выполненных для опор с линейной и нелинейной характеристиками.

Максимальное перемещение при линейной работе опор в левом верхнем узле равно: -8.891 см при $t = 11.25$ сек., а в левом нижнем узле -7.688 см при $t = 11.22$ сек. Максимальное перемещение при нелинейной работе опор в левом верхнем узле равно -4.681 см при $t = 5.56$ сек., а в левом нижнем узле -3.820 при $t = 5.48$ сек.

Максимальные усилия при линейной работе опор в левой нижней колонне равны $N = -218$ кН ($t = 11.31$ сек.), $Q_s = -58$ кН ($t = 11.22$ сек.), $Q_t = -22$ кН ($t = 46.73$ сек.), $M_s = -21$ кН/м ($t = 46.75$ сек.), $M_t = -54$ кН/м ($t = 11.27$ сек.), $M_r = -78$ кН/м ($t = 42.66$ сек.).

Максимальные усилия при нелинейной работе опор в левой нижней колонне равны $N = 154$ кН ($t = 6.46$ сек.), $Q_s = -29$ кН ($t = 5.49$ сек.), $Q_t = -20$ кН ($t = 9.94$ сек.), $M_s = -19$ кН/м ($t = 9.82$ сек.), $M_t = -30$ кН/м ($t = 5.54$ сек.), $M_r = -41$ кН/м ($t = 8.04$ сек.).

Этот сравнительный анализ показывает, что нелинейность характеристик влияет на результаты расчета очень сильно.

При отсутствии системы сейсмозащиты максимальные значения относительных горизонтальных перемещений при том же сейсмическом воздействии в левом верхнем и нижнем узлах системы равны -9.86 см ($t = 27.30$ сек.) и -0.01 см ($t = 36.94$ сек.) соответственно. Усилия при таком соотношении перемещений конечно же будут весьма велики. При этом, максимальные значения усилий в левой нижней колонне превышают значения для $N - 2000$ кН, для $Q_s - 450$ кН, для $Q_t - 150$ кН, для $M_s - 140$ кН/м, для $M_t - 380$ кН/м, для $M_r - 20$ кН/м. Эти усилия существенно больше максимальных усилий возникающих в колонне при использовании резинометаллических опор, что и подтверждает их высокую эффективность.

В заключение отметим, что все результаты были получены с использованием 30 форм свободных колебаний (главных координат). Однако, при использовании в данном случае, например, 10 форм колебаний результаты остаются практически без изменений.

Литература

1. Рутман Ю.Л. Обобщенный метод динамического расчета и его применение к исследованию колебаний элементов стартового комплекса. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Ленинград, ЛМИ. 1966.
2. Рутман Ю.Л. Обобщение метода главных координат на случай упругих систем с локальными нелинейностями. Сб. трудов У международной конференции «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения». С.-Петербург, СПбГПУ, 2003.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М., Высшая школа, 1980.
4. Михлин С.Г. Интегральные уравнения и их приложение к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. ГИТТЛ, М-Л, 1949.
5. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, М – Л, 1952.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Свойский Ф.М. (СПКТБ “Ленгидросталь”, Санкт-Петербург, Россия)

THE BOUNDARY AND CONNECTION CONDITIONS FOR THE FINITE ELEMENTS WITH DRILLING DEGREES OF FREEDOM

Svoisky F.M. (SPCTB “Lengidrostat”, Saint-Petersburg, Russia)

Рассматриваются функционалы и методы теории упругости, используемые при построении конечных элементов с вращательными степенями свободы. Дается обзор работ, посвященных этим элементам. Обсуждаются способы задания для них граничных условий и условий сопряжения.

Элементы с вращательными степенями свободы строились с помощью различных методов, описанных ниже. Рассмотреть эти методы с единых позиций можно, используя функционалы, определенные на разрывных полях перемещений и напряжений (“обобщенные функционалы”).

Первая форма обобщенного функционала Хеллингера-Рейснера записывается в виде (см. [1]):

$$\begin{aligned} \Pi_{31}^0(\sigma, u) = & \int_{\Omega} \left(\sigma^T A u - \frac{1}{2} \sigma^T D^{-1} \sigma - u^T \rho \right) d\Omega - \int_{\Gamma_1} (Cu)^T \bar{t} d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_2} \left(Cu - \bar{w} \right)^T F \sigma d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\omega} \left(C^+ u^+ - C^+ u^- \right)^T \left(F^+ u^+ - F^+ u^- \right) d\omega \end{aligned} \quad (1)$$

где Ω – область с границей Γ , разделенная на элементы;
 Γ_1 – часть границы, на которой заданы усилия;
 Γ_2 – часть границы, на которой заданы перемещения;

ω – совокупность межэлементных границ;
 u – вектор обобщенных перемещений;
 σ – вектор обобщенных напряжений;
 $u^+, u^-, \sigma^+, \sigma^-$ - векторы обобщенных перемещений и напряжений для соседних элементов на их общей границе;
 ρ – вектор нагрузок, распределенных в области Ω ;
 D – симметричная матрица упругости, входящая в соотношение $\sigma = D\varepsilon$ (ε - вектор обобщенных деформаций);
 A – матрица операций дифференцирования, входящая в соотношение $\varepsilon = Au$;
 A^* – матричный оператор, сопряженный с A , входящий в уравнения равновесия $A^* \sigma = \rho$;
 w – вектор обобщенных граничных перемещений;
 \bar{w} - заданное значение w на Γ_2 ;
 t - вектор обобщенных граничных усилий;
 \bar{t} - заданное значение t на Γ_1 ;
 C - оператор, преобразующий u в w на Γ и ω ;
 F - оператор, преобразующий σ в t на Γ и ω ;
 черта над \int_{Ω} означает, что интеграл получается суммированием интегралов по внутренним областям Ω_e всех элементов.

Уравнениями Эйлера и естественными граничными условиями для Π_{31}^0 являются

$$Au = D^{-1}\sigma \quad \text{в } \Omega_e; \quad (2)$$

$$A^* \sigma = \rho \quad \text{в } \Omega_e; \quad (3)$$

$$F\sigma = \bar{t} \quad \text{на } \Gamma_1; \quad (4)$$

$$Cu = \bar{w} \quad \text{на } \Gamma_2; \quad (5)$$

$$C^+ u^+ = C^+ u^- \quad \text{на } \omega; \quad (6)$$

$$F^+ u^+ = F^+ u^- \quad \text{на } \omega. \quad (7)$$

Функционал Π_{31}^0 (в несколько другой, поэлементной форме) применяется при использовании гибридного метода. При использовании метода перемещений σ выражается через u из (2) и подставляется в (1), (3), (4), (7).

В обоих случаях при решении методом конечных элементов обобщенные перемещения u ищутся в виде

$$v^h = \varphi q, \quad (8)$$

где φ - матрица функций формы; q – вектор неизвестных параметров. В случае применения гибридного метода вводится еще аппроксимация напряжений

$$\sigma^h = P\beta \quad (9)$$

где P – функции распределения напряжений (обычно полиномы);
 β - вектор неизвестных параметров, выражаемых потом на уровне элемента через параметры перемещений q .

Если пробные функции (8) совместны, то есть удовлетворяют условию (6), то член с \int_{ω} в (1) обращается в нуль. Если они несовместны, то

обычно этот член просто отбрасывают. Как показано в [2], такое отбрасывание допустимо (то есть сходимость МКЭ к точному решению обеспечена) только при выполнении условия кусочного тестирования

$$\int_{\omega} \left(C^+ v^{h+} - C^+ v^{h-} \right)^T F \sigma_{const} d\omega = 0, \quad (10)$$

где σ_{const} – любой из векторов обобщенных напряжений, постоянных в Ω .

Одна из форм успешного кусочного тестирования – интегральная совместность, то есть выполнение равенства

$$\int_{\omega_{eg}} \left(C^+ v^{h+} - C^+ v^{h-} \right) d\omega = 0 \quad (11)$$

на каждой из границ ω_{eg} между соседними e -м и g -м элементами.

Аналогично совместности и интегральной совместности при сопряжении элементов между собой можно говорить о совместности с граничными условиями, если пробные функции удовлетворяют (5), и интегральной совместности с граничными условиями, если выполняется

$$\int_{\Gamma_{2e}} \left(C v^h - \bar{w} \right) d\Gamma = 0, \quad (12)$$

где Γ_{2e} – часть Γ_2 , относящаяся к e -му элементу, примыкающему к границе.

При построении элементов с вращательными степенями свободы первоначально использовалась кубическая аппроксимация перемещений. Для обеспечения совместности на первых порах принимались такие пробные функции (8), чтобы углы элемента были жесткими, и вращательная степень свободы ϑ_z отождествлялась с поворотом этого

жесткого узла – см. [3-8]. Такие элементы не удовлетворяют необходимому условию “постоянной деформации”. Добиться выполнения этого условия при сохранении совместности удалось только в [9], где ϑ_z отождествляется с добавкой к повороту, вызванному смещением узлов.

В несовместных элементах с кубической аппроксимацией [10-13] вращательная степень свободы отождествляется со средним или “истинным” поворотом окрестности узла

$$\vartheta_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (13)$$

При этом в [11-13] достигается интегральная совместность за счет того, что интеграл от перемещения u_v , нормального к границе, по отрезку между узлами i, j равен

$$\int_0^l u_v ds = l(u_{vi} + u_{vj})/2 + l^2(\vartheta_{zj} - \vartheta_{zi})/12, \quad (14)$$

(l - длина отрезка ij), то есть зависит только от узловых параметров на общей стороне двух элементов.

В дальнейшем большее распространение получили совместные элементы с квадратичной аппроксимацией Олмана, у которых вращательная степень свободы ϑ_z не имеет геометрического смысла, а на отрезке между узлами i, j перемещение u_v изменяется по закону

$$u_v = u_{vi}(1-\xi) + u_{vj}\xi + (\vartheta_{zj} - \vartheta_{zi})l\xi(1-\xi)/2 \quad (15)$$

Элементы такого типа, основанные на методе перемещений, построены в [14-20], основанные на гибридном методе – в [21-25].

Разложение перемещений на формы, соответствующие постоянным деформациям, и “высшие формы” используется в работах [26-30]. Работа [26] основана на “свободной формулировке”, изложенной в [31], а [27-30] – на параметрическом функционале (см. [32]), из которого, как частные случаи, получаются функционалы Лагранжа, Хеллингера – Рейснера и Ху – Вашицу. Качество элементов [26-30] зависит от выбора параметров.

В работе [33] используется аппроксимация деформаций ϵ , независимая от аппроксимаций перемещений и напряжений (8), (9), и функционал (1) заменяется функционалом Ху-Вашицу.

Широкое распространение получили элементы, основанные на варианте теории упругости с несимметричным тензором напряжений. Обоснование их содержится в [34], построение – в [35-44]. В этих элементах вращательная степень свободы ϑ_z аппроксимируется независимо от перемещений и стремится к среднему повороту (13) только

в пределе, при сгущении сетки конечных элементов. Для перемещений в большинстве этих элементов используется квадратичная аппроксимация Олмана.

Наконец, в [45-48] элементы с вращательными степенями свободы строятся на основе различных вариантов моментной теории упругости. Следует сказать, что упомянутая выше теория упругости с несимметричным тензором напряжений является вариантом моментной теории, в котором пренебрегли моментными напряжениями и нагрузками.

Объемные элементы с вращательными степенями свободы построены с использованием описанных выше методов в работах [22, 49-53].

При сопряжении пластины, находящейся в плоском напряженном состоянии, или трехмерного тела с окаймляющими стержнями или примыкающими под произвольным углом изгибаемыми плитами может быть обеспечена:

– совместность по всей линии сопряжения при использовании элементов с квадратичной аппроксимацией Олмана и квадратичной аппроксимации перемещений для стержней и плит;

– интегральная совместность при использовании элементов типа [11-13] и квадратичной или кубической аппроксимации перемещений для стержней и плит.

Дискуссионным является вопрос, нужно ли в узлах на линии сопряжения приравнять вращательную степень свободы ϑ_{zi} соответствующим углам поворота примыкающих стержней и изгибаемых плит, или приравнять только перемещения? Аналогичный вопрос для кинематических граничных условий: следует ли, например, на заделанной границе приравнять нулю только перемещения, или повороты тоже?

В [54] высказывается мнение, что приравнять повороты ни в коем случае нельзя, так как это приведет к заданию лишних связей, а на заделанной границе следует задавать лишь нулевые перемещения. Противоположная точка зрения обосновывается в [55]: приравнивание углов поворота необходимо для обеспечения совместности или интегральной совместности сопрягаемых объектов в соответствии с формулами (14), (15); на заделанной границе следует задавать и нулевые ϑ_{zi} для обеспечения совместности или интегральной совместности с граничными условиями.

По-видимому, оптимальным является промежуточный вариант условий сопряжения и граничных условий. Поскольку в выражения (14), (15) вращательные степени свободы входят только в виде разности значений в двух соседних узлах, то для обеспечения совместности или интегральной совместности необходимо:

- 1) равенство перемещений сопрягаемых объектов в общих узлах;

2) равенство для сопрягаемых объектов разностей поворотов в двух соседних узлах.

Если узлам i, j одного из сопрягаемых объектов соответствуют узлы k, m другого объекта (с теми же координатами), то условия сопряжения имеют вид:

$$U_i^I = U_k^II; \quad U_j^I = U_m^II; \quad \Omega_i^I - \Omega_j^I = \Omega_k^II - \Omega_m^II \quad (16)$$

где U – вектор узловых перемещений; Ω – вектор узловых поворотов.

При сопряжении плит под углом должно также выполняться условие

$$\vartheta_{vi}^I = \vartheta_{vk}^II; \quad \vartheta_{vj}^I = \vartheta_{vm}^II, \text{ где } \vartheta_v - \text{поворот относительно линии сопряжения.}$$

Аналогичные условия должны ставиться на части границы пластины или трехмерного тела, где заданы перемещения. В частности, на заделанной границе должны задаваться следующие условия:

перемещения всех узлов границы равны нулю;

повороты всех узлов границы одинаковы, а для плит еще все $\vartheta_{vi} = 0$.

Подробно содержание настоящей работы изложено в [56].

Литература

1. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.
2. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977.
3. Abu-Gazaleh. Analysis of plate-type prismatic structures: Ph. D. Dissertation / Dept. of civil engineering, University of California, Berkeley, CA, 1965.
4. Scordelis F.C. Analysis of continuum box girder bridges: SESM Report 67-2 / Dept. of civil engineering University of California, Berkeley, CA, 1967.
5. Dungar R., Severn R.T. Triangular finite elements of variable thickness and their application to plate and shell problems // Journal of strain analysis. 1969. V.4. P.10-21.
6. Масленников А.М. Расчет плоских комбинированных систем // Труды Ленинградского Инж.-стр. ин-та. 1976. Вып.119. С. 19-29.
7. Olson M.D., Bearden T.W. A simple flat triangular shell element revisited // International journal for numerical methods in engineering. 1979. V.14. P.51-68.
8. Речкалов С.Д. Получение матрицы жесткости для прямоугольного элемента в плоской задаче теории упругости с учетом угла поворота // Труды Днепропетровского ин-та инж. ж.-д. транспорта. 1980. №210/27. С. 117-125.
9. Проценко А.М., Галагуз Ю.П. Треугольный конечный элемент для плоского напряженного состояния при моделировании коробчатых конструкций // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Труды XIX Международной конф.-ии. СПб, 2001. Т.III. С.57-61.
10. Фрумен А.И. Треугольный элемент плоской задачи теории упругости // Труды Ленинградского Кораблестроительного ин-та. 1977. Выпуск 116. С. 87-93.
11. Свойский Ф.М. Несовместные конечные элементы для расчета листовых пространственных конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Автоматизация научных исследований по прочности. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1986. С. 59-70.

12. Allman D.J. Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations // International journal for numerical methods in engineering. 1988. V.26. P. 2645-2655.
13. Barth C., Lutzkanov D. Moderne finite Elemente für Scheiben und Schalen mit Drehfreiheitsgraden // Bauinformatik. 1995. H.6. S.2-5.
14. Allman D.J. A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis // Computers and structures. 1984. V.19. P.1-8.
15. Taylor R.L., Simo J.C. Bending and membrane elements for analysis of thick and thin shells // Proceedings of the NUMETA'85 Conference, Swansea, 1985.
16. Крамарева И.В., Лиликин С.В., Паутов А.Н., Толкачев И.Н. Плоский треугольный оболочечный совместный конечный элемент // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. Горький: Изд-во Горьковского ун-та, 1986. С.54-60.
17. Allman D.J. A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis // International journal for numerical methods in engineering. 1988. V.26. P.717-730.
18. Паутов А.Н. Плосконапряженный конечный элемент пластины с углом поворота на базе двойной аппроксимации перемещений // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Нижний Новгород: изд-во Нижегородского ун-та, 1997. Выпуск 56. С.175-183.
19. Cook R.D. On the Allman triangle and a related quadrilateral element // Computers and structures. 1986. V.22 №6. P.1065-1067.
20. MacNeal R.H., Harder R.L. A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom // Computers and structures. 1988. V.28. №1. P.75-84.
21. Cook R.D. A plane hybrid element with rotational d.o.f. and adjustable stiffness // International journal for numerical methods in engineering. 1987. V.24. P.1499-1508.
22. Yunus S.M., Saigal S., Cook R.D. On improved hybrid finite elements with rotational degrees of freedom // International journal for numerical methods in engineering. 1989. V.28. P.785-800.
23. Aminpour M.A. An assumed-stress hybrid 4-node shell element with drilling degrees of freedom // International journal for numerical methods in engineering. 1992. V.33. P.19-38.
24. Sze K.Y., Chen W., Cheung Y.K. An efficient quadrilateral plane element with drilling degrees of freedom using orthogonal stress modes // Computers and structures. 1992. V.42. P.695-705.
25. Семенов В.А., Семенов П.Ю. Конечные элементы повышенной точности для расчета сложных пространственных систем // Докл. XVI Международной конф. «Математическое моделирование в механике деформируемых тел. Метод граничных и конечных элементов», 23-26 июня 1998г., Санкт-Петербург. СПб: СПбГАСУ, 1998. Т.1. С.68-69.
26. Bergan P.G., Felippa C.A. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom // Computer methods in applied mechanics and engineering. 1985. V.50. P.25-69.
27. Alvin K., De la Fuente H.M., Haugen B., Felippa C.A. Membrane triangles with corner drilling freedoms – I. The EFF element // Finite elements in analysis and design. 1992. V.12. P.163-187.
28. Felippa C.A., Militello C. Membrane triangles with corner drilling freedoms – II. The ANDES elements // Finite elements in analysis and design. 1992. V.12. P.189-201.
29. Felippa C.A., Alexander S. Membrane triangles with corner drilling freedoms – III. Implementation and performance evaluation // Finite elements in analysis and design. 1992. V.12. P.203-239.

30. Felippa C.A. A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2003. V.192. P.2125-2168.
31. Bergan P.G., Nygård. Finite elements with increased freedom in choosing shape functions // *International journal for numerical methods in engineering*. 1984. V.20. P.643-663.
32. Felippa C.A., Militello C. Variational formulation of high-performance finite elements: parametrized variational principles // *Computers and structures*. 1990. V.36. P.1-11.
33. Piltner R., Taylor R.L. Triangular finite elements with rotational degrees of freedom and enhanced strain modes // *Computers and structures*. 2000. V. 75. P. 361-368.
34. Hughes T.J.R., Brezzi F. On drilling degrees of freedom // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 1989. V.72. P.105-121.
35. Hughes T.J.R., Brezzi F., Masud A., Harari I. Finite elements with drilling degrees of freedom: theory and numerical evaluations // *Proceedings of the fifth international symposium on numerical methods in engineering*. Lausanne, 1989. V.1. – Berlin: Springer Verlag, 1990. P.3-17.
36. Hughes T.J.R., Masud A., Harari I. Numerical assessment of some membrane elements with drilling degrees of freedom // *Computers and structures*. 1995. V.55. P.297-314.
37. Ibrahimbegovic A., Taylor R., Wilson E. A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom // *International journal for numerical methods in engineering*. 1990. V.30. P.445-457.
38. Ibrahimbegovic A., Frey F. Membrane quadrilateral finite elements with rotational degrees of freedom // *Engineering fracture mechanics*. 1992. V.43. P.13-24.
39. Sze K.Y., Ghali A. Hybrid plane quadrilateral element with corner rotations // *Journal of structural engineering ASCE*. 1993. V.119. P.2552-2572.
40. Chinosi C., Comodi M.I., Sacci G. A new finite element with 'drilling' D.O.F. // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 1997. V.143. P.1-11.
41. Providas E., Kattis M.A. An assessment of two fundamental flat triangular shell elements with drilling rotations // *Computers and structures*. 2000. V.77. P.129-139.
42. Семенов П.Ю., Семенов В.А. Элемент оболочки с шестью степенями свободы для расчетов с большими перемещениями // Докл. XIX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов», 30 мая – 2 июня, 2001, Санкт-Петербург. СПб, 2001. Т. III. С.90-98.
43. Geyer S., Groenwold A.A. Two hybrid stress membrane finite elements families with drilling rotations // *International journal for numerical methods in engineering*. 2002. V.53. P.583-601.
44. Choi C.K., Lee T.Y., Chung K.Y. Direct modification for non-conforming elements with drilling DOF // *International journal for numerical methods in engineering*. 2002. V.55. P.1463-1467.
45. Локшин А.З., Фрумен А.И. Конечный элемент плоской задачи моментной теории упругости // *Труды Ленингр. Кораблестр. ин-та*. 1981. С.49-54.
46. Фрумен А.И., Постнов В.А. Решение задач моментной теории упругости методом конечных элементов // Вторая Международная конференция и выставка по морским интеллектуальным технологиям MORINTECH-97. СПб, 1997. С.33-35.
47. Белостоцкий А.З., Сутурин И.М. Построение конечного элемента плоского напряженного состояния на основе моментной теории упругости, реализация для тонких оболочек // *Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Труды XIX Международной конференции*. СПб, 2001. Т. II С.66-71.

48. Providas E., Kattis M.A. Finite element method in plane Cosserat elasticity // Computers and structures. 2002. V.80. P.2059-2069.
49. Yunus S.M., Pawlak T.P., Cook R.D. Solid elements with rotational degrees of freedom: Part I – Hexahedron elements // International journal for numerical methods in engineering. 1991. V.31. P.573-592.
50. Pawlak T.P., Yunus S.M., Cook R.D. Solid elements with rotational degrees of freedom: Part II – Tetrahedron elements // International journal for numerical methods in engineering. 1991. V.31. P.593-610.
51. Ibrahimbegovic A., Wilson E.L. Thick shell and solid finite elements with independent rotation fields // International journal for numerical methods in engineering. 1991. V.31. P.1393-1414.
52. Sze K.Y., Soh A.K., Sim Y.S. Solid elements with rotational DOFs by explicit hybrid stabilization // International journal for numerical methods in engineering. 1996. V.39. P.2987-3005.
53. Sze K.Y., Pan Y.S. Hybrid stress tetrahedral elements with Allman's rotational D.O.F.s // International journal for numerical methods in engineering. 2000. V.48. P.1055-1070.
54. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Изд. 2-е. Киев: Сталь, 2002.
55. Свойский Ф.М. Граничные условия для конечных элементов с вращательными степенями свободы. СПб: ВВМ, 2004.
56. Свойский Ф.М. Граничные условия для конечных элементов с вращательными степенями свободы. Изд. 2-е. СПб: ВВМ, 2005.

МЕТОД СОЕДИНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К СТЕРЖНЯМ И ОБОЛОЧКАМ

*Семенов В.А., Семенов П.Ю.
(ООО Техсофт, Москва, Россия)*

A TECHNIQUE FOR COUPLING OF DIFFERENT FINITE ELEMENT MODELS AND ITS APPLICATION TO BEAMS AND SHELLS

*Semenov V.A., Semenov P.Y.
(TechSoft Ltd., Moscow, Russia)*

Предлагается метод построения уравнений МКЭ в узлах, где соединяющиеся элементы основаны на различных математических моделях. В подходе используется функционал, явно зависящий от границы между областями с возможно различной аппроксимацией для рассматриваемых переменных. Особое внимание уделяется стержням и оболочкам.

1. Введение. Конечно-элементные модели сложных конструкций часто содержат одновременно 3D-, 2D- и 1D-элементы. Различные конструктивные элементы моделируются конечными элементами разных типов. Колонны, панели перекрытий, основание обычно моделируются стержневыми, оболочечными и объемными элементами соответственно. Такие смешанные конечно-элементные дискретизации упрощают расчетные схемы и уменьшают вычислительные расходы. Таким образом, упрощенные теории стержней и оболочек используются наряду с исходной

3D теорией упругости. Чтобы избежать особенностей, необходим согласованный переход между моделями, основанными на различных кинематических гипотезах [1]. Кинематическая связь может быть достигнута посредством удовлетворения геометрических ограничений на уровне системы алгебраических уравнений или использования специальных переходных элементов. Такие элементы сочетают степени свободы всех связываемых элементных моделей. Они могут быть получены пеналтизацией нарушения условий кинематической непрерывности [2] или посредством использования специальных функций формы [3]. В докладе рассматривается вариационный подход.

2. Вариационный принцип. Рассмотрим два тела с объемами V_1 и V_2 . Пусть тела имеют общую границу S_{12} . Если тела составляют единое целое, то на общей границе выполняются условия непрерывности перемещений и равновесия поверхностных сил

$$u_1 = u_2 \quad \text{и} \quad n_1 \cdot \sigma(u_1) + n_2 \cdot \sigma(u_2) = 0 \quad \text{на} \quad S_{12}, \quad (1)$$

где u_1 и u_2 - перемещения первого и второго тела, n_1 и n_2 - внешние нормали. Условия связи (1) могут быть введены в принцип минимума потенциальной энергии посредством множителей Лагранжа a и b

$$\begin{aligned} \Pi(u_1, u_2) = & \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} \int_{V_i} (C \cdot \varepsilon(u_i)) \cdot \varepsilon(u_i) dV - \int_{V_i} \bar{p}_i \cdot u_i dV - \int_{S_{f_i}} \bar{f}_i \cdot u_i dS \right] + \\ & + \int_{S_{12}} a \cdot (n_1 \cdot \sigma(u_1) + n_2 \cdot \sigma(u_2)) dS + \int_{S_{12}} b \cdot (u_1 - u_2) dS, \end{aligned} \quad (2)$$

где C - тензор упругих постоянных, ε - тензор деформаций, \bar{f}_1 и \bar{f}_2 заданные поверхностные силы, \bar{p}_1 и \bar{p}_2 - объемные силы. Легко проверить, что из условия стационарности, $\delta\Pi = 0$, следуют уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \sigma(u_i) + \bar{p}_i = 0 \quad \text{в} \quad V_i, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

силовые граничные условия

$$n_i \cdot \sigma(u_i) = \bar{f}_i \quad \text{на} \quad S_{f_i}, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

и условия совместимости (1). Множители Лагранжа при этом оказываются следующими

$$a = 0 \quad \text{и} \quad b = (1 - c)n_1 \cdot \sigma(u_1) + cn_2 \cdot \sigma(u_2), \quad (5)$$

где c - произвольная постоянная.

Таким образом, установлен вариационный принцип, который включает два поля перемещений u_1 и u_2 как независимые переменные, что позволяет использовать его в конечно-элементном анализе для соединения областей с различными аппроксимациями перемещений.

3. Приложение к стержням и оболочкам. Рассмотрим стержень, концы которого присоединены к пластинам. Пластины и стержень имеют объемы V_1 и V_2 соответственно, концы стержня составляют общую границу S_{12} . Тогда, используя только поверхностные силы стержня ($c = 1$), функционал (2) для стержневого элемента запишется следующим образом,

$$\begin{aligned} \Pi(u_1, u_2) = & \frac{1}{2} \int_{V_2} (C \cdot \varepsilon(u_2)) \cdot \varepsilon(u_2) dV - \int_{V_2} \bar{p}_2 \cdot u_2 dV - \int_{S_{f_2}} \bar{f}_2 \cdot u_2 dS + \\ & + \int_{S_{12}} n_2 \cdot \sigma(u_2) \cdot (u_1 - u_2) dS. \end{aligned} \quad (6)$$

Поля перемещений пластин u_1 и стержня u_2 , а также поверхностные силы на концах стержня даются выражениями

$$u_1 = AU_p, \quad u_2 = XU_b, \quad n_2 \cdot \sigma(u_2) = XG(K_b U_b - P_b), \quad (7)$$

где A - матрица, составленная из функций формы примыкающих элементов пластины, U_p - вектор их узловых перемещений, U_b - вектор узловых перемещений стержневого конечного элемента, X - интерполяционная матрица, зависящая от используемой стержневой модели, K_b - матрица жесткости стержневого конечного элемента, P_b - вектор эквивалентных узловых сил. Матрица G определяется геометрией общей границы

$$G^{-1} = \int_{S_{12}} X^T X dS. \quad (8)$$

Для стержня с недеформируемым плоским сечением, в декартовой системе координат с осью x , направленной вдоль оси стержня, матрица X имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

(матрица приведена для трех перемещений и трех вращений одного из торцов). Подставляя интерполяционные формулы (7) в функционал (6), получим следующее выражение

$$\Pi = \left(U_b^T K_b - P_b^T \right) T U_p - \frac{1}{2} U_b^T K_b U_b, \quad (10)$$

где

$$T = G \int_{S_{12}} X^T A dS. \quad (11)$$

Условие стационарности относительно вектора узловых перемещений стержня

$$\partial\Pi/\partial U_b = K_b T U_p - K_b U_b = 0, \quad (12)$$

дает связь между узловыми перемещениями стержня и примыкающих элементов пластины

$$U_b = T U_p. \quad (13)$$

Вектор U_b может быть исключен из выражения (10), и тогда дискретная форма функционала (6) для стержневого конечного элемента примет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} U_p^T K U_p - U_p^T P, \quad (14)$$

где

$$K = T^T K_b T \quad \text{и} \quad P = T^T P_b \quad (15)$$

“модифицированные” матрица жесткости и вектор узловых сил стержневого конечного элемента соответственно. Эти величины участвуют в сборке общей системы уравнений.

4. Примеры. В приводимых далее примерах численные результаты получены с помощью оболочечных элементов основанных на теории пластин со сдвиговыми деформациями [4], и стержневых элементов основанных на теории стержней с недеформируемым плоским сечением.

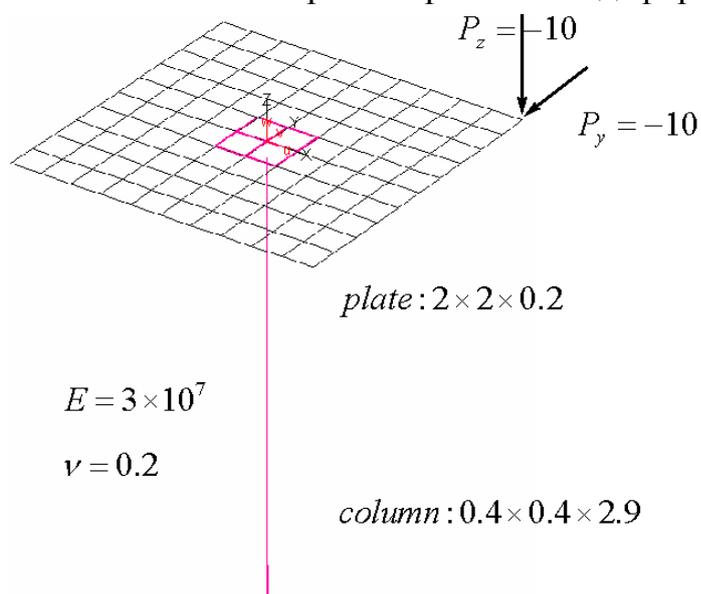


Рис. 1.

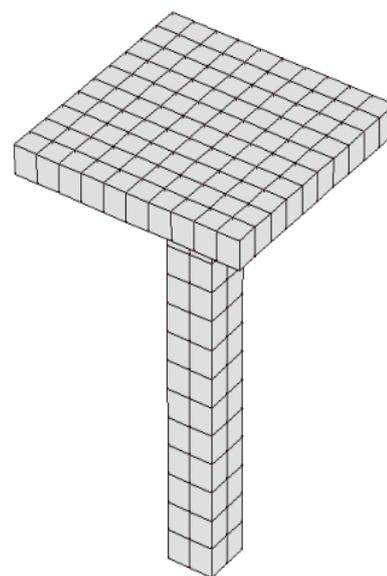


Рис. 2.

В первом примере квадратная плита поддерживается расположенной по центру и заделанной по нижнему торцу колонной квадратного сечения. В углу приложены силы, действующие в плоскости и из плоскости плиты. Система моделируется оболочечными и стержневыми элементами в одном случае и восьмиузловыми объемными элементами [5] в другом. Для сравнения, соединение пластин и стержня производится как с использованием рассмотренного вариационного подхода, так и с

использованием строгого кинематического соединения, когда геометрические ограничения удовлетворяются на уровне системы алгебраических уравнений. Расчеты проводятся на вложенных регулярных сетках. Комбинированная пластинчато-стержневая расчетная схема с сеткой 2×2 на общей границе колонна-плита и соответствующая трехмерная модель приведены на рис.1 и 2. Для более густых сеток разбиение для трехмерной модели осуществлялось также и по толщине плиты и по длине стержня.

Результаты для горизонтального и вертикального перемещений на разных сетках показаны на рис. 3 и 4. Кривые построены для угловой точки, в месте приложения нагрузки. Обозначение “3D” соответствует трехмерному моделированию, “v” соответствует предложенному вариационному методу и “k” соответствует наложению кинематических связей.

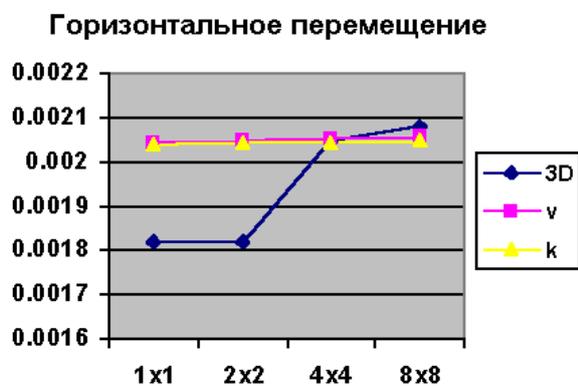


Рис. 3.

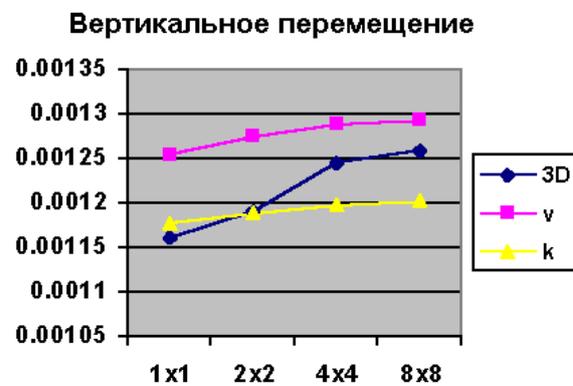


Рис. 4.

Видно, что результаты при всех способах моделирования очень близки друг к другу. Разница в вертикальных перемещениях только несколько процентов и в горизонтальных перемещениях менее одного процента. Отличия в результатах для усилий, действующих в плите, гораздо существеннее. Распределение некоторых обобщенных напряжений вдоль линии, проходящей через центр плиты параллельно противоположным сторонам, приведены на следующих рисунках.

При объемном моделировании моменты, поперечные и продольные силы, действующие в плите, вычислялись интегрированием по толщине полученных трехмерных напряжений. На рис. 5 представлены графики для изгибающего момента M_{xx} и поперечной силы Q_x . В верхней части рисунка показаны сетки на общей границе для соответствующих кривых. Опять, обозначение “3D” соответствует трехмерному моделированию, “v” соответствует предложенному вариационному подходу и “k” соответствует строгому кинематическому соединению. В кинематическом подходе область контакта между плитой и колонной является абсолютно твердым телом, поэтому в этой зоне напряжения равны нулю.

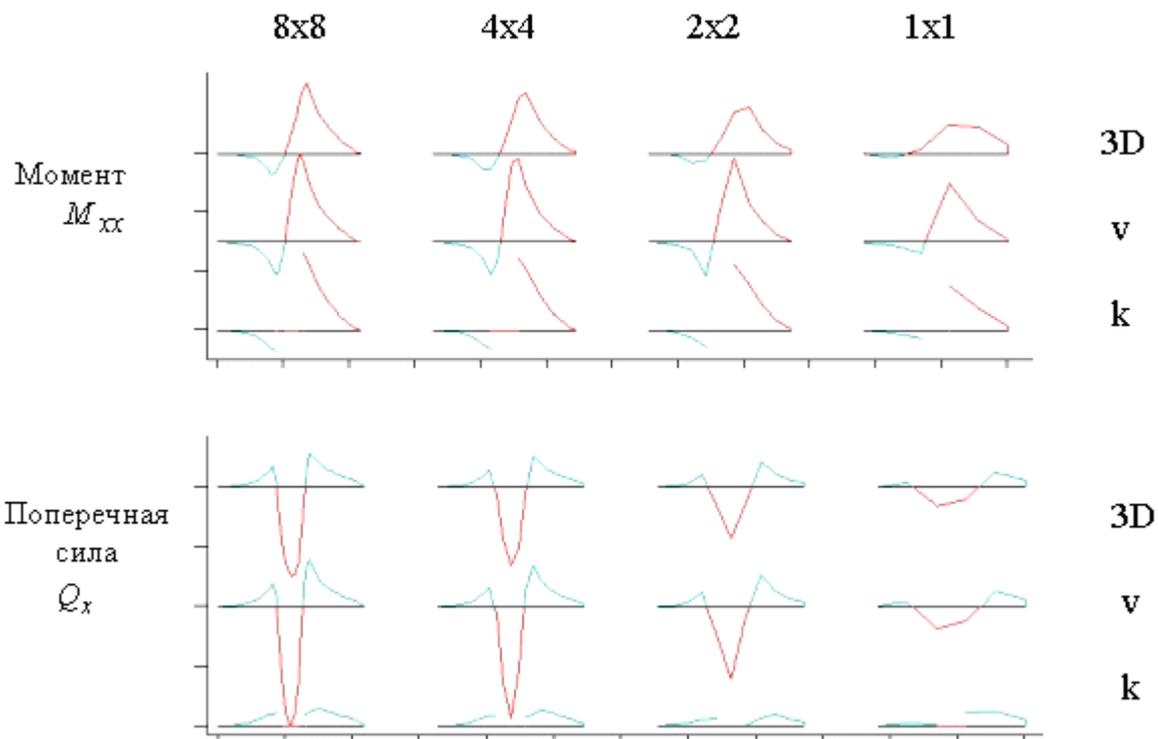


Рис. 5.

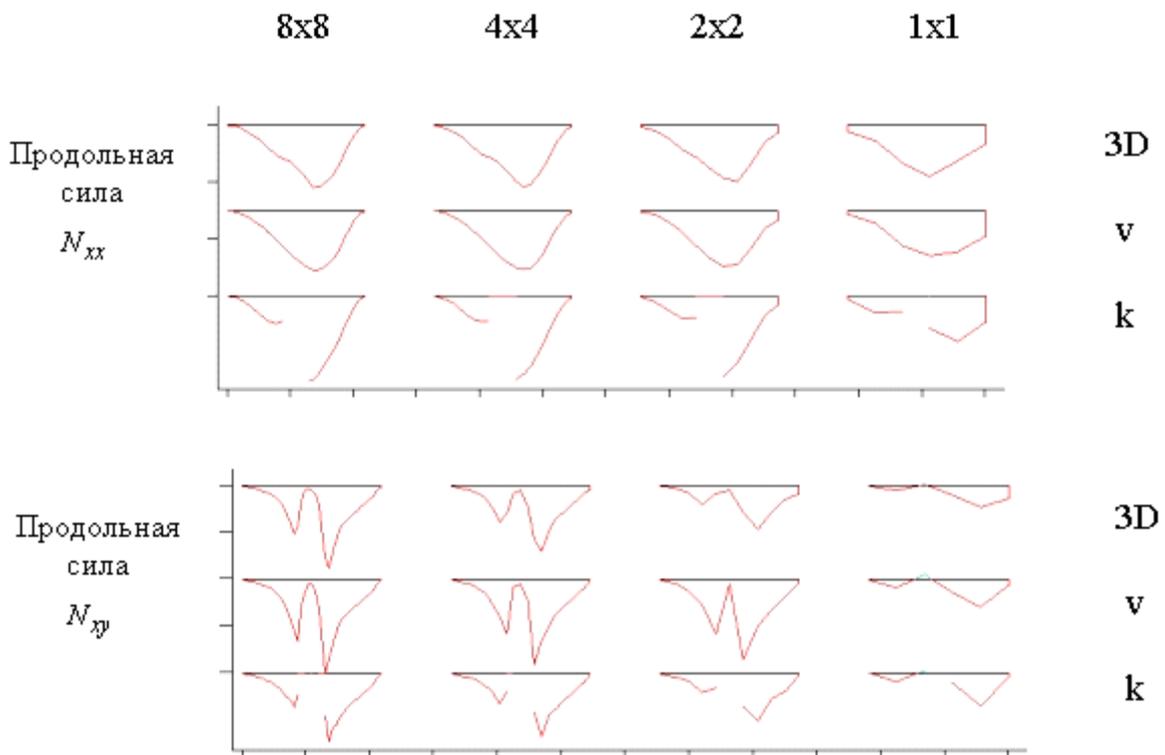


Рис. 6.

Напротив, вариационный метод дает непрерывное поле напряжений. При этом наблюдается хорошее соответствие между результатами трехмерного и пластинчато-стержневого моделирования не только в регулярной области за пределами колонны, но и в области контакта. На рис. 6

показаны эпюры продольных сил N_{xx} и N_{xy} . Решение, полученное с использованием вариационного подхода, также достаточно хорошо аппроксимирует 3D результаты по всей области плиты. Более того, сходимость быстрая и удовлетворительная точность достигается уже на сетке 2×2 . Конечно, следует отметить, что в общем случае результаты комбинированного моделирования не будут сходиться к результатам объемного моделирования. Они будут настолько близки друг к другу, насколько хорошо используемые теории стержней и оболочек аппроксимируют трехмерную теорию упругости.

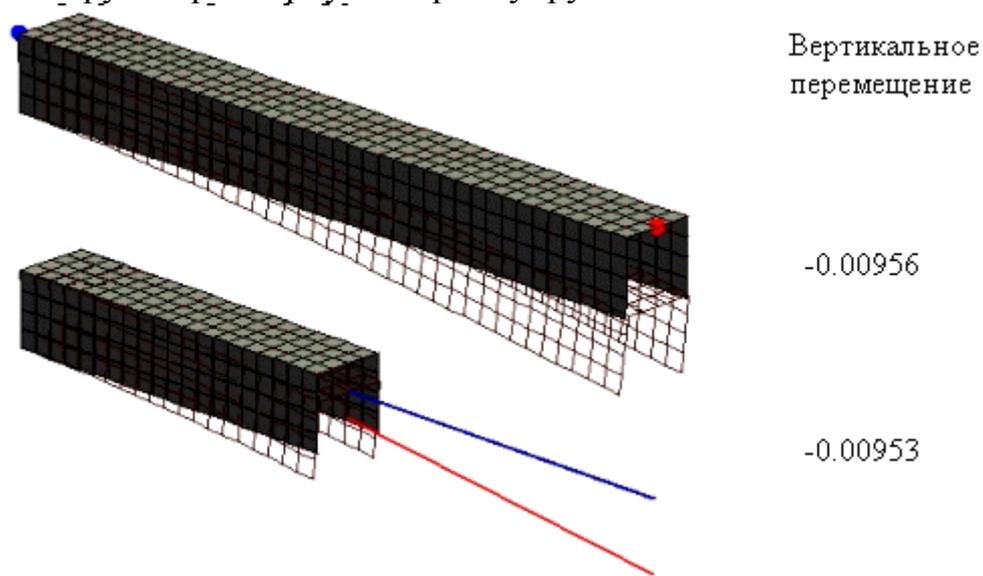


Рис. 7.

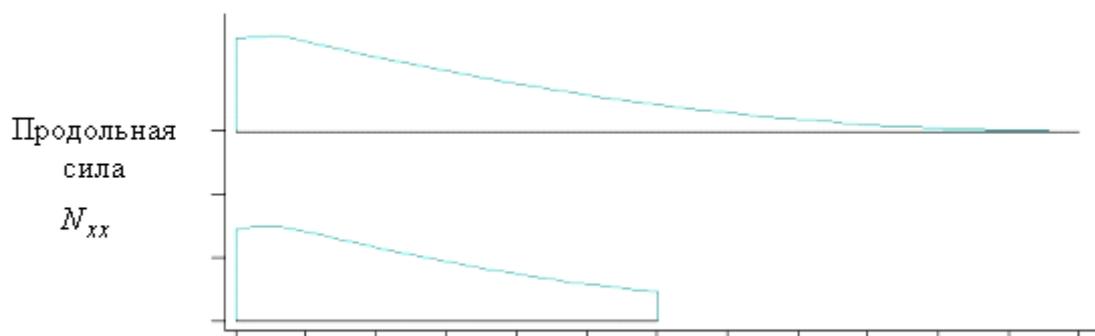


Рис. 8.

Второй пример демонстрирует связь стержня и оболочки при расчете тонкостенных стержневых конструкций. Заделанный с одной стороны стержень П-образного сечения находится под действием собственного веса. Сравняются чисто оболочечная и комбинированная оболочечно-стержневая модели (рис. 7). Отклонения свободной стороны напечатаны справа. Видим, что результаты практически одинаковы - разница только в третьем знаке. На рис. 8 приведен график распределения продольной силы

в верхней горизонтальной пластине вдоль оси конструкции. Обе модели дают одинаковые поля напряжений, и нет возмущений в области перехода между стержневым и оболочечными конечными элементами (нижняя кривая на рис. 8).

Таким образом, в регулярной области могут использоваться обычные стержневые элементы, а в области с краевыми эффектами, где необходимо детальное описание (заделанный край в приведенном примере), - оболочечные конечные элементы.

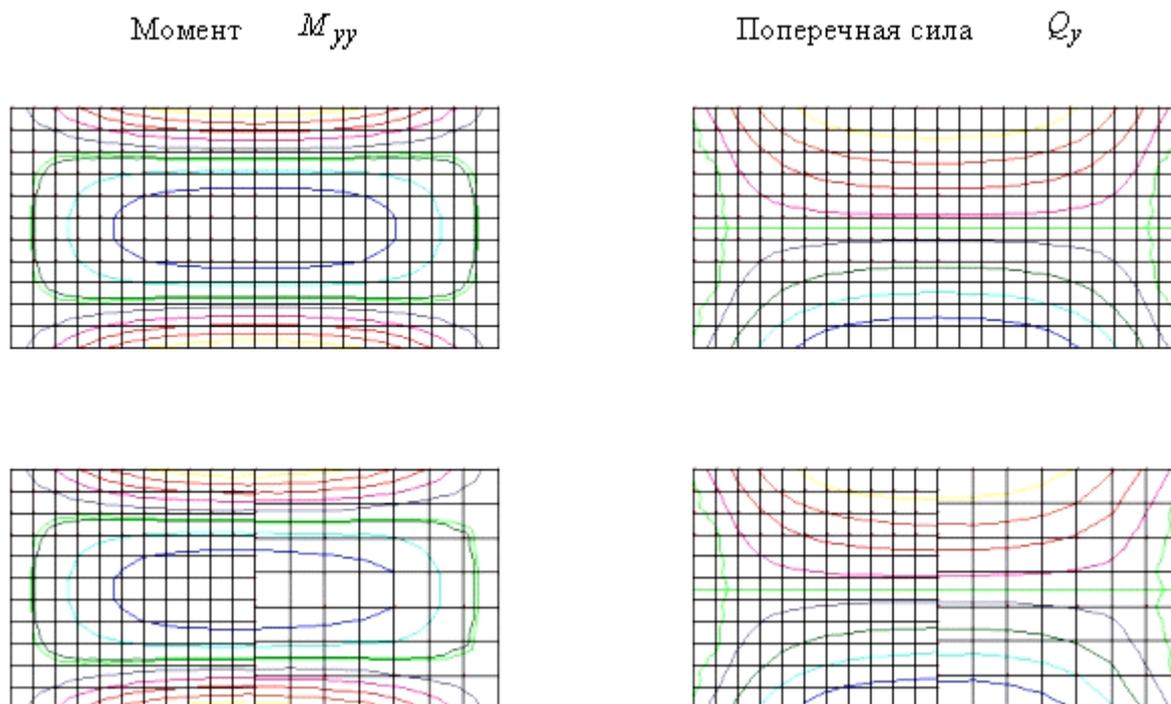


Рис. 9.

5. Заключение. Предложенный подход позволяет успешно моделировать связь стержней и оболочек. Аналогичная процедура может использоваться для связи объемных и стержневых или объемных и оболочечных элементов. Вообще говоря, представленная методика применима не только в случае d -адаптивности, рассмотренном в настоящей работе, она может использоваться всякий раз, когда требуется связать области с различной аппроксимацией и общей границей. На рис. 9 приведен соответствующий пример. Защемленная по контуру прямоугольная плита находится под действием равномерно распределенной нагрузки. Сначала она моделируется регулярной сеткой (верхняя часть рисунка), а затем несогласованной сеткой с висящими узлами (нижняя часть рис. 9). Задача на несогласованной сетке решается с использованием предложенного вариационного метода. Наблюдается гладкий переход между сетками с различным шагом. Какие либо видимые возмущения отсутствуют. Таким образом, пример демонстрирует

возможность приложения рассмотренного подхода к задачам h-адаптивности. Была рассмотрена только линейная формулировка, но она легко обобщается на нелинейный случай.

Литература

1. Werkle H. Konsistente Modellierung von Stützen bei der Finite-Elemente-Berechnung von Flachdecken // Bautechnik 2000; 77, Heft 6:416-425.
2. Wagner W, Gruttmann F. Finite-element-modelling of shell-beam transitions with 'optimal' constraints // In Proceedings of the Fourth International Colloquium on Computation of Shell and Spatial Structures, Papadrakakis M, Samartin A, Onate E (eds). June 4-7, 2000, Chania-Crete, Greece.
3. Stain E., Ohnimus S. Coupled model and solution-adaptivity in the finite element method // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1997; 150:327-350.
4. Semenov V.A., Semenov P.Yu. Hybrid finite elements for analysis of shell structures // Proc. International Congress ICSS-98, 22-26 June 1998, Moscow, Russia, Vol. 1, 244-251.
5. Punch E.F., Atluri S.N. Applications of isoparametric three-dimensional hybrid-stress finite elements with least-order stress fields // Computers & Structures 1984; Vol.19, No.3: 409-430.

УДК 539.3

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ

Старовойтов С.А.

(Белорусский государственный университет, Гомель, Беларусь)

ELASTOPLASTIC SANDWICH BEAM ON THE ELASTIC FOUNDATION

Starovoitov S. A.

(The Byelorussian state university of the transport, Gomel, Belarus)

Рассмотрен изгиб упругопластического трехслойного стержня на деформируемом основании. Для описания кинематики пакета принята гипотеза ломаной нормали. Реакция упругого основания описывается моделью Винклера. Получена система уравнений равновесия в перемещениях. Приведены числовые результаты для трехслойного металлополимерного стержня.

Трехслойные элементы конструкций получили значительное распространение благодаря своей высокой прочности при относительно малой массе, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Деформирование упругих трехслойных стержней на деформируемом основании исследовалось в работах [1, 2]. Здесь рассматривается изгиб трехслойного стержня на упругом основании, материалы слоев которого в процессе деформирования могут проявлять физически нелинейные свойства.

2. Постановка задачи и ее решение проводятся в декартовой системе, связанной со срединной плоскостью заполнителя следующим образом: ось x направлена вдоль стержня, ось z – вверх, ось y по нормали к осям z, x (рис. 1). Для описания кинематики пакета, приняты гипотезы «ломаной нормали»: в тонких несущих слоях (1, 2) справедливы гипотезы Бернулли, в более толстом заполнителе (3) нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. На границах склейки слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы слоев несжимаемы. На торцах стержня предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Деформации малые. Все перемещения и линейные размеры отнесены к длине стержня l . На внешние слои стержня действуют вертикальная внешняя распределенная нагрузка $q(x)$ и реакция упругого основания $q_r(x)$.

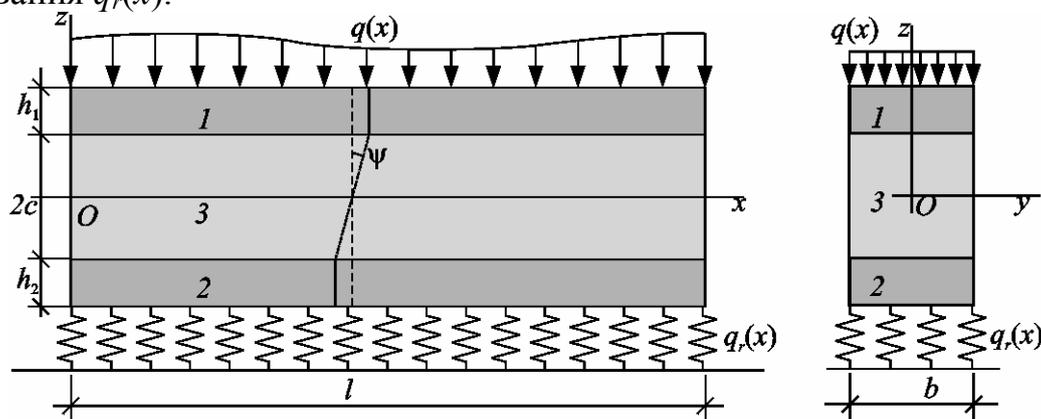


Рис. 1. Расчетная схема трехслойного стержня на упругом основании

В качестве искоемых величин приняты: прогиб $w(x)$ и продольное перемещение $u(x)$ срединной плоскости заполнителя, дополнительный угол поворота $\psi(x)$. Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечных направлениях, то прогиб всего стержня совпадает с $w(x)$.

Действие упругого основания на стержень описывается моделью Винклера [3], согласно которой реакция основания пропорциональна прогибу стержня:

$$q_r = -\kappa w,$$

где κ – коэффициент постели (жесткости упругого основания).

Деформации в слоях можно связать с искомыми перемещениями, исходя из принятых геометрических гипотез:

$$\varepsilon_x^{(1)} = u_{,x} + c\psi_{,x} - zw_{,xx}; \quad \varepsilon_{xz}^{(1)} = 0 \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = u_{,x} + z\psi_{,x} - zw_{,xx}; \quad \varepsilon_{xz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi \quad (-c \leq z \leq c);$$

$$\varepsilon_x^{(2)} = u_{,x} - c\psi_{,x} - zw_{,xx}; \quad \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c),$$

где c – половина толщины заполнителя, h_1, h_2 – толщина несущих слоев стержня, z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Физические соотношения, связывающие напряжения и деформации в слоях стержня принимаются в соответствии с теорией малых упругопластических деформаций Ильюшина [4]:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_{ij}^{(k)}; \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (1)$$

($k = 1, 2, 3; i, j = x, y, z$),

где $s_x^{(k)}, \varepsilon_x^{(k)}$ – девиаторы, $\sigma^{(k)}, \theta^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G^{(k)}, K^{(k)}$ – сдвиговой и объемный модули деформации материалов; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функция пластичности материала k -го слоя, которую при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_T^{(k)}$ следует положить равной нулю; $\varepsilon_u^{(k)}, \varepsilon_T^{(k)}$ – интенсивность деформаций и деформационный предел текучести материала k -го слоя.

Уравнения равновесия трехслойного стержня получены из вариационного принципа Лагранжа [4]:

$$\delta A_1 + \delta A_2 - \delta W = 0,$$

где $\delta A_1, \delta A_2$ – вариации работ внешних нагрузок и усилий на торцах стержня; δW – вариация работ сил упругости.

Уравнения равновесия в перемещениях с учетом (1) имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} &= p_\omega; \quad a_2 u_{,xx} + a_4 \psi_{,xx} - a_6 w_{,xxx} - a_5 \psi = h_\omega; \\ a_3 u_{,xxx} + a_6 \psi_{,xxx} - a_7 w_{,xxxx} - \kappa w &= q_\omega - q_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(K_1 + \frac{4}{3}G_1\right)h_1 + \left(K_2 + \frac{4}{3}G_2\right)h_2 + 2c\left(K_3 + \frac{4}{3}G_3\right); \\ a_2 &= c\left[\left(K_1 + \frac{4}{3}G_1\right)h_1 - \left(K_2 + \frac{4}{3}G_2\right)h_2\right]; \\ a_3 &= \left(K_1 + \frac{4}{3}G_1\right)h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right) - \left(K_2 + \frac{4}{3}G_2\right)h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right); \\ a_4 &= c^2\left[\left(K_1 + \frac{4}{3}G_1\right)h_1 + \left(K_2 + \frac{4}{3}G_2\right)h_2 + \frac{2}{3}c\left(K_3 + \frac{4}{3}G_3\right)\right]; \\ a_5 &= 2G_3c; \\ a_6 &= c\left[\left(K_1 + \frac{4}{3}G_1\right)h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right) + \left(K_2 + \frac{4}{3}G_2\right)h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right) + \frac{2}{3}c^2\left(K_3 + \frac{4}{3}G_3\right)\right]; \\ a_7 &= \left(K_1 + \frac{4}{3}G_1\right)h_1\left(c^2 + ch_1 + \frac{1}{3}h_1^2\right) + \left(K_2 + \frac{4}{3}G_2\right)h_2\left(c^2 + ch_2 + \frac{1}{3}h_2^2\right) + \\ &\quad + \frac{2}{3}c^3\left(K_3 + \frac{4}{3}G_3\right); \end{aligned}$$

слагаемые с индексом “ ω ” включают все нелинейные добавки:

$$p_{\omega} = \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)\omega} dz \right]_{,x} ; \quad q_{\omega} = \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)\omega} z dz \right]_{,xx} ;$$

$$h_{\omega} = \left[c \int_{h_1} \sigma_x^{(1)\omega} dz - c \int_{h_2} \sigma_x^{(2)\omega} dz + \int_{h_3} \sigma_x^{(3)\omega} z dz \right]_{,x} - \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz . \quad (3)$$

В качестве условий закрепления принято свободное опирание стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Соответствующие граничные условия для перемещений при $x = 0; 1$ имеют вид:

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0, \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$

Уравнения (2) и граничные условия (4) являются нелинейными относительно неизвестных перемещений. Поэтому для решения краевой задачи применим метод упругих решений Ильюшина [4], согласно которому система (2) переписывается в итерационном виде:

$$a_1 u_{,xx}^{(n)} + a_2 \psi_{,xx}^{(n)} - a_3 w_{,xxx}^{(n)} = p_{\omega}^{(n-1)} ;$$

$$a_2 u_{,xx}^{(n)} + a_4 \psi_{,xx}^{(n)} - a_6 w_{,xxx}^{(n)} - a_5 \psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)} ; \quad (5)$$

$$a_3 u_{,xxx}^{(n)} + a_6 \psi_{,xxx}^{(n)} - a_7 w_{,xxxx}^{(n)} - \kappa w^{(n)} = q_{\omega}^{(n-1)} - q_0 .$$

Здесь n – номер приближения; величины $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$ на первом шаге ($n = 1$) полагаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения в соответствии с (3). Таким образом, на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости с известными дополнительными "внешними" нагрузками $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$.

3. Решение системы дифференциальных уравнений (5) получим, представив искомые перемещения $w(x)$, $\psi(x)$, $u(x)$ в виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin \frac{\pi m x}{l} ; \quad \psi = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m \cos \frac{\pi m x}{l} ; \quad u = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cos \frac{\pi m x}{l} \quad (7)$$

где W_m , Ψ_m , U_m – неизвестные амплитуды перемещений.

При подобном представлении перемещений граничные условия (4) выполняются автоматически. Внешнюю нагрузку $q(x)$ разложим в ряд синусов:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{\pi m x}{l} ; \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q_0(x) \sin \left(\frac{\pi m x}{l} \right) dx . \quad (8)$$

Дополнительные нагрузки также разложим в ряды:

$$p_{\omega} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m} \cos \frac{\pi m x}{l} ; \quad h_{\omega} = \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m} \cos \frac{\pi m x}{l} ; \quad q_{\omega} = \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m} \sin \frac{\pi m x}{l} , \quad (9)$$

где $p_{\omega m} = \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega} \cos \frac{pmx}{l} dx$; $h_{\omega m} = \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega} \cos \frac{pmx}{l} dx$; $q_{\omega m} = \frac{2}{l} \int_0^l q_{\omega} \sin \frac{pmx}{l} dx$.

Подставив (7), (8), (9) в (5), получим систему алгебраических уравнений относительно амплитуд искомых перемещений:

$$\begin{aligned} a_1 U_m^{(n)} + a_2 \Psi_m^{(n)} - a_3 \frac{\pi m}{l} W_m^{(n)} &= \frac{l^2}{\pi^2 m^2} p_{\omega m}^{(n-1)}; \\ a_2 U_m^{(n)} + \left(a_4 + a_5 \frac{l^2}{\pi^2 m^2} \right) \Psi_m^{(n)} - a_6 \frac{\pi m}{l} W_m^{(n)} &= \frac{l^2}{\pi^2 m^2} h_{\omega m}^{(n-1)}; \\ a_4 U_m^{(n)} + a_6 \Psi_m^{(n)} - \left(a_7 + \kappa \frac{l^3}{\pi^3 m^3} \right) W_m^{(n)} &= \frac{l^3}{\pi^3 m^3} (q_{\omega m}^{(n-1)} - q_{0m}^{(n)}). \end{aligned}$$

Решение данной системы для n -ой итерации имеет вид:

$$\begin{aligned} U_m^{(n)} &= \frac{1}{d_0} \left[d_1 (d_5 d_9 - d_6 d_8) + d_2 (d_6 d_7 - d_4 d_9) + d_3 (d_4 d_8 - d_5 d_7) \right]; \\ \Psi_m^{(n)} &= \frac{1}{d_0} \left[d_2 (d_6 - d_9) + d_5 (d_9 - d_3) + d_8 (d_3 - d_6) \right]; \\ W_m^{(n)} &= \frac{1}{d_0} \left[d_4 (d_9 - d_3) + d_7 (d_3 - d_6) + d_1 (d_6 - d_9) \right]. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} d_0 &= d_4 (d_8 - d_2) + d_1 (d_5 - d_8) + d_7 (d_2 - d_5); & d_1 &= \frac{a_2}{a_1}; & d_2 &= -\frac{a_3 \pi m}{a_1 l}; \\ d_3 &= \frac{p_{\omega m}^{(n-1)} l^2}{a_1 \pi^2 m^2}; & d_4 &= \frac{a_4}{a_2} + \frac{a_5 l^2}{a_2 \pi^2 m^2}; & d_5 &= -\frac{a_6 \pi m}{a_2 l}; & d_6 &= \frac{h_{\omega m}^{(n-1)} l^2}{a_2 \pi^2 m^2}; & d_7 &= \frac{a_6}{a_4}; \\ d_8 &= -\frac{a_7}{a_4} - \frac{\kappa l^3}{a_4 \pi^3 m^3}; & d_9 &= \frac{(q_{\omega m}^{(n-1)} - q_{0m}^{(n)}) l^3}{a_4 \pi^3 m^3}. \end{aligned}$$

4. Численная реализация решений проведена при помощи пакета Maple. Разработан комплекс компьютерных программ, с помощью которого проведен анализ параметров напряженно-деформированного состояния рассматриваемого трехслойного стержня для оснований малой, средней и высокой жесткости. При этом слабым основаниям соответствует коэффициент постели $\kappa = 1$ МПа/м, средним $\kappa = 100$ МПа/м, жестким $\kappa = 10^5$ МПа/м.

Все численные результаты получены для металлополимерного стержня с пакетом Д16Т – фторопласт – Д16Т. Толщина слоев: $h_1 = 0,04$, $h_2 = 0,02$, $h_3 = 2c = 0,18$. Функция пластичности для несущих слоев ($k = 1, 2$) принята в виде [4]:

$$\omega^{(k)}(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_T; \\ A_k \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_u}\right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u > \varepsilon_T. \end{cases}$$

Для заполнителя принята следующая функция физической нелинейности [4]:

$$\omega^{(3)}(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_S; \\ A_3 \left(1 - \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_u}\right)^{\alpha_3}, & \varepsilon_u > \varepsilon_S. \end{cases}$$

Параметры упругости и константы материалов слоев приняты следующими [4]: $G_1 = G_2 = 26700$ МПа, $K_1 = K_2 = 80000$ МПа, $G_3 = 90$ МПа, $K_3 = 4700$ МПа, $A_1 = A_2 = 0,96$, $A_3 = 0,905$, $\varepsilon_T = 0,735$ %, $\varepsilon_u = 3,3$ %.

Величина внешней нагрузки q_0 принимались таким образом, чтобы нелинейные свойства материалов проявились в достаточной степени для каждого типа основания, а деформации не выходили за рамки теории малых уругопластических деформаций.

Так как решение проводилось в рядах, то была исследована сходимость решений на примере прогиба упругого стержня ($n = 1$). Рис. 2 отражает сходимость рядов (7) в случае основания средней жесткости. На графике видно, что сходимость достигается достаточно быстро и при вычислении перемещений достаточно использовать первые 8 членов ряда. Если оставить 50 слагаемых, то результат изменится на 0,06 %. Аналогичная картина наблюдается при вычислении других перемещений. Для сходимости решений в случае основания малой жесткости также достаточно 8 слагаемых. При основании большой жесткости, необходимо оставить 16 членов ряда, если же оставить 50 слагаемых, то поправка не превысит 0,074 %. Потребность в большем числе слагаемых объясняется сложной формой прогиба стержня (рис. 8).

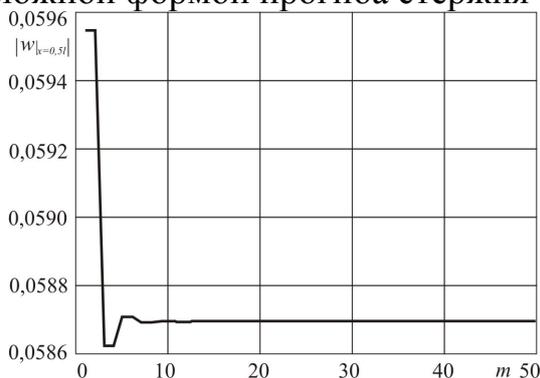


Рис. 2. Сходимость рядов (7) на примере прогиба стержня ($x = 0,5$) при основании средней жесткости

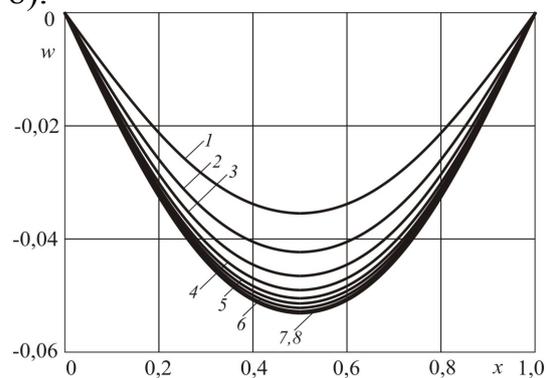


Рис. 3. Сходимость метода упругих решений на примере прогиба в случае основания малой жесткости (номер кривой соответствует номеру итерации)

На рис. 3 на примере прогиба w показана сходимость метода упругих решений в случае основания *малой жесткости*, внешняя нагрузка $q_0 = 8$ МПа. Номер кривой соответствует номеру итерации. Здесь второе приближение отличается от первого на $19,8 \%$. За искомое решение принято 8-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1% . Если продолжать итерационный процесс, то разность между последующим и предыдущим приближениями уменьшается и стремится к нулю, что отражено на рис. 4. Результирующий прогиб упругопластического стержня превосходит прогиб упругого на $48,8 \%$.

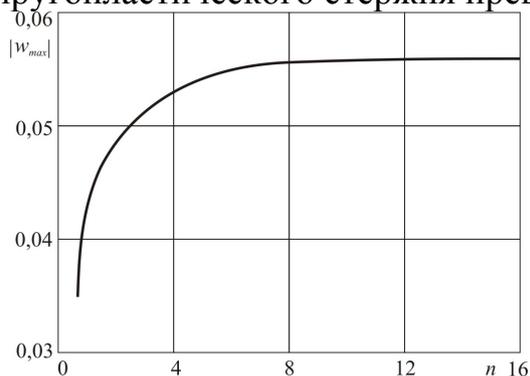


Рис. 4. Сходимость итерационного процесса на примере прогиба ($x = 0,5$) при основании малой жесткости

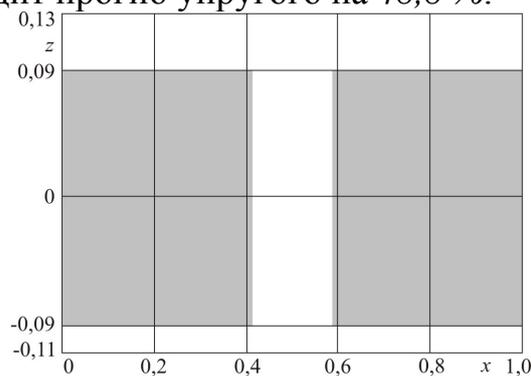


Рис. 5. Распределение областей пластичности и физической нелинейности (темная заливка) в слоях стержня, покоящегося на основании малой жесткости

На рис. 5 показаны области нелинейного деформирования в слоях стержня (темная заливка). Несущие слои остаются упругими, практически весь наполнитель (82%) деформируется нелинейно.

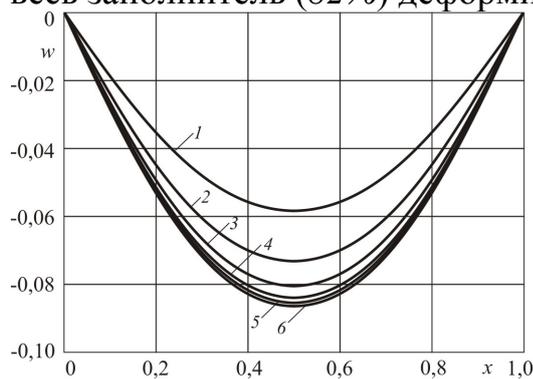


Рис. 6. Сходимость метода упругих решений на примере прогиба в случае основания средней жесткости (номер кривой соответствует номеру итерации)

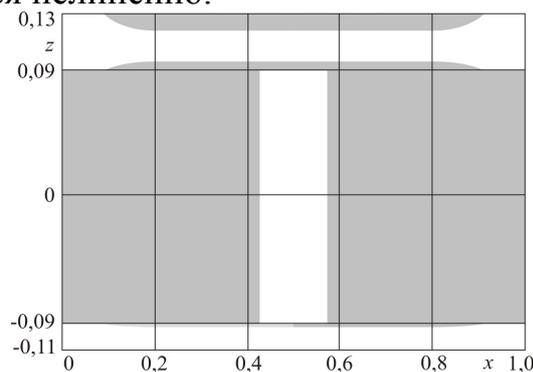


Рис. 7. Распределение областей пластичности и физической нелинейности (темная заливка) в слоях стержня при основании средней жесткости

При основании *средней жесткости* сходимость убыстряется (рис. 6) и уже 6-е приближение принято за искомое (нагрузка $q = 18$ МПа).

Упругопластический и упругий прогиб отличаются на 50,8 %. На рис. 7 показаны области нелинейности в слоях стержня (темная заливка). Области пластичности в первом слое занимают 20 % объема материала, во втором – 10%, в заполнителе 84 % объема материала деформируется физически нелинейно

Если основание имеет *большую жесткость* ($\kappa = 10^5$ МПа/м), то величины прогиба и сдвига упругопластического стержня мало (0,11 %) отличаются от соответствующих упругих значений (рис. 8), поэтому за искомое принято 2-е приближение. Величина нагрузки $q = 5000$ МПа. Области пластичности сосредоточены преимущественно в первой и последней четвертях стержня (рис. 9).

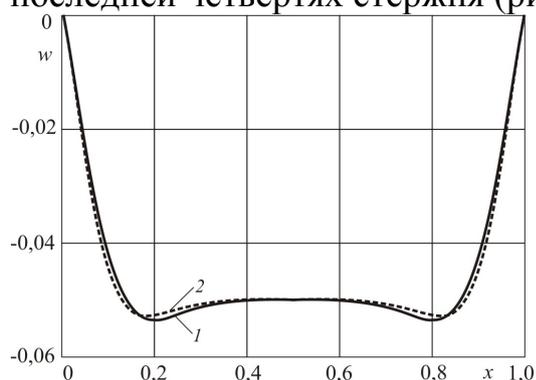


Рис. 8. Сходимость метода упругих решений на примере прогиба стержня, покоящегося на основании большой жесткости (номер кривой соответствует номеру итерации)

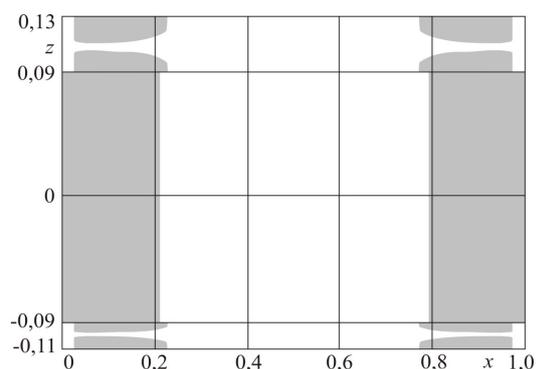


Рис. 9. Распределение областей пластичности и физической нелинейности (темная заливка) в слоях стержня для основания высокой жесткости

Следовательно, учет пластических и физически нелинейных свойств материалов слоев приводит к существенному уточнению напряженно-деформированного состояния трехслойного стержня на упругом основании. Приведенный метод расчета позволяет получать достоверные решения для подобных упругопластических элементов конструкций.

Литература

1. Старовойтов С. А. Моделирование поведения трехслойного стержня на упругом основании // Сборник трудов молодых ученых Национальной академии наук Беларуси. Т. 4. – Мн.: ИП Логвинов, 2004. – С. 134–137.
2. Яровая А. В., Старовойтов С. А. Трехслойный стержень на упругом основании // Материалы, технологии, инструменты Т. 8, № 2, 2003, с. 9-11.
3. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 454 с.
4. Старовойтов Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. Учебник для студентов строительных специальностей вузов. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.

ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ТРЕХСЛОЙНАЯ ПЛАСТИНА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В.

(Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь)

TERMOELASTOPLASTIC SANDWICH PLATE ON THE ELASTIC FOUNDATION

Starovoitov E.I., Jarovaya A.V., Leonenko D.V.

(The Belarusian State University of transport, Gomel, Belarus)

Рассмотрен термосиловой изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины с легким наполнителем, покоящейся на упругом основании. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета принята гипотеза ломаной нормали. Реакция основания описывается моделью Винклера. Получена система уравнений равновесия в перемещениях. Приведены числовые результаты для трехслойной металлополимерной пластины.

Деформирование трехслойных элементов конструкций в терморadiационных полях при статических и динамических нагрузках исследовалось в работах [1–4]. Здесь рассмотрен термосиловой изгиб поперечно нагруженной упругопластической круговой трехслойной пластины с легким наполнителем, покоящейся на упругом основании Винклера.

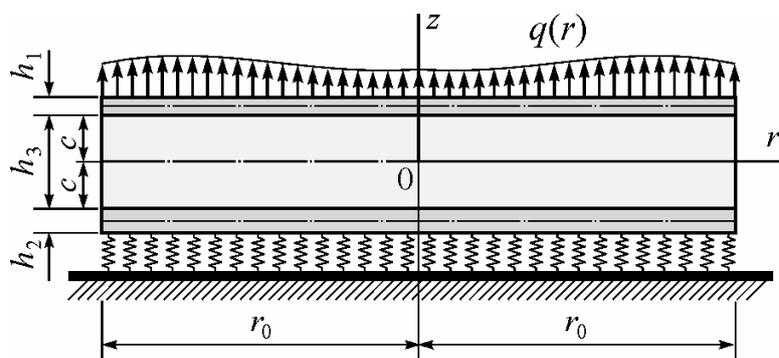


Рис. 1.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат. Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. Заполнитель считается легким, т. е. пренебрегается его работа в тангенциальном направлении. Деформированная нормаль заполнителя остается прямолинейной, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ . На границах слоев перемещения непрерывны. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Вертикальная нагрузка

симметричная $q_0(r)$, поэтому искомые перемещения $w(r)$, $u(r)$, $\psi(r)$ – прогиб пластины, радиальное перемещение и сдвиг в заполнителе не зависят от координаты φ . Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_1 , через h_k обозначена относительная толщина k -го слоя.

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)}, z+w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя, $(u + c\psi)$ – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя это смещение будет $(u - c\psi)$, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из соотношений Коши и (1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, \quad \varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}); \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины можно вывести из вариационного принципа Лагранжа:

$$\delta A - \delta W = 0. \quad (2)$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ – вариация суммарной работы внешних нагрузок и контурных усилий, δW – вариация работы внутренних сил упругости.

Считаем, что к наружной поверхности несущего слоя I приложена поверхностная нагрузка $q_0(r)$, на контур пластины воздействуют силы и моменты. Вариации работы внешней поверхностной нагрузки $q_0(r)$ и реакции основания q_R , контурных сил и моментов T_r^0 , H_r^0 , M_r^0 , Q^0 будут следующие ($dS = r dr d\varphi$):

$$\delta A_1 = \iint_S (q_0 - q_R) \delta w r dr d\varphi, \quad \delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) d\varphi. \quad (3)$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi. \quad (4)$$

Подставив выражения работ (3), (4) в (2), потребуем выполнения равенства при любых значениях варьируемых перемещений. Отсюда следует система дифференциальных уравнений в усилиях, описывающая равновесие круговой трехслойной пластины на упругом основании:

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= -p, & H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) &= 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q_0 + q_R. \end{aligned} \quad (5)$$

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между реакцией и прогибом может быть различной. В практике часто используют известную модель Винклера (Winkler E.), согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w,$$

где κ_0 – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели); реакция основания всегда направлена в сторону, противоположную прогибу.

Предположим, что материалы несущих слоев рассматриваемой круговой трехслойной пластины с легким наполнителем в процессе деформирования в температурном поле могут проявлять упругопластические свойства. Напряжения и деформации в них связаны соотношениями теории малых термоупругопластических деформаций. В физически нелинейном наполнителе дополнительно учитывается влияние вида напряженного состояния [1]:

$$\begin{aligned} s_{\bar{\sigma}}^{(k)} &= 2G_k(T_k)(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k))\varepsilon_{\bar{\sigma}}^{(k)}, & \alpha &= r, \varphi, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k), & k &= 1, 2. \\ \varphi_1(\sigma^{(3)}, T_3)s_{\alpha\beta}^{(3)} &= 2G_3(T_3)(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_3))\varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)}, & (\alpha, \beta &= r, \varphi), \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_3(T_3)f^{(3)}(\varepsilon^{(3)}, T_3)\varepsilon_{rz}^{(3)}, & \varphi_2(\sigma^{(3)}, T_3)\sigma^{(3)} &= 3K_3(T_3)(\varepsilon^{(3)} - \alpha_{03}T_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ – температурно-зависимые модули упругости материалов слоев; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$ – функции пластичности материалов несущих слоев и физической нелинейности наполнителя, зависящие от интенсивности деформаций $\varepsilon_u^{(k)}$ и температуры T_k ; в наполнителе функции нелинейности $\varphi_\alpha(\sigma^{(3)}, T_3)$, дополнительно учитывают влияние гидростатического напряжения $\sigma^{(3)}$.

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (6), представим через девиаторную и шаровую части тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(k)} - \sigma_{\bar{\sigma}\omega}^{(k)}, & \sigma_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(k)} &= 2G_k\varepsilon_\alpha^{(k)} + 3K_k\varepsilon^{(k)}, \\ \sigma_{\bar{\sigma}\omega}^{(k)} &= 2G_k\omega^{(k)}\varepsilon_\alpha^{(k)} + 3K_k\alpha_{0k}T_k, & (k &= 1, 2), \\ \sigma_\alpha^{(3)} &= \sigma_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(3)} - \sigma_{\bar{\sigma}\omega}^{(3)}, & \sigma_{\bar{\sigma}\bar{\sigma}}^{(3)} &= 2G_3\varepsilon_\alpha^{(3)} + 3K_3\varepsilon^{(3)}, & \omega_\gamma^{(3)} &= \varphi_\gamma(\sigma^{(3)}) - 1 \quad (\gamma = 1, 2), \end{aligned}$$

$$\sigma_{\delta\omega}^{(3)} = 2G_3\omega^{(3)}\varepsilon_{\alpha}^{(3)} + 3K_3\alpha_0 T + \omega_1^{(3)}s_{\alpha}^{(3)} + \omega_2^{(3)}\sigma^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)},$$

$$\sigma_{rze}^{(3)} = 2G_3\varepsilon_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3\omega^{(3)}\varepsilon_{rz}^{(3)} + \omega_{\gamma}^{(3)}s_{rz}^{(3)}.$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также представим в виде разности линейной и нелинейной частей:

$$T_{\alpha}^{(k)} = T_{\beta e}^{(k)} - T_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad M_{\alpha}^{(k)} = M_{\beta e}^{(k)} - M_{\alpha\omega}^{(k)}, \quad (\alpha = r, \varphi). \quad (7)$$

Подставив выражения (7) в соотношения (5) получим систему уравнений равновесия в усилиях, описывающую физически нелинейное деформирование в температурном поле круговой трехслойной пластины с легким наполнителем, лежащей на упругом основании (нижний индекс « ω » в дальнейшем опустим):

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_{\varphi}) = p_{\omega}, \quad H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_{\varphi}) = h_{\omega},$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q_0 + q_R + q_{\omega}. \quad (8)$$

Система уравнений равновесия (8) в перемещениях будет

$$L_2(a_1u + a_2\psi - a_3w_{,r}) = p_{\omega}, \quad L_2(a_2u + a_4\psi - a_5w_{,r}) = h_{\omega},$$

$$L_3(a_3u + a_5\psi - a_6w_{,r}) - \kappa_0 w = -q_0 + q_{\omega}. \quad (9)$$

Здесь термоупругие коэффициенты a_i зависят от геометрических характеристик и материалов слоев, нелинейные добавки (с нижним индексом « ω ») имеют вид

$$p_{\omega} = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_{\omega} = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}),$$

$$q_{\omega} = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \quad L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Задача отыскания функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ замыкается присоединением к (9) граничных условий:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad (10)$$

при жесткой заделке контура пластины;

$$u = \psi = w = M_r = 0 \quad \text{при } r = 1,$$

при шарнирном опирании контура пластины;

$$\psi = 0, \quad T_r = M_r = M_{r,r} = 0.$$

Согласно методу упругих решений перепишем систему (9) в итерационном виде:

$$L_2(a_1u^n + a_2\psi^n - a_3w_{,r}^n) = p_{\omega}^{n-1}, \quad L_2(a_2u^n + a_4\psi^n - a_5w_{,r}^n) = h_{\omega}^{n-1},$$

$$L_3(a_3u^n + a_5\psi^n - a_6w_{,r}^n) - \kappa_0 w^n = -q_0 + q_{\omega}^{n-1}. \quad (11)$$

Здесь n – номер приближения, величины p_ω^{n-1} , h_ω^{n-1} , q_ω^{n-1} называют «дополнительными» внешними нагрузками и на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения. При этом используют формулы типа (8), в которых все слагаемые имеют индекс « $n-1$ » сверху:

$$p_\omega^{n-1} = T_{r\omega, r}^{n-1} + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{n-1} - T_{\phi\omega}^{n-1}), \quad h_\omega^{n-1} = H_{r\omega, r}^{n-1} + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{n-1} - H_{\phi\omega}^{n-1}),$$

$$q_\omega^{n-1} = M_{r\omega, rr}^{n-1} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega, r}^{n-1} - M_{\omega\omega, r}^{n-1}).$$

С помощью первых двух в третьем уравнении системы (11) обнуляем коэффициенты перед искомыми функциями u^n и ψ^n . После двукратного интегрирования этих уравнений система приводится к виду

$$u^n = b_1 w_{,r}^n - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_1^n r + \frac{C_2^n}{r},$$

$$\psi^n = b_2 w_{,r}^n + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_3^n r + \frac{C_4^n}{r},$$

$$L_3(w_{,r}^n) + \kappa^4 w_r^n = q + f_\omega^{n-1}, \quad (12)$$

где $C_1^n, C_2^n, C_3^n, C_4^n$ – константы интегрирования на n -ом шаге,

Третье уравнение в (12) в развернутом виде следующее:

$$w_{,rrrr}^n + \frac{2}{r} w_{,rrr}^n - \frac{1}{r^2} w_{,rr}^n + \frac{1}{r^3} w_{,r}^n + \kappa^4 w^n = q + f_\omega^{n-1}. \quad (13)$$

Его решение в рекуррентном виде

$$w^m = C_5^m \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6^m \operatorname{bei}(\kappa r) + C_7^m \operatorname{ker}(\kappa r) + C_8^m \operatorname{kei}(\kappa r) + w_0^n(r), \quad (14)$$

где $w_0^n(r)$ – частное решение уравнения (13).

Для сплошных круговых пластин, исходя из ограниченности перемещений в начале координат, в решении (14) следует положить $C_7^n = C_8^n = 0$. Частное решение в этом случае можно принять с использованием ядра Коши:

$$w_0^n(r) = \int_0^r K(r, s) [q(s) + f_\omega^{n-1}(s)] ds.$$

С учетом ограниченности прогиба в центре сплошной пластины рекуррентное решение принимает вид

$$u^n = b_1 w_{,r}^n - \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_1^n r + \frac{C_2^n}{r},$$

$$\psi^n = b_2 w_{,r}^n + \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \frac{1}{r} \int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr + C_3^n r + \frac{C_4^n}{r},$$

$$w^n = C_5^n \text{ber}(\kappa r) + C_6^n \text{bei}(\kappa r) + w_0^n(r), \quad (15)$$

где C_2^n и C_4^n определяются из условия непрерывности решения в центре пластины:

$$C_2^n = \frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=0},$$

$$C_4^n = -\frac{1}{a_1 a_4 - a_2^2} \int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=0}.$$

Константы интегрирования C_1 , C_3 , C_5 , C_6 следуют из условий закрепления пластины.

При жесткой заделке контура пластины, с учетом (10), константы интегрирования:

$$C_1^n = \int r \int (a_2 h_\omega^{n-1} - a_4 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=1} - C_2^n,$$

$$C_3^n = -\int r \int (a_1 h_\omega^{n-1} - a_2 p_\omega^{n-1}) dr dr \Big|_{r=1} - C_4^n,$$

$$C_5^n = \frac{w_0^n(1) \text{bei} \kappa - b_4 w_0^n(1)}{b_4 \text{ber} \kappa - b_3 \text{bei} \kappa}, \quad C_6^n = \frac{w_0^n(1) \text{ber} \kappa - b_3 w_0^n(1)}{b_3 \text{bei} \kappa - b_4 \text{ber} \kappa}. \quad (16)$$

Таким образом, решение (15) с константами интегрирования (16) описывает перемещения в круговой трехслойной пластине с легким наполнителем и заделанным контуром, изгибаемой на упругом основании произвольной симметричной нагрузкой $q(r)$.

Численный счет проводится для защемленной по контуру пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т. Интенсивность нагрузки $q_0 = -20$ МПа, теплового потока $q_t = 5000$ Дж / (м² · с). Относительные толщины слоев $h_1 = h_2 = 0,04$, $h_3 = 0,4$.

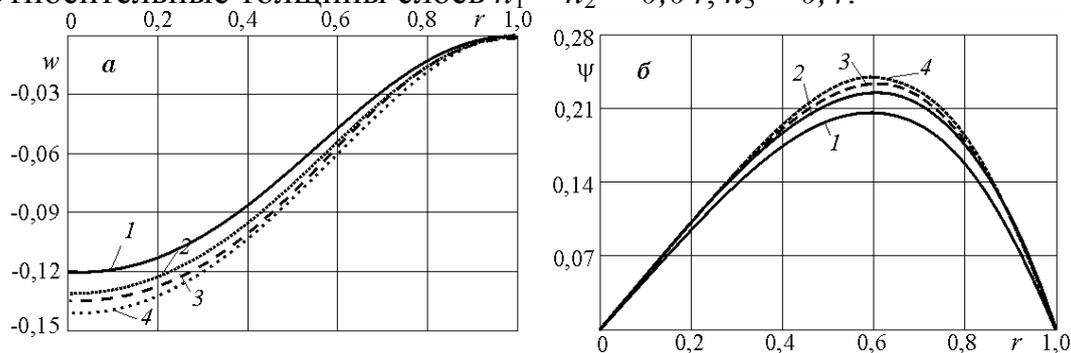


Рис. 2.

На рис. 2 показаны перемещения (a – прогиб, b – сдвиг) в рассматриваемой пластине, лежащей на упругом основании средней

жесткости: 1 – упругий изгиб, 2 – термоупругий, 3 – термоупругопластический, 4 – термоупругопластический в пластине, пределы текучести материалов которой уменьшены в 2 раза.

Учет физически нелинейного термосилового деформирования материалов слоев приводит к увеличению упругого расчетного прогиба на 12,5 %. Если принять материалы несущих слоев более пластичными, то эта разница составит 17 %.

Распределение соответствующих областей физической нелинейности (темная заливка) в вертикальном сечении рассматриваемой трехслойной пластины показано на рис. 3. Заполнитель на 82 % деформируется нелинейно. В несущих слоях зоны пластичности занимают до 25 % объема материала.

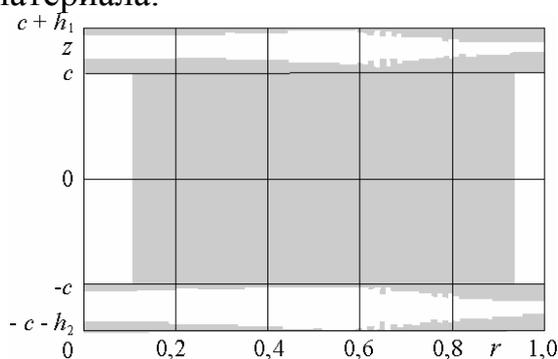


Рис. 3.

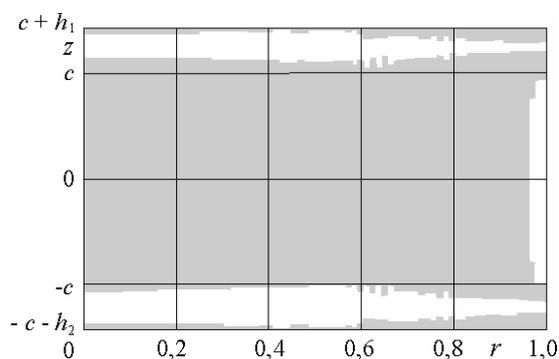


Рис. 4.

Области физической нелинейности в пластине, пределы текучести материалов которой уменьшены в 2 раза, показаны на рис. 4. Их площадь несколько увеличилась по сравнению с предыдущим случаем.

Приведенное в работе общее решение (15) можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба локальной нагрузкой трехслойной круговой пластины с легким заполнителем на упругом основании, при наличии отверстия или без него.

Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
2. Леоненко Д.В. Динамические нагружения трехслойного стержня // ВЕМ & FEM – 2003. Труды XX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». Т. 3.– СПб.: 24–26 сентября, 2003. – С. 58–63.
3. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций.– Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
4. Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Переменные нагружения вязкоупругопластических тел в терморadiационном поле// ВЕМ & FEM – 2003. Труды XX Международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред.

ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Степанова Е.М., *Петрушенко Ю.Я., **Даутов Р.З. (*Казанский государственный энергетический университе, **Казанский Государственный Университет)*

METHOD OF CONSTRUCTING THE SYMMETRICAL ALGEBRAIC ANALOG OF INTEGRAL EQUATIONS OF DIMEASURING BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELLIPTICAL MODEL

**Stepanova E.M., *Petrushenko U.Y., **Dautov R.Z. (*Kazan State Power Universit, **Kazan State University)*

В данной работе будет построено одно обобщение на двумерный случай метода интегрирующих матриц на примере решения следующей краевой задачи: найти функцию $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, такую, что

$$-\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1)$$

Предполагается, что матрица коэффициентов $A = A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^2$ равномерно по $x \in \bar{\Omega}$ положительно определена, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^2$ - симметрична, т.е. $A = A^T$.

$$a(u, \eta) = \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla \eta dx, \quad f(\eta) = \int_{\Omega} f \eta dx. \quad (2)$$

Тогда тождество (1) примет вид $u \in H_0^1$: $a(u, \eta) = f(\eta) \quad \forall \eta \in H_0^1$. (3)

Отметим, что функционал $a(.,.) : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow R$ - билинейный, симметричный, неотрицательный.

Пусть $E(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - f(u)$. Тогда задача (3) эквивалентна задаче нахождения минимума функционала $E(u)$ по всем $u \in H_0^1$

$$u \in H_0^1 : E(u) = \min_{w \in H_0^1} E(w) \quad (4)$$

Определим интегральные операторы $I_1, I_2, I_1^*, I_2^*, \bar{I}_1, \bar{I}_2$ следующим образом:

$$I_k = \int_0^{x_k} u dx_k, \quad I_k^* = \int_{x_k}^{l_k} u dx_k, \quad \bar{I}_k = \int_0^{l_k} u dx_k, \quad k=1,2$$

Нетрудно проверить, что $(I_j u, v) = (u, I_j^* v)$ для $u, v \in L_2(\Omega)$. Пусть, далее, векторное поле $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^T$ связано с $u \in H_0^1$ формулами $\varepsilon_j = \partial u / \partial x_j$. Убедимся, что это соответствие взаимнооднозначное и $u \in H_0^1 \Leftrightarrow \varepsilon \in H_\varepsilon = \{\varepsilon \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) : I_1 \varepsilon_1 = I_2 \varepsilon_2, \bar{I}_1 \varepsilon_1 = 0, \bar{I}_2 \varepsilon_2 = 0\}$. Так как функции $u|_{x_1=0} = 0, u|_{x_2=0} = 0, u|_{x_1=a} = 0, u|_{x_2=b} = 0$ то

$$u = u - u|_{x_1=0} = \int_0^{x_1} \varepsilon_1 dx_1 = I_1 \varepsilon_1, \quad u = u - u|_{x_2=0} = \int_0^{x_2} \varepsilon_2 dx_2 = I_2 \varepsilon_2.$$

Отсюда следуют ограничения на вектор-функцию ε :

$$I_1 \varepsilon_1 = I_2 \varepsilon_2, \quad \bar{I}_k \varepsilon_k = 0, \quad k=1,2$$

Обобщенная задача (4) также эквивалентно запишется в виде.

$$\text{Найти функцию } \varepsilon \in H_\varepsilon : E(\varepsilon) = \min_{\mu \in H_\varepsilon} E(\mu), \quad E(\mu) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \mu \cdot \mu dx - \int_{\Omega} f I_1 \varepsilon_1 dx. \quad (5)$$

Получили интегральные уравнения, эквивалентные задаче (5). Для решения этой задачи построим функцию Лагранжа:

$$\Lambda(\varepsilon, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \varepsilon \cdot \varepsilon dx - \int_{\Omega} f (I_1 \varepsilon_1) dx + \int_{\Omega} \lambda_0 (I_1 \varepsilon_1 - I_2 \varepsilon_2) dx + \int_0^b \lambda_1 \bar{I}_1 \varepsilon_1 dx_1 + \int_0^a \lambda_2 \bar{I}_2 \varepsilon_2 dx_2$$

Пусть далее, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\lambda \equiv (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\lambda}$ - вариации ε и λ , $\bar{\varepsilon} \equiv \delta \varepsilon = (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)$, $\bar{\lambda} \equiv (\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = (\delta \lambda_0, \delta \lambda_1, \delta \lambda_2)$.

Из условия минимума вариации по переменной ε получим уравнение вида:

$$\int_{\Omega} \left(A \varepsilon - \begin{pmatrix} I_1^* f \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1^* \lambda_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ I_2^* \lambda_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) \cdot \bar{\varepsilon} dx = 0 \quad \forall \bar{\varepsilon} \in H_0^1.$$

В силу произвольности $\bar{\varepsilon}$ отсюда следует, что

$$A \varepsilon - \begin{pmatrix} I_1^* f \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1^* \lambda_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ I_2^* \lambda_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Или

$$A \varepsilon = \Phi, \quad \Phi = \begin{pmatrix} I_1^* f - I_1^* \lambda_0 - \lambda_1 \\ I_2^* \lambda_0 - \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Матрица A является положительно определенной. Следовательно существует обратная матрица к матрице A :

$$A^{-1} \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Из системы линейных интегральных уравнений (6) можно найти вектор ε

$$\varepsilon = A^{-1} \Phi. (7)$$

Возьмем, теперь, вариацию от функции Лагранжа по переменной λ и приравняем её к нулю. Получим следующие уравнения

$$I_1 \varepsilon_1 - I_2 \varepsilon_2 = 0, \quad \bar{I}_1 \varepsilon_1 = 0, \quad \bar{I}_2 \varepsilon_2 = 0.$$

Подставив в эти выражения вектор ε из формулы (7) получим

$$(I_1 \quad -I_2) A^{-1} \begin{pmatrix} I_1^* f - I_1^* \lambda_0 - \lambda_1 \\ I_2^* \lambda_0 - \lambda_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_1 & 0 \\ 0 & \bar{I}_2 \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} I_1^* f - I_1^* \lambda_0 - \lambda_1 \\ I_2^* \lambda_0 - \lambda_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Т.е. систему из трёх линейных интегральных уравнений относительно трех неизвестных $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Преобразуем данную систему. Имеем

$$\begin{aligned} & I_1 b_{11} I_1^* f - I_1 b_{11} I_1^* \lambda_0 - I_1 b_{11} \lambda_1 + I_1 b_{12} I_2^* \lambda_0 - \\ & - I_1 b_{12} \lambda_2 - I_2 b_{21} I_1^* f + I_2 b_{21} I_1^* \lambda_0 + I_2 b_{21} \lambda_1 - I_2 b_{22} I_2^* \lambda_0 + I_2 b_{22} \lambda_2 = 0 \\ & \bar{I}_1 b_{11} I_1^* f - \bar{I}_1 b_{11} I_1^* \lambda_0 - \bar{I}_1 b_{11} \lambda_1 + \bar{I}_1 b_{12} I_2^* \lambda_0 - \bar{I}_1 b_{12} \lambda_2 = 0, \\ & \bar{I}_2 b_{21} I_1^* f - \bar{I}_2 b_{21} I_1^* \lambda_0 - \bar{I}_2 b_{21} \lambda_1 + \bar{I}_2 b_{22} I_2^* \lambda_0 - \bar{I}_2 b_{22} \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Или в матричной форме данную систему можно записать как:

$$\begin{pmatrix} -I_1 b_{11} I_1^* + I_1 b_{12} I_2^* + I_2 b_{21} I_1^* - I_2 b_{22} I_2^* & -I_1 b_{11} + I_2 b_{21} & -I_1 b_{12} + I_2 b_{22} \\ -\bar{I}_1 b_{11} I_1^* + \bar{I}_1 b_{12} I_2^* & -\bar{I}_1 b_{11} & -\bar{I}_1 b_{12} \\ -\bar{I}_2 b_{21} I_1^* + \bar{I}_2 b_{22} I_2^* & -\bar{I}_2 b_{21} & -\bar{I}_2 b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 b_{11} I_1^* f + I_2 b_{21} I_1^* f \\ -\bar{I}_1 b_{11} I_1^* f \\ -\bar{I}_2 b_{21} I_1^* f \end{pmatrix} \quad (8)$$

Здесь $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$, выражения типа $I_1 b_{11} I_1^* \lambda_0$, $I_1 b_{12} \lambda_2$ понимаются как $I_1(b_{11}(I_1^* \lambda_0))$, $I_1(b_{12} \lambda_2)$. После решения уравнения (8) неизвестное ε определяется по формуле (7).

Множество всех $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ - множителей Лагранжа, обозначим через H_λ . Пространство H_λ становится гильбертовым, если ввести в нем скалярное произведение и норму естественным образом:

$$(\lambda, \mu) = \int_{\Omega} \lambda_0 \mu_0 dx + \int_0^{l_2} \lambda_1 \mu_1 dx_2 + \int_0^{l_1} \lambda_2 \mu_2 dx_1, \quad \|\lambda\| = (\lambda, \lambda)^{1/2}, \quad \lambda, \mu \in H_{\lambda},$$

т.е. $H_{\lambda} = L_2(\Omega) \times L_2(0, l_2) \times L_2(0, l_1)$.

Запишем (8) коротко в виде $B\lambda = \bar{F}$. Прямыми вычислениями проверяется, что интегральный оператор B отображает H_{λ} в подпространство H_{λ} и, кроме того, оператор $B: H_{\lambda} \rightarrow H_{\lambda}$ - непрерывен и симметричен, т.е. самосопряжен.

Опишем конечномерную аппроксимацию систем n интегральных уравнений (8). В эту систему входят неизвестные функции $\lambda_1(x_1)$, $\lambda_2(x_2)$ - одной переменной, $\lambda_0(x_1, x_2)$ - двух переменных, а также интегральные операторы I_k , I_k^* , $k=1,2$. Поэтому, вначале, рассмотрим аппроксимацию таких функций и операторов.

$P_n(x)$ - множество полиномов степени не выше по переменной x , $P_k(t)$ - многочлен Лежандра степени k на отрезке $[-1,1]$, $P_k(x_i) = P_k(2x_i/l_i - 1)$ - этот же многочлен, сдвинутый на отрезок $[0, l_i]$ оси x_i , $i=1,2$. Выберем на области Ω сетку узлов коллокации $\Omega_h = \{x_{ij} = (x_{1i}, x_{2j}), i=1, \dots, n_1, j=1, \dots, n_2\}$ так, что $\{x_{ki}, i=1, \dots, n_k\}$ - нули $P_{n_k}(x_k)$, $k=1,2$. Отметим, что $\{x_{ki}, i=1, \dots, n_k\}$ - узлы квадратурной формулы Гаусса.

Построим интегрирующие матрицы функций одной переменной. Возьмем интерполяционный полином Лагранжа функции $\lambda = \lambda(x_k)$ одной переменной x_k по узлам $\{x_{ki}, i=1, \dots, n_k\}$ обозначим через $\lambda_h(x_k)$,

$$\lambda_h(x_k) = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i \varphi_i(x_k), \quad \lambda_i = \lambda(x_{ki}), \quad k=1,2 \quad (9)$$

где $\{\varphi_i\}$ - линейно - независимая система функций (базис Лагранжа).

И определим аппроксимацию I_{kh} (I_{kh}^*) оператора I_k (I_k^*) по формуле $I_{kh}\lambda = I_k\lambda_h$ ($I_{kh}^*\lambda = I_k^*\lambda_h$), $k=1,2$. Имеем

$$(I_{kh}\lambda)(x_{ki}) = \int_0^{x_{ki}} \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \varphi_j(x_k) dx_k = \sum_{j=1}^{n_k} I_{k,ij} \lambda_j, \quad I_{k,ij} = \int_0^{x_{ki}} \varphi_j(x_k) dx_k. \quad (10)$$

$$(I_{kh}^*\lambda)(x_{ki}) = \int_{x_{ki}}^{l_k} \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \varphi_j(x_k) dx_k = \sum_{j=1}^{n_k} I_{k,ij}^* \lambda_j, \quad I_{k,ij}^* = \int_{x_{ki}}^{l_k} \varphi_j(x_k) dx_k. \quad (10^1)$$

Матрицу $L_k = \{I_{k,ij}\}_{i,j=1}^{n_k}$, $k=1,2$ назовем левой интегрирующей матрицей по переменной x_k , матрицу $R_k = \{I_{k,ij}^*\}_{i,j=1}^{n_k}$ - правой интегрирующей матрицей по переменной x_k . Если в пространстве n_k -мерных векторов ввести скалярное произведение по формуле

$$(x, y)_{kh} = \sum_{i=1}^{n_k} d_{ki} x_i y_i, \quad d_{ki} = \int_0^{l_k} \varphi_k(x_k) dx_k, \quad (11)$$

то $(L_k x, y)_{kh} = (x, R_k y)_{kh}$.

Построим интегрирующие матрицы функций двух переменных. Интерполяционный полином Лагранжа функции $\lambda_0 = \lambda_0(x_1, x_2)$ двух переменных по узлам x_{ij} обозначим через $\lambda_{0h}(x_1, x_2)$,

$$\lambda_{0h}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{0,ij} \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2), \quad \lambda_{0,ij} = \lambda_0(x_{1i}, x_{2j}), \quad (12)$$

и определим аппроксимацию I_{kh} оператора I_k по формуле $I_{kh} \lambda_0 = I_k \lambda_{0h}$, $k=1,2$. Введем векторный индекс узла x_{ij} по формуле $L = i + (j-1)n_1$, $1 \leq L \leq n$, $n = n_1 n_2$ - общее число узлов. Взаимнооднозначное соответствие между индексами (i, j) и индексом L определяемое по формулам:

$$j = \left[\frac{L}{n_1} \right] + 1, \quad i = L - \left[\frac{L}{n_1} \right] n_1, \quad \text{обозначим } j_L = j, \quad i_L = i. \quad \text{Тогда базисные}$$

функции можно представить в виде:

$$\varphi_L = \varphi_{i_L}^1(x_1) \varphi_{j_L}^2(x_2) \quad (13)$$

Интерполяционный полином Лагранжа определяемый по формуле (12) примет вид

$$\lambda_{0h}(x_1, x_2) = \sum_{L=1}^n \lambda_{0,L} \varphi_L(x_1, x_2), \quad \lambda_{0,L} = \lambda_0(x_{1i_L}, x_{2j_L}). \quad (14)$$

Имеем следующую формулу вычисления $I_{1h} \lambda_0$, $I_{2h} \lambda_0$ в узле $x_M = x_{i_M j_M}$

$$(I_{1h} \lambda_0)(x_{i_M j_M}) = \int_0^{x_{i_M}} \sum_{L=1}^n \lambda_{0,L} \varphi_L(x_1, x_{2, j_M}) dx_1 = \sum_{L=1}^n I_{1,ML} \lambda_{0,L}, \quad I_{1,L} = \int_0^{x_{i_M}} \varphi_L(x_1, x_{2, j_M}) dx_1, \quad (15)$$

$$(I_{2h} \lambda_0)(x_{i_M j_M}) = \int_0^{x_{j_M}} \sum_{L=1}^n \lambda_{0,L} \varphi_L(x_{1, i_M}, x_2) dx_2 = \sum_{L=1}^n I_{2,ML} \lambda_{0,L}, \quad I_{2,L} = \int_0^{x_{j_M}} \varphi_L(x_{1, i_M}, x_2) dx_2. \quad (15^1)$$

Матрицу $I_1 = \{I_{1,ML}\}_{M,L=1}^n$ назовем правой интегрирующей матрицей по переменной x_1 и матрицу $I_2 = \{I_{2,ML}\}_{M,L=1}^n$ - правой интегрирующей матрицей по переменной x_2 для функций от двух переменных. Поскольку $\varphi_L(x_1, x_2, j_M) = \varphi_{i_L}^1(x_1) \varphi_{j_L}^2(x_2, j_M) = \delta_{j_M}^{i_M} \varphi_{i_L}(x_1)$,

где $\delta_{j_M}^{i_M}$ - символ Кронекера, то

$$I_{1,ML} = \int_0^{x_{i_M}} \varphi_L(x_1, x_2, j_M) dx_1 = \delta_{j_L}^{j_M} \int_0^{x_{i_M}} \varphi_{i_L}(x_1) dx_1 = I_{1,i_L j_L} \delta_{j_L}^{j_M}.$$

$$(I_{1h}^* \lambda_0)(x_{i_M j_M}) = \int_{x_{i_M}}^{l_1} \sum_{L=1}^n \lambda_{0,L} \varphi_L(x_1, x_2, j_M) dx_1 = \sum_{L=1}^n I_{1,ML}^* \lambda_{0,L}, \quad I_{1,ML}^* = \int_{x_{i_M}}^{l_1} \varphi_L(x_1, x_2, j_M) dx_1, \quad (16)$$

$$(I_{2h}^* \lambda_0)(x_{i_M j_M}) = \int_{x_{i_0}}^{l_2} \sum_{L=1}^n \lambda_{0,L} \varphi_L(x_1, x_2, j_M) dx_2 = \sum_{L=1}^n I_{2,ML}^* \lambda_{0,L}, \quad I_{2,ML}^* = \int_{x_{j_M}}^{l_2} \varphi_L(x_1, x_2, j_M) dx_2. \quad (16^1)$$

Матрицу $I_1^* = \{I_{1,ML}^*\}_{M,L=1}^n$ назовем левой интегрирующей матрицей по переменной x_1 и матрицу $I_2^* = \{I_{2,ML}^*\}_{M,L=1}^n$ - левой интегрирующей матрицей по переменной x_2 для функций от двух переменных.

Обозначим через $I_1 = \{I_{1,i_M j_M}\}_{i_M, j_M=1}^{n_1}$, $I_2 = \{I_{2,i_M j_M}\}_{i_M, j_M=1}^{n_2}$ - правые интегрирующие матрицы по переменным x_1, x_2 для функций от одной переменной и $I_1^* = \{I_{1,i_M j_M}^*\}_{i_M, j_M=1}^{n_1}$, $I_2^* = \{I_{2,i_M j_M}^*\}_{i_M, j_M=1}^{n_2}$ - левые интегрирующие матрицы по переменным x_1, x_2 для функций от одной переменной.

В пространстве n_k - мерных векторов введем скалярное произведение по формуле

$$(x, y)_{th} = \sum_{t=1}^{n_k} d_{kt} x_t y_t, \quad d_{kt} = \int_0^{l_k} \varphi_i^1(x_1) \varphi_j^2(x_2) dx_k, \quad (11^1)$$

Определим теперь аппроксимацию интегральных уравнений (8) в точках коллокации Ω_h просто заменяя операторы Вольтера их аппроксимациями:

$$\begin{pmatrix} I_{1h}b_{11}I_{1h}^* - I_{1h}b_{12}I_{2h}^* - I_{2h}b_{21}I_{1h}^* + I_{2h}b_{22}I_{2h}^* & I_{1h}b_{11} - I_{2h}b_{21} & I_{1h}b_{12} - I_{2h}b_{22} \\ \overline{I_{1h}b_{11}I_{1h}^*} - \overline{I_{1h}b_{12}I_{2h}^*} & \overline{I_{1h}b_{11}} & \overline{I_{1h}b_{12}} \\ \overline{I_{2h}b_{21}I_{1h}^*} - \overline{I_{2h}b_{22}I_{2h}^*} & \overline{I_{2h}b_{21}} & \overline{I_{2h}b_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1h}b_{11}I_{1h}^*f - I_{2h}b_{21}I_{1h}^*f \\ \overline{I_{1h}b_{11}I_{1h}^*f} \\ \overline{I_{2h}b_{21}I_{1h}^*f} \end{pmatrix}$$

Эти соотношения представляют систему алгебраических уравнений для определения $N = n_1n_2 + n_1 + n_2$ неизвестных

$\lambda = \{\lambda_{0,ij}, \lambda_{1,j}, \lambda_{2,i}, i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2\}$. Например, по определению,

$$\begin{aligned} (I_{1h}b_{11}I_{1h}^*\lambda_0)(x_L) &= \left(I_1 \left[b_{11}(I_1^*\lambda_{0h}) \right]_h \right) (x_L) = \\ &= \left(I_1 \left[b_{11} \left(\int_{x_L} \sum_{L=1}^{l_1} \varphi_L(x_1, x_2) \lambda_{0,L} dx_1 \right) \right]_h \right) (x_L) = \\ &= \left(I_1 \left[b_{11} \left(\sum_{L=1}^{n_1n_2} I_{1,L}^* \lambda_{0,L} \right) \right]_h \right) (x_L) = \left(I_1 \left[\left(\sum_{L=1}^{n_1n_2} b_{11,L} I_{1,L}^* \lambda_{0,L} \right) \right]_h \right) (x_L) = \\ &= \int_0^{x_L} \sum_{M=1}^{n_1n_2} \varphi_M(x_1, x_2) \left(\sum_{L=1}^{n_1n_2} b_{11,L} I_{1,L}^* \lambda_{0,L} \right)_M dx_1 = \\ &= \sum_{M=1}^{n_1n_2} I_{1,M} \left(\sum_{L=1}^{n_1n_2} b_{11,L} I_{1,L}^* \lambda_{0,L} \right)_M = L_1 B_{11} R_1 \Lambda_0 \end{aligned}$$

Тогда локальную аппроксимацию системы линейных уравнений (10) в Гауссовых узлах определенных на области Ω можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} L_1 B_{11} R_1 - L_1 B_{12} R_2 - L_2 B_{21} R_1 + L_2 B_{22} R_2 & L_1 B_{11} - L_2 B_{21} & L_1 B_{12} - L_2 B_{22} \\ D_1 B_{11} R_1 - D_1 B_{12} R_2 & D_1 B_{11} & D_1 B_{12} \\ D_2 B_{21} R_1 - D_2 B_{22} R_2 & D_2 B_{21} & D_2 B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 B_{11} R_1 - L_2 B_{21} R_1 \\ D_1 B_{11} R_1 \\ D_2 B_{21} R_1 \end{pmatrix} F$$

Или в блочно-диагональном виде данная матрица может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} (L_1 \ L_2) & (O \ O) \\ (O \ O) & (D_1 \ O) \\ (O \ O) & (O \ -D_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_1) & (I \ O) \\ (R_2) & (O \ I) \\ (R_1) & (I \ O) \\ (R_2) & (O \ -I) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (L_1 & L_2) & (O & O) \\ (O & O) & (D_1 & O) \\ (O & O) & (O & -D_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (R_1) \\ (O) \\ (R_1) \\ (O) \end{bmatrix} F,$$

где O - нулевая матрица, где I - единичная матрица, размерности $n_1 n_2 \times n_1 n_2$, $-I = (-1)I$ - диагональная матрица, на диагонали, которой стоят (-1).

Если на R^N , которому принадлежит решение системы λ , ввести скалярное произведение

$$(\lambda, \mu)_h = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} d_{1,i} d_{2,j} \lambda_{0,ij} \mu_{0,ij} + \sum_{j=1}^{n_2} d_{2,j} \lambda_{1,j} \mu_{1,j} + \sum_{i=1}^{n_1} d_{1,i} \lambda_{2,i} \mu_{2,i} \quad (17)$$

то непосредственными вычислениями проверяется, что матрица системы - симметрична.

УДК 624.012.35

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

Тананайко О.Д., Бенин А.В.

(Петербургский госуниверситет путей сообщения)

Железобетон рассмотрен как двухкомпонентная система, для составных частей которой физические условия записываются независимо и в дополнение к ним вводятся условия взаимодействия частей системы на их контакте.

FINITE ELEMENT SOLUTION OF THE PLANE PROBLEM FOR THE REINFORCED CONCRETE DEFORMATION

Tananaiko O.D., Benin A.V.

(Petersburg State Transport University)

The reinforced concrete is considered as the two-component system, whereas physical equations for its components are formulated independently and additional conditions of interaction of the components on their contact surface must be introduced.

Введение. В настоящее время проблема создания и исследования механических моделей железобетона, адекватно отражающих такие характерные свойства материала, как нелинейность, трещинообразование, неоднородность, приобретенная анизотропия, ползучесть и термоползучесть, усадка, сцепление арматуры с бетоном является несомненно актуальной [1]. На базе таких моделей могут быть созданы программы, позволяющие оценивать напряженно-деформированное состояние сложных железобетонных конструкций и определять для них

предельную (разрушающую) нагрузку. В данной статье предлагается новая модель для учета сил сцепления при нелинейном конечноэлементном анализе железобетонных пластин, работающих в условиях плоского напряженного состояния.

Варианты описания сил сцепления. Экспериментальные и теоретические исследования сил сцепления между арматурой и бетоном проводились начиная с 20-х годов прошлого столетия [2]. Существенным шагом вперед в 40 – 60-е годы стали классические работы А. А. Гвоздева, В. И. Мурашева, О. Я. Берга, Г.А. Гениева. Предлагались различные варианты зависимости касательных напряжений сцепления от величины проскальзывания арматуры относительно бетона: линейный закон, степенной закон, закон идеальных упругопластических деформаций. По результатам большой серии опытов, проводившихся в НИИЖБ, в 1959 г. М. М. Холмянским [3] был предложен так называемый «нормальный закон»:

$$\tau = B_0 \cdot \ln(1 + \alpha \cdot s) / (1 + \alpha \cdot s),$$

где τ – касательное напряжение сцепления;
 s – смещение арматуры относительно бетона;
 B_0, α – параметры закона сцепления.

Максимального значения касательное напряжение достигает при величине смещения $s=(e-1)/\alpha$; при этом само напряжение равно $\tau_{\max} = B_0 / e$.

Параметры B_0, α зависят от величины кубиковой прочности бетона, от типа и диаметра арматуры.

Аналогичные исследования выполнялись и зарубежными учеными. Результаты этих исследований нашли отражение в действующих нормах расчета и проектирования, таких как DIN 1045-1, Eurocode 2, СЕВ-FIP Model Code 90.

Конечноэлементная модель железобетонной конструкции. Ниже, на рис. 1, представлен типичный фрагмент расчетной схемы плоской железобетонной конструкции. Бетон моделируется прямоугольными элементами. Жирными точками отмечены узлы, через которые проходит горизонтальный арматурный стержень. Для большей ясности ось стержня (толстая черная линия) смещена на чертеже несколько ниже указанных узлов.

Узлы арматурного стержня и узлы бетонных элементов, с которыми он связан, имеют попарно одинаковые координаты, но различные номера. Таким образом, в принятой расчетной схеме узлы бетона и арматуры, совпадавшие до приложения нагрузки, могут получать в процессе деформирования ненулевые взаимные перемещения. Тем самым моделируется процесс проскальзывания арматуры относительно бетона вследствие действия сил сцепления.

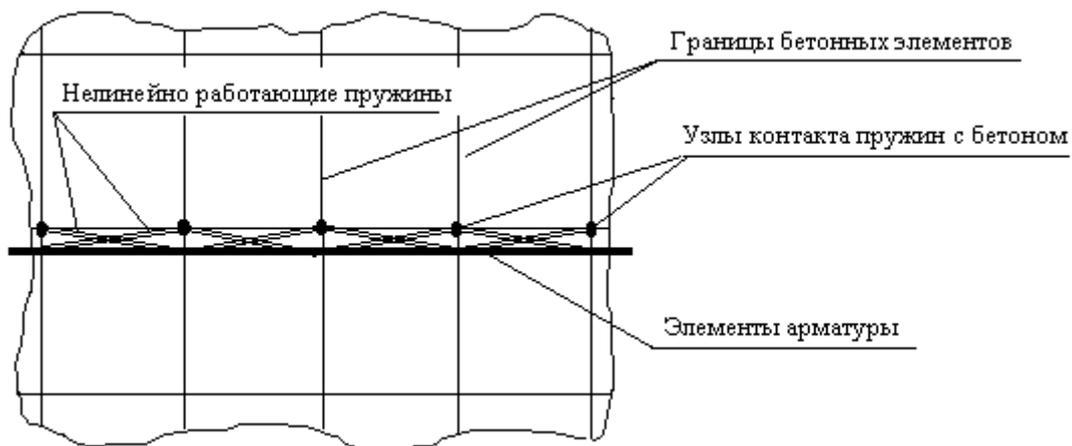


Рис. 1. Фрагмент расчетной схемы железобетонной конструкции.

Элементами, в которых возникают усилия, эквивалентные силам сцепления, являются горизонтальные пружины. На чертеже эти элементы показаны двойными линиями (но не горизонтальными, а наклонными по причине отмеченного выше смещения оси стержня относительно действительного положения его узлов).

По мере изменения напряженно-деформированного состояния системы выполняется пересчет ее жесткостных характеристик. Бетон рассматривается как материал с приобретенной анизотропией; соответственно для бетонных элементов на каждом этапе определяются новые значения секущих модулей и коэффициентов поперечной деформации.

Для элементов арматурных стержней модуль упругости считается постоянным до тех пор, пока напряжения в арматуре не достигнут предела текучести, и только при деформациях порядка $0,002$ и выше подсчитывается секущий модуль как отношение предела текучести к достигнутой деформации.

Пружины, моделирующие связь между бетоном и арматурой, на первом этапе расчета имеют начальную жесткость, способ нахождения которой зависит от принятого закона сцепления. После того, как выполнен очередной этап расчета, удлинения $s_{1,i}$ и $s_{2,i}$ двух пружин каждого участка определяются по формулам

$$s_{1,i} = F_{1,i} / c_i; \quad s_{2,i} = F_{2,i} / c_i,$$

где c_i – жесткость пружин участка с номером i ; $F_{1,i}$ и $F_{2,i}$ – усилия в двух пружинах того же участка.

Среднее значение смещения арматуры относительно бетона на участке с номером i :

$$s_{i,av} = 0,5(s_{1,i} + s_{2,i}).$$

Касательное напряжение сцепления в пределах участка:

$$\tau_i = (F_{1,i} + F_{2,i}) / (p \cdot d_i),$$

где p – периметр поперечного сечения арматурного стержня;
 d_i – длина участка.

В соответствии с принятым законом сцепления смещению $s_{i,av}$ должно соответствовать новое значение касательного напряжения $\tau_i^* < \tau_i$. Тогда уточненная жесткость каждой из пружин будет равна

$$c_i^* = 0,5 \tau_i^* \cdot p \cdot d_i / s_{i,av},$$

(коэффициент 0,5 в этой формуле связан с наличием двух пружин в пределах участка).

После уточнения значений жесткостей всех пружин можно переходить к следующему этапу расчета. Сходимость итерационного процесса оценивается путем сравнения потенциальной энергии, накопленной во всех бетонных элементах на двух последовательных шагах расчета.

Пример расчета. Решается задача о чистом изгибе балки на двух опорах при следующих исходных данных.

Нормативные сопротивления сжатию и растяжению: $R_{bn}=15$ МПа, $R_{btn}=1,4$ МПа, начальный модуль упругости $E_b=27000$ МПа (бетон В20). Начальное значение коэффициента Пуассона принято равным $\nu_b=1/6$. Пролет балки – 2,00 м; поперечное сечение – прямоугольник высотой 0,2 м и шириной 0,3 м. Балка усилена нижней продольной арматурой (4Ø20 периодического профиля, сталь класса АIII).

В выполненном расчете в качестве предельных приняты значения временного сопротивления бетона сжатию и растяжению, а именно $R_c=R_{bn}/0,778=19,3$ МПа, $R_t=R_{btn}/0,778=1,8$ МПа. Предельное значение коэффициента Пуассона: $\nu_{b,lim}=R_t/R_c=0,0933$; предельное значение секущего модуля: $E_{sec,lim}=(\nu_{b,lim}/\nu_b)E_b=15108$ МПа. Предельные деформации растяжения и сжатия составляют: $\varepsilon_{t,lim}=R_t/E_{sec,lim}=\nu_b R_c/E_b=0,0001191$; $\varepsilon_{c,lim}=R_c/E_{sec,lim}=\varepsilon_{t,lim}/\nu_{b,lim}=0,001277$.

Нелинейное деформирование бетона описывается кубической параболой [4]:

$$\bar{\sigma} = A\bar{\varepsilon} - B\bar{\varepsilon}^2 + C\bar{\varepsilon}^3,$$

где $\bar{\sigma} = \sigma / R$ – относительные напряжения и $\bar{\varepsilon} = \varepsilon / \varepsilon_{lim}$ – относительные деформации. При сжатии принимается $R=R_c$ и $\varepsilon_{lim}=\varepsilon_{c,lim}$; при растяжении соответственно $R=R_t$, $\varepsilon_{lim}=\varepsilon_{t,lim}$. Коэффициенты параболы подсчитаны как $A=E_b/E_{sec,lim}=1,7893$; $B=2A-3=0,5786$; $C=A-2=-0,2107$.

Касательные напряжения сцепления между бетоном и арматурной сталью принимались в двух вариантах: по европейскими нормами СЕВ-FIP Model Code 90 и по теории М.М. Холмянского.

В первом случае максимальное значение касательного напряжения принято равным $\tau_{max}=(R_{cube,n})0,5=4,42$ МПа, причем нормативное значение кубиковой прочности равно $R_{cube,n}=19,544$ МПа. Касательное

напряжение сцепления при взаимном смещении арматуры и бетона $s < s_1 = 0,6$ мм составляет $\tau = \tau_{max}(s/s_1)0,4$. При взаимных смещениях $s > s_2 = 2,5$ мм касательное напряжение постоянно: $\tau_f = 0,6$ МПа. На промежуточном участке график линеен. При расчете по теории М.М. Холмянского, в соответствии с таблицами из монографии [3], принято $B_0 = 17,60$ МПа и $\alpha = 17000$ м⁻¹.

Внешнее воздействие, статически эквивалентное паре сил $M = 0,04$ МНм, передается на модель в виде распределенной нагрузки переменной интенсивности, приложенной к торцам балки. В результате выполнения расчета в первом (упругом) приближении максимальное перемещение (прогиб) достигло значения 2,88 мм.

При расчете по М.М. Холмянскому после быстро сходящегося итерационного процесса получено окончательное перемещение – 5,43 мм. Перемещения увеличились почти в 2 раза, что указывает на существенное снижение жесткости системы в результате нелинейной работы бетона и проскальзывания арматурных стержней относительно бетона.

В нижней части балки бетон выключается из работы (его секущий модуль оказывается практически нулевым). Деформации в верхней зоне оказались близкими к предельным для сжатия бетона, а деформации арматуры намного превышают предельные деформации растяжения бетона. В результате сцепление между бетоном и арматурой падает, что приводит к образованию трещин. При этом жесткость пружин, связывающих арматуру с бетоном, уменьшается примерно в 3 раза. Напряжение в арматуре превышает 200 МПа – арматура активно включилась в работу, но напряжения в ней еще не достигли предельных значений. Максимальные сжимающие напряжения в бетоне близки к предельным значениям (18,805 МПа), а ниже нейтральной оси равны нулю (рис. 2, а). Отметим также тот факт, что направление главных сжимающих напряжений практически горизонтально, то есть они совпадают по направлению с напряжениями σ_x . Вертикальные нормальные напряжения σ_y на 2 – 3 порядка меньше, чем σ_x . Следовательно, в рассматриваемом случае соблюдается известная из сопротивления материалов гипотеза о ненадавливании волокон при изгибе.

Расчет по СЕВ-FIP Model Code 90 дал максимальное перемещение 5,47 мм и максимальные сжимающие нормальные напряжения в бетоне 18,914 МПа. Близость полученных результатов, по-видимому, свидетельствует о том, что оба подхода – отечественный и европейский – достаточно точно отражают физическую сущность явлений, происходящих в нелинейно работающем железобетоне при проскальзывании арматуры относительно бетонной матрицы.

Эта же балка была рассчитана при описании нелинейного деформирования бетона диаграммой «типа Прандтля» – с нелинейным начальным участком и, после достижения предельного напряжения,

горизонтальным продолжением графика без ограничения величины деформаций. При том же приложенном внешнем моменте $0,04$ МНм прогиб увеличился до $9,5$ мм, но закон распределения напряжений в сжатом бетоне еще близок к линейному (рис. 2, б) и мало отличается от полученного в предыдущем расчете.

При увеличении момента в $1,5$ раза (до $0,06$ МНм) эпюра напряжений искривляется и становится более похожей на условную прямоугольную эпюру, применяемую в расчетах по предельным состояниям (рис. 2, в). Напряжения в арматуре увеличиваются до 326 МПа, то есть к моменту исчерпания несущей способности бетона арматура все активнее «пытается» оказывать сопротивление растущим нагрузкам.

Наконец, при моменте $0,0667$ МНм эпюра напряжений (рис. 2, г) еще больше приближается к прямоугольному очертанию. Напряжения в арматуре становятся близкими к предельным (373 МПа).

Деформации верхних и нижних волокон балки оказываются примерно одинаковыми по абсолютной величине ($-0,002178$ и $+0,002126$), но сжимающие деформации уже на 70% превышают предельные для сжатия бетона. Можно сделать вывод, что регламентируемые отечественными нормами предельные состояния соответствуют недопустимо высоким уровням деформаций (разрушения не происходит лишь благодаря введению соответствующих коэффициентов запаса). Представляет интерес то обстоятельство, что при использовании более правдоподобной диаграммы деформирования (кубической параболы) при моменте $0,067$ МНм процесс расчета оказывается расходящимся, так как реальный материал не в состоянии успешно сопротивляться такой нагрузке и балка неизбежно должна разрушиться.

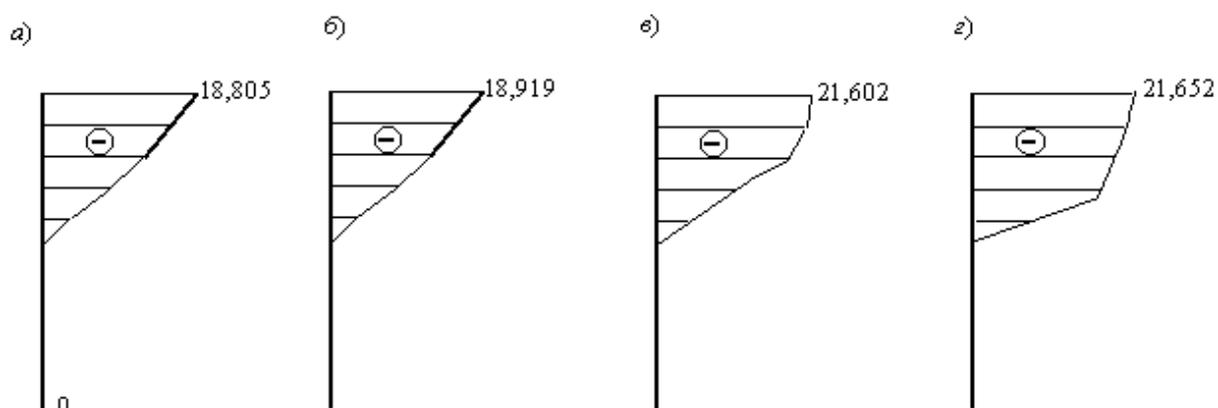


Рис. 2. Эпюры сжимающих нормальных напряжений

а – при описании нелинейной деформации бетона по кубической параболе;
б, в, г – при описании нелинейной деформации бетона диаграммой типа Прандтля

Литература

1. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
2. Залигер Р. Железобетон, его расчет и проектирование. – Пер. с нем. – М.–Л.: ГНТИ, 1931. – 671 с.
3. Холмянский М.М. Контакт арматуры с бетоном. – М.: Стройиздат, 1981. – 184 с.
4. Бенин А.В., Елизаров С.В., Тананайко О.Д. Численное сопоставление различных моделей для описания нелинейного поведения бетона при плоском напряженном состоянии. – XIX Межд. конф. «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов». Труды, т. II. – СПб, Санкт-Петербург. Дом Ученых, 2002. – С. 76-81.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА

П.В. Ткачев

(Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия)

Сильная деформация и разрушение очень трудны для описания континуальными методами. В предлагаемой работе приведен метод описания процессов, протекающих внутри материала, при помощи перехода от микроструктуры к континуальным уравнениям. На первом этапе рассматривается бесконечная идеальная кристаллическая решетка. С помощью длинноволнового приближения сделан переход от уравнений, описывающих кристаллическую решетку, к уравнениям сплошной среды. В результате получены нелинейные континуальные уравнения бесконечного кристалла под действием конечной деформации. Эти уравнения записаны без ограничения на размерность пространства. Для определения устойчивости на конечную деформацию наложена малая деформация. Найдены критерии устойчивости структуры материала, учитывающие ее строение.

STABILITY OF THE MATERIAL INTERNAL STRUCTURE

Tkachev P.V. (Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS, Saint-Petersburg, Russia)

Strong deformation and fracture are very difficult to describe using macroscopic continuum methods. In the presented paper the method is shown, which allows to describe micro processes using transformation from microscopic equations to continuum equation. First an ideal infinite crystal lattice is considered. Transfer from microstructure to continuum mechanics is made using long-wave approximation. This allows obtaining nonlinear continuum equations of the infinite crystal under finite uniform deformation. These equations are found without limitation to the space dimension. For the stability verification a small deformation is superposed to a finite deformation of the crystal lattice being described by the obtained nonlinear macroscopic equations. Criteria of the material stability and their relevance to the crystal structure are obtained.

Целью исследования является оценка влияния микроструктуры материала на процессы, протекающие при его деформировании. За основу

взяты уравнения, описывающие динамику бесконечной идеальной плотноупакованной кристаллической решетки. Частицы, ее образующие, находятся в поле парного потенциала взаимодействия $\Pi(r)$ [1, 2, 3]. Он зависит только от расстояния между частицами. Соответствующая ему сила взаимодействия $f(r)$ определяется как первая производная, взятая с обратным знаком, а жесткость $c(r)$ как вторая производная от потенциала взаимодействия.

$$f(r) = -\Pi'(r), \quad c(r) = \Pi''(r). \quad (1)$$

Обозначим за σ , a и b расстояния, на которых обращается в ноль, соответственно, потенциал и его первая и вторая производные:

$$\Pi(\sigma) = 0, \quad f(a) = 0, \quad c(b) = 0. \quad (2)$$

Будем рассматривать только потенциалы, для которых $\sigma < a < b$. Основное их свойство состоит в том, что при приближении $r < a$ частицы отталкиваются, при удалении $r > a$ – притягиваются, причем при $r > b$ потенциал стремиться к нулю (Рис. 1).

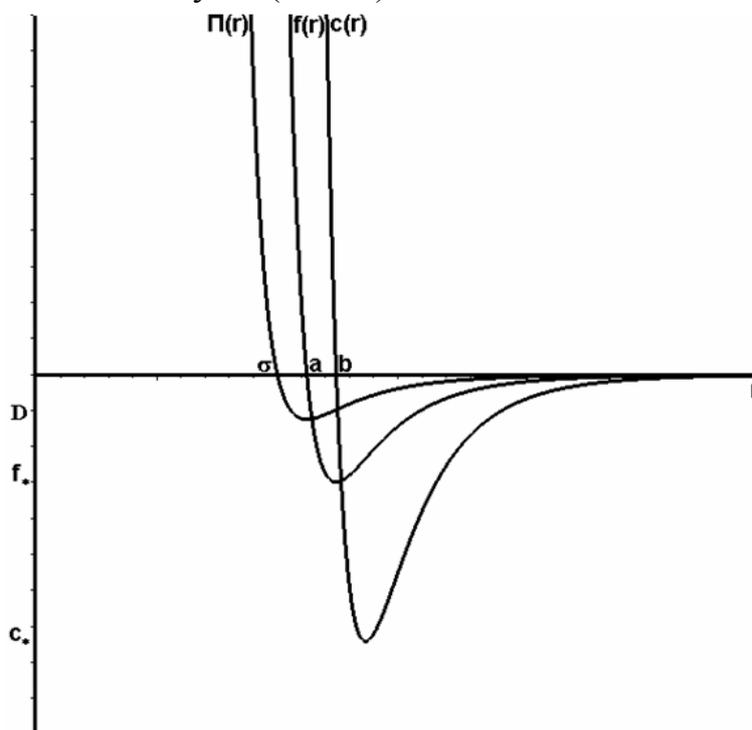


Рис. 1. Зависимость парного потенциала взаимодействия и образованных из него силы и жесткости от расстояния между частицами.

Расстояние a является равновесным расстоянием между частицами, расстояние b является критическим, при котором наступает разрыв межатомной связи. Это строго выполняется для кристалла, в котором учитывается взаимодействие только ближайших соседей. При учете влияния большего числа соседей равновесное и критическое расстояния меняются, однако для достаточно быстро убывающих с расстоянием потенциалов эти изменения являются малыми по сравнению с a и b .

Важными характеристиками являются D и f_* – энергия связи и прочность связи, соответственно. Они определяются соотношениями

$$D = |\Pi(a)|, \quad f_* = |f(b)|. \quad (3)$$

Используя длинноволновое приближение, сделан переход от уравнений, описывающих дискретное строение материала, к уравнениям сплошной среды [1, 3]

$$\rho \ddot{\underline{u}} - \nabla \cdot \underline{P} = 0, \quad (4)$$

где ρ – плотность материала в отсчетной конфигурации, \underline{u} – вектор перемещений, ∇ – оператор Гамильтона в отсчетной конфигурации, \underline{P} – тензор напряжений в форме Пиола, который в параметрах микроструктуры имеет вид [1, 3]

$$\underline{P} \equiv -\frac{1}{2v_*} \sum_{\alpha} \frac{\Pi'(A_{\alpha})}{A_{\alpha}} a_{\alpha} \underline{A}_{\alpha}, \quad (5)$$

где v_* – объем элементарной ячейки в отсчетной конфигурации; a_{α} – вектор проведенный из данной частицы в частицу с номером α в отсчетной конфигурации; \underline{A}_{α} – вектор a_{α} в актуальной конфигурации, $\Pi(r)$ – парный потенциал взаимодействия между частицами, являющийся функцией расстояния между частицами.

Используя уравнение (4) и представление тензора напряжений Пиола (5), на конечную деформацию кристаллической решетки накладывается малая деформация. Получается уравнение деформации, относительно произвольного малого перемещения \underline{u} .

$$m \ddot{\underline{u}} = \underline{C} \cdots (\nabla \nabla \underline{u}). \quad (6)$$

где \underline{C} – тензор упругости имеющий вид

$$\underline{C} = \frac{1}{2} \frac{E}{\alpha} \sum_{\alpha} \frac{\Pi'(A_{\alpha})}{A_{\alpha}} \underline{A}_{\alpha} \underline{A}_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \frac{\Pi''(A_{\alpha}) A_{\alpha} - \Pi'(A_{\alpha})}{A_{\alpha}^3} \underline{A}_{\alpha} \underline{A}_{\alpha} \underline{A}_{\alpha} \underline{A}_{\alpha}. \quad (7)$$

Из представления (7) видно, что на параметры разрушения оказывают влияния расстояния между частицами, а также силы и жесткости связей между частицами, которые являются соответственно первой и второй производными от потенциала взаимодействия.

Ищем волновое решение уравнения (6).

$$\underline{u} = \underline{u}_0 e^{i\omega t} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}, \quad (8)$$

где \underline{u}_0 – амплитуда волны, ω – частота волны, \mathbf{K} – волновой вектор, \mathbf{R} – радиус-вектор.

Обозначим за \underline{D} двойное скалярное произведение тензора жёсткости на тензор, составленный из двух волновых векторов.

$$\underline{D} = \underline{C} \cdot \underline{K} \underline{K}. \quad (9)$$

Подставляем решение (8) в уравнение (6), используя обозначения (7) и (9). Анализ устойчивости проводится по дисперсионным веткам, характеризующим колебание частиц вблизи деформированного состояния. Неустойчивость понимается как экспоненциальное нарастание волны. В результате получен критерий устойчивости для объектов любой размерности.

$$\begin{cases} tr \underline{D} > 0 \\ \det \underline{D} > 0 \end{cases} \quad (10)$$

Для бесконечной одномерной цепочки частиц критерий (10) принимает следующий вид

$$\sum_{\alpha} P''(A_{\alpha}) A_{\alpha}^2 > 0 \quad (11)$$

Из неравенства (11) следует, что при однородном растяжении бесконечной одномерной цепочки частиц при учете взаимодействия только с ближайшими соседями устойчивость будет при положительной жесткости. В других случаях требуется учет как жесткостей, так и расстояний между частицами.

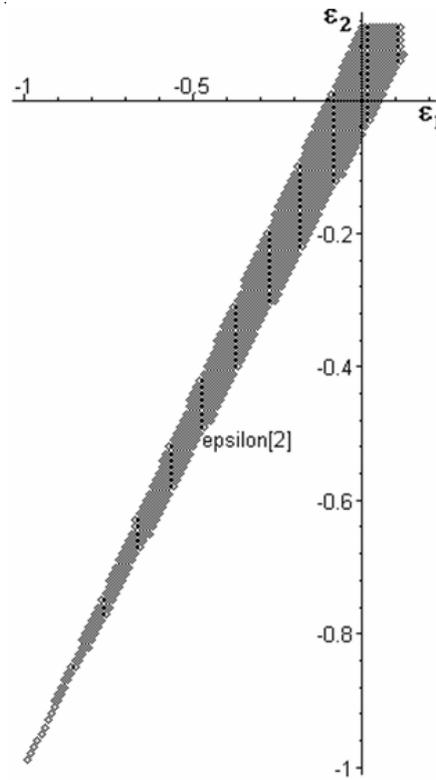


Рис. 2. Область устойчивости в поле деформации бесконечной идеальной плотноупакованной кристаллической решетки при однородном растяжении и сжатии.

Область устойчивости однородной деформации плоской бесконечной кристаллической решетки в поле однородной деформации изображена на Рис. 2. Закрашенная область – это та деформация, при которой кристаллическая решетка будет устойчивой. Из рисунка видно, что материал на сжатие является более прочным, чем на растяжение. Также можно предположить, что на растяжение происходит разрушение, так как расстояние потери устойчивости соответствует расстоянию разрыва связей. На сжатие материал скорее всего терпит фазовое превращение, так как расстояние между частицами уменьшается и напряжение связей возрастает, что может привести как к перемешиванию частиц, так и к образованию новой структуры. Но определенно говорить пока рано, так как это требует дополнительного исследования, которое в данной работе не проводилось.

Автор благодарен А. М. Кривцову и Д. А. Индейцеву за помощь и ценную критику.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-0094-а.

Литература

1. Krivtsov A.M. Constitutive Equations of the Nonlinear Crystal Lattice. ZAMM Z. angew. Math. Mech. 1999. 79(S2). 419-420.
2. Krivtsov A. M. From nonlinear oscillations to equation of state in simple discrete systems. Chaos, Solitons & Fractals, 2002, 17(1), 79-87.
3. Tkachev P. V.: Stability of particle triangle under compression. Proceedings of the XXX Summer School "Advanced Problems in Mechanics", St.-Petersburg, 2002, p. 593-595.

УДК 539.3

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

*Улитин В.В. (Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных технологий, Санкт-Петербург, Россия)*

FINIT-ELEMENT ANALYSIS OF STABILITY OF BEAMS SYSTEMS AT BENDING AND TORSION DEFORMATION

*Ulitin V.V. (Saint Petersburg State University of Refrigeration,
Saint Petersburg, Russia)*

Рассматриваются проблема устойчивости пространственных стержневых и комбинированных систем. Задача об определении критической нагрузки решается с помощью метода конечных элементов. Построена система дифференциальных уравнений, описывающая все возможные изгибно-крутильные формы, которые возникают при нарушении устойчивости. Полная и геометрическая матрица жесткости строится на основе общего решения системы, которе получается методом матрицантов.

1. Введение. Рассматриваются пространственные стержневые и комбинированные системы, в которых стержни работают на сжатие, изгиб и кручение. Остальные элементы системы (балки, ригели, пластины и т.п.) играют роль упругой заделки на концах стержней. Основным элементом в таких системах является стержень, закрепленный по концам упруго, нагруженный продольной силой и концевыми моментами. Встречаются также стержни, нагруженные, кроме того, поперечной распределенной или сосредоточенной нагрузкой. Существующие КЭ программы позволяют рассчитывать достаточно сложные комбинированные системы. Основным достоинством таких программ является возможность исследования пространственных форм потери устойчивости, что позволяет достаточно точно определить величину критической нагрузки. Однако при этом возникает и ряд проблем: обеспечение совместной работы разнородных конечных элементов, реализация сложных изгибно-крутильных форм для отдельных стержней, анализ опасности критических состояний сложных систем. Во многих случаях складывается парадоксальная ситуация: КЭ модель реализует изгибно-крутильные формы выпучивания для конструкции в целом, но не учитывает возможность возникновения таких форм для отдельных стержней. Это обстоятельство приводит к завышению критических нагрузок как для таких элементов, так и для конструкции в целом.

Причина в том, что матрицы жесткости не учитывают возможность возникновения сложных изгибно-крутильных форм выпучивания стержня.

Построение матриц жесткости в этих случаях вызывает определенные трудности, поскольку “функция формы, которая точно применима для изгиба балки, не удовлетворяет строго дифференциальному уравнению, отвечающему данному случаю” [1, стр. 397]. Иными словами, обычная матрица жесткости составляется с помощью точных формул теории стержней, а геометрическая – весьма приближенно. Последствия этого оценить трудно, да и не нужно, поскольку во всех случаях для прямого стержня можно составить и решить в замкнутом виде систему соответствующих дифференциальных уравнений. Имея такое решение построить точные матрицы – дело техники.

2. Глобальная формулировка задачи устойчивости. В большинстве КЭ программ решение задачи устойчивости сводится к определению наименьшего положительного собственного числа для следующей системы уравнений:

$$(K_f + \lambda_r K_g) V_r = 0, \quad (1)$$

где K_f - обычная матрица жесткости, K_g - матрица геометрической жесткости для данной системы, λ_r - собственные числа, V_r - соответствующие им векторы собственных форм. Эта линейная задача решается для идеально упругого материала. Заметим, что при решении

пространственных задач первая матрица учитывает и кручение стержня вокруг продольной оси. Все параметры для всех нагрузок выражаются через один параметр, пропорциональный собственному числу:

$$P_i^c = p_{kp} P_i. \quad p_{kp} = C \lambda_{\min}; \quad \lambda_{\min} > 0. \quad (2)$$

Таким образом, критический параметр показывает, во сколько раз должна быть увеличена действующая нагрузка для того, чтобы наступило критическое состояние. Если $p_{kp} > n_y > 1$, где n_y - некоторый нормативный коэффициент запаса по устойчивости, то конструкция безусловно устойчива. В противном случае необходим дополнительный анализ состояния системы с учетом формы равновесия и несущей способности в закритическом состоянии.

3. Система дифференциальных уравнений, описывающая все возможные формы, которые возникают при нарушении устойчивости стержня построена на базе квазилинейной теории. Перемещения точек оси стержня и углы поворота считаются малыми и их квадраты и взаимные произведения отбрасываются. Внутренние силовые факторы для произвольного сечения определяются с учетом того, что его центр тяжести смещен и главные оси повернуты (рис. 1).

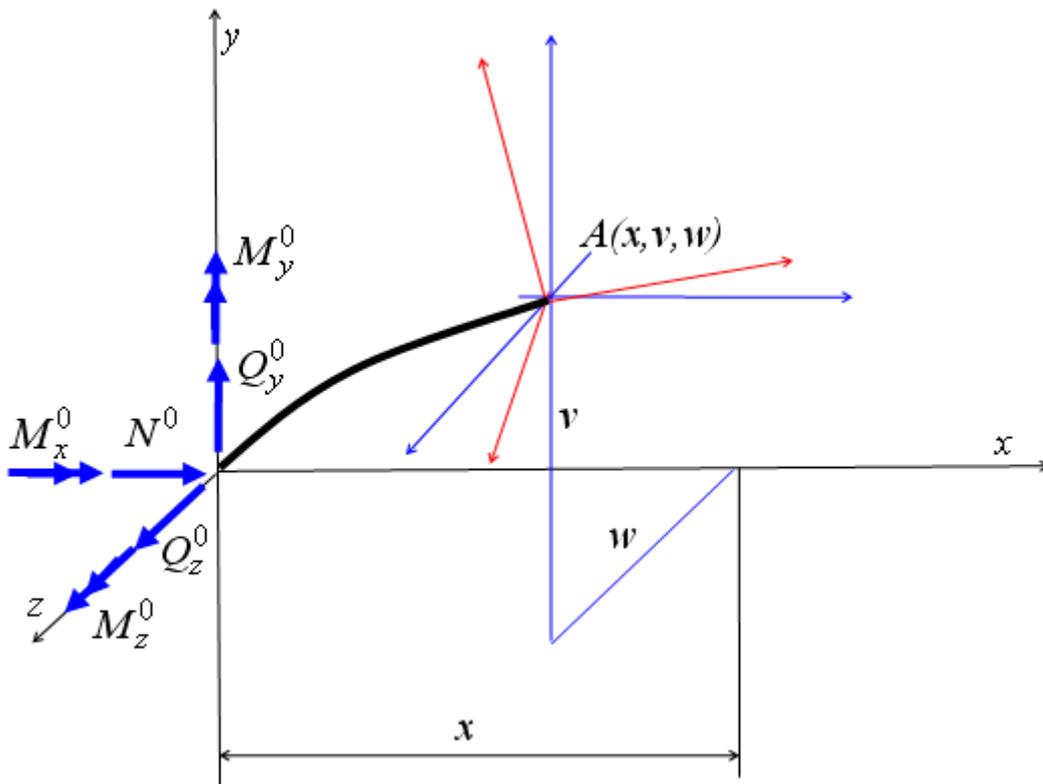


Рис. 1. Схема для составления системы дифференциальных уравнений оси стержня при изгибных и крутильных деформациях.

При приведении сил к центру тяжести сечения матрица, учитывающая поворот главных осей, составлена в предположении малости углов поворота:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \theta_z & -\theta_y \\ -\theta_z & 1 & \theta_x \\ \theta_y & -\theta_x & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Учитывая, что каждый из векторов при приведении к главным испытывает поворот, и используя известные зависимости для изменений кривизны и угла закручивания [2], получим:

$$\left. \begin{aligned} EAu' &= -N^0 + Q_y \theta_z - Q_z \theta_y; \\ G_T \theta'_x &= M_x + Q_z v - Q_y w + M_y \theta_z - M_z \theta_y; \\ B_y \theta'_y &= M_y - N^0 w - M_x \theta_z + M_z \theta_x; \\ B_z \theta'_z &= M_z + N^0 v + M_x \theta_y - M_y \theta_x; \\ v' &= \theta_z; \quad w' = \theta_y. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$G_T = GI_{kp}; \quad B_z = EI_z; \quad B_y = EI_y.$$

Внутренние силовые факторы в глобальной системе координат:

$$\begin{aligned} M_y &= M_y^0 + Q_z^0 x + \frac{q_z x^2}{2}; & M_z &= M_z^0 - Q_y^0 x - \frac{q_y x^2}{2}; \\ Q_y &= Q_y^0 + \frac{q_y x^2}{2}; & Q_z &= Q_z^0 + \frac{q_z x^2}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что в этих выражениях учитываются и распределенные поперечные нагрузки q_y и q_z . Это позволяет описать случай нарушения устойчивости из плоскости продольного сечения, что в классической постановки МКЭ затруднительно, поскольку все силы приводятся к узлам.

Введем общую нумерацию для перемещений

$$y_1 = u, \quad y_2 = v, \quad y_3 = w, \quad y_4 = \theta_x, \quad y_5 = \theta_y, \quad y_6 = \theta_z.$$

и представим (4) как систему дифференциальных уравнений нормального вида:

$$Y' = AY + F. \quad (6)$$

4. Общее решение системы (6) можно получить методом матрицантов [3,4]:

$$Y = Y_A + Y_F = \Omega Y_0 + \Omega \int \Omega^{-1} F. \quad (7)$$

Матрицант представляет собой матричный ряд, полученный последовательным применением операции интегрирования:

$$\Omega = I + \int A + \int A \int A + \int A \int A \int A + \int A \int A \int A \int A + \dots \quad (8)$$

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \int(\dots) = \int_0^x (\dots) dx. \quad (9)$$

Из (9) следует, что $\Omega(0) = I$, $Y(0) = Y_0$. Таким образом, метод матрицантов позволяет выразить решение через начальные параметры, то есть через значения перемещений и углов поворота в начале координат. Поскольку коэффициенты матрицы A представляют собой полиномы, элементы матрицанта выражаются через степенные ряды, которые достаточно быстро сходятся.

Пример. В качестве примера применения метода матрицантов рассмотрим получения общего решения в рядах для балки прямоугольного сечения под действием поперечной нагрузки [5, стр. 273]. Дифференциальное уравнение и общее решение задачи в этом случае имеют вид:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + k^2\xi^2 = 0. \quad \Rightarrow \quad \theta = A\Phi(k, \xi) + B\Psi(k, \xi).$$

$$\Phi(k, \xi) = 1 - \frac{\xi^4 k^2}{3 \cdot 4} + \frac{\xi^8 k^4}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{\xi^{12} k^6}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots$$

$$\Psi(k, \xi) = \xi - \frac{\xi^5 k^2}{4 \cdot 5} + \frac{\xi^9 k^4}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{\xi^{13} k^6}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \dots$$

Введем обозначения: $\theta = y_1$; $\theta' = y_2$; $\theta'' = y_2' = -k^2\xi^2 y_1$; и будем последовательно выполнять алгоритм (8):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\xi^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \int A = \begin{bmatrix} 0 & \xi \\ -\frac{1}{3}k^2\xi^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A \int A = \begin{bmatrix} -\frac{k^2\xi^3}{3} & 0 \\ 0 & -k^2\xi^3 \end{bmatrix}, \quad \int A \int A = \begin{bmatrix} -\frac{k^2\xi^4}{3 \cdot 4} & 0 \\ 0 & -\frac{k^2\xi^4}{4} \end{bmatrix}.$$

$$A \int A \int A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k^2\xi^4}{4} \\ \frac{k^4\xi^6}{3 \cdot 4} & 0 \end{bmatrix}, \quad \int A \int A \int A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k^2\xi^5}{4 \cdot 5} \\ \frac{k^4\xi^7}{3 \cdot 4 \cdot 7} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A \int A \int A = \begin{bmatrix} -\frac{k^2 \xi^7}{3 \cdot 4 \cdot 7} & 0 \\ 0 & -\frac{k^2 \xi^7}{4 \cdot 5} \end{bmatrix}, \quad \int A \int A \int A = \begin{bmatrix} -\frac{k^2 \xi^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} & 0 \\ 0 & -\frac{k^2 \xi^8}{4 \cdot 5 \cdot 8} \end{bmatrix} \text{ и т.д.}$$

В первой строке матрицы Ω формируются функции Φ и Ψ , а во второй - их производные.

5. Матрицы жесткости для конечного элемента. Для пространственного КЭ введем последовательную нумерацию степеней свободы от начала координат (рис. 2).

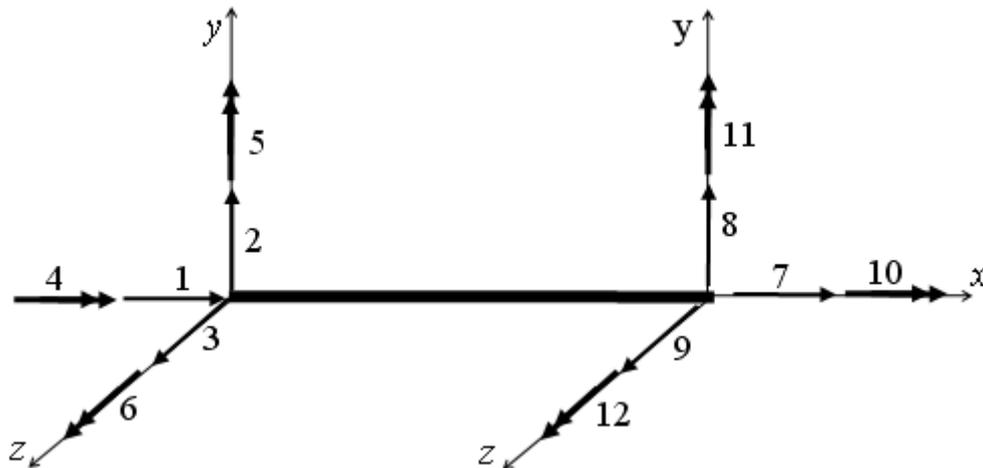


Рис. 2. Схема конечного элемента.

Тогда элементы вектора перемещений будут связаны с перемещениями в системе (6) следующими равенствами:

$$\Delta_i = y_i(0) = y_i^0, \quad i = 1, \dots, 6; \quad \Delta_i = y_i(l), \quad i = 7, \dots, 12.$$

$$Y(l) = \Omega(l) \left(Y^0 + \int_0^l \Omega^{-1} F \right).$$

Обобщенные силы связаны с перемещениями через матрицу жесткости:

$$\{R\} = [K]\{\Delta\} \quad (10)$$

Эти усилия должны удовлетворять уравнениям равновесия КЭ в целом:

$$\begin{aligned} R_k + R_{k+6} &= 0 \quad k = 1, \dots, 4; \\ R_5 + R_{11} - R_9 l &= 0; \\ R_6 + R_{12} + R_8 l &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Для того, чтобы найти элементы матрицы $[K]$, закрепим все узлы КЭ жестко и будем последовательно задавать одно из обобщенных перемещений

$$\Delta_i = 1, \quad \Delta_j = 0, \quad j \neq i, \quad \Rightarrow \quad k_{k,i}.$$

При этом если используются выражения для внутренних силовых факторов (4) и (5) и уравнения равновесия (11). Тогда геометрическая матрица жесткости может быть получена как разность:

$$[K_g] = [K] - [K_f]. \quad (12)$$

Матрица $[K_f]$ - известна, поскольку это обычная матрица жесткости для трехмерного стержневого КЭ с 12-ю степенями свободы.

Реализация алгоритма по формулам (6-12) возможна и в численном виде. В последнем случае все функции задаются множеством своих значений на сетке с достаточным числом узлов для вычисления интегралов. Такой подход предпочтителен, поскольку нет необходимости преобразования и программирования сложных алгебраических выражений. Примеры применения метода матрицантов в численном виде даны в работе [4].

В заключение необходимо отметить, что метод матрицантов в численном варианте позволяет строить матрицы жесткости для одномерных систем, не используя тех или иных аппроксимирующих функций формы, поскольку есть общее решение (7).

Литература

1. Галагер Р. Метод конечных элементов. Основы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 428с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
4. Улитин В.В. Итерационные алгоритмы решения задач механики на ЭВМ. – С.Пб.: Изд-во СПб. ГУ, 1991. – 132 с.
5. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов./ А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

О ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕФОРМАТИВНЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ СПЛОШНЫХ СРЕД

*Федоровский Г.Д. (НИИ математики и механики СПбГУ,
Санкт-Петербург, Россия)*

Рассмотрены проблемы физико-математического описания упруговязко-пластичности, фазовых переходов и разрушения сплошных сред. Отмечено, что, несмотря на существенные различия структур многих сред наблюдается имеющая фундаментальный характер общность их макроскопических свойств. Проанализировано применение единого подхода к различным средам, базирующегося на фундаментальных и наиболее эффективных в настоящее время макрофизических концепциях «памяти» сред и их «внутреннего» времени.

ABOUT PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODELLING OF DEFORMATION AND STRENGTH PROPERTIES OF CONTINUOUS MEDIA

*Fedorovsky G.D. (Scientific research institute of mathematics and mechanics
of St.-Petersburg state university, Russia)*

The problems of physical and mathematical description of elasticity-tenacity-plasticity, phase transitions and strength of continuous media is considered. It is marked, that, despite essential differences of structure of many media the similarity of their macroscopic properties, having fundamental character, is observed. The use of the uniform approach to various media, based on fundamental and most effective now macroscopic-physics concepts of «memory» of media and their «internal» time is analysed.

Перед исследователями стоит вечная проблема об идеальном физико-математическом описании механического поведения сред. Можно придумать или получить эмпирически различные математические определяющие выражения, вполне точно характеризующие механический, а, следовательно, и физический процесс, но вид выражений и параметры на которых они базируются могут не иметь ясного физического смысла. Какие должны применяться физические концепции и вытекающие из них математические выражения? Какими должны быть параметры в этих выражениях? Этим вопросам посвящена данная работа.

Как известно, деформативные и прочностные свойства сред существенно зависят от их строения [1-5 и др.] Поведение металлов обусловлено кристаллографией и размерами зерен в них, фазовым состоянием, устройством межзеренного пространства, механизмами проявлений дислокаций и дефектов в них. Свойства полимеров зависят от составляющих их длинных линейных или разветвленных цепных макромолекул, построенных из большого числа часто небольших однотипных звеньев, представляющих собой весьма гибкие образования. Деформирование макромолекулы сопровождается изменением конформации основных цепей. По отношению к отдельным звеньям цепной макромолекулы полимер является как бы жидким (высокоэластичным) телом, а по отношению к макромолекуле в целом - стеклообразным. Особенности полимеров, их свойств зависят не только от молекулярной структуры, но и от характера надмолекулярных образований, которые могут быть, как и молекулы, весьма разнообразными. Композитные материалы на основе металлов, стекол, полимеров и других материалов, в частности керамики, проявляют свойства, обусловленные характеристиками их компонент и свойствами границ компонент. Горные породы и грунты, особенно водонасыщенные, в условиях замораживания и размораживания, обнаруживают соответствующее их строению и состоянию нетривиальное механическое

поведение. Они, как полимеры и другие материалы, при изменении температуры имеют фазовые переходы.

Проблема построения определяющих соотношений вязко-упругости, текучести и прочности (повреждаемости) чрезвычайно трудна, тем более для «реологически сложных» сред, проявляющих нелинейные свойства. По существу, она представляет собой некорректную обратную задачу типа «черного ящика», когда известно, что на входе (заданы условия деформирования образца) и выходе (измеряется его поведение), но неизвестно, что внутри (каков механизм, природа, закон деформирования, связанные со сложным строением материала и нетривиальной восприимчивостью к воздействиям).

Известны многочисленные попытки построения микроскопических (структурных, эффективных) моделей на нано-, субмикро- и мезоуровнях, а также феноменологических (макроскопических) моделей, в той или иной степени учитывающих физическое строение и поведение различных сред, параметры которых имеют определенный физический (и физико-химический) смысл.

Структурные, например, микромоделли с ясным физическим смыслом их параметров необходимы для детального анализа влияния внутреннего строения на механическое поведение среды. Они полезны при разработке и создании новых материалов. Однако в настоящее время такие модели строятся лишь при введении гипотез, в частности, различного вида потенциалов, которых уже придумано большое количество. Модели мезо-композитных сред также основаны на значительном количестве допущений. Параметры структурных моделей и их работоспособность устанавливаются по данным макроскопических испытаний.

Феноменологические модели нужны для оценки поведения материала как сплошной среды и для решения краевых задач механики при изучении поведения различных тел и элементов конструкций, в задачах их разработки, оптимизации и эксплуатации, при создании и оптимизации технологий изготовления. В определенном смысле такие модели могут обладать большей обоснованностью по сравнению со структурными, т.к. их параметры находятся непосредственно из макроэкспериментов.

Необходимо отметить, что несмотря на очевидные отличия структур разных сред и связанных с этим различия их детального механического поведения, существуют и весьма общие макроскопические проявления для всех сред. 1) Бросается в глаза то, что при определенном выборе температуры испытания большинство материалов имеет схожие диаграммы «напряжение - деформация» при нагружении образца с постоянной скоростью деформирования вплоть до его разрушения. Имеется четыре характерных участка: а) упругого поведения; б) пластичности; в) ползучести; и г) течения (интенсивного накопления повреждений). Для некоторых материалов, при определенных

температурах, отдельные участки могут отсутствовать. 2) При повышении или понижении температуры все материалы обнаруживают фазовые переходы, проявляющиеся, прежде всего, в изменении механических свойств. 3) При существенном повышении скорости нагружения наблюдается структурный динамический переход. 4) В определенных интервалах напряжения, температуры и скорости деформирования ко всем средам применима известная кинетическая теория [5] для расчетов установившейся ползучести и разрушения, основанная на термофлуктуационной природе механических процессов, обусловленных степенью преодоления энергетических барьеров. 5) Для описания вязкоупругопластических свойств всех сред применимы и, поэтому используются модели с пружинками, демпферами и элементами сухого трения (модели Ньютона, Кельвина, Фойгта, Кольрауша и т.д.). Вводят в соответствии с количеством этих элементов спектр времен релаксации. 6) Все материалы обладают «памятью» о предшествующем воздействии, - на этом основываются теории «наследственности», основанные на суммировании откликов материала на воздействия. 7) Для большинства сред известно применение различных физико-химико-механо-временных аналогий и, в первую очередь, температурно-временной, основанной на физических законах Аррениуса, Вильямса-Ланделла-Ферри и др., обосновывающих (термофлуктуационное) ускорение или замедление механического процесса при изменении температуры и других параметров воздействия. 8) Все материалы в процессе применения в той или иной степени подвержены старению (деструкции), учет которого может быть единым. Известны различные подходы для такого учета.

Такая общность макроскопических проявлений сред при очевидном различии их структуры на разных уровнях связана с определенной общностью некоторых фундаментальных физических свойств материи, на различных микро- и мезо- уровнях. Эта общность побуждает многих исследователей строить универсальные модели для различных сред. Их создание затруднено тем, что большинство сред имеет сложное гетерогенное строение и даже относительно гомогенные структуры имеют различные дефекты. Поэтому применение идеально «чистых» физических описаний представляется нереальным.

Для создания наиболее обоснованных, единых, универсальных, унифицированных [6] макроскопических моделей, очевидно, необходимо использовать основные фундаментальные макрофизические понятия (концепции, гипотезы, принципы).

В настоящее время наиболее эффективными и фундаментальными для построения определяющих механических феноменологических моделей следует считать следующие три физико-механические концепции: 1) концепцию «памяти» сред о воздействии («память» проявляется в упругих (мгновенная) и неупругих (временная или мгновенная) откликах на

воздействия); 2) гипотезу собственного, внутреннего (обобщенного) времени среды - «эндохронную» концепцию (при воздействиях на среды время процессов деформирования и разрушения изменяется); 3) принцип инвариантной зависимости функций памяти сред и меры внутреннего времени от инвариантов тензоров напряжений и деформаций или энергии, необходимый для построения моделей в случае сложного напряженно-деформированного состояния изотропной и анизотропной среды при нелинейном их поведении.

Основными параметрами таких моделей являются: а) функции памяти (функции вязкоупругопластичности), а также функции долговечности (повреждаемости) и меры повреждаемости; б) масштабы (меры) внутреннего времени.

Математический вид этих моделей, обусловленный используемыми макрофизическими концепциями, следующий. а) Связь тензора деформаций и напряжений или их функций, а также повреждаемости от времени имеют вид наследственного линейного или нелинейного интегрального (операторного) уравнений, ядра которых представляют собой функции памяти. б) Зависимость внутреннего времени от лабораторного чаще всего также имеет вид линейного или нелинейного интегрального соотношения, ядро которого является мерой времени - функцией или функционалом «памяти» внутреннего времени о воздействии напряжений, деформаций, температуры, влажности, полимеризационного процесса, радиационного воздействия, старения и др. физико-химико-механических влияний.

Разработано множество определяющих моделей механики при таких подходах. Многие из них имеют имя своих авторов [7].

Условно определяющие соотношения деформативности можно разделить на следующие основные классы. 1) Типа кратно-интегральных рядов Вольтерра-Грина-Ирвина-Фреше и др.. 2) Моноинтегрального вида с нелинейными ядрами Арутюняна, Больцмана-Лидермана-Персо, Бронского, Бугакова, Брызгалина, Занадворова, Ильюшина, Лидермана-Розовского, Павлова, Победри, Ржаницина, Самарина, Ужахова и т.д.. 3) Базирующиеся на применении линейного интегрального оператора Вольтерра или Стилтеса, связывающие нелинейные функции напряжений и деформаций, - подходы Москвитина и Работнова. 4) Теории с использованием для учета нелинейности внутреннего времени Бажанта, Бугакова, Вакуленко, Валаниса, Карнаухова, Максимова, Федоровского, Уржумцева, Шэпери, и др., с линейными или нелинейными ядрами. 5) Идеологии прочности, повреждаемости и наступления предела текучести базируются преимущественно на концепциях линейного Бейли, Ильюшина, Качанова, Никифоровского, Победри, Работнова, Шемякина и т.д. и б) нелинейного Быкова, Груздкова, Ильюшина, Качанова, Морозова, Петрова, Победри, Работнова, Федоровского и др. (интегрального)

накопления повреждений и использовании соответствующих силового, деформационного, энергетического и энтропийного, импульсного и эндохронного подходов.

Известно, что математическое описание деформативных свойств сред проявляющих нелинейные свойства с существенно ускоренным или замедленным откликами на воздействия (с упрочнением и разупрочнением) нельзя во всех случаях описать с помощью моноинтегрального представления, без использования обобщенного времени. Такое описание можно выполнить путем применения кратнointегральных формулировок, однако применение такого подхода сильно ограничено плохой обусловленностью матриц, определяющих кратнointегральное описание, особенно высоких порядков, и другие недостатки подхода.

Лишь в шкале внутреннего времени, при соответствующей нормировке [7, 8], уравнения могут имеют канонический вид квазилинейных наследственных интегральных соотношений, что удобно для теоретического и практического применений и позволяет единым обозримым и инвариантным (унифицированным) образом, путем трансформирования времени (только «горизонтальным» сдвигом [2]), учесть влияния на среды всяких физико-химико-механических воздействий. Применение «вертикальных» сдвигов или комбинации разных сдвигов [2], на которых базируются другие подходы не позволяет получить такой исключительно удобный канонический вид соотношений. Другие подходы приводят к эклектике (неоднотипности) введения параметров определяющих соотношений, заключающейся в том, что при моноинтегральном описании (2) функции памяти могут зависеть от времени и от напряжений (деформаций), как и внутреннее время, если оно используется. Например, для металла, функция памяти может представлять собой произведение степенных функций от напряжения (Нортон) и времени (Бейли). При кратнointегральном подходе (1) (при отмеченных других недостатках) также наблюдается неоднотипность введения параметров. Используется набор функций памяти разного порядка, для которых внутреннее время может быть разным). Подход, базирующийся на линейной связи функций напряжений и деформаций (3), требует не единой идеологии при учете механической нелинейности и влияний от других воздействий. В общем, утверждать о «физичности» параметров при таких подходах затруднительно.

Только отмеченный «канонический», унифицированный подход, основанный на использовании квазилинейного интегрального уравнения Больцмана-Вольтерра в пространстве внутреннего времени, учитывающего нелинейность и другие влияния, не имеет этих недостатков. Его основными параметрами являются: а) функция памяти - функцией линейной вязкоупругопластичности (обобщенная функция в шкале

внутреннего времени), зависящая только от внутреннего времени; б) масштабы (меры) внутреннего времени, характеризующие ускорение или замедление процесса деформирования при соответствующих физико-химико-механических воздействиях, - функции или функционалы, зависящие от лабораторного времени, величин воздействий и скорости их изменения. Эти параметры имеют ясный физический смысл. Они единообразно отражают различие структур и их реакцию на воздействия.

Математические выражения параметров могут иметь разный вид, что связано с гетерогенностью структур большинства сред. Это известно из многих работ. Функция памяти может иметь степенную зависимость (Бейли), суммы экспонент, коэффициенты которых зависят от времен релаксации (со сплошным или непрерывным спектром времен релаксации) или иную. Например, в [2] для масштаба времени по температуре рассмотрено и предложено несколько выражений типа дробно-линейного и др., а также классических типа Аррениуса и ВЛФ. По нашему мнению, при решении задач практики необязательно всегда стремиться к аналитическому описанию функций на всем необходимом интервале, т.к. это может повлечь необходимость применения сложных математических выражений. Часто вполне достаточно использовать кусочное (сплайновое) задание функций, имеющих существенно более простой вид. Особенно это важно при исследовании фазовых переходов.

Необходимо также отметить проблему обращения определяющих соотношений в нелинейной области связанную с тем, что в этой области большинство теорий приводят к уравнениям ползучести (пластичности) и релаксации не являющимися взаимнообратимыми в своем математическом классе (такое обращение допускает теория кратных интегралов с бесконечным их числом и некоторые ее конечные «главные» варианты, а, кроме того, теория Москвитина. В [6, 7] рассмотрен, по крайней мере с хорошей степенью приближения, удобный способ обращения, основанный на гипотезе равенства собственных времен ползучести (пластичности) и релаксации.

Каноническая форма уравнений повреждаемости или наступления текучести определяется использованием квазилинейного интегрального уравнения Бейли в шкале внутреннего времени, определяющими параметрами которого являются: а) функция (памяти) долговечности (наступления текучести) в пространстве внутреннего времени (при соответствующей нормировке параметров она совпадает с функцией долговечности в шкале лабораторного времени); б) масштабы внутреннего времени как функции какого либо механического параметра (инвариантов напряжений, их скоростей, инвариантов деформаций, их скоростей, энергии, импульса); в) меры повреждаемости (текучести).

Следует отметить, что качестве критерия разрушения и фазового перехода можно можно применять критерий эндохронного типа [7],

основанный на том, что при достижении внутреннего времени определенной инкубационной величины происходит разрушение или фазовый (например, зависящий от температуры) переход.

В заключение следует констатировать пока еще в общем недостаточно полное и конструктивное развитие эндохронного направления во многих работах, что не всегда позволяет с достаточной точностью и лаконичностью описывать нетривиальные процессы. Введение «сложных» масштабов времени - в виде функционалов позволяет устранить многие недостатки описания. Эндохронный метод дает возможность связать вязкоупругопластические свойства сред с прочностными. Выявлен иерархический набор масштабов удобный для различных сред и видов нагружения. Экспериментальные данные для полимеров, металлов и др. сред позволяют сделать вывод о том, что предложенный набор масштабов является набором физических характеристик сред, отражающих их структуру (масштабные уровни), активизирующие или тормозящие проявления воздействий, изменяющих времена релаксационного спектра, «чувствующих» физические (фазовые и др.) переходы. «Физичность» масштабов подтверждается, например, тем, что в [9] получено точное аналитическое выражение масштаба внутреннего времени для случая «физической» теории надбарьерного и подбарьерного механического и электрического (пробоя) разрушения [10].

Построены канонические уравнения деформативности и повреждаемости для случая сложного напряженно-деформированного состояния изотропных и анизотропных сред.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ НШ 2288.2003.1.

Литература

1. XIY Петербургские чтения по проблемам прочности. Санкт-Петербург, 12-14 марта 2003 г.: Сб. тез. СПб., 2003, 230 с.
2. Уржумцев Ю.С., Максимов Р.Д. Прогностика деформативности полимерных материалов. - Рига: Зинатне, 1975. - 416 с.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов.: Пер. с англ. - М.: Мир, 1982. - 336 с.
4. Ершов Э.Д. Общая геокриология: Учебн. для вузов. - М.: Недра, 1990. - 559 с.
5. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел .М.: Наука, 1974. - 560 с.
6. Ключников В.Д., Овчинников Н.В. Наследственность с унифицированной памятью. // Пластичность и разрушение твердых тел: Сб. статей. - М.: Наука, 1988. - С. 95-101.
7. Федоровский Г.Д. О фундаментальных подходах макрофизического моделирования деформативных и прочностных свойств реологически сложных сред. // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. - Сб. тр. научн. шк. акад. В.В. Новожилова. Вып. 5 - СПб. 2002. - С. 100-111.

8. Федоровский Г.Д. Определяющие уравнения реологически сложных полимерных сред. // Вестн. Ленингр. ун-та.: Матем., механ., астрон. - 1990. - Вып. 3, № 15. - С. 87-91.
9. Федоровский Г.Д. Математические модели эндохронного типа надбарьерного и подбарьерного (туннельного) разрушения сплошных сред. // Вестн. Тамб. университета. Сер.: Естеств. и технич. науки. - Т. 8, вып. 4, 2003. - С. 613-614.
10. Регель В.Р., Слуцкер А.И. О кинетике механического и электрического разрушения // К 90-летию академика Серафима Николаевича Журкова: Сб. статей. СПб: ФТИ, 1995. - С. 14-20.

ОБ ЭНДОХРОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Федоровский Г.Д. (НИИ математики и механики СПбГУ, Россия)

Проанализированы и обобщены на базе эндохронной концепции (собственного времени) основные технические теории нелинейной ползучести: теория старения (временного упрочнения), теория течения и теория деформационного упрочнения с функциями ползучести Бейли и Нортон. В пространстве этого времени модифицированные уравнения ползучести имеют канонический квазилинейный вид. Они дают возможность более полного и унифицированного описания нелинейных процессов.

ABOUT ENDOCHRONIC REPRESENTATION OF TECHNICAL THEORIES OF NONLINEAR CREEP

Fedorovsky G.D. (Scientific research institute of mathematics and mechanics of St.-Petersburg state university, Russia)

The formulation and generalization of technical theories of nonlinear creep on endochronic concepts (own time) is considered: theories of ageing, theories of fluidity and deformation hardening with functions of creep by Baily and Norton. Scales of own time are received. In the space of this time the modified equations of creep have a canonical quasy-linear view. They give more ample possibilities for the description of nonlinear processes.

1. Введение. Рассмотрены основные технические теории нелинейной ползучести [1, 2 и др.]. К существенному достоинству этих теорий будет справедливо отнести их относительную простоту и, в той или иной степени, удовлетворительную точность описания некоторых процессов ползучести: при довольно высоких уровнях напряжений и в случае невысоких градиентов изменения скорости деформирования в немонотонных процессах. К некоторым недостаткам следует отнести отсутствие возможности адекватного описания участка линейной ползучести.

К техническим теориям относят теорию старения (временного упрочнения):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^c(t), \quad \varepsilon^e(t) = \frac{\sigma(t)}{E}, \quad \varepsilon^c(t) = f(t, \sigma), \quad f(t, \sigma) = f_1(t)f_2(\sigma), \quad (1)$$

(чаще всего применяют функцию ползучести Бейли [2] $f_1(t) = f_B(t) = B_1 t^m$, и функцию Нортон [1, 2] $f_2(\sigma) = f_N(\sigma) = B_2 \sigma^n$); теорию течения:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^c(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{\partial f(t, \sigma)}{\partial t} \rightarrow \varepsilon(t) = \int_0^t \mathbf{P}[t - \tau, \sigma(\tau)] \sigma(\tau) d\tau, \quad (2)$$

$$\mathbf{P}(\rho, \sigma) = \frac{1}{E} + \frac{f(\rho, \sigma)}{\sigma}$$

и теорию (деформационного) упрочнения:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^c(t), \dot{\varepsilon}^c(t) = f_d(\varepsilon^c, \sigma) = \frac{\alpha \sigma^\nu}{(\varepsilon^c)^\beta} \rightarrow \varepsilon^c(t) = \left[\alpha(1 + \beta)t \sigma^\nu \right]^{1/(1+\beta)}. \quad (3)$$

Здесь ε , ε^e и ε^c - полная деформация, ее упругая и неупругая части; σ , E , t и \mathbf{P} - напряжение, модуль упругости, время и функция ползучести; а B_i , n , m , α , β и ν постоянные среды. Нетрудно заметить, что уравнения теорий старения и упрочнения в случае функций f и f_d определенного вида имеют форму конечных (фактически одинаковых) уравнений, именно по этой причине их применение к немонотонным, особенно высоко градиентным, процессам деформирования мало эффективно. В гораздо меньшей степени этот недостаток свойственен и теории течения, хотя она базируется на более обоснованном Больцмановском принципе суперпозиции откликов среды на воздействия, учитывающем ее затухающую «память» к воздействиям. Но дело в том, что Больцмановский принцип не позволяет учесть существенно ускоренные или заторможенные отклики среды (с упрочнением или разупрочнением). Необходимо также отдельно отметить некоторые недостатки применения функции Бейли и Нортон в уравнениях ползучести, заключающиеся в том, что благодаря виду функций уравнения проявляют ползучесть и не линейны даже при небольших значениях σ (отсутствуют участки упругости и линейности), поэтому их применение позволяет адекватно описывать процессы ползучести только при больших значениях σ .

Целью данной работы является модификация технических теорий ползучести по эндохронной концепции (собственного, внутреннего времени) [3] и некоторая их дополнительная корректировка.

Это позволяет привести отмеченные выше уравнения к каноническому квазилинейному виду и существенно расширить возможности их применения. В ряде работ [1, 4, 5 и др.] дан вид функций f_1 , f_B и f_N для различных сталей и других материалов при ряде температур испытания.

2. Модификация теорий. Будем считать, что при некотором небольшом уровне напряжения $\sigma \leq \sigma_l = k\sigma_s$ (σ_l - предел линейной ползучести; σ_s - временное сопротивление) и интервале времени $t \geq t_{0+}$

функция $f_1 = B\sigma$, а $f(t, \sigma) = Bt^m \sigma$. При большем уровне напряжения функция нелинейной ползучести имеет вид $f = f_B f_N$ (1). В интервале времени $t < t_{0+}$ среда проявляет только свойство упругости: $\varepsilon^e(t) = \frac{\sigma(t)}{E}$.

Значение момента времени t_{0+} перехода среды к состоянию ползучести может быть выбрано из условия того - какие процессы рассматриваются: быстрые (динамические) или медленные (квазистатические). В соответствии с этим, модуль упругости E может быть определен из данных испытаний в акустическом или статическом диапазоне (для соответствующего t_{0+}). Таким образом, общий вид функции упруго-ползучести будет:

$$P(t, \sigma) = \frac{\varepsilon(t, \sigma)}{\sigma} = \frac{1}{E} [H(t) - H(t - t_{0+})] + Bt^m [H(\sigma) - H(\sigma - \sigma_l)] + Bt^m \sigma^{n-1} H(t - t_{0+}) H(\sigma - \sigma_l). \quad (4)$$

Здесь первое слагаемое – упругая часть, второе – относящееся к линейной ползучести, а третье – к нелинейной ползучести; H – функция Хевисайда, равная единице при значении аргумента больше или равном нулю и равная нулю в других случаях.

По эндохронной концепции [3, 5, 6] (при введении внутреннего времени $\xi^\sigma = g^\sigma(t, \sigma) \cdot t$, где g^σ - масштаб этого времени)

$$P(t, \sigma) = P(\xi^\sigma), \quad (5)$$

где P - линейная функция аргумента ξ^σ вида второго слагаемого в (4):

$P(\xi^\sigma) = B[\xi^\sigma]^m$. Из равенства (5) следует, что масштаб внутреннего времени для технических теорий при используемых допущениях для функций f_B и f_N равен

$$g^\sigma(t, \sigma) = g^\sigma(\sigma) = \sigma^{\frac{n-1}{m}}, \quad (6)$$

а при $\sigma \leq \sigma_l$ $g^\sigma(t, \sigma) = 1$, $\xi^\sigma = t$.

Следует отметить, что обычно, когда неизвестен аналитический вид функции $P(t, \sigma)$ и $P(t)$, или уравнение (5) неразрешимо относительно g^σ , - получить g^σ можно путем смещения вдоль оси t кривых $P(t, \sigma)$ при различных σ до слияния с кривой $P(t)$. Это обычная практика для так называемой напряженно-временной аналогии. Наиболее часто подобная процедура проводится при применении температурно-временной аналогии. Недостатком такого подхода является то, что значения $P(t)$ должны быть известны в очень широком интервале t (в широком

экспериментальном «окне»), на порядки превышающем удовлетворительные значения t для $P(t, \sigma)$. В случае известного аналитического вида функции $P(t, \sigma)$ и $P(t)$, а также разрешимости уравнения (5) относительно g^σ , определение обеих функций достаточно проводить в одинаковом экспериментальном окне соответствующем интервалу исследуемого процесса ползучести. Для рассматриваемых технических теорий этот подход оказался очень эффективным.

Таким образом, простейшей модификацией теории течения являются выражения:

$$\varepsilon(t) = \int_{0^-}^{\xi^\sigma} P(\xi^\sigma - \zeta) \sigma(\zeta) d\zeta = \int_{0^-}^t P(\xi^\sigma - \zeta) \sigma(\tau) d\tau, \quad \xi^\sigma - \zeta = \int_{\tau^+}^{t^-} g^\sigma[\rho, \sigma(\rho)] d\rho. \quad (7)$$

Они соответствуют технической теории (2) с поправками (4). Первое выражение имеет квазилинейный вид. Оно подчиняется Больцманскому принципу суперпозиции.

В случае модификации масштаба внутреннего времени g^σ в (7), имеющего вид функции от σ (6), путем его замены, например, на относительно простой линейный масштаб – функционал вида

$$\bar{G}^\sigma(\sigma, \bar{q}\sigma) = g^\sigma(\sigma)[1 + \bar{q}\sigma], \quad \bar{q}\sigma = \int_0^\rho q(\lambda) \sigma(\lambda) d\lambda, \quad q(0) = 0, \quad (8)$$

можно описать ползучесть сред с ускоренными или замедленными откликами. Здесь $q(t)$ – функция на участке немонотонного нагружения, вызывающая изменение масштаба g^σ вида (8) не только на участке немонотонного нагружения, но – до конца всего процесса деформирования, по свойству «памяти» среды, обеспечиваемой функционалом \bar{q} . Видно, что на участках, где $\sigma = 0$ $\bar{G}^\sigma = g^\sigma$. Функция $q(t)$ может зависеть от знака σ , т.е. иметь вид $q = q[t, \text{sign}(\sigma)]$. Для ее определения необходимо провести соответствующие эксперименты при разных знаках σ . Наиболее простыми опытами являются – ступенчатые: с «мгновенным» приложением постоянного усилия к образцу и, через некоторое время, – «мгновенным» снятием его, либо увеличением. Для таких видов нагружения определяющие уравнения (7) и (8) имеют вырожденную простую форму, используя которую можно найти q . В частности, в первом случае, когда $\sigma(t) = [H(t) - H(t - t_1)]\sigma^0$, где σ^0 – постоянное напряжение, t_1 – момент разгрузки, t – время процесса, – деформация равна $\varepsilon(t) = P[g^\sigma(\sigma^0)t] - P[g^\sigma(\sigma^0)(1 + q(t_1)\sigma^0)(t - t_1)]$. В наших работах, например, в [6] приведен более общего вида нелинейный

функционал \bar{G}^σ для реологически сложных полимерных сред. Они проверены экспериментально [7].

3. Выводы. Рассмотрены достоинства и недостатки технических теорий нелинейной ползучести, вытекающие из формы уравнений состояния и вида определяющих функций. На базе эндохронной концепции и выделения областей упругости, линейной и нелинейной ползучести произведена модификация теорий, позволившая привести их к квазилинейному виду в шкале внутреннего времени и существенно расширить область применения. Для экспериментального определения определяющих параметров для полученных уравнений не требуется широкое экспериментальное «окно».

Литература

1. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Будівельник, 1970. – 308 с.
2. Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред. – Тверь: ТГТУ, Чудо, 2000. – 703 с.
3. Valanis K. C. Proper tensorial formulation of the internal variable theory. The endochronic time spectrum. // Arch. Mech. 177, v. 29, № 1. P. 173-185.
4. Справочник машиностроителя. – М.: Машгиз. Т. 3, 1962; т. 6, 1964.
5. Александров Д.П., Санников В.А., Федоровский Г.Д. Деформативные и прочностные свойства алюминиевого сплава А5 после холодной вытяжки. // Вестн. Тамбовского ун-та: Естеств. и технич. науки. 2003, т. 8, вып. 4. – С. 610-612.
6. Федоровский Г.Д. Определяющие уравнения реологически сложных полимерных сред. // Вестн. Ленингр. ун-та.: Матем., механ., астрон.. 1990, вып. 3, № 15. – С. 87-91.
7. Севостьянов И.Б., Федоровский Г.Д., Исследование моделей реологически сложных сред. // Вестн. Ленингр. ун-та.: Матем., механ., астрон.. 1991, вып. 1, № 1. – С. 82-95.

ВИД И ВЗАИМОСВЯЗЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛИМЕРНЫХ И КОМПОЗИТНЫХ СРЕД В ШИРОКОМ ИНТЕРВАЛЕ ЗНАЧЕНИЙ ВРЕМЕНИ, НАПРЯЖЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ

*Федоровский Г.Д. (НИИ математики и механики СПбГУ,
Санкт-Петербург, Россия)*

Проведено широкое экспериментальное исследование и сопоставление термовязкоупругих свойств полимерных материалов различного строения при значительном варьировании параметров испытаний. Установлена корреляция ряда определяющих термомеханических характеристик в соответствии со строением материала.

KIND AND INTERRELATION THE BASIC THERMOMECHANICAL DETERMINING PARAMETERS OF POLYMERS AND COMPOSITES MEDIA IN THE WIDE INTERVAL OF DIMENSIONS OF TIME, STRESS AND TEMPERATURE

*Fedorovsky G.D. (Scientific research institute of mathematics and mechanics
of St.-Petersburg state university, Russia)*

A wide experimental research and comparison of thermo-tenacity-elasticity properties of polymeric materials of different structure is carried out at a significant variation of parameters of tests. The interrelation of some determining thermomechanical characteristics is established according to the structure of a material.

1. Введение. Экспериментальному исследованию и математическому описанию термомеханического поведения различных полимерных сред и изучению взаимосвязи соответствующих определяющих характеристик посвящено значительное количество работ [1-8 и др.]. Часть из них относится к оценке влияния конденсированного состояния и морфологии среды на поведение, в частности, в областях структурных переходов, - прежде всего, основного α -перехода из стеклообразного в высокоэластическое состояние [5, 6]. Значительный интерес вызывают исследования и математические модели в интервале неравновесного метастабильного состояния, свойственного преимущественно стеклообразному состоянию, в которой тепловая деформация зависит от предыстории, а механические свойства могут быть и нелинейными [1, 2, 4, 8]. Для полного описания такого поведения все больше привлекается современная развивающаяся идеология наследственной «памяти» и внутреннего времени сред [2, 8], базирующаяся на интегральных уравнениях. Получены различные эмпирические и теоретические соотношения между коэффициентами тепловой деформации и модулями упругости области стеклообразного состояния [5], удалось связать коэффициент редукиции температурно-временного соответствия (ТВС) в форме уравнения Вильямса-Ланделла-Ферри (ВЛФ) с величиной «свободного» объема [5, 6], определяемого по данным дилатометрического испытания. Рассмотрен подход определения функции обобщенной податливости (ползучести) и коэффициента редукиции по результатам измерения тепловой деформации ненагруженного образца и деформации нагруженного в опытах с линейным законом повышения температуры, в области линейных реологических свойств [2].

Целью настоящей работы было, во-первых, экспериментальное исследование стержней из полимеров в широком интервале изменения температуры T , включающем, чаще всего, «размытый» α - переход, для разного строения изотропных полимерных и анизотропных композитных

материалов: тепловой деформации $\varepsilon^T(T)$ при небольшой скорости нагревания, и механических податливостей $P(t, T) = \frac{e(t, T)}{\sigma^0}$ при растяжении

в нелинейной и линейной области при различных уровнях температуры, чтобы определить по известной методике [4] обобщенные податливости $P(\xi^T) = P(g^T \cdot t)$ (рис. 1) и $P(\xi^{T, \sigma}) = \left[g^\sigma(\xi^T, \sigma) \cdot \xi^T \right]$ (рис. 2), а также «масштаб» времени по температуре $g^T(T) = \frac{1}{a^T(T)}$ ($a^T(T)$ - коэффициент

редукции ТВС), масштаб времени по напряжению $g^\sigma(\xi^T, \sigma)$ и границу линейной ползучести $\sigma_l(\xi^T)$. Здесь e - механическая деформация, σ^0 - постоянное напряжение, t - время, ξ^T - внутреннее, обобщенное по температуре время, которое при некоторой выбранной постоянной температуре T_0 совпадает с t ; $\xi^{T, \sigma}$ - обобщенное по температуре и напряжению время. А, во-вторых, - сопоставление $\varepsilon^T(T)$, $g^T(T)$, $g^\sigma(\xi^T, \sigma)$, $P(\xi^{T, \sigma})$, $\sigma_l(\xi^T)$ и температур переходов между собой.

Были испытаны термопластичные материалы: частично-кристаллические фторопласты с различной степенью кристалличности Ф-4МБ и Ф-10, терморезистивные сетчатого строения, с разной степенью сшивки: эпоксидная смола ЭД-6 (другими исследователями [2]) и УП-238. Испытан термопластичный полимер линейной структуры технический полиметилметакрилат (ПММА). Исследованы также однонаправленный и двунаправленный стеклопластики на основе связующего УП-238 и стекло (стекложгут).

Для всех материалов установлен приблизительно подобный, преимущественно S – образный вид кривых $\frac{d\varepsilon^T(T)}{dT}$, $\frac{d \left[\ln a^T(T) \right]}{dT}$ (рис. 6) и

$\ln P(\ln \xi^{T, \sigma})$. Начальные, переходные и конечные участки кривых определенным образом коррелируют со строением материалов.

2. Вид установленных из экспериментов определяющих термо-механических функций. Основные термо-механические определяющие функции термопластичного частично-кристаллического полимера фторопласта-4М представлены на рис. 1. Даны обобщенные податливости $P(\xi^T)$ в нелинейной области (а) и в линейной $P(\xi^{T, \sigma})$ ($\xi^{T, \sigma}(t) = \xi^T \cdot g^\sigma = t \cdot g^T \cdot g^\sigma$) (б) и приведены зависимости тепловой

деформации $\varepsilon^T(T)$ (при нагревании (светлые точки) и охлаждении (темные)), масштаба $g^T(T)$ и $g^\sigma(\xi^T, \sigma)$ (масштаба по напряжению).

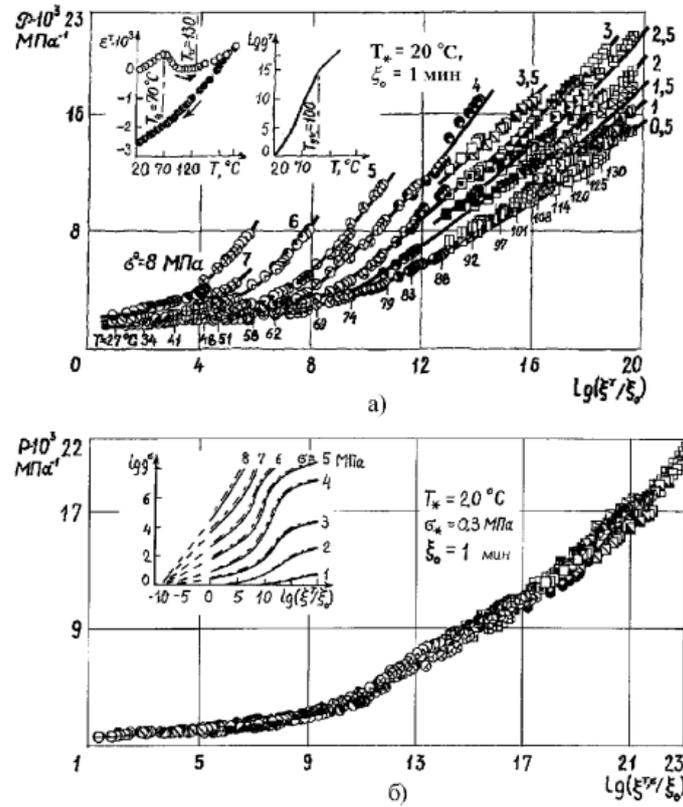


Рис. 1. Определяющие функции фторопласта-4МБ.

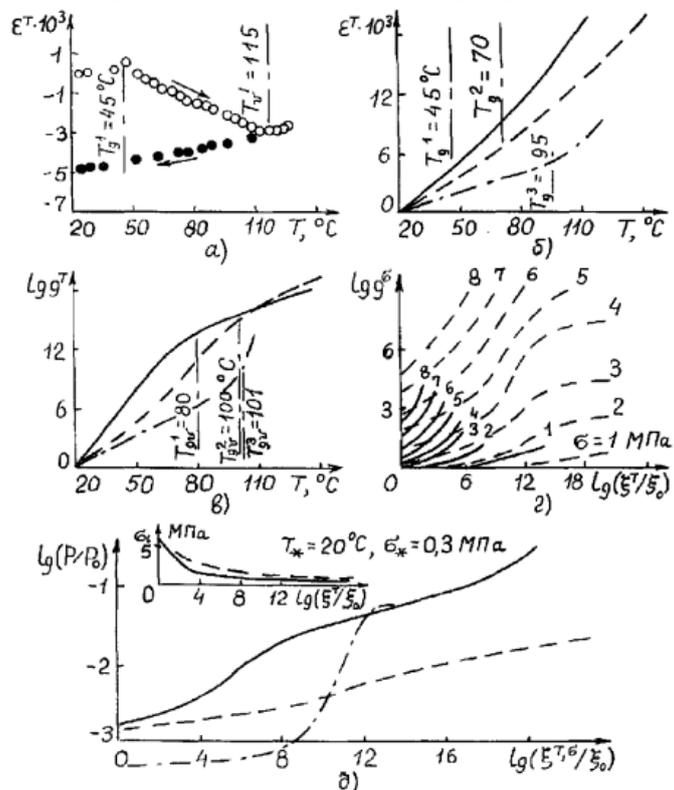


Рис. 2. Определяющие функции Ф-10 (сплошная линия), Ф-4МБ (пунктир) и ЭД-6 (штрих-пунктир).

На рис. 2 изображены определяющие функции частично-кристаллического (с меньшей степенью кристалличности, чем у Ф-4МБ) термопластичного фторопласта-10 (сплошная линия), фторопласта-4МБ и термореактивного, сшитого сетчатого строения отвержденного эпоксидного компаунда ЭД-6.

На рис. 2а приведена тепловая деформация при нагревании и охлаждении (отожженного материала), а на рис. 2б – тепловые деформации перечисленных отожженных полимеров. Масштабы $g^T(T)$ и $g^\sigma(\xi^T, \sigma)$ даны на рис. 2в и 2г. Обобщенные податливости P и границы линейной податливости приведены на 2д.

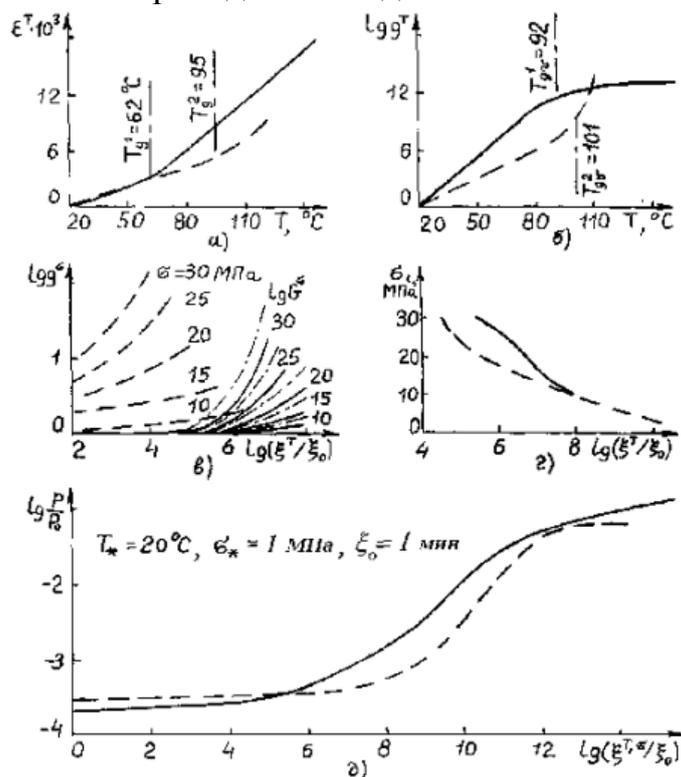


Рис. 3. Определяющие функции УП-238 (сплошная линия) и ЭД-6 (пунктир).

Данные о термореактивных, почти или полностью сшитых сетчатого строения отвержденных эпоксидных компаундов ПФ-238 и ЭД-6 показаны на рис. 3.

Сопоставление основных определяющих функций термопластичного полимера линейной структуры ПММА (податливость и ТВА в области стеклообразного состояния) и ЭД-6 приведено на рис. 4.

Основные определяющие термо-механические функции однонаправленного (в поперечном армировании направлении (1), в продольном (1')) и двунаправленного в поперечном направлении (2) и в продольном (2')) намоточных стеклопластиков примерно равного стеклонаполнения, на основе связующего УП-238, а также функции УП-238 (3) и стекла (стекложгута) (4) изображены на рис. 5. На рис. 5г

приведены данные о ползучести однонаправленного стеклопластика в поперечном направлении (точки) при ступенчатом законе приложения нагрузки и при повышенной температуре и данные расчета по линейной наследственной интегральной теории (линия). Близость данных свидетельствует о применимости принципа суперпозиции деформаций, на котором базируется теория.

3. Анализ взаимосвязи определяющих термо-механических функций. На рис. 2д видно, что физические (релаксационные, фазовые) переходы термовязкоупругих свойств различных полимерных материалов: частично-кристаллических фторопласта-10 и фторопласта-4МБ, а также сетчатого, сшитого эпоксидного компаунда ЭД-6 различны и соответствуют значениям логарифма обобщенного времени $\xi_s^{T,\sigma}$ 5, 9 и 7 при $\xi_0 = 1$ мин. Наиболее тугоплавкий, с большей степенью кристалличности Ф-4МБ имеет особенно размытый переход, т.к. он более гетерогенен, чем другие полимеры, имея более различающуюся гамму кристаллических и аморфных областей. «Сетчатый» ЭД-6 проявляет интенсивный, «классический» переход из стеклообразного - в высокоэластическое состояние. Это соответствует температуре T_g в (а) - (в) (T_g - температура стеклования, T_v - температура высокоэластического перехода).

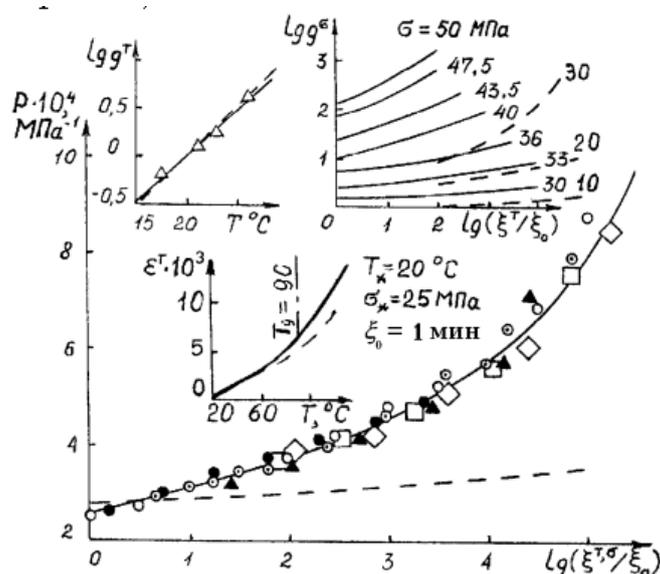


Рис. 4. Определяющие функции ПММА (сплошная линия) и ЭД-6 (пунктир).

Для всех материалов (см. рис. 3-5) на зависимостях $\lg g^T - T$, приблизительно при средних температурах $T_{gV} = (T_g + T_v)/2$, наблюдаются переломы кривых $\lg g^T$. Видно и различие масштабов g^σ , характеризующих нелинейные свойства сред и обусловленных их строением. У частично-кристаллического материала с меньшей степенью

кристалличности и степенью сшивки у сетчатого масштаб g^σ преимущественно меньше, как и ниже граница σ_l линейной ползучести.

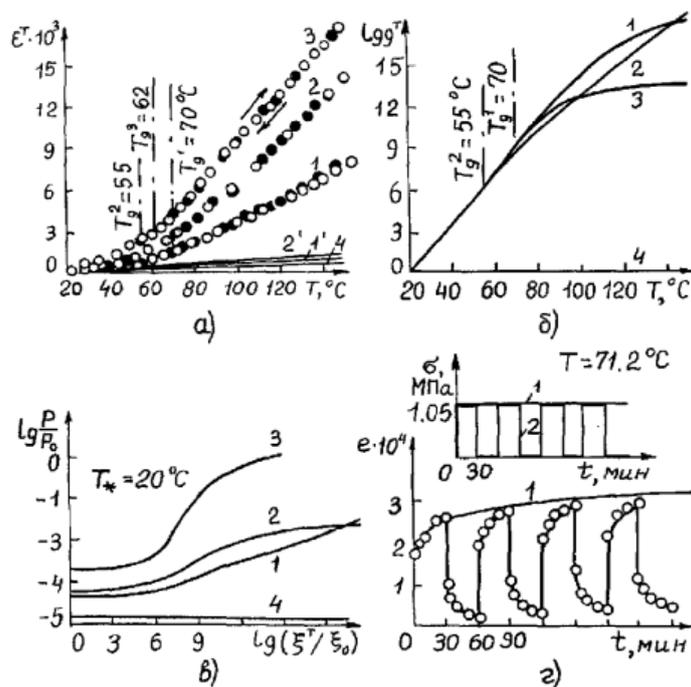


Рис. 5. Определяющие функции однонаправленного (1, 1'), двунаправленного (2, 2') намоточных стеклопластиков, связующего (3) и стекла (4) (1, 2 – в поперечном направлении, 1' и 2' – в продольном)

Необходимо отметить, что сопоставление податливостей P и тепловых деформаций ε^T отоженных полимеров при $T < T_g$ (в области стеклообразного состояния) (см. на рисунках) качественно подтверждает известную теорию Айнбиндера-Тюниной-Баркера [4], согласно которой материал с меньшей жесткостью (большей податливостью) обладает большим коэффициентом тепловой деформации. У материалов близкого строения, например, частично-кристаллических Ф-4МБ и Ф-10 и сетчатых УП-238 и ЭД-6 (см. рис. 2 и 3 и др.) эта гипотеза выполняется и при $T > T_g$.

При $T < T_g$ податливости P и масштаб g^T связаны аналогичной зависимостью: g^T выше у сред с большими податливостями. У стеклопластиков и связующего (рис. 5) совпадают. В случае $T > T_g$ рост масштаба g^T падает по температуре. Величина задержки возрастания g^T увеличивается с увеличением податливости (следует отметить аномальное по отношению к сказанному поведение масштаба g^T полимера ЭД-6 [2], резко увеличивающегося при $T > T_g$; представляется, что в этой области вид масштаба g^T ЭД-6 неверен). Величина задержки возрастания g^T

увеличивается с увеличением степени кристалличности у частично-кристаллических полимеров.

Полимер с меньшей податливостью имеет более высокую границу σ_l линейной вязкоупругости.

С уменьшением степени кристалличности частично-кристаллического материала или степени сшивки сетчатого увеличивается область перехода (T_g, T_v).

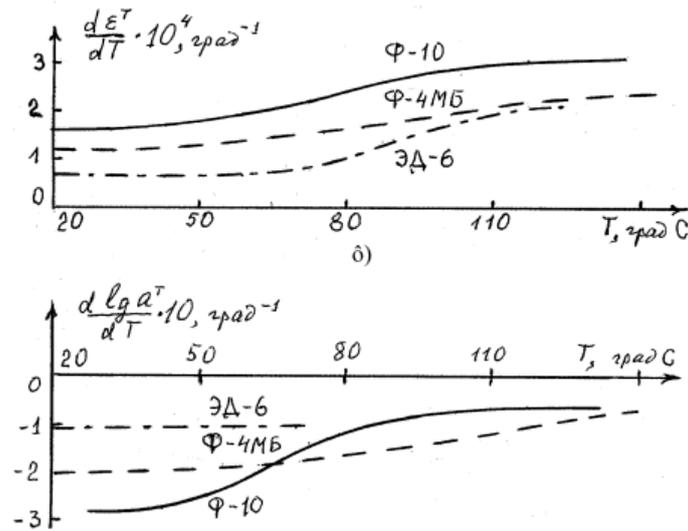


Рис. 6. Зависимости коэффициента тепловой деформации

$$\frac{d\varepsilon^T(T)}{dT} \text{ (а) и } \frac{d \lg a^T(T)}{dT} \text{ (б)}$$

На рис. 6 представлены зависимости коэффициента тепловой деформации $\frac{d\varepsilon^T(T)}{dT}$ (а) и $\frac{d \lg a^T(T)}{dT}$ (б) для Ф-10, Ф-4МБ и ЭД-6.

Сопоставление этих зависимостей между собой и с податливостями на рис. 2д позволяет сделать вывод, прежде всего, об их общей S-образной форме

и почти полном подобии кривых $\frac{d\varepsilon^T(T)}{dT}$ и $P(\xi^T, \sigma)$; и определенном

подобии $\frac{d\varepsilon^T(T)}{dT}$ и $\frac{d \lg a^T(T)}{dT}$, $\frac{d \lg a^T(T)}{dT}$ и $P(\xi^T, \sigma)$ (материалам с

большим коэффициентом тепловой деформации $\frac{d\varepsilon^T(T)}{dT}$ и с большей

податливостью $P(\xi^T, \sigma)$ соответствуют меньший коэффициент $\frac{d \lg a^T(T)}{dT}$.

По-видимому, между перечисленными S-образными характеристиками могут быть установлены некоторые эмпирико-аналитические зависимости,

полезные для перехода от одних (просто) измеряемых величин к другим (менее просто измеряемым).

В заключение необходимо отметить, что к описанию физических (фазовых) переходов известные классические формулы («законы») для $a^T(T)$ Аррениуса, ВЛФ и многие другие мало пригодны, поскольку их математический вид не позволяет адекватно описать весьма заметные переходы (см. на рисунках графики $\lg g^T(T)$). Самое простое математическое представление функции $\lg g^T(T)$ в первом приближении – в виде двух прямых, имеющих перелом при $T = T_{gv}$. При необходимости более точного описания – двух прямых при $T < T_g$ и $T > T_v$, и некоторой нелинейной функцией в промежуточной области. S-образный вид других функций математически наиболее просто может быть представлен выражением содержащим арктангенс.

Литература

1. Москвитин В.В. Соппротивление вязко - упругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе). - М.: Наука, 1972. - 328 с.
2. Бугаков И.И., Демидова И.И., Леонова Т.А. Ползучесть и фотоползучесть аморфного полимерного материала // Изв. АН СССР. МТТ. – 1974, №3. – С. 145-154.
3. Малкин Ф.Я., Сабсай О.Ю., Громаковская Н.Е. Определение вязкоупругих характеристик полимеров из термомеханических кривых // Механика полимеров. – 1974, № 4. – С. 755 (Деп. ВИНТИ № 1252-74, Рига – 1974. – 15 с.)
4. Уржумцев Ю.С., Максимов Р.Д. - Прогностика деформативности полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1975. – 416 с.
5. Канн К.Н. Вопросы теплового расширения полимеров. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1975. – 80 с.
6. Мазурин О.В. Стеклование. – Ленинград: Наука, 1986. – 158 с.
7. Бугаков И.И. Тепловая деформация и вязкость аморфных материалов с неравновесной структурой // Механика композиционных материалов и конструкций. Вып.476. Ленинград: Судостроение, 1989. – С. 20-35.
8. Федоровский Г.Д. Об эндохронном подходе при макроскопическом моделировании термомеханических свойств воды и водонасыщенных грунтов при замораживании и размораживании. // Актуальные проблемы механики, прочности и теплопроводности при низких температурах. Моделирование технологий замораживания грунтов искусственным холодом.: Матер. IX науч.-техн. конф. - СПбГУНиПТ, 2003. - С. 20-25.

**БЛОЧНЫЙ МНОГОФРОНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ
РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ
БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ ЗАДАЧ
МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ**

Фиалко С.Ю. (Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина & O.O.O. SCAD Soft, Москва, Россия)

**THE BLOCK MULTIFRONTAL SPARSE DIRECT SOLVER FOR
EFFICIENT SOLUTION OF LARGE-SCALE FINITE ELEMENT
PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS**

Fialko S.Yu. (Kiev National University of Construction and Architecture, Ukraine & Software company SCAD Soft, Moscow, Russia)

Рассматривается прямой метод решения систем конечно-элементных уравнений с симметричной разреженной матрицей коэффициентов, используемый в программной системе SCAD. Обсуждаются вопросы эффективного упорядочения, обеспечения высокой степени загрузки процессора и организации многофронтального алгоритма. Приводятся примеры из вычислительной практики SCAD, которые подтверждают высокую эффективность метода.

1. Введение. В современных программных конечно-элементных вычислительных комплексах огромное значение имеет наличие эффективного метода решения систем конечно-элементных уравнений – линейных алгебраических уравнений с разреженной (чаще всего симметричной) матрицей коэффициентов. Перспективным направлением решения этой проблемы является разработка прямых методов для разреженных матриц – sparse direct solvers. Один из таких методов, реализованный на основе многофронтальной технологии и эксплуатирующийся на протяжении ряда лет в программах SCAD [12] и Robot Millennium [25], представлен в данной работе.

Эффективность прямого метода факторизации разреженных матриц существенным образом зависит от того, насколько удачно алгоритм упорядочения уменьшает количество заполнений, возникающих при факторизации разреженной матрицы, от того, насколько рационально организована работа с данными и от того, насколько удастся обеспечить высокую степень загрузки центрального процессора.

2. Упорядочение. Для разреженных матриц характерно то, что количество отличных от нуля элементов (для краткости будем далее использовать англоязычную терминологию и называть их nonzero entries или сокращенно – nonzeros) факторизованной матрицы превышает количество nonzeros исходной матрицы. Те nonzeros, которые возникают на позициях нулевых элементов исходной матрицы в результате факторизации, называют заполнениями. Количество заполнений, а

следовательно, и объем информации, которую должен обработать «решатель» (солвер), существенно зависит от того, как пронумеровать уравнения. Отсюда возникает проблема упорядочения: как перенумеровать уравнения, чтобы минимизировать количество заполнений. Поскольку строгое решение такой задачи не менее затратно, чем факторизация разреженной матрицы при произвольном упорядочении, то на практике вместо строгой оптимизации применяют эвристические алгоритмы упорядочения. В результате вместо оптимального упорядочения находится некоторое его приближение [11]. Влияние того или иного метода упорядочения на портрет матрицы и на количество nonzeros для типичной расчетной модели многоэтажного здания приведено в [14].

В программном комплексе SCAD реализованы следующие методы упорядочения: обратный алгоритм Катхилла-Макки RCM [11], метод Слоана [26], метод фактор-деревьев RQT [11], метод вложенных сечений ND [11, 15], алгоритм минимальной степени MMD [21], метод параллельных сечений [11] с упорядочением MMD внутри каждой подструктуры, многоуровневое упорядочение, идея которого представлена в [15, 23, 24]. Для выбора наиболее оптимального метода упорядочения используется быстрый алгоритм символической факторизации [11]. Для повышения эффективности метода в системе SCAD производится упорядочение вершин графа смежности узлов МКЭ модели. Как показал опыт решения многочисленных задач, предоставленных пользователями SCAD, такой подход приводит к меньшему количеству nonzeros в факторизованной матрице по сравнению с упорядочением вершин графа смежности конечных элементов (КЭ), традиционно применяемого для фронтального и многофронтального методов. Кроме того, граф смежности узлов конечно-элементной модели является естественным огрублением графа смежности матрицы жесткости, а работа с огрубленным графом как правило приводит к более эффективному снижению заполнений по сравнению с использованием детального графа (графа матрицы).

3. Многофронтальный метод. Представляемый метод работает с любым методом упорядочения и основан на многофронтальной технологии факторизации разреженных матриц. Узловые моменты метода состоят в следующем:

- На основе последовательности исключения узлов, определяемой тем или иным методом упорядочения, устанавливается порядок подачи конечных элементов на сборку. Для того, чтобы все уравнения, ассоциируемые с данным узлом, были полностью собраны (готовы к исключению), необходимо, чтобы все КЭ, сходящиеся в этом узле, были поданы на сборку. Тогда подача на сборку любых других КЭ не вносит никаких изменений в коэффициенты этих уравнений.
- Полагаем, что количество шагов исключения (факторизации) равно количеству узлов конечно-элементной модели и равно количеству

фронтов. Под фронтом понимается объект C++, инкапсулирующий данные о номере исключаемого на данном шаге узла, количестве узлов, образующих фронтальную матрицу, о списке предыдущих фронтов, списке КЭ, подаваемых на сборку на данном шаге, и т.д.

- Фронтальная матрица – это плотная матрица относительно небольшой размерности, состоящая из группы полностью собранных уравнений (уравнений, ассоциированных с исключаемым на данном шаге узлом) и неполностью собранных, привнесенных другими узлами конечных элементов. Факторизация во фронтальной матрице охватывает только полностью собранные уравнения. Эта часть матрицы по окончании незавершенной факторизации образует полностью разложенную часть глобальной матрицы жесткости и сразу же помещается в специальный буфер памяти. По мере заполнения этот буфер разгружается на диск. Оставшаяся часть фронтальной матрицы образует незавершенный фронт и ожидает сборки на последующих шагах исключения.
- Последовательность фронтов образует фронтальное дерево. Фронт может быть листовым (если не имеет предшественника), узловым (если имеет более одного предшественника) и последовательным (если имеет одного предшественника). Использование арифметики указателей позволяет избежать копирования незавершенного фронта при переходе к последующим шагам исключения в случае последовательного фронта. С целью уменьшения объема незавершенных фронтов производится упорядочение номеров вершин фронтального дерева.
- Весь процесс факторизации представляется как движение по дереву фронтов снизу вверх. В зависимости от метода упорядочения одновременно существует несколько фронтов, откуда и следует название метода – многофронтальный. Если дерево фронтов представляет собой прямую линию (все фронты, кроме первого – последовательные), то метод становится фронтальным [22].
- Факторизованная матрица полностью воссоздается на диске после окончания факторизации. Разработанный алгоритм и его программная реализация имеют существенные отличия от опубликованных в литературе [16, 17]. Более подробное описание данного метода представлено в [13, 18, 19].

4. Блочная факторизация. Отметим, что на каждом шаге факторизации обычно оказывается полностью собранной сразу группа уравнений, размерность которой (при отсутствии опор в узле) равна количеству степеней свободы узла расчетной модели. Это позволило разработать высокопроизводительный режим факторизации фронтальной матрицы. Показатель производительности вычислений определяется как $q = f/m$, где f – количество умножений-делений алгоритма (продолжительностью сложений-вычитаний можно пренебречь по сравнению с продолжительностью умножений-делений), m – количество

пересылка «оперативная память – процессор – оперативная память». Приведенные ниже оценки получены согласно [10] в предположении, что процессор содержит одну кэш-линию, размер которой составляет M слов. Хотя архитектура современных компьютеров значительно сложнее используемой здесь упрощенной модели, оценки более-менее согласуются с практическими результатами.

Если применять традиционный метод Гауссового исключения (уравнение по уравнению), то показатель производительности составляет $q \leq 1$ (уровень BLAS-I или BLAS-II – Basis Linear Algebra System library). Это означает, что вычисления выполняются практически со скоростью медленной шины, а не быстрого процессора. При этом ни увеличение производительности процессора, ни наращивание размерности кэш-линий почти не ускоряет алгоритм. Наша задача – добиться уровня производительности BLAS-III [10], где $q \sim \sqrt{M}$. Для этого используется блочная факторизация модифицированного метода Холецкого для симметричной матрицы. Размер блока равен количеству полностью собранных уравнений в узле. На рис. 1 представлен один шаг такой факторизации.

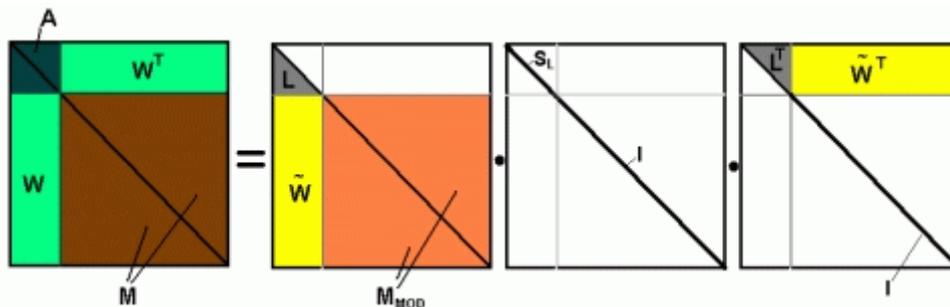


Рис.1. Шаг блочной факторизации. Принципиальная схема.

S_L – диагональ знаков, I – единичная подматрица,
 A, W – полностью собранные блоки, M – неполностью.

Здесь блок полностью собранных уравнений расположен в верхней части фронтальной матрицы. Процедура блочной факторизации состоит из трех этапов:

- Факторизуем по Холецкому диагональный блок: $A = L \cdot S_L \cdot L^T$. Вследствие небольшой размерности блока (для реальных задач размерность блока не превышает 6) хранящаяся в памяти нижняя треугольная часть матрицы A помещается в кэш за одну транзакцию. Следовательно, здесь обеспечивается уровень BLAS-III.

- Вычисляем нижнюю подматрицу $W = \tilde{W} \cdot S_L \cdot L + M \cdot 0 \Rightarrow L \cdot S_L \cdot \underbrace{\tilde{W}^T}_Y = W$. Задача сводится к решению

системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей

при нескольких правых частях $L \cdot Y = W \Rightarrow W$ с последующей коррекцией диагональю знаков $S_L \cdot \tilde{W}^T = Y \Rightarrow \tilde{W}$. При соответствующем написании программного кода здесь также обеспечивается уровень BLAS-III.

- Корректируем нижний диагональный блок $M = \tilde{W} \cdot S_L \cdot \tilde{W}^T + M_{MOD} \cdot I$, откуда $M_{MOD} = M - \tilde{W} \cdot S_L \cdot \tilde{W}^T$. С точки зрения линейной алгебры это операция типа $C += A \cdot B$. Для удержания уровня производительности BLAS-III здесь применяется блочное матричное умножение [10].

В действительности ситуация выглядит значительно сложнее, поскольку в реальной фронтальной матрице блок собранных уравнений расположен не обязательно в верхней части (рис. 2). Именно поэтому в данной работе пришлось разработать высокопроизводительный алгоритм факторизации во фронтальной матрице, учитывающий ее специфическую структуру, поскольку воспользоваться готовой библиотекой BLAS в этом случае не удастся.

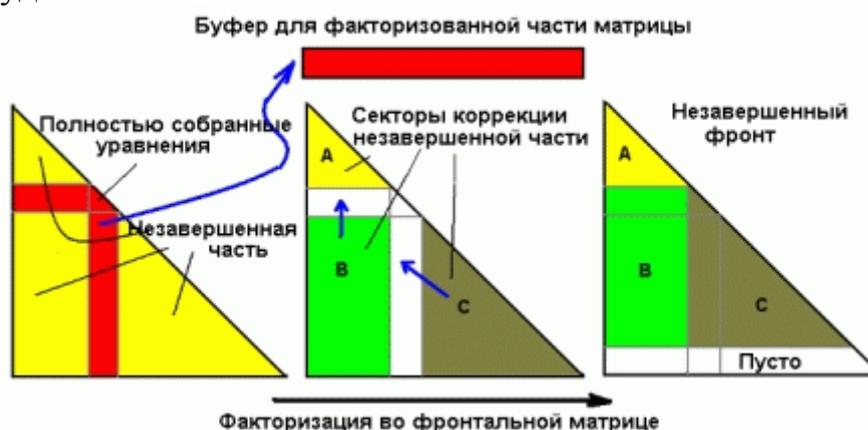


Рис. 2. Шаг блочной факторизации во фронтальной матрице. Реальная ситуация.

В таблице 1 на примере типичной модели многоэтажного здания, содержащей 1 171 104 уравнений, показано возрастание эффективности метода при улучшении упорядочения и использовании блочной факторизации вместо традиционной.

Таблица 1. QMD – упорядочение алгоритмом минимальной степени [11], ML – многоуровневое упорядочение, RCM – алгоритм Катхилла-Макки

Упорядочение/метод факторизации	QMD / традиционный	ML / традиционный	ML / блочный	RCM / профильный метод
Время решения	5 ч 44 м	3 ч 29 м	1 ч 08 м	~119 ч
К-во отличных от нуля элементов, МВ	3 246	2 694	2 694	21 606

Вторая колонка таблицы (считая слева направо) соответствует ранней версии многофронтального солвера (программы Robot Millennium, SCAD 7.31 – ранние релизы), а четвертая колонка – последней версии солвера (последние релизы SCAD 7.31, SCAD 11.1). Продолжительность решения этой же задачи методом сопряженных градиентов с агрегатным многоуровневым преобуславливанием [20] при трех правых частях составила 49 м.

Вычисления выполнены на ПК средней производительности: Pentium-III (CPU 1266 МГц, RAM 1024 Мб).

Литература

1. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. – 429 с.
2. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М: Мир, 1984. – 333 с.
3. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А., Трофимчук А.Т. SCAD для пользователей. К.: Изд-во Компас, 2000.— 332 с.
4. Фиалко С.Ю. К исследованию напряженно-деформированного состояния тонкостенных оболочек с массивными ребрами // Прикл. Механика, 2004. —Т 40, №4, С. 84–92.
5. Фиалко С.Ю. Применение многофронтального метода в программе SCAD для анализа большеразмерных расчетных моделей зданий и сооружений // Бюллетень строительной техники (БСТ), 2005. – 9, С. 61-63.
6. Ashcraft C., Liu J. W.-H. Robust Ordering of Sparse Matrices Using Multisection. // Technical Report CS 96-01, Department of Computer Science, York University, Ontario, Canada, 1996.
7. Duff I.S. Parallel implementation of multifrontal scheme. //Parallel Comput. – 1986. – 3 – P. 193-204.
8. Duff I.S., Reid J.K. The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear equations. //ACM Trans. Math. Software. – 1973. – 9 – P. 302-325.
9. Fialko S.Yu., Kriksunov E.Z. and Karpilovskyy V.S. A sparse direct multi-frontal solver in SCAD software. Proceedings of the CMM-2003 – Computer Methods in Mechanics June 3-6, 2003, Gliwice, Poland. P. 131-132.
10. Fialko S.Yu. A block sparse direct multifrontal solver in SCAD software. Proceedings of the CMM-2005 – Computer Methods in Mechanics June 21-24, 2005, Czestochowa, Poland. P.
11. Fialko S.Yu. Application of iterative solvers in finite element analysis of structural mechanics. Linear statics and natural vibrations. // Proceedings of 8-th international conference "Modern building materials, structures and techniques". May 19–22, 2004, Vilnius, Lithuania. P. 721 – 725.
12. George, A., Liu, J. W.-H., The Evolution of the Minimum Degree Ordering Algorithm, SIAM Rev. 31, 1-19 (March 1989).
13. Irons B. A frontal solution of program for finite element analysis. //Int. J. Numer. Meth. Engrg. – 1970,– 2, P. 5-32.
14. Karypis G., Kumar V., A Fast and High Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs, Technical Report TR 95-035, Department of Computer Science, University of Minnesota, Minneapolis, 1995.

15. Karypis G., Kumar V., METIS: Unstructured Graph Partitioning and Sparse Matrix Ordering System, Technical report, Department of Computer Science, University of Minnesota, Minneapolis, 1995.
16. Robot Millennium. User's Guide (<http://robot-structures.com/us/>).
17. Scott J.A. On ordering elements for a frontal solver // Commun. Numer. Meth. Engng.—1995.—15—P. 309—323.

ПЕРВИЧНЫЕ ПРИЗНАКИ НАЛИЧИЯ ОШИБОК В РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ МКЭ

Фрумен А.И.

*(Санкт-Петербургский государственный морской технический
университет, Санкт-Петербург, Россия)*

Рассмотрены подходы к диагностике и поиску ошибок на различных этапах построения расчетной модели в методе конечных элементов (МКЭ).

PRIMARY ATTRIBUTES OF PRESENCE OF MISTAKES IN SETTLEMENT MODELS FEM

Frumen A.I.

(St.-Petersburg state marine technical university, St.-Petersburg, Russia)

The approach to diagnostics and search of mistakes at various stages of construction of settlement model is considered in FEM.

При задании в методе конечных элементов (МКЭ) топологии, геометрии, условий закрепления и нагрузок генерируются большие объемы исходной информации. Ошибки могут возникнуть на различных этапах построения расчетной модели (РМ) - *физическая, математическая и численная модели.*

Системный подход к диагностике и поиску ошибок позволит повысить достоверность получаемых результатов и надежность работы системы человек-компьютер.

Относительно легко подаются идентификации, путем вариации исходных параметров, ошибки, приводящие к получению явно неправильных результатов расчета (например, не согласуется с физическим смыслом задачи порядок перемещений или напряжений).

Ошибки, позволяющие получить конечный, но неправильный результат выявить наиболее трудно. Например, не все подконструкции расчетной модели склеены между собой.

В этом случае может помочь специальный модуль диагностики ошибок. Он должен: обеспечивать проверку соответствия содержания файлов, описывающих расчетную модель, между собой и их соответствие общим характеристикам; выявлять пропуски в нумерации узлов и узлы с совпадающими координатами; выявлять конечные элементы, меняющие связность расчетной модели и имеющие нулевую толщину и/или модуль упругости (фиктивные КЭ).

Для решения ряда вопросов целесообразно разработать диагностическую матрицу, базирующуюся на основной сетке конечных элементов расчетной модели.

При диагностике ошибок в ходе построения расчетной модели (РМ) хорошо использовать топологическое соотношение (1). С помощью него можно отслеживать изменение параметра связанности « I » (2), который зависит от изменения числа узлов - $N_{уз}$, граней - $N_{гр}$, объемов - $N_{об}$ и ребер - $N_{реб}$. [1-3]:

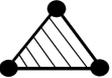
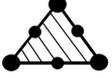
$$I = 2 + (N_{об} + N_{реб}) - (N_{уз} + N_{гр}) \quad (1)$$

$$\Delta I = (\Delta N_{об} + \Delta N_{реб}) - (\Delta N_{уз} + \Delta N_{гр}) \quad (2)$$

Параметр связности I определяется как максимальное количество способов, которым можно соединить узлы структуры (без учета ее размера). Желательно отслеживать изменение этого параметра в ходе преобразований расчетной модели.

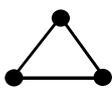
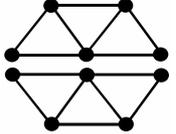
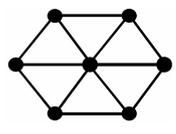
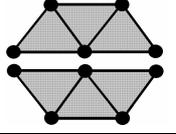
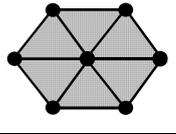
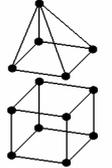
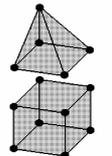
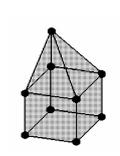
Значения параметров, входящих в выражение (1) для различных типов конечных элементов, приведено в таблице 1.

Таблица 1.

Тип конечного элемента	$N_{уз}$	$N_{гр}$	$N_{об}$	$N_{реб}$	I
$N_{кэ} = N_{уз}$ 	1	0	0	0	1
$N_{кэ} = N_{реб}$ 	2	0	0	1	1
$N_{кэ} = N_{реб}$ 	3	0	0	1	0
$N_{кэ} = N_{реб}$ 	3	0	0	3	2
$N_{кэ} = N_{гр}$ 	3	1	0	3	1
$N_{кэ} = N_{гр}$ 	6	1	0	6	1
$N_{кэ} = N_{реб}$ 	6	0	0	9	5

Изменение значений величин, входящих в выражение (2) для ряда случаев, приводятся в таблице 2 ниже.

Таблица 2.

PM до изменения	PM после изменения	$\Delta N_{уз}$	ΔN_{2p}	$\Delta N_{об}$	$\Delta N_{реб}$	ΔI
		0	0	0	2	2
		4	0	0	4	0
		4	1	0	4	-1
		4	0	0	4	0
		4	2	1	4	-1

Хорошо зарекомендовал себя для диагностики неявных ошибок также метод визуализация исходных данных и получаемых результатов.

При этом желательно дополнительно решить задачу по определению собственных частот и форм колебаний *расчетной модели* (PM) при вариации граничных условий как для всей PM, так и для ее отдельных частей (подконструкций). Анализ полученных результатов позволит отладить (настроить) расчетную модель на получение адекватных результатов. При этом следует обращать внимание на:

- Наличие близких к нулю собственных частот колебаний, что свидетельствует о возможных ошибках в граничных условиях;
- На формы колебаний (например, рисунок 1), из анализа которых можно найти наличие «непроклеек».

При наличии достаточного опыта работы с соответствующими объектами и их расчетными моделями, анализ спектра собственных частот позволяет улучшить не только физическую модель, но и конструкцию самого объекта. Таким образом, частотная диагностика полезна и при статическом анализе, и при исследовании критических нагрузок и, конечно, при динамическом нагружении.

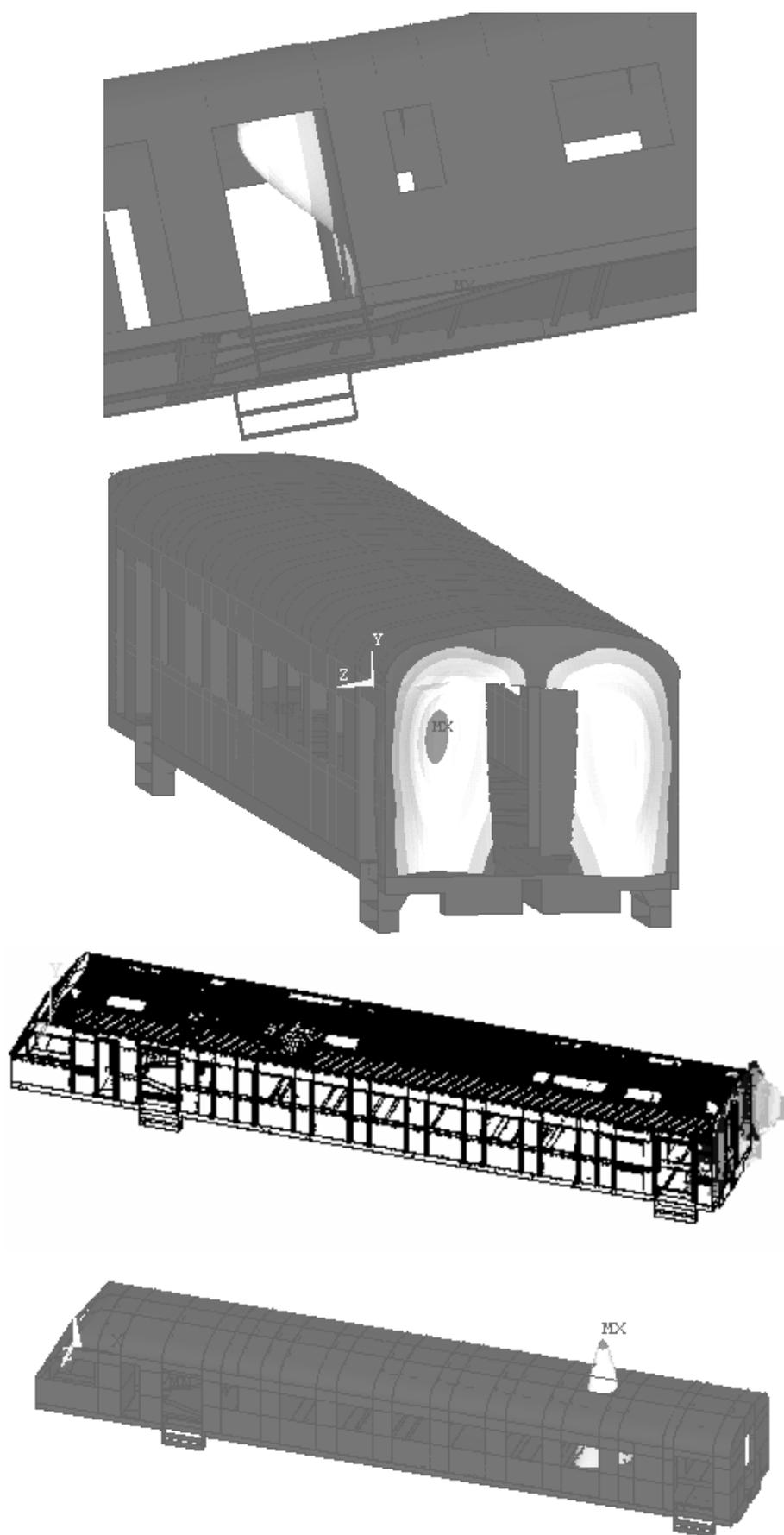


Рис.1. Формы колебаний кузова головного вагона при наличии «непроклеек».

Литература

1. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977, 280 с.
2. Уимон Р. Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977, 208 с.
3. Мацюю Комацу. Многообразие геометрии. М.: Знание, 1981. 208 с.

УДК 624.042

СИНТЕЗ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И УТОЧНЕННЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ПОДСТРУКТУР

**Цейтлин Б.В.*

*(*ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева, Санкт-Петербург, Россия)*

FREE-INTERFACE COMPONENT MODE SYNTHESIS METHOD USING INCREASED ACCURACY SUBSTRUCTURE REPRESENTATION

**Tseitline B.V.*

*(*The B.E. Vedenev All-Russian Research Institute of Hydraulic
Engineering, St.-Petersburg, Russia)*

Используется модификация метода, учитывающая матрицы остаточных податливостей высших порядков. Условия совместности перемещений записываются в проекционной форме. Уравнения движения формируются относительно коэффициентов при учитываемых формах колебаний всех подструктур. Результаты тестовых расчетов показывают, что учет матриц остаточных податливостей высших порядков позволяет существенно повысить точность прогнозирования перемещений и внутренних усилий.

Рассматриваются колебания конструкции, состоящей из N подструктур. Уравнения движения каждой из них записаны в форме [1]:

$$M_i \ddot{u}_i + B_i \dot{u}_i + K_i u_i = F_i = Q_i + R_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь M_i , B_i и K_i - матрицы масс, демпфирования и жесткости подструктуры i , u_i - вектор ее узловых перемещений, F_i - вектор приложенных к подструктуре сил, Q_i - вектор заданных внешних сил, R_i - вектор приложенных к подструктуре сил, обусловленных взаимодействием с другими подструктурами, точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Условия совместности перемещений для конструкции формируются как совокупность n условий совместности перемещений подструктур:

$$u_k^j - u_l^j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2)$$

Каждое из соотношений (2) выражает равенство перемещений подструктур k и l на множестве узлов их контакта v_j . Предполагается, что $k < l$ [2,3].

Через $v(s) = v^+(s) \cup v^-(s)$ обозначено множество номеров условий совместности перемещений, наложенных на подструктуру s , причем

$v^+(s)$ и $v^-(s)$ - подмножества номеров, где s – наименьший и наибольший номера соответственно. Через $\tilde{\Gamma} = (\gamma_{ji})$ обозначается блочная матрица, элементы которой γ_{ji} определяют наложенные на перемещения подструктур условия совместности: $\gamma_{ji}u_i = +u_i^j$, если $j \in v^+(i)$; $\gamma_{ji}u_i = -u_i^j$, если $j \in v^-(i)$; $\gamma_{ji}u_i = 0$, если $j \notin v(i)$. Здесь через u_i^j обозначен отвечающий множеству узлов v_j блок перемещений узлов подструктуры i [2,3].

Используются уравнения движения с неопределенными множителями Лагранжа λ_j . Векторы λ_j определяют силы взаимодействия между подструктурами k и l на множестве узлов контакта между ними v_j . В соответствии с принятым при построении $\tilde{\Gamma}$ правилом знаков, на подструктуру k со стороны подструктуры l действуют силы λ_j , на подструктуру l со стороны подструктуры k действуют силы $-\lambda_j$ [2,3].

Вводятся блочные векторы и матрицы \bar{U} , \bar{F} , \bar{Q} , \bar{R} , \bar{M} , \bar{K} , \bar{B} , Λ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}^T &= (u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T), & \bar{F}^T &= (F_1^T, F_2^T, \dots, F_N^T), & \bar{Q}^T &= (Q_1^T, Q_2^T, \dots, Q_N^T), \\ \bar{R}^T &= (R_1^T, R_2^T, \dots, R_N^T), & \bar{M} &= \text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_N\}, & \bar{B} &= \text{diag}\{B_1, B_2, \dots, B_N\}, \\ & & \bar{K} &= \text{diag}\{K_1, K_2, \dots, K_N\}, & \Lambda^T &= (\lambda_1^T, \lambda_2^T, \dots, \lambda_n^T). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Лагранжиан L , кинетическая энергия T , потенциальная энергия Π и диссипативная функция D определяются соотношениями [2,3]:

$$L = T - \Pi + \bar{U}^T \tilde{\Gamma}^T \Lambda, \quad T = \frac{1}{2} \bar{U}^T \bar{M} \bar{U}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \bar{U}^T \bar{K} \bar{U} - \bar{U}^T \bar{Q}, \quad D = \frac{1}{2} \bar{U}^T \bar{B} \bar{U}. \quad (4)$$

Использование (4) позволяет построить вариационные уравнения [2,3]:

$$(\delta \bar{U})^T (\bar{M} \ddot{\bar{U}} + \bar{B} \dot{\bar{U}} + \bar{K} \bar{U} - \bar{Q} - \tilde{\Gamma}^T \Lambda) = 0, \quad (\delta \Lambda)^T \tilde{\Gamma} \bar{U} = 0. \quad (5)$$

Из (5) следуют уравнения движения и совместности перемещений:

$$\bar{M} \ddot{\bar{U}} + \bar{B} \dot{\bar{U}} + \bar{K} \bar{U} - \bar{Q} - \tilde{\Gamma}^T \Lambda = 0, \quad \tilde{\Gamma} \bar{U} = 0. \quad (6)$$

Неизвестными в уравнениях (6) являются перемещения узлов всех подструктур и множители Лагранжа. Вектор сил взаимодействия подструктур \bar{R} определяется соотношением [3]:

$$\tilde{\Gamma}^T \Lambda = \bar{R}. \quad (7)$$

Матрица $\tilde{\Gamma}$ в (4)-(7) включает два преобразования. Первое – выборка из \bar{U} граничных степеней свободы. Второе – непосредственное формирование условий совместности перемещений. В дальнейшем не вводится отдельной матрицы выборки граничных степеней свободы. Однако при необходимости подчеркнуть, что при формировании условий

совместности используются именно граничные степени свободы, будем писать $\tilde{\Gamma} \bar{U}^b$.

Использование метода Галеркина совместно с (5) позволяет понизить порядок уравнений движения. При этом u_i и λ_j разыскиваются в форме:

$$u_i = \Phi_i p_i, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad \lambda_j = \Psi_j q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

В (8) Φ_i и Ψ_j - наборы базисных векторов, позволяющих аппроксимировать перемещения подструктур и силы их взаимодействия [2,3]. Часто базисные векторы связаны с формами собственных колебаний подструктур. Поэтому векторы p и q будем называть модальными переменными. Вводятся блочные векторы $p^T = (p_1^T, p_2^T, \dots, p_N^T)$, $q^T = (q_1^T, q_2^T, \dots, q_n^T)$ и матрицы $\bar{\Phi} = \text{diag}\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N\}$, $\bar{\Psi} = \text{diag}\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n\}$. Тогда (8) принимает форму:

$$\bar{U} = \bar{\Phi} p, \quad \Lambda = \bar{\Psi} q, \quad (9)$$

а уравнения движения и условия совместности перемещений форму:

$$\bar{m} p + \bar{b} p + \bar{k} p - \bar{f} - A^T q = 0, \quad A p = 0. \quad (10)$$

Здесь $\bar{m} = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$, $m_i = \Phi_i^T M_i \Phi_i$, $\bar{b} = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$, $b_i = \Phi_i^T B_i \Phi_i$, $\bar{k} = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$, $k_i = \Phi_i^T K_i \Phi_i$, $\bar{f}^T = (f_1^T, f_2^T, \dots, f_N^T)$, $f_i = \Phi_i^T Q_i$, $A = \bar{\Psi}^T \tilde{\Gamma} \bar{\Phi}$.

Если $\Phi_i = \Phi_{i,s}^e$ - отвечающий s низшим частотам собственных колебаний $\omega_{i,1}^e, \omega_{i,2}^e, \omega_{i,3}^e, \dots, \omega_{i,s}^e$ блок матрицы M_i - ортонормальных форм собственных колебаний подструктуры i со свободной границей, тогда [1] $m_i = I_s$, $k_i = \Omega_{i,s}^e = \text{diag}\{(\omega_{i,1}^e)^2, (\omega_{i,2}^e)^2, (\omega_{i,3}^e)^2, \dots, (\omega_{i,s}^e)^2\}$. При использовании модели затухания Релея: $b_i = \alpha_i I_s + \beta_i \Omega_{i,s}^e$. Если демпфирование задано в долях критического, то $b_i = \text{diag}\{(2\omega_{i,1}^e \xi_{i,1}), (2\omega_{i,2}^e \xi_{i,2}), (2\omega_{i,3}^e \xi_{i,3}), \dots, (2\omega_{i,s}^e \xi_{i,s})\}$. Здесь I_s - единичная $s \times s$ матрица, $\xi_{i,k}$ - коэффициент демпфирования, отвечающий k -ой форме собственных колебаний подструктуры i .

Условие совместности j на множестве граничных узлов v_j определяется соотношениями (2). Использование (8) позволяет записать отвечающую условию совместности j блочную строку вектора $A p$ в форме:

$$\Psi_j^T \Phi_k^j p_k - \Psi_j^T \Phi_l^j p_l = 0. \quad (11)$$

Здесь Ψ_j - набор векторов, используемых для аппроксимации сил взаимодействия между подструктурами k и l на множестве узлов их

контакта ν_j ; Φ_k^j и Φ_l^j - блоки векторов Φ_k и Φ_l , отвечающие узлам ν_j . Количество уравнений (11) равно количеству функций, используемых для аппроксимации сил взаимодействия между подструктурами.

При исследовании гармонических колебаний с частотой ω :

$$p(t) = \text{Re}\{p^* e^{i\omega t}\}, q(t) = \text{Re}\{q^* e^{i\omega t}\}, \bar{f}(t) = \text{Re}\{\bar{f}^* e^{i\omega t}\}. \quad (12)$$

Подстановка (12) в (10) приводит к уравнениям движения и условиям совместности перемещений относительно комплексных амплитуд p^* и q^* :

$$(\bar{k} - \omega^2 \bar{m} + i\omega \bar{b})p^* - A^T q^* = \bar{f}^*, \quad Ap^* = 0. \quad (13)$$

Вопросы, связанные с построением численного решения задач расчета нестационарных (10) и установившихся гармонических колебаний (13) рассмотрены в [2-4]. Изложенные подходы основаны на представлении перемещений подструктур в виде разложений (8) по конечным наборам базисных векторов Φ_j . На недостатки, связанные с использованием (8) для определения как перемещений, так и напряжений, указывалось во многих исследованиях [3,5-12]. Основными из указанных недостатков является медленная сходимость, а в ряде случаев – отсутствие сходимости напряжений. Использование (8) при синтезе динамических подструктур приводит к погрешностям при определении сил взаимодействия подструктур, что в свою очередь может приводить к существенным ошибкам при прогнозировании перемещений конструкции в целом [7]. Представление перемещений подструктур в виде разложений (8) по конечным наборам базисных функций приводит также к трудностям при использовании условий совместности перемещений. Указанные трудности связаны с двумя причинами. Первая заключается в том, что количество условий совместности перемещений может существенно превосходить количество базисных векторов Φ_j . В этом случае строгое выполнение условий совместности перемещений оказывается невозможным. При формировании условий совместности в проекционной форме приходится уменьшать количество базисных векторов Ψ_j , используемых для аппроксимации сил взаимодействия подструктур. Это снижает точность решения. Вторая причина заключается в невозможности связать перемещения граничных узлов с силами взаимодействия подструктур, поскольку указанные силы взаимодействия не входят в условия совместности перемещений. Это затрудняет формирование уравнений движения. Ниже показано, что указанных трудностей удастся избежать, при использовании остаточных членов, учитывающих влияние отброшенных высокочастотных форм колебаний. Для подструктур с пропорциональным демпфированием в качестве оценки вклада не

учитываемых в разложении (8) высокочастотных форм колебаний $\Phi_{i,d}^e$ используется разложение [3,7,9]:

$$\Phi_{i,d}^e p_{i,d} = \sum_{j=0}^{\infty} G_{r,i}^j F_i^{(j)}(t), \quad i=1,2,\dots,N. \quad (14)$$

В (14) $G_{r,i}^j$ - остаточная матрица порядка j подструктуры i , $F_i^{(j)}(t)$ - производная порядка j по времени от вектора $F(t)$. Вопросы построения (14) рассмотрены в [3,7,9]. Использование (14) приводит к соотношению:

$$\bar{U} = \bar{\Phi} p + \sum_{j=0}^{\infty} \bar{G}_r^j \bar{F}^{(j)}(t), \quad \text{где } \bar{G}_r^j = \text{diag}\{\bar{G}_{r,1}^j, \bar{G}_{r,2}^j, \dots, \bar{G}_{r,N}^j\}. \quad (15)$$

В соответствии с (10), (15) уравнения движения и условия совместности перемещений принимают форму:

$$p + \bar{b} p + \bar{\Omega}^e p - \bar{f} - A^T q = 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} H_r^j q^{(j)}(t) + A p = X(t). \quad (16)$$

Здесь: $A = \bar{\Theta}^T \bar{\Phi}^b$, $H_r^j = \bar{\Theta}^T \bar{G}_r^{j,bb} \bar{\Theta}$, $X(t) = -\bar{\Theta}^T \sum_{j=0}^{\infty} \bar{G}_r^{j,b} \bar{Q}^{(j)}(t)$,

$\bar{\Theta} = \bar{\Gamma}^T \bar{\Psi}$, $\bar{\Phi}^b$ и $\bar{G}_r^{j,b} = [\bar{G}_r^{j,ib}, \bar{G}_r^{j,bb}]$ - блоки матриц $\bar{\Phi}$ и \bar{G}_r^j , сформированные из отвечающих граничным степеням свободы строк.

В результате интегрирования (16) определяются зависимости от времени модальных переменных $p(t)$ и $q(t)$. Использование (7), (8) позволяет определить силы взаимодействия подструктур. После этого использование (15) позволяет определить узловые перемещения всех подструктур.

Для оценки вклада отброшенных высокочастотных форм колебаний обычно используется или одночленное выражение, учитывающее остаточную матрицу $\bar{G}_r = \bar{G}_r^0$, или трехчленное выражение, учитывающее остаточные матрицы \bar{G}_r^0 , \bar{G}_r^1 и \bar{G}_r^2 [3,7,9,11]. В последнем случае соотношения (14)-(16) содержат производные от внешних нагрузок и сил взаимодействия подструктур до второй включительно [3], а условия совместности перемещений принимают форму:

$$H_r^2 \ddot{q} + H_r^1 \dot{q} + H_r^0 q + A p = X(t), \quad \text{где } X(t) = -\bar{\Psi}^T \bar{\Gamma} (\bar{G}_r^{2,b} \ddot{\bar{Q}} + \bar{G}_r^{1,b} \dot{\bar{Q}} + \bar{G}_r^{0,b} \bar{Q}). \quad (17)$$

Если применяется одночленное выражение, то условия совместности перемещений (16) принимают форму: $H_r^0 q(t) + A p = X(t)$, откуда следует:

$$q(t) = (H_r^0)^{-1} [-A p + X(t)] = -(\bar{\Psi}^T \bar{\Gamma} \bar{G}_r^{bb} \bar{\Gamma}^T \bar{\Psi})^{-1} \bar{\Psi}^T \bar{\Gamma} (\bar{\Phi}^b p + \bar{G}_r^b \bar{Q}). \quad (18)$$

После подстановки (18) в (16) получаем систему дифференциальных уравнений движения относительно вектора модальных перемещений p :

$$p + \bar{b}p + \bar{\Omega}p = \hat{f}, \quad (19)$$

В (19) $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}^e + (\bar{\Phi}^b)^T \kappa \bar{\Phi}^b$, $\kappa = \bar{\Gamma}^T \bar{\Psi} (\bar{\Psi}^T \bar{\Gamma} \bar{G}_r^{bb} \bar{\Gamma}^T \bar{\Psi})^{-1} \bar{\Psi}^T \bar{\Gamma}$, $\hat{f} = \bar{\Phi}^T \bar{Q}$, $\bar{\Phi} = \bar{\Phi} - (\bar{G}_r^b)^T \kappa \bar{\Phi}^b$. Подстановка (18), (9), (7) в (15) приводит к выражению:

$$\bar{U} = \bar{\Phi} p + \bar{G}_r \bar{Q}, \quad \text{где} \quad \bar{G}_r = \bar{G}_r - (\bar{G}_r^b)^T \kappa \bar{G}_r^b \quad (20)$$

При исследовании вынужденных гармонических колебаний использование (12), (16) приводит к системе алгебраических уравнений относительно векторов комплексных амплитуд модальных переменных p^* и q^* :

$$(\bar{\Omega}^e - \omega^2 I + i\omega \bar{b}) p^* - A^T q^* = \bar{f}^*, \quad \Pi_d^*(\omega) q^* + A p^* = X^*(\omega), \quad (21)$$

где $\Pi_d^*(\omega) = [\sum_{j=0}^{\infty} (i\omega)^j H_r^j]$, $X^*(\omega) = -[\bar{\Psi}^T \bar{\Gamma} \sum_{j=0}^{\infty} (i\omega)^j \bar{G}_r^{j,b}] \bar{Q}^*$.

Использование (21) позволяет сформировать систему уравнений относительно вектора комплексных амплитуд модальных перемещений p^* :

$$\{\bar{\Omega}^e - \omega^2 I + i\omega \bar{b} + A^T [\Pi_r^*(\omega)]^{-1} A\} p^* = \bar{f}^* + A^T [\Pi_d^*(\omega)]^{-1} X^*(\omega). \quad (22)$$

Построенные соотношения являются обобщенными соотношениями динамических жесткостей. После определения p^* согласно (22) вектор q^* определяется с использованием соотношения [3]:

$$q^* = [\Pi_d^*(\omega)]^{-1} [-A p^* + X^*(\omega)]. \quad (23)$$

Для определения сил взаимодействия подструктур используются вытекающие из (7), (12) соотношения:

$$\bar{R}^* = \bar{\Gamma}^T \Lambda^* = \bar{\Gamma}^T \bar{\Psi} q^*. \quad (24)$$

Соотношения (15) в случае вынужденных гармонических колебаний с частотой ω принимают форму:

$$\bar{U}^* = \bar{\Phi} p^* + \bar{G}_d^*(\omega) [\bar{Q}^*(\omega) + \bar{R}^*(\omega)], \quad \text{где} \quad \bar{G}_d^*(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} (i\omega)^j \bar{G}_r^{r,j}. \quad (25)$$

Соотношение (25) определяет разложение комплексной матрицы остаточных податливостей $\bar{G}_d^*(\omega)$ в ряд по степеням $i\omega$. Пусть в (25) учитывается m членов с производными четного и m_1 членов с производными нечетного порядка. При этом или $m_1 = m - 1$, или $m_1 = m$. Согласно (25):

$$\text{Re}\{\bar{G}_d^*(\omega)\} = \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^j (\omega)^{2j} G_r^{2j}, \quad \text{Im}\{\bar{G}_d^*(\omega)\} = \sum_{j=1}^{m_1} (-1)^{j-1} (\omega)^{2j-1} G_r^{2j-1}. \quad (26)$$

Таким образом, при построении вектора p^* для каждого значения частоты ω требуется определить $\Pi_r^*(\omega)$ и $X^*(\omega)$ с использованием (21)

и решить систему линейных алгебраических уравнений (22). После этого использование (23) позволяет определить вектор q^* , использование (24) – вектор \bar{R}^* , а использование (25) – вектор \bar{U}^* .

Альтернативный метод основан на применении имеющих форму обобщенных соотношений динамических податливостей уравнений движения относительно комплексных амплитуд модальных переменных q^* [2]:

$$[A(\bar{\Omega}^e - \omega^2 I + i\omega \bar{b})^{-1} A^T + \Pi_d^*(\omega)] q^* = X^*(\omega) - A(\bar{\Omega}^e - \omega^2 I + i\omega \bar{b})^{-1} \bar{f}^*. \quad (27)$$

При использовании указанного метода для каждого значения частоты ω требуется решить заполненную систему уравнений (27) относительно вектора q^* . Вектор p^* определяется с использованием соотношений [3]:

$$p^* = (\bar{\Omega}^e - \omega^2 I + i\omega \bar{b})^{-1} (A^T q^* + \bar{f}^*), \quad (28)$$

вектор \bar{R}^* определяется с использованием (24), а \bar{U}^* – согласно (25).

Рассмотрим вопрос построения элементов остаточных матриц $G_{r,i}^j$. Равенство матриц динамических податливостей, полученных из уравнений движения МКЭ (1) и с использованием разложения по формам собственных колебаний приводит к выражению [3,7,12]:

$$G_i^*(\omega) = (K_i - \omega^2 M_i + i\omega B_i)^{-1} = \Phi_i^e (\Omega_i^e - \omega^2 I + i\omega b_i^e)^{-1} \Phi_i^{eT}. \quad (29)$$

Так как подструктуры являются системами с пропорциональным демпфированием, матрица b_i^e диагональная. Это позволяет выделить вклады удерживаемых $\Phi_{i,s}^e$ и отбрасываемых $\Phi_{i,d}^e$ форм колебаний [3,7,12]:

$$G_i^*(\omega) = G_{i,s}^*(\omega) + G_{i,d}^*(\omega), \quad (30)$$

Построение $G_{i,s}^*(\omega) = \Phi_{i,s}^e (\Omega_{i,s}^e - \omega^2 I + i\omega b_{i,s}^e)^{-1} (\Phi_{i,s}^e)^T$ трудностей не вызывает. Матрицы $\Phi_{i,s}^e$ и $\Omega_{i,s}^e$ определены в результате решения частичной проблемы собственных значений. Матрица $\Omega_{i,s}^e - \omega^2 I + i\omega b_{i,s}^e$, обращение которой выполняется для каждого рассматриваемого значения частоты, диагональная. Хотя $\Phi_{i,d}^e$ и $\Omega_{i,d}^e$ неизвестны, учитывая (29), (30)

для оценки $G_{i,d}^*(\omega) = \Phi_{i,d}^e (\Omega_{i,d}^e - \omega^2 I + i\omega b_{i,d}^e)^{-1} (\Phi_{i,d}^e)^T$ могут использоваться соотношения:

$$G_{i,d}^*(\omega) = (K_i - \omega^2 M_i + i\omega B_i)^{-1} - \Phi_{i,s}^e (\Omega_{i,s}^e - \omega^2 I + i\omega b_{i,s}^e)^{-1} (\Phi_{i,s}^e)^T. \quad (31)$$

При использовании метода синтеза форм колебаний со свободной границей обычно предполагается, что если ω^c – верхняя граница спектра

воздействия, то $\Phi_{i,s}^e$ должна содержать все формы собственных колебаний, которым соответствуют не превосходящие $2\omega^c$ частоты. При выполнении расчетов основных типов конструкций значения модальных коэффициентов относительного демпфирования $\xi_{i,k}$ обычно не превышают 0,2. В [3] показано, что при выполнении указанных условий в диапазоне частот $0 \leq \omega \leq \omega^c$ действительные части элементов матрицы остаточных податливостей – медленно возрастающие с увеличением частоты функции. Их изменение не превосходит 33%. Зависимости мнимых частей элементов матрицы остаточных податливостей от частоты близки к линейным. При этом мнимые части не превосходят 27% от действительных. Это позволяет ограничиться в разложениях (14), (15), (25) тремя членами. В этом случае достаточно определить остаточные матрицы $\bar{G}^{r,0}$, $\bar{G}^{r,1}$, $\bar{G}^{r,2}$. В [3,7,9] показано, что для построения остаточных матриц целесообразно использовать (26), (31). При этом с использованием (31) определяются значения $G_{i,d}^*(\omega_k)$ для набора значений частот $k=1,2,\dots,n$ из рассматриваемого диапазона частот $0 \leq \omega_k \leq \omega^c$. Использование полученных значений совместно с (26) позволяет определить элементы остаточных матриц $G_{r,i}^j$, например, методом наименьших квадратов. Построенные остаточные матрицы могут быть использованы при решении задачи расчета колебаний как в частотной области, так и в области времени. В [3] показано, что вывод о относительно медленном возрастании действительных частей элементов матрицы остаточных податливостей с возрастанием частоты и о относительно небольших значениях фазовых сдвигов ее элементов справедливы и в случае частотно - независимого гистерезисного затухания.

Использование простых соотношений для описания зависимостей элементов матрицы остаточных податливостей от частоты позволяет эффективно использовать метод синтеза форм колебаний подструктур для расчета колебаний конструкций в области частот и развить методы численной реализации алгоритмов расчета нестационарных колебаний. Пусть в разложениях (25), (26) удерживаются три члена, определяемые остаточными матрицами \bar{G}_r^0 , \bar{G}_r^1 , \bar{G}_r^2 . Тогда:

$$\bar{G}_d^*(\omega) = \bar{G}_r^0 - \omega^2 \bar{G}_r^2 + i\omega \bar{G}_r^1. \quad (32)$$

Рассматривая (22), (23) совместно с (32), аппроксимируя медленно меняющиеся с частотой функции степенными рядами и удерживая в указанных рядах составляющие до ω^2 включительно, получим [3]:

$$\{\bar{\Omega} - \omega^2 \bar{m} + i\omega \bar{b}\} p^* = (\bar{\Phi}_0 - \omega^2 \bar{\Phi}_2 + i\omega \bar{\Phi}_1)^T \bar{Q}^*, \quad (33)$$

$$q^* = (\pi_0 - \omega^2 \pi_2 + i\omega \pi_1) p^* + (\bar{\tau}_0 - \omega^2 \bar{\tau}_2 + i\omega \bar{\tau}_1) \bar{Q}^* . \quad (34)$$

Использование соотношений (32) - (34) при выполнении расчетов гармонических вынужденных колебаний позволяет существенно уменьшить количество арифметических операций, выполняемых для каждой частоты из расчетного диапазона. При этом результаты приведенных в [2,3] тестовых расчетов показывают, что потери точности при этом не происходит. В то же время построенные соотношения позволяют сформировать уравнения нестационарных колебаний, лишенные серьезных недостатков, свойственных уравнениям движения (16).

Используемые при формировании уравнений движения соотношения (14), (15) точны в области частот $0 \leq \omega \leq \omega^c$. Их экстраполяция в область высоких частот приводит к “паразитному” возрастанию податливости. Если анализ производится в частотной области, податливости подструктур на превосходящих ω^c частотах не используются. Однако при выполнении пошагового интегрирования (16) указанный фактор приводит как к неустойчивости численного алгоритма. Возможным способом преодоления указанных трудностей является применение для оценки вклада отброшенных высокочастотных форм колебаний одночленных выражений, учитывающих только остаточные матрицы нулевого порядка. В этом случае уравнения движения принимают традиционную для задач динамики конструкций форму системы дифференциальных уравнений второго порядка (19). Опыт показывает, что для пошагового интегрирования (19) с успехом могут быть использованы традиционные алгоритмы пошагового интегрирования уравнений движения. Подобный подход не учитывает зависимости матрицы остаточных податливостей от частоты. Это снижает точность решения. В случае учета остаточных матриц до второго порядка включительно для решения задач расчета нестационарных колебаний вместо (16) формируются модифицированные уравнения движения в области времени. Указанные уравнения должны удовлетворять ряду условий. Во-первых, они должны иметь традиционную форму системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора p . Во-вторых, в области частот $0 \leq \omega \leq \omega^c$ указанные уравнения должны приводить к тем же соотношениям между комплексными амплитудами обобщенных перемещений и внешних нагрузок, что и исходные уравнения (16). При построении указанных уравнений используются соотношения (33), (34). Нетрудно увидеть, что уравнения движения, имеющие форму:

$$m \ddot{p} + \tilde{b} \dot{p} + \tilde{\Omega} p = \tilde{\Phi}_0 \bar{Q} + \tilde{\Phi}_1 \dot{\bar{Q}} + \tilde{\Phi}_2 \ddot{\bar{Q}} , \quad (35)$$

приводят к (33) при $0 \leq \omega \leq \omega^c$. В этом диапазоне (33) аппроксимируют вытекающие из (16) соотношения (22). Аналогично соотношения

$$q = \pi_0 p + \pi_1 \dot{p} + \pi_2 \ddot{p} + \bar{\tau}_0 \bar{Q} + \bar{\tau}_1 \dot{\bar{Q}} + \bar{\tau}_2 \ddot{\bar{Q}} \quad (36)$$

приводят к (34) при $0 \leq \omega \leq \omega^c$. В этом диапазоне (34) аппроксимируют вытекающие из (16) соотношения (23). В результате пошагового интегрирования (35) определяются зависимости от времени $p(t)$. Использование (36) позволяет определить зависимости от времени $q(t)$. После этого использование (7), (8) позволяет определить силы взаимодействия подструктур, а (15) - узловые перемещения всех подструктур.

Для оценки эффективности разработанных численных алгоритмов и оценки влияния метода учета остаточных членов на точность решения были рассмотрены тестовые задачи расчета гармонических вынужденных колебаний [3,7]. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что результаты расчета конструкций, полученные методом динамических податливостей [7] и методом синтеза форм колебаний со свободной границей [3] совпадают, если учитывается одинаковое количество форм собственных колебаний подструктур, и при этом используются одинаковые методики учета остаточных членов. Использование метода синтеза форм колебаний обладает рядом существенных преимуществ. Так, уравнения метода синтеза форм колебаний обычно имеют значительно более низкий порядок, при формировании разрешающих уравнений требуется значительно меньшее количество арифметических операций, а на подструктуры не накладываются условия геометрической неизменяемости. Использование алгоритма синтеза форм колебаний без учета остаточных податливостей может приводить к существенным ошибкам как при определении внутренних динамических усилий, так и при определении вибрационных перемещений. При этом погрешности определения внутренних динамических усилий обычно выше, чем погрешности определения перемещений. В рассмотренных тестовых задачах учет остаточных податливостей позволяет с высокой точностью определять перемещения и внутренние динамические усилия в элементах подструктур, в том числе в зонах резкого изменения компонент напряженного состояния. Использование уточненных выражений, аппроксимирующих зависимости элементов матриц остаточных податливостей от частоты, позволяет существенно повысить точность прогнозирования гармонических вынужденных колебаний и расширить диапазон частот, в котором использование разложений по формам собственных колебаний подструктур приводит к удовлетворительным результатам [3,7].

Используемые при реализации алгоритмов расчета нестационарных колебаний соотношения (35), (36) содержат производные от внешних нагрузок до второго порядка включительно. Поскольку (35), (36) приводят к тем же что и (16) соотношениям между комплексными амплитудами

обобщенных перемещений и внешних нагрузок в диапазоне $0 \leq \omega \leq \omega^c$, вычисление указанных производных должно производиться на множестве функций с ограниченным носителем в области частот: $0 \leq \omega \leq \omega^c$.

Эффективность использования развитых методов при решении задач расчета нестационарных колебаний была проанализирована на примере задачи построения акселерограммы на поверхности грунта. Рассматривалось распространение плоских волн сдвига через слой грунта толщиной 15 м. Механические характеристики грунта: модуль сдвига $G = 0,25 \cdot 10^8$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0,4$; плотность $\rho = 1,9 \cdot 10^3$ кг/м³. Использовалась модель затухания Рэлея с параметрами $\alpha = 0,1251$; $\beta = 0,0003172$. На предварительном этапе рассматривалась задача построения акселерограммы на заданной глубине. При этом использовалась синтезированная для поверхности грунта горизонтальная акселерограмма (рис. 1). Синтез осуществлялся по программе Th-Spec. В качестве спектров ответа компонент расчетной акселерограммы были приняты стандартные спектры, рекомендуемые нормативными документами США для расчета АЭС на сейсмические воздействия. Продолжительность воздействия составляла 20 с, шаг цифровки $\Delta t = 0,01$ с, максимальное и минимальное значения сейсмического воздействия: $W_{max} = 1,015$ м/с² и $W_{min} = -1,022$ м/с² соответственно. Указанное сейсмическое воздействие было пересчитано на глубину 15 м. При выполнении указанного пересчета использовалась модель вертикально распространяющихся волн сдвига. При этом использовался аппарат преобразования Фурье, а для пересчета каждой из гармонических составляющих использовался метод динамических жесткостей [13]. Акселерограмма на глубине 15 м приведена на рис. 2. Пересчет сейсмического воздействия на поверхность, выполненный с использованием аналогичной методики, позволяет тождественно восстановить приведенную на рис. 1 исходную акселерограмму. Кроме того, для построения акселерограммы на поверхности по заданной акселерограмме на глубине 15 м использовались две модификации алгоритма, основанного на пошаговом интегрировании уравнений метода синтеза форм колебаний. Первая - с учетом остаточных матриц нулевого порядка, вторая - с учетом остаточных матриц до второго порядка включительно. При этом слой грунта был разбит на два участка глубиной 7,5 м. Учитывалось по 10 форм собственных сдвиговых колебаний каждого из участков. Акселерограммы на поверхности, полученные в результате интегрирования уравнений движения (35) с учетом остаточных матриц до второго порядка включительно, с высокой точностью повторяют форму исходной акселерограммы. При выполнении пошагового интегрирования использовался метод Ньюмарка с шагом 0.0025 с и

обеспечивающими безусловную устойчивость алгоритма и второй порядок точности значениями параметров $\alpha=0,25$ и $\gamma=0,5$ [1].

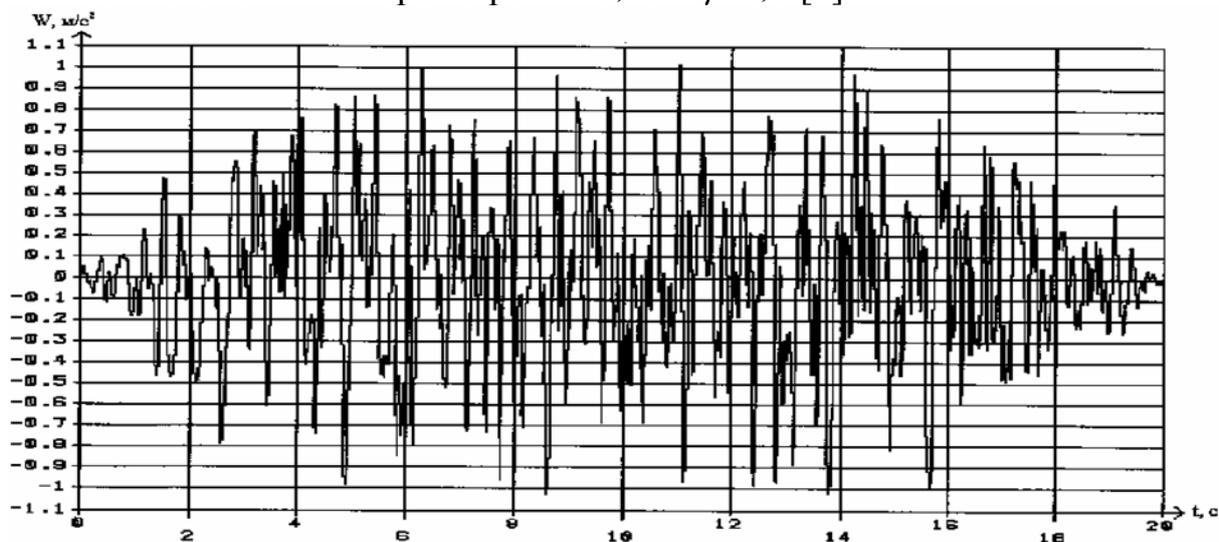


Рис. 1. Акселерограмма на поверхности; $W_{\min} = -1,022$; $W_{\max} = 1,015$.

Некоторые характеристики построенных акселерограмм приведены в табл. 1. Для акселерограмм, построенных с использованием (35), через дробную черту указаны погрешности определения наибольшего и наименьшего значений ускорения.

Приведенные результаты указывают на работоспособность развитых методов расчета нестационарных колебаний, основанных на численном интегрировании уравнений движения в форме (35) и позволяют сделать вывод о том, что использование уточненных представлений подструктур приводит к практически точным решениям задач расчета как гармонических вынужденных, так и нестационарных колебаний.

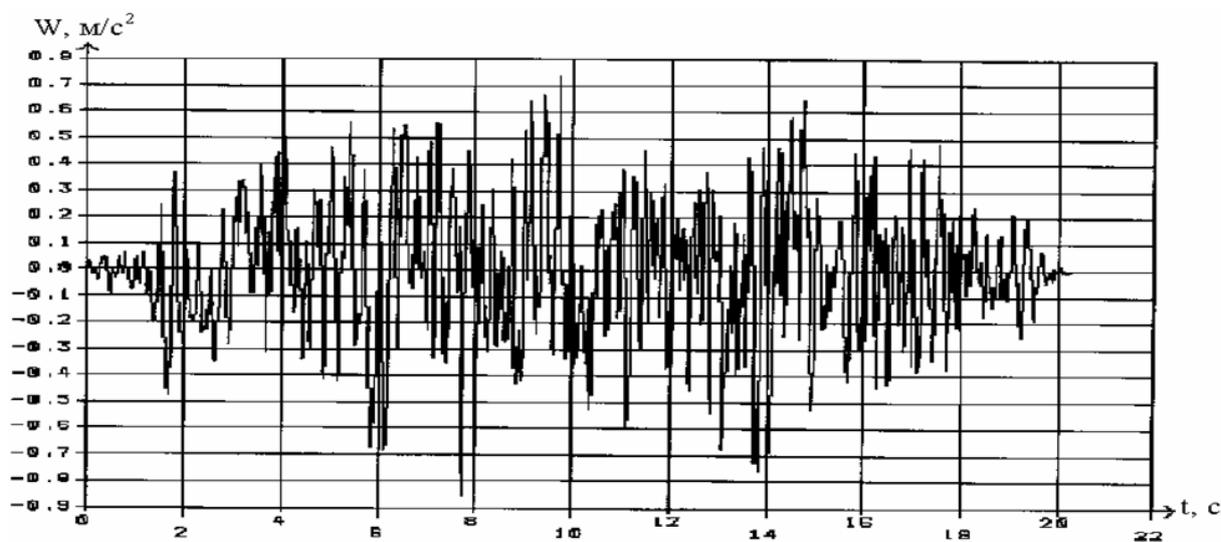


Рис. 2. Акселерограмма на глубине 15 м; $W_{\min} = -0,8498$; $W_{\max} = 0,7348$.

Таблица 1. Максимальные W_{\max} и минимальные W_{\min} значения ускорения расчетных акселерограмм и значения относительных погрешностей

Результат	Тип акселерограммы			
	Исходная акселерограмма на поверхности	Акселерограмма на глубине 15м	Акселерограмма на поверхности, построенная с учетом остаточных матриц до второго порядка	Акселерограмма на поверхности, построенная с учетом остаточных матриц нулевого порядка
W_{\max}	1,015	0,7348	0,994 / 2,1%	0,988 / 2,7%
W_{\min}	-1,022	-0,8498	-1,030 / 0,78%	-1,082 / 5,9%

Литература

1. Bathe K.J., Wilson E.L. Numerical Methods in Finite Element Analysis. // Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1976. Русский перевод: Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982, 448 с.
2. Цейтлин Б.В. Синтез форм колебаний со свободной границей и проекционным выполнением условий совместности перемещений. // Научно - технические проблемы прогнозирования надёжности и долговечности конструкций и методы их решения. Труды 4-й Международной конференции. С.-Петербург: "Нестор", 2001, с. 332 - 341.
3. Цейтлин Б.В. Синтез форм колебаний с использованием уточненных представлений подструктур // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 2005. Т. 244. с. 234-251.
4. Nicravesh P.E. Some methods for dynamic analysis of constrained mechanical systems: a survey. // NATO ASI Series. 1984, Vol. 9: Computer aided analysis and optimization of mechanical systems dynamics, pp. 351-368.
5. Craig, R. R., Jr., Structural Dynamics - An Introduction to Computer Methods // John Wiley & Sons, New York, N.Y., 1981, 527 p.
6. Berman A. Flannelly W.G. Theory of incomplete models of dynamic structures. AIAA Journal. 1971. Vol. 9. No 8. pp. 1481-1487.
7. Цейтлин Б.В. О использовании уточненных представлений подструктур при численной реализации метода динамических податливостей. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2005, № 2, с. 36 - 43.
8. Цейтлин Б.В. Метод синтеза форм колебаний подструктур. Вычислительные особенности, рекуррентные и гибридные алгоритмы. // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2002. № 6. с. 21-25.
9. Цейтлин Б.В. Синтез форм колебаний подструктур со свободной границей. Численная реализация и использование для расчета колебаний конструкций. // Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2003, вып. 3, с. 231-240.
10. Craig R.R., Jr., Chang C.-J. Free-interface methods of substructure coupling for dynamic analysis // AIAA Journal. 1976. Vol. 14. No. 11. pp. 1633-1635.
11. Rubin S., Improved component - mode representation for structural dynamic analysis. // AIAA Journal. 1975, Vol. 13. No. 8. P. 995-1006.
12. Wang Z.W., Petyt M. Forced response with increased accuracy using free component mode synthesis techniques. // Accuracy, Reliab. and Train FEM Technol. Proc. 4th World Congr., Interlaken, 17-21 Sept. 1984. Dorset, 1984. pp. 367-374.

13. Цейтлин Б.В. Об особенностях численной реализации методов вибрационного расчета сооружений. // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. Сборник научных трудов, - 1982, т. 161, - с. 18-26.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ПАССИВНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ АВТОМОБИЛЕЙ

Черников С.К., Файзуллин А.М.

(Казанский физико-технический институт, Россия)

CAR PASSIVE SAFETY ANALYSIS USING COMPUTER SIMULATION

Chernikov S.K., Fayzullin A.M.

(Kazan Physical-Technical Institute, Russia)

Рассматриваются особенности применения метода конечных элементов к анализу пассивной безопасности автомобилей. Описаны как общие математические и алгоритмические подходы к решению задач моделирования быстротекущих высоконелинейных процессов, так и особенности применения этих методов к задаче моделирования краш-тестов автомобилей.

Введение. Проектирование кузова автомобиля, удовлетворяющего в полной мере современным требованиям обеспечения пассивной безопасности – сложная инженерная задача. Решение этой задачи только экспериментальной доводкой конструкции практически невозможно из-за высокой стоимости и отсутствия в нужном количестве натуральных образцов, особенно на ранних стадиях проектирования, а также из-за большого количества параметров, влияющих на результаты. Кроме того, натуральный эксперимент часто может дать лишь конечные характеристики разрушения конструкции при отсутствии информации о характере протекания процессов деформирования. Использование численных методов позволяет оперативно исследовать изменения конструкции с целью поиска наиболее рационального варианта. При этом конструкция автомобиля рассматривается как совокупность большого количества конечных элементов.

Конечные элементы. Модель автомобиля обычно строится с использованием многих типов элементов: 3-х мерных, оболочечных, балочных, а также так называемых дискретных элементов – пружин, демпферов и масс. Пожалуй, основным требованием к используемым конечным элементам является их высокая вычислительная эффективность. Она достигается, во-первых, простотой используемых функций формы и, во-вторых, снижением порядка интегрирования (как правило, используется одноточечное интегрирование). Упрощенное описание поверхностей элементов снижает также сложность решения задач, связанных с контактным взаимодействием. За использование высокоэффективного одноточечного интегрирования приходится расплачиваться вероятностью

появления при расчете так называемых форм с нулевой энергией. В иностранной литературе данное явление носит название hourglassing из-за визуального сходства структуры деформированной сетки с формой песочных часов (англ. «hourglass»). Для борьбы с ним разработаны достаточно эффективные алгоритмы, идея которых состоит во введении в рассмотрение системы нефизичных дополнительных сил упругости или вязкости, которые с одной стороны гасят hourglass-деформации элементов, а с другой не влияют на их реальные деформации.

Геометрическая и физическая нелинейность. Для учета геометрической нелинейности обычно используется модифицируемое описание Лагранжа, при котором опорное состояние обновляется на каждом шаге. Благодаря малому размеру шага по времени при явной схеме интегрирования, а, следовательно, и малых изменениях деформаций на шаге, допустимо использовать линейную зависимость приращений деформаций от приращения перемещений или, что эквивалентно, линейные тензоры скоростей деформаций. Малая величина приращений деформаций на шаге позволяет также довольно просто вводить в рассмотрение произвольные законы деформирования материалов. Существует несколько теорий, описывающих пластическое поведение металлов, но, как показывают эксперименты, лучше всего согласуются с экспериментальными данными результаты расчетов по теории пластического течения.

Контактное взаимодействие. При ударном деформировании конструкций значительную роль играет контактное взаимодействие. При решении контактной задачи необходимо выполнение двух условий – механических условий контакта и условия непроникновения. Первые заключаются в том, чтобы (а) контактирующие точки имели одинаковое перемещение и скорость в направлении, перпендикулярном к поверхности контакта, (б) силы на контактирующих поверхностях были самоуравновешенными (нормальные силы и силы трения равны на обеих сторонах контакта) и (в) на контактных поверхностях не должно возникать растягивающих напряжений по направлению нормали к поверхности контакта. Для выполнения условий непроникновения и вычисления контактных сил в коммерческих пакетах используется, как правило, метод штрафов из-за относительной простоты его реализации и малого влияния на величину необходимого шага интегрирования по времени. Большое влияние на эффективность решения имеет выбор алгоритма поиска контакта. Из всего многообразия существующих на сегодня алгоритмов [1], стоит выделить работы Холквиста и Жонга, как получившие практическую реализацию в реальных программных продуктах. Для определения тангенциальных сил на поверхностях контакта было предложено множество законов трения, однако по причине того, что шероховатость поверхности при реальном контакте можно оценить только

весьма приближенно, для большинства задач достаточна классическая кулоновская модель трения.

Твердотельная динамика. В большинстве случаев при ударе значительные деформации претерпевает только часть конструкции автомобиля, в то время как другая остается неповрежденной. С точки зрения вычислительной эффективности решения было бы желательно моделировать такие части как недеформируемые, что позволяет вычислять перемещения такого элемента конструкции как единого жесткого тела. Стандартный на сегодня подход к применению соотношений твердотельной динамики в программных пакетах, реализующих схему явного интегрирования по времени, базируется на методе, описанном в работе [2]. Основная идея заключается в применении к недеформируемым телам конечно-элементного описания, что позволяет при записи уравнений динамики твердого тела использовать универсальный матричный подход.

Интегрирование по времени. В общем виде уравнение равновесия системы конечных элементов, находящихся в состоянии движения можно записать так:

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}(t), \quad (1)$$

где M , C и K соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости; \mathbf{R} – вектор внешней узловой нагрузки; \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$ и $\ddot{\mathbf{u}}$ – векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений ансамбля конечных элементов. Для адекватного моделирования объектов типа автомобиля требуется использовать достаточно мелкую сетку, что ведет к очень большому размеру участвующих в решении матриц. Отсюда очевидны высокие требования к эффективности используемой схемы интегрирования. В настоящее время с этой стороны наилучшим образом зарекомендовала себя схема прямого явного интегрирование по времени методом центральных разностей. Для дискретного момента времени t система (1) разрешается относительно ускорений:

$$\ddot{\mathbf{u}}_t = M^{-1} [\mathbf{R}_t - C\dot{\mathbf{u}}_t - K\mathbf{u}_t]. \quad (2)$$

Скорости и перемещения для следующего шага рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t/2} &= \dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t/2} + \ddot{\mathbf{u}}_t \Delta t \\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t/2} \Delta t \end{aligned} \quad (3)$$

Обновление скоростей в моменты, сдвинутые на половину шага по времени улучшает точность и сходимость решения. Необходимые для вычисления ускорений $\ddot{\mathbf{u}}_t$ скорости $\dot{\mathbf{u}}_t$ в момент времени t можно найти с использованием разного вида экстраполяций [1], в коммерческих пакетах обычно реализован простейший способ – $\dot{\mathbf{u}}_t$ принимается равной $\dot{\mathbf{u}}_{t-\Delta t/2}$. Главным недостатком метода центральных разностей является его условная устойчивость. Шаг интегрирования Δt должен быть меньше

критического значения, Δt_{cr} , вычисляемого исходя из инерционных и жесткостных свойств всего ансамбля элементов. В линейных задачах для получения достоверного решения необходимо выполнение условия

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi}, \quad (4)$$

где T_n – наименьший период собственных колебаний ансамбля конечных элементов; n – порядок системы. В случае наличия того или иного типа нелинейности считается достаточным уменьшить шаг по времени до величины $0,8-0,9\Delta t_{cr}$ [4].

Программные средства. Описанные выше алгоритмы и методы решения реализованы на сегодня в нескольких коммерческих программных продуктах. Пакет MSC.Dytran фирмы MSC.Software применяется главным образом в авиакосмической отрасли, а использование обладающего рядом уникальных возможностей пакета PAM-CRASH фирмы ESI-Group ограничено в основном европейским рынком. В автомобилестроении при решении задачи моделирования краш-тестов наиболее широко используется имеющий почти 30-летнюю историю развития комплекс LS-DYNA фирмы Livermore Software Technology Corp.

Методики. В настоящее время требования к пассивной безопасности автомобиля прописаны достаточно четко и подробно, и в то же время не прекращается периодическая их корректировка и ужесточение, как в части имеющихся расчетных случаев, так и введением новых. Основной идеей такого рода нормативных документов является задание условий того или иного динамического воздействия на конструкцию автомобиля, а также перечень контролируемых параметров, по которым оценивается пассивная безопасность, и диапазон их допустимых значений. При этом моделируются такие сценарии как лобовое столкновение (прямое и кософронтальное, т.е. со смещением), удар сзади, удар сбоку другим автомобилем или удар бортом о столб ограждения и т.п. Проводится также ряд специальных испытаний, моделирующих столкновение с пешеходом. Существуют как внутригосударственные стандарты (соответствующие ОСТы и ГОСТы в России, серия стандартов FMVSS в США, требования EuroNCAP в Евросоюзе, методики OSA в Японии), так и международные (Правила ЕЭК ООН).

Апробация и примеры использования. В качестве примера апробации использования пакета LS-DYNA можно привести работу по моделированию процесса деформирования энергопоглощающей вставки (рис. 1). При ударе энергопоглощающие вставки, устанавливаемые в передней части лонжеронов рамы автомобиля, за счет энергии своих пластических деформаций поглощают кинетическую энергию движущегося автомобиля. Сравнение расчетной диаграммы обжатия вставки с данными натурального эксперимента (рис. 2) показывает

качественное и количественное совпадение результатов, особенно в диапазоне перемещений 0-15 см. Следует отметить хорошее совпадение критической нагрузки при потере устойчивости вставки, а также при образовании второй, третьей и четвертой складок (пики на диаграмме).

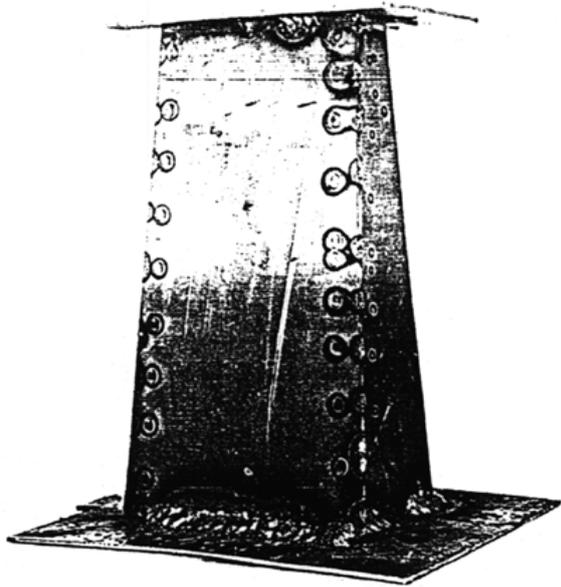


Рис. 1.

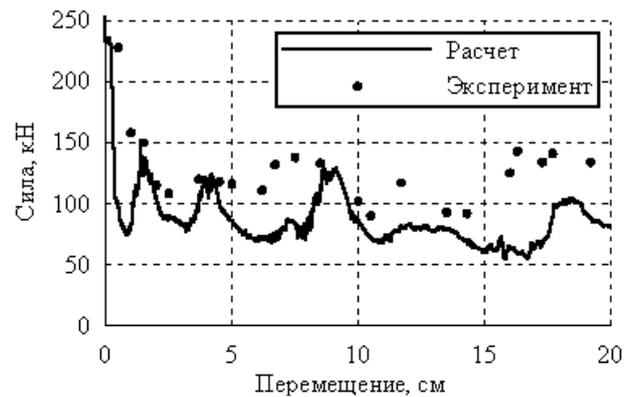


Рис. 2.

В качестве примера апробации методики численного анализа характеристик пассивной безопасности конструкции автомобиля были смоделированы фронтальный удар в недеформируемое препятствие, кософронтальный удар в сминаемый барьер и удар сзади для двух вариантов конструктивного исполнения автомобиля «Ока». На рис. 3 показано деформированное состояние кузова автомобиля после кософронтального удара.

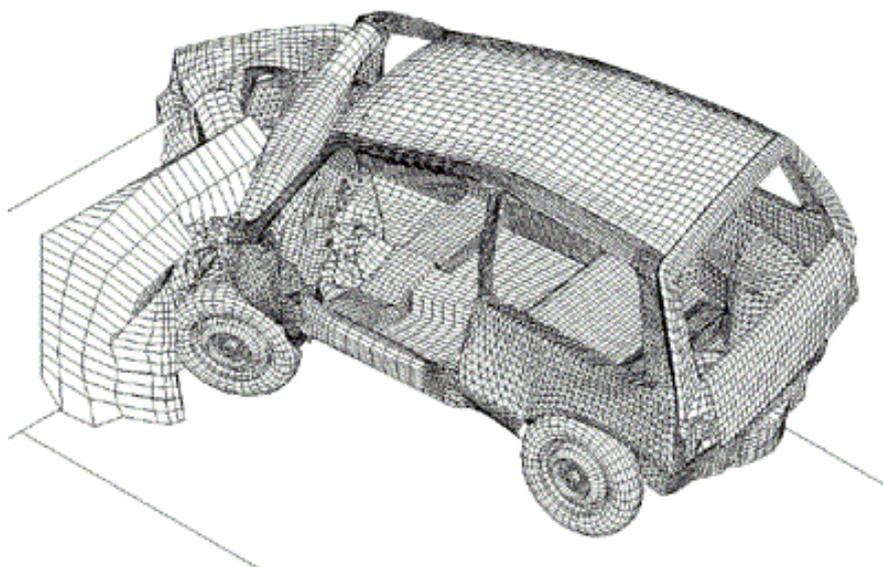


Рис. 3.

Проблемы реализации. При моделировании конструкции автомобиля и условий испытаний возникают проблемы методического и технического характера. Так при создании модели автомобиля кажется очевидной идея использовать недеформируемые тела для моделирования жесткого барьера, двигателя, КПП и ступиц колес. Однако при этом контакт двух недеформируемых тел (например, барьера и двигателя) приводит к возникновению больших осциллирующих контактных сил и, как следствие, неправдоподобно больших величин перегрузок – порядка нескольких тысяч g . Простейший выход – использовать для моделирования двигателя и КПП изотропный линейно-упругий материал. Более изящным решением является использование для недеформируемых тел «обкладок» из оболочечных элементов из деформируемого материала.

В LS-DYNA при построении модели используется такое понятие как «часть» (*PART в нотации файла исходных данных), т.е. группа элементов одного типа с одинаковыми свойствами, для которых задана ссылка на одну и ту же запись о свойствах материала. Неочевидным следствием такого подхода, является то, что даже если элементы топологически не связаны, но относятся к одной части, для которой задан абсолютно-жесткий материал, при расчете они объединяются в одно жесткое тело, что может привести к некорректным результатам.

Колеса автомобиля, в значительной степени влияют на энергопоглощающие свойства конструкции, на величины и пути развития деформаций при ударах. Поэтому имеет большое значение адекватное моделирование газонаполненных пневматиков. При расчете в LS-DYNA шина колеса рассматривается как совокупность оболочечных или мембранных конечных элементов. Толщина и характеристики материала этих элементов, должны быть такими, чтобы адекватно отражать жесткостные характеристики шины. Так как на каждом шаге интегрирования известны положение, ориентация и площадь поверхности элементов, по этим данным можно вычислить величину так называемого контролируемого объема, который связывается с давлением находящегося в нем газа тем или иным уравнением состояния. Параметры, используемые для моделирования каждой конкретной модели шины, подбираются на основании эксперимента.

Основными составляющими деформируемого барьера, используемого для испытаний на кософронтальное столкновение, являются большой и малый сотоблоки, изготовленные из алюминиевых сот с разными размерами ячеек. Для упрощения модели барьера соты можно идеализировать сплошным нелинейным упругопластичным анизотропным материалом. Модель такого материала в LS-DYNA описывается параметрами до деформирования и после полного компактирования сот. Момент перехода в полностью компактированное состояние характеризуется задаваемой величиной относительного объема $V=V_f$. В

зависимости от V задаются также величины компонент тензора напряжений в осях ортотропии материала при его деформировании. Отметим, что конструкция и интегральные жесткостные свойства деформируемого барьера четко оговорены соответствующими нормами.

Литература

1. Бурого Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов// МТТ, 2005, №1, с.45-87.
2. Benson, D.J. and Hallquist, J.O. (1985) 'A simple rigid body algorithm for structural dynamics programs'. *Int. J. Num. Met/I. Eng.*, 22, pp. 723-749.
3. Park, K.C. and Underwood, P.G. (1980) 'A variable-step central difference method for structural dynamics analysis. Part I. Theoretical aspects'. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 22:241-258.
4. Belytschko, T. and Mullen, R. (1977) 'Explicit integration of structural problems', in *Finite Elements in Nonlinear Mechanics*, (ed.) by P. Bergan *et al.*, pp. 672-720.

УДК 539.3

АНАЛИЗ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ И БЕЗ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЗВЕНЬЕВ.

Шигабутдинов А.Ф.

(Казанский государственный университет, Россия)

THE ANALYSIS OF DEFORMABLE SYSTEM IN VIEW OF AND WITHOUT RELATIVE ROTATION OF SEPARATE PARTS.

Chigaboutdinov A.F.

(Kazan State University, Russia)

В работе приводится методика исследования сложных динамических систем при относительном вращении элементов друг относительно друга. Исследовано динамическое поведение модельной конструкции в зависимости от её геометрических и физических параметров. Определены режимы движения, скорости вращения, при которых исследуемая конструкция совершает колебательные движения с ограниченной амплитудой, входит в резонанс.

Кинематика движения. Для описания движения рассматриваемого твёрдого тела вводятся две системы координат: неподвижная, с ортами \vec{e}_i , и подвижная, жёстко связанная с телом с ортами \vec{P}_i . Вводятся обозначения:

$\vec{R}(t) = R_i(t)\vec{e}_i$ - радиус-вектор начала подвижной системы отсчёта (СО);

$\vec{r}(t) = r_i\vec{P}_i(t)$ - радиус-вектор текущей точки твёрдого тела в недеформированном состоянии. $\vec{u}(\xi, \eta, \zeta, t) = u_i(\xi, \eta, \zeta, t)\vec{P}_i(t)$ - вектор перемещения текущей точки.

$\vec{\rho} = \vec{R} + \vec{r} + \vec{u}$ - радиус-вектор текущей точки

в деформированном состоянии относительно неподвижной системы отсчёта.

$$\vec{P}_i = P_{ij} \vec{e}_j.$$

Взяв производные по времени, получим:

$$\dot{\vec{R}}(t) = \dot{R}_i(t) \vec{e}_i; \quad \ddot{\vec{R}}(t) = \ddot{R}_i(t) \vec{e}_i. \quad (1)$$

$\vec{\omega}(t) = \omega_i^0(t) \vec{e}_i = \omega_i(t) \vec{P}_i(t)$ - вектор мгновенной угловой скорости вращения осей \vec{P}_i .

$\vec{\varepsilon}(t) = \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_i^0(t) \vec{e}_i = \dot{\omega}_i(t) \vec{P}_i(t) + \omega_i(t) \dot{\vec{P}}_i(t)$ - вектор мгновенного углового ускорения.

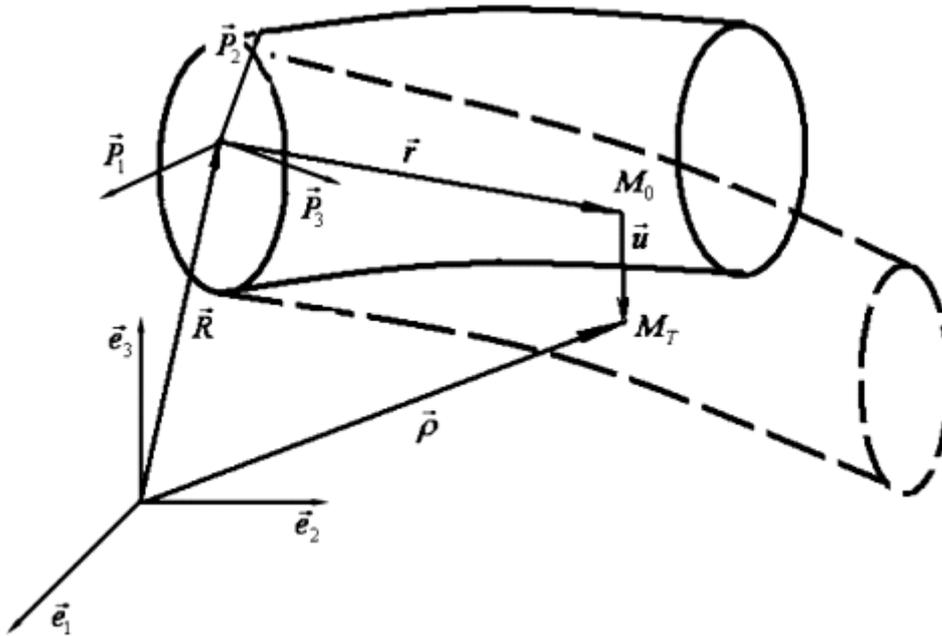


Рис. 1.

Нами будет использована кинематическая формула Эйлера

$$\dot{\vec{P}}_i = \vec{\omega} \times \vec{P}_i \quad (2).$$

Выражение для первой и второй производных по времени от радиус-вектора:

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{u}}, \quad (3)$$

тогда если ввести величины $\vec{v} = \dot{u}_i \vec{P}_i$, $\vec{a} = \ddot{u}_i \vec{P}_i$ - скорость и ускорение точки в местной системе координат, получим

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{u}) + \vec{v}; \quad (4)$$

$$\ddot{\vec{\rho}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} + \vec{u}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{u})] + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a}. \quad (5)$$

В последнем соотношении справедливо:

$$\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{u})] = \vec{\omega} [\vec{\omega} \cdot (\vec{r} + \vec{u})] - (\vec{r} + \vec{u}) \omega^2. \quad (6)$$

Количество движения для материального объёма Ω запишется по формуле:

$$\vec{K} = \iiint_{\Omega} \rho \dot{\vec{r}} d\Omega = \iiint_{\Omega} \rho [\vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{u}) + \vec{v}] d\Omega. \quad (7)$$

Изменение количества движения

$$\dot{\vec{K}} = \iiint_{\Omega} \rho \ddot{\vec{r}} d\Omega = \iiint_{\Omega} \rho \{ \vec{R} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} + \vec{u}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{u})] + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a} \} d\Omega. \quad (8)$$

Главные векторы внешних и внутренних сил соответственно примут вид:

$$\vec{R}_{вн} = \iiint_{\Omega} \vec{Q} d\Omega; \quad \vec{R}_{вп} = \oiint_S \sigma_{ij} \vec{n}_j ds = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \vec{P}_j d\Omega. \quad (9)$$

Тогда из уравнения сохранения количества движения материального объёма получим:

$$\iiint_{\Omega} \rho \{ \vec{R} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{r} + \vec{u}) + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r} + \vec{u})] + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a} \} d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{Q} + \text{div}(\sigma) d\Omega, \quad (10)$$

здесь

$$\text{div}(\sigma) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \vec{P}_j. \quad (11)$$

Рассмотрим случай малых смещений, деформаций и т.д., т.е.

$$\vec{u} \ll \vec{r}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1. \quad (12)$$

Тогда, выражения, записанные ранее, примут вид:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}; \quad (13)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a}; \quad (14)$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\omega^2. \quad (15)$$

Из уравнения сохранения количества движения выразим величину:

$$\vec{Q}^* = -\rho \{ \ddot{\vec{R}} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a} \} \quad (16)$$

и назовём её обобщённой силой инерции.

Введём величину

$$\vec{M}^* = -\vec{g} \times \rho \{ \ddot{\vec{R}} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \vec{a} \} \quad (17)$$

и назовём её обобщённым моментом инерции.

Воспользуемся далее принципом Лагранжа-Даламбера. В этом случае:

$$\iiint_{\Omega} \delta W d\Omega = \iiint_{\Omega} \vec{F} \cdot \delta \vec{U} + \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} d\Omega. \quad (18)$$

В отсутствие массовых сил в правой части уравнения останутся силы инерции:

$$\iiint_{\Omega} \delta W d\Omega = \iiint_{\Omega} \bar{Q}^* \cdot \delta \bar{U} + \bar{M}^* \cdot \delta \bar{\theta} d\Omega \quad (19)$$

Применение МКЭ предполагает вычисление интегралов поэлементно. Интеграл в левой части от удельной потенциальной энергии позволяет найти матрицу жёсткости. Интегрируя выражение, стоящее в правой части придём к системе дифференциальных уравнений второго порядка относительно узловых перемещений, первых и вторых производных от них.

Модельная задача.

В качестве небольшого примера рассмотрим деформируемую стержневую систему, состоящую из двух элементов бруса: первого, горизонтального, жёстко защемлённого с левого конца, и второго, вращающегося на правом краю первого бруса с некоторой постоянной угловой скоростью ω (рис. 1).

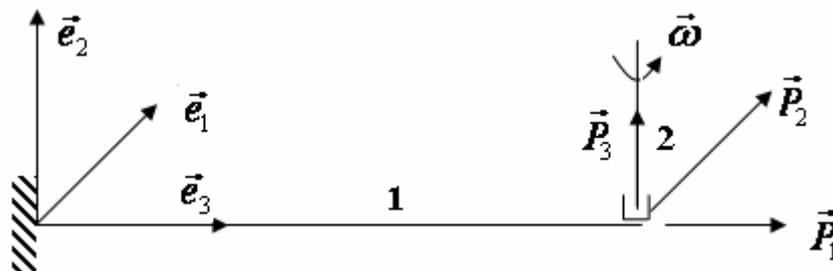


Рис. 2.

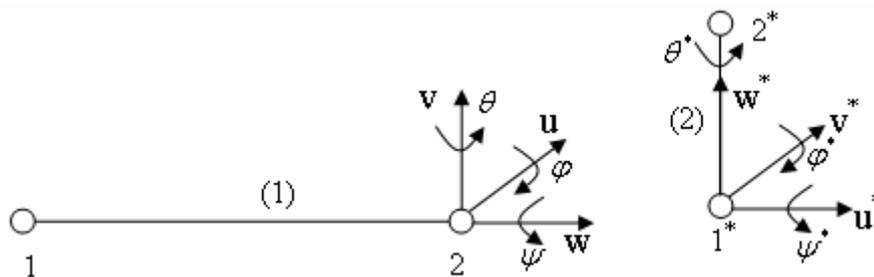


Рис. 3.

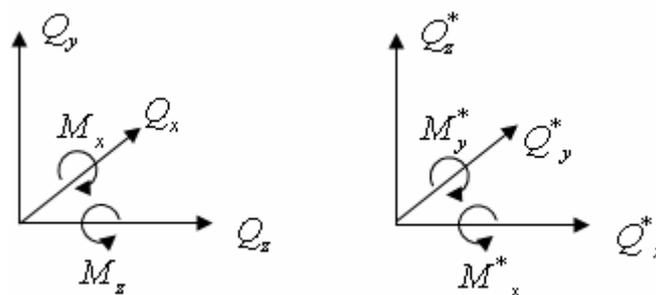


Рис. 4.

Направим \vec{e}_3 по первому брусу; \vec{P}_3 - по второму.

$\vec{\omega}(t) = \omega_i(t)\vec{P}_i(t) = \omega\vec{P}_3(t)$ - вектор относительной угловой скорости.

Брусья с номерами (1), (2) идеализируем одним конечным элементом бруса [1]. Узловые перемещения и силовые характеристики для каждого из элементов указаны на рисунках.

1 элемент: u, v, w -перемещения; θ, φ, ψ -углы поворота; Q_x, Q_z, Q_y -усилия; M_x, M_z -моменты.

2 элемент: u^*, v^*, w^* -перемещения; $\theta^*, \varphi^*, \psi^*$ - углы поворота; $Q_x^*, Q_z^*, Q_y^*, M_x^*, M_y^*$.

Пусть $\vec{P}_3 = \vec{e}_2$, что говорит о малости отклонения второго бруса от \vec{e}_2 при его относительном вращении. Будем также считать, что в начальный момент времени при $t = 0$: $\vec{P}_1 = \vec{e}_3, \vec{P}_2 = \vec{e}_1$. В следующий момент времени локальная система координат повернется на некоторый угол $\omega \cdot t$ относительно глобальной системы координат.

Связь между оортами глобальной и локальной систем координат запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{P}_1 \sin(\omega t) + \vec{P}_2 \cos(\omega t); \\ \vec{e}_3 = \vec{P}_1 \cos(\omega t) - \vec{P}_2 \sin(\omega t); \\ \vec{e}_2 = \vec{P}_3. \end{cases} \quad (20)$$

Вследствие сопряжения конструкции в правом узле первого бруса и нижнем узле второго, для этого узла, обозначим его $(2, 1^*)$, (* - обозначает принадлежность ко второму брусу), можно записать систему уравнений равновесия, связывающее силовые характеристики:

$$\begin{cases} Q_x + Q_x^* \sin(\omega t) + Q_y^* \cos(\omega t) = 0; \\ Q_z + Q_x^* \cos(\omega t) - Q_y^* \sin(\omega t) = 0; \\ M_x + M_x^* \sin(\omega t) + M_y^* \cos(\omega t) = 0; \\ M_z + M_x^* \cos(\omega t) - M_y^* \sin(\omega t) = 0; \\ Q_y + Q_z^* = 0. \end{cases} \quad (21)$$

в направлении вектора $\vec{\omega}$ момент не действует.

Аналогично для узла стыковки двух брусьев можно записать кинематические уравнения сопряжения:

$$\vec{U} = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3 = u^*\vec{P}_1 + v^*\vec{P}_2 + w^*\vec{P}_3; \quad (22)$$

$$\vec{\theta} = \vec{e}_1\varphi + \vec{e}_2\theta + \vec{e}_3\psi = \varphi^*\vec{P}_1 + \theta^*\vec{P}_2 + \psi^*\vec{P}_3. \quad (23)$$

Уравнения движения для первого бруса, с учётом нулевых перемещений в заделке (левый конец бруса) примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_x = k_{11}^x u + k_{12}^x \theta + m_{11}^x \ddot{u} + m_{12}^x \ddot{\theta} \\ Q_y = k_{11}^y v + k_{12}^y \varphi + m_{11}^y \ddot{v} + m_{12}^y \ddot{\varphi} \\ Q_z = k_N^z w + m_N^z \ddot{w} \\ M_x = k_{21}^y v + k_{22}^y \varphi + m_{21}^y \ddot{v} + m_{22}^y \ddot{\varphi} \\ M_z = k^z \psi + m^z \ddot{\psi} \end{array} \right. \quad (24)$$

Здесь k_{ij}^x , k_{ij}^y , k_N^z , k^z - коэффициенты матрицы жёсткости, m_{ij}^x , m_{ij}^y , m_N^z , m^z - коэффициенты матрицы масс.

Аналогично можно записать систему двенадцати дифференциальных уравнений второго порядка для второго вертикального бруса. Далее используем соотношения для связи между силовыми характеристиками во втором узле первого бруса и в первом узле второго бруса, а также кинематические условия сопряжения в этом узле.

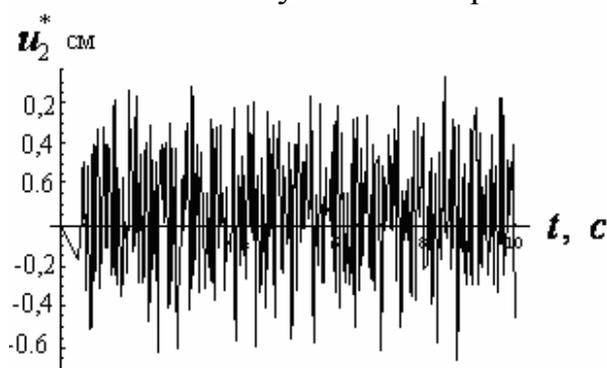


Рис. 5.

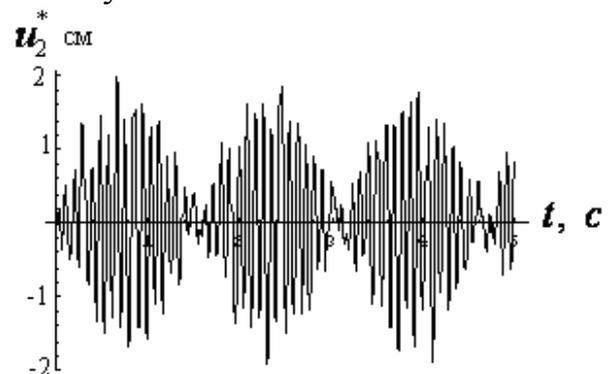


Рис. 6.

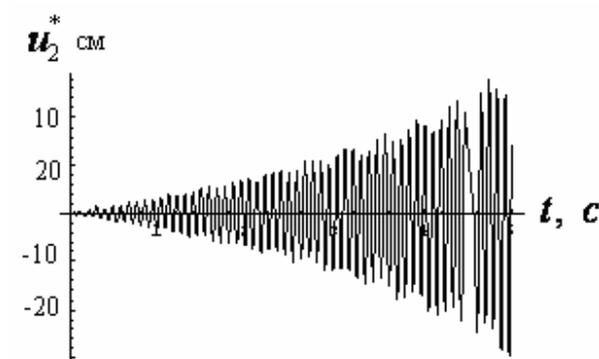


Рис. 7.

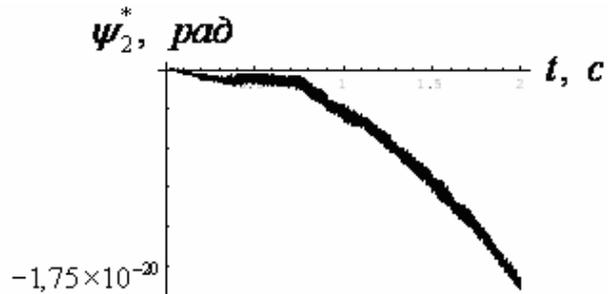


Рис. 8.

В результате получаем систему двенадцати дифференциальных уравнений второго порядка относительно узловых перемещений второго

узла первого бруса и верхнего узла второго бруса, интегрирование которой позволяет определить динамические характеристики исследуемой конструкции по времени в зависимости от угловой скорости вращения. Полученная система уравнений решается в пакете Mathematica 5.0.

Рассматривались конструкции из алюминия и стали с разными длинами первого и второго звена круглого поперечного сечения. Исследовался характер движения конструкции в зависимости от угловой скорости.

На рисунках 5, 6, 7 показано как с изменением угловой скорости вращения ω второго бруса ведёт себя перемещение u_2^* верхнего узла второго бруса. Аналогичным образом ведут себя и другие узловые перемещения. При этом, величина закручивания вертикального бруса остаётся пренебрежимо малой (Рис. 8). С дальнейшим увеличением угловой скорости вращения наблюдаются аналогичные этапы: эффект биения, колебания около положения равновесия, эффект биения, явление резонанса. Таким образом, при некоторых угловых скоростях вращения наблюдается динамическая неустойчивость системы.

Литература

1. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М.: Высшая школа, 1985.
2. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. – Казань: Изд-во «ДАС», 2001. – 301 с.

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СДАВЛИВАНИИ СИСТЕМЫ ТОЛСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Широколобова О.Б.

(НовГУ, Великий Новгород, Россия)

Рассматривается статически неопределенная задача двумерной линейной теории упругости о несимметричном сдавливании системы из трёх упругих колец между двумя абсолютно жёсткими плитами. Приближённое решение вспомогательной задачи о действии локальных нагрузок, приложенных на полюсах упругого кольца, строится на основе известного асимптотического решения контактной задачи. Определяется так называемая характеристика жесткости упругого кольца при локальном нагружении, представляющая собой уравнение, связывающее глобальную деформацию сжатия с локальной контактной силой. На его основе составляется уравнение совместности деформаций в упругой системе. Представляются результаты численных расчетов.

Введение. Применение полых роликов в радиальных подшипниках качения [1] вызвало интерес к постановке и решению рассматриваемой задачи теории упругости о несимметричном сжатии системы толстых цилиндрических оболочек между двумя абсолютно жёсткими плитами. Контактные задачи теории оболочек рассматривались в работах [2-4] и др.

Контактная задача для упругой балки излагалась в работе [5]. Оценка погрешности гипотез Кирхгофа в ряде задач статического расчёта круговых цилиндрических оболочек, а так же цилиндрических пластин под действием распределённых, локальных и краевых нагрузок рассматривалось в работе [6].

Постановка задачи. Пусть абсолютно жёсткая балка несёт распределённую нагрузку $q(z)$ и опирается на три упругих опоры в форме толстых одинаковых цилиндров, расположенных в точках z_1 , z_2 и z_3 . Предположим, что цилиндры в свою очередь располагаются на жесткой горизонтальной плоскости, причем их оси параллельны между собой. Для того чтобы выполнялось условие плоской деформации упругих цилиндров, потребуем, что балка имеет сравнительно широкую полку и распределение нагрузки в поперечном направлении, т.е. в направлении осей упругих опор, постоянно.

В положении равновесия действие опор на балку заменим сосредоточенными реакциями R_1, R_2, R_3 . Уравнения статического равновесия имеют вид

$$\sum_{j=1}^3 R_j = F_q, \quad \sum_{j=1}^3 z_j R_j = M_q. \quad (1)$$

Условие совместности перемещений точки балки и нелинейной упругой опоры в общем виде записываются так:

$$R_j = f_j(v(z_j)), \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где $f_j(v)$ — характеристика жесткости j -ой опоры (заданная функция аргумента v), $v(z_j)$ — вертикальное смещение балки в точке опоры.

Характеристика жесткости цилиндрической опоры. Задачу приближенного определения функциональной зависимости $f_j(v)$ опоры с номером j можно свести к решению плоской контактной задачи теории упругости о сжатии одного толстого кольца между двумя абсолютно жёсткими горизонтальными балками.

Пусть каждое из упругих колец имеет внешний радиус r и внутренний βr , где параметр β характеризует относительную тонкостенность цилиндра ($0 \leq \beta < 1$). Для простоты внутренняя граница колец предполагается не нагруженной. Предлагаемое решение может быть легко обобщено на случай действия на упругий цилиндр внутреннего давления.

Обозначим через v сближение жестких балок. Можно считать, что они получают противонаправленные смещения величиной $v(z_j)/2$ относительно центра кольца.

В работе [7] было построено асимптотическое решение контактной задачи о сжатии упругого кольца двумя различными криволинейными штампами радиусов r_1 и r_2 . Чтобы применить результаты работы [7] в рассматриваемом случае требуется осуществить предельный переход $r_1 \rightarrow \infty$ и $r_2 \rightarrow \infty$. В результате получим следующие формулы.

Контактное давление распределено по малому участку шириной $2h$

$$P_j(z) = \frac{2R_j}{h_j} \sqrt{1 - \frac{(z - z_j)^2}{h_j^2}}, \quad (3)$$

где полуширина участка контакта

$$h_j = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{2\pi\mu}} R_j r. \quad (4)$$

При этом уравнение связи величины сближения балок $v(z_j)$ с силой реакции R_j имеет вид

$$\frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} R_j \left(\ln \frac{32\pi r \mu}{(\kappa + 1)R_j} - 1 + 2C(\beta) \right) = v_j(z_j). \quad (5)$$

В случае плоской деформации $\kappa = 3 - 4\nu$, где ν - коэффициент Пуассона. Для величины $C(\beta)$ имеет место формула

$$C(\beta) = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} + \sum_{k=2,4,\dots} \frac{2k\beta^{2(k-1)}}{k^2 - 1} \cdot \frac{k^2(1 - \beta^2)^2 + k(1 - \beta^4) + 2\beta^2(1 - \beta^{2k})}{(1 - \beta^{2k})^2 - k^2\beta^{2(k-1)}(1 - \beta^2)^2}. \quad (6)$$

Вывод результирующей задачи. Вертикальное смещение балки $v(z) = A + Bz$, (7)

где постоянные A и B характеризуют осадку балки и подлежат определению вместе с R_1 , R_2 и R_3 . Для вычисления этих пяти неизвестных имеем два уравнения равновесия (1) и три соотношения (5). В результате получаем систему:

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &= F_q \\ z_1 R_1 + z_2 R_2 + z_3 R_3 &= M_q \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} R_j \left(\ln \frac{32\pi r \mu}{(\kappa + 1)R_j} - 1 + 2C(\beta) \right) = A + Bz_j, \quad (j = 1, 2, 3)$$

Для численных расчётов перейдём к безразмерным переменным.

$$\bar{v}_j = \frac{v_j}{r}, \quad \bar{R}_j = \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \frac{R_j}{r}, \quad \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \frac{F_q}{r} = \bar{F}_q,$$

$$\frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \frac{M_q}{r^2} = \bar{M}_q, \quad \bar{A} = \frac{A}{r}, \quad \bar{z}_j = \frac{z_j}{r}. \quad (9)$$

Тогда система (8) примет вид

$$\sum_{j=1}^3 \bar{R}_j = \bar{F}_q, \quad \sum_{j=1}^3 \bar{z}_j \bar{R}_j = \bar{M}_q,$$

$$\bar{R}_j (3 \ln 2 + 2C(\beta) - 1 - \ln \bar{R}_j) = \bar{A} + B \bar{z}_j. \quad (10)$$

Система (10) является нелинейной. Решаем её методом итераций. Ранее итерационный метод решения контактной задачи для оболочки предлагался в работе [8]. Для определённости рассматриваем случай плотного расположения колец (без зазоров между ними). Пусть центр второго кольца определяет начало координат, тогда $\bar{z}_1 = -2$, $\bar{z}_2 = 0$, $\bar{z}_3 = 2$. Чтобы балка заведомо опиралась на все три опоры, принимаем $\bar{F}_q = 1$, $\bar{M}_q = 1$. При большом эксцентриситете прилагаемой силы одна из реакций обращается в нуль, а потом становится отрицательной. Это указывает на то, что балка должна оторваться от этой опоры.

Заключение. При увеличении параметра β , число итераций уменьшается. Реакция на первую опору ослабевает, а на вторую и третью возрастает. Постоянные A и B также возрастают.

Литература

1. Пастухов А.С. К сжатию полого цилиндра конечной длины между плоскими опорами // Прикл. механика (Киев), 1972. Т.8, №7. С.106–108.
2. Григолюк Э.И., Толкачёв В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М.: Машиностроение, 1980.
3. Михайловский Е.И., Тарасов В.Н. Метод решения контактных задач с неизвестной областью взаимодействия // Новожиловский сб. СПб.: Судостроение, 1992. С. 17-26.
4. Карасев С.Н. О некоторых контактных задачах теории тонких пластин и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ, 1978, №5. С.170-178.
5. Попов Г.Я. Об интегральных уравнениях контактных задач для тонкостенных элементов // ПММ, 1976. Т. 40, №4. С. 662-673.
6. Павилайнен В.Я., Широколобова О.Б. Оценка погрешности гипотез Кирхгофа в задачах статики цилиндрических оболочек : тез. докл. // 1-ой международной конф. «Актуальные проблемы прочности» / В. Новгород. 1994. С. 31.
7. Аргатов И.И. К решению двумерной задачи Герца // Прикладная механика и теоретическая физика. 2001. Т. 42, № 6. С.166-176.
8. Михайловский Е.И., Тарасов В.Н. О сходимости метода обобщённой реакции в контактных задачах со свободной границей // ПММ. 1993. Т. 57, №1. С. 128-136.

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ МКЭ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

Шклярчук Ф.Н., Ротанин С.М.

(Московский авиационный институт (государственный технический университет), Москва, Россия)

Рассматриваются малые колебания идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью внутри упругой оболочки вращения. Результаты получены с помощью МКЭ на основе вариационных принципов Лагранжа, Кастильяно и смешанного вариационного принципа для потенциала перемещений жидкости, а также на основе принципа Лагранжа для перемещений жидкости. В последнем случае конечные элементы представляют собой тонкие поперечные слои жидкости. Представлены примеры со сравнениями результатов и оценками точности и сходимости рассмотренных вариантов МКЭ.

APPLICATION OF DIFFERENT VERSIONS OF FEM FOR CALCULATION OF LIQUID VIBRATIONS IN ELASTIC SHELLS OF REVOLUTION

Shklyarchuk F.N., Rotanin S.M.

Moscow Aviation Institute (State Technical University), Moscow, Russia)

Small vibrations of ideal incompressible liquid with the free surface inside of an elastic shell of revolution are considered. Results are obtained by FEM based on the Lagrange, Castigliano and mixed type variational principles for the liquid displacement potential as well as on the Lagrange principle for the liquid displacements. In the latter case the finite elements are thin transverse layers of the liquid. The examples are presented with the comparisons of the results and estimations of the accuracy and convergence of the considered FEM versions.

Рассмотрим малые колебания идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью внутри произвольной упругой оболочки вращения, нормальные перемещения которых считаются заданными (рис.1) в виде $w = W(x)\cos m\theta\sin\omega t$, где m – число волн в окружном направлении, θ - угловая координата, ω - частота колебаний.

В такой постановке может быть решена задача о собственных колебаниях жидкости со свободной поверхностью в неподвижной полости вращения ($w = 0$) и задача расчета коэффициентов присоединенных масс жидкости для расчетной модели колеблющейся упругой оболочки вращения, описываемой обобщенными координатами, включая КЭ-модель.

1. Принцип Лагранжа для потенциального движения жидкости. В качестве неизвестной будем рассматривать потенциал перемещений

жидкости Φ : $\nabla\Phi = v$ - вектор перемещений жидкости. Функция Φ разыскивается в классе функций, удовлетворяющих уравнению несжимаемости жидкости и условию ее безотрывного движения на смоченной поверхности оболочки:

$$\Delta\Phi = 0 \text{ в } V, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = w \text{ на } S. \quad (1)$$

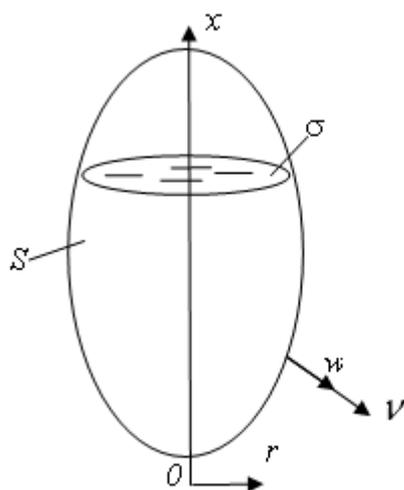


Рис. 1.

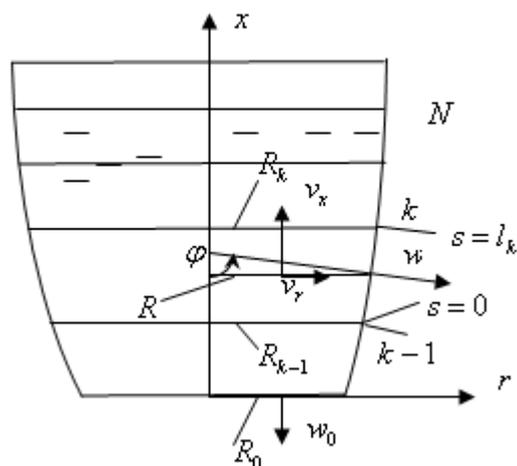


Рис. 2.

Функционал принципа Лагранжа, как разность кинетической и потенциальной энергий жидкости, и вариационное уравнение записываются в виде (общий множитель $\rho\omega^2$ опускаем):

$$J_1 = \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla\Phi)^2 dV - \frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2} \iint_\sigma \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma;$$

$$\delta J_1 = \iint_\sigma \left(\Phi - \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) \delta \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} d\sigma = 0; \quad (2)$$

ρ - плотность жидкости; g - ускорение поля сил тяжести; ν - внешняя единичная нормаль к поверхностям S и σ .

Из принципа Лагранжа следует динамическое граничное условие на свободной поверхности жидкости σ . Как видно из (1), (2), функция Φ на основании принципа Лагранжа может быть определена с точностью до произвольной константы.

При расчете колебаний по МКЭ жидкость в полости вращения делится на кольцевые КЭ с треугольным или четырехугольным поперечным сечением. В качестве обобщенных координат для КЭ рассматриваются амплитудные значения перемещений жидкости $v_x = \partial\Phi/\partial x$, $v_r = \partial\Phi/\partial r$, $v_\theta = \partial\Phi/r\partial\theta$ на узловых окружностях, по которым соединяются соседние КЭ. В пределах КЭ функция Φ аппроксимируется рядом по гармоническим функциям с числом членов, равным числу обобщенных координат рассматриваемого КЭ, через которые затем выражаются коэффициенты аппроксимирующего ряда. В итоге выражение J_1 в виде $J_1 = \sum_k J_1^{(k)}$, где k

– номер КЭ, записывается в обобщенных координатах, после чего для них на основании вариационного принципа $\delta J_1 = 0$ составляются уравнения колебаний жидкости. При этом граничное условие $\partial\Phi/\partial\nu = w$ на S удовлетворяется дискретно на узловых окружностях, лежащих на этой поверхности.

2. Принцип Кастильяно. В данном случае Φ представляет возмущенное давление в жидкости $p = \rho\omega^2\Phi$, а функционал и вариационное уравнение имеют вид:

$$J_2 = \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla\Phi)^2 dV - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} \iint_{\sigma} \Phi^2 d\sigma - \iint_S \Phi w dS;$$

$$\delta J_2 = \iint_S \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - w \right) \delta\Phi dS + \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \frac{\omega^2}{g} \Phi \right) \delta\Phi d\sigma - \iiint_V \Delta\Phi \delta\Phi dV = 0. \quad (3)$$

Как видно, из принципа Кастильяно следуют условие несжимаемости жидкости и оба граничных условия. Заметим, что условие на σ , имеющее в данном случае вид $\partial\Phi/\partial\nu - (\omega^2/g)\Phi = 0$, является кинематическим в отличие от динамического условия $\Phi - (g/\omega^2)(\partial\Phi/\partial\nu) = 0$. Принцип Кастильяно (3) не применим при $g/\omega^2 \rightarrow 0$, если имеется свободная поверхность жидкости σ .

При решении задачи на основании принципа Кастильяно в отличие от принципа Лагранжа функция Φ должна включать в свой состав неизвестную (варьируемую) константу.

3. Смешанный вариационный принцип. Вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно являются классическими минимальными принципами. Смешанный вариационный принцип является минимаксным. Можно записать несколько различных вариантов этого принципа. Смешанный вариационный принцип, сформулированный в [1] для расчета гидроупругих гармонических колебаний оболочки, частично заполненной сжимаемой жидкостью, выражается через вектор перемещений оболочки и функцию Φ , которая представляет одновременно возмущенное давление и потенциал перемещений жидкости. В частном случае, когда нормальное перемещение w оболочки задано и жидкость является несжимаемой, функционал этого принципа и вариационное уравнение принимают вид:

$$J_3 = \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla\Phi)^2 dV - \iint_{\sigma} \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} d\sigma + \frac{1}{2} \frac{g}{\omega^2} \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right)^2 d\sigma - \iint_S \Phi w dS.$$

$$\delta J_3 = - \iiint_V \Delta\Phi \delta\Phi dV + \iint_S \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - w \right) \delta\Phi dS - \iint_{\sigma} \left(\Phi - \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} \right) \delta \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} d\sigma = 0. \quad (4)$$

Из этого принципа следуют уравнение несжимаемости жидкости, кинематическое условие на подвижной стенке и динамическое условие на

свободной поверхности жидкости. Смешанный вариационный принцип в варианте (4) в отличие от принципа Кастильяно (3) может применяться также при $g/\omega^2 \rightarrow 0$.

Алгоритм расчета колебаний жидкости по МКЭ при использовании смешанного вариационного принципа (3) такой же как при использовании принципа Кастильяно. Удобство заключается в том, что его можно использовать для расчета коэффициентов присоединенных масс жидкости для высокочастотных преимущественно упругих колебаний оболочки, когда можно пренебрегать гравитационными волнами на свободной поверхности жидкости, полагая $g/\omega^2 = 0$.

3. Гармонические степенные функции. При использовании принципа Лагранжа (2) и основанного на нем метода конечных элементов функция Φ должна удовлетворять уравнению $\Delta\Phi = 0$ в пределах объема каждого КЭ (на границах между соседними КЭ, соединяемыми только в узловых точках, возможно нарушение этого условия).

При использовании принципа Кастильяно (3) и смешанного вариационного принципа (4) нет необходимости заранее, т.е. при аппроксимации Φ , удовлетворять уравнение $\Delta\Phi = 0$. Однако, если и в этих случаях Φ аппроксимировать гармоническими функциями, то это улучшит сходимость решения по МКЭ.

В цилиндрической системе координат гармонические степенные функции записываются в виде[1]:

$$\varphi_k^{(m)} = \cos(m\theta) \sum_{\nu=0,2,4..}^{\nu \leq k} C_\nu^{(m)} x^{k-\nu} r^{m+\nu}; \quad (5)$$

$$C_0^{(m)} = 1, C_\nu^{(m)} = -\frac{(k-\nu+2)(k-\nu+1)}{\nu(2m+\nu)} C_{\nu-2}^{(m)}, \quad \nu = 2, 4, \dots \leq k.$$

5. Принцип Лагранжа для перемещений жидкости. Для расчета колебаний жидкости в упругой оболочке вращения будем использовать вариационный метод сведения гидродинамической задачи в перемещениях к одномерной, описываемой одной функцией, представляющей продольные перемещения жидкости [2, 3, 4].

Для получения одномерной КЭ-модели жидкость поперечными сечениями $x = const$ делится на тонкие слои. Слой жидкости, ограниченный поперечными сечениями $x = x_{k-1}$, $x = x_k$ и поверхностью оболочки $R(x)$ рассматривается в качестве k -го КЭ, рис.2.

5.1 Осесимметричные колебания ($m=0$). Продольное перемещение жидкости v_X в поперечном сечении $x = const$ k -го КЭ, ($x_{k-1} \leq x \leq x_k$) при осесимметричных колебаниях представляется в виде:

$$v_X(x, r, t) = \bar{U}(x, t) + \tilde{U}(x, t)\varphi_1(\alpha) \quad (6)$$

где

$$\bar{U}(x,t) = -\frac{2}{R^2} \left[\int_{X_0}^X \frac{WR}{\sin \varphi} dx + \int_0^{R_0} W_0 r dr \right]$$

- продольное перемещение плоского поперечного сечения, обусловленное вытеснением жидкости; $\tilde{U}(x,t)$ - депланация поперечного сечения по форме квадратной параболы

$$\varphi_1(\alpha) = 2\alpha^2 - 1; \quad \alpha = r/R; \quad \int_0^1 \varphi_1 \alpha d\alpha = 0.$$

Функция $\tilde{U}(x,t)$ является неизвестной; по толщине тонкого КЭ для нее принимаем линейную аппроксимацию

$$\tilde{U} = \tilde{U}_{k-1} \eta_{k-1}^{(k)}(s) + \tilde{U}_k \eta_k^{(k)}(s); \quad (7)$$

$$\eta_{k-1}^{(k)}(s) = 1 - \frac{s}{l_k}, \quad \eta_k^{(k)}(s) = \frac{s}{l_k},$$

где s - координата, отсчитываемая вдоль меридиана оболочки; $s = 0$ при $x = x_{k-1}$, $s = l_k$ при $x = x_k$.

Радиальное перемещение v_r и давление в жидкости путем интегрирования уравнения несжимаемости и удовлетворения кинематическому граничному условию на поверхности оболочки $r = R(x)$ выражаются через $\bar{U}(x,t)$ и $\tilde{U}(x,t)$. При этом уравнение движения жидкости в радиальном направлении удовлетворяется точно.

Кинетическая энергия k -го КЭ жидкости записывается в виде

$$T_{\mathcal{J}}^{(k)} = \pi \rho \omega^2 \int_0^{l_k} \left(\frac{R^2}{2} \sin^2 \varphi \cdot \bar{U}'^2 + \frac{R^4}{16} \bar{U}''^2 - \frac{1}{24} \bar{U}'^2 (R^4 \tilde{U})' + \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \varphi) R^2 \tilde{U}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{96} [(R^2 \tilde{U})']^2 \right) \frac{ds}{\sin \varphi}; \quad (8)$$

штрихом обозначается производная по s ; $dx = \sin \varphi ds$.

С учетом аппроксимации (7) выражение (8) записывается в зависимости от \bar{U} , \tilde{U}_{k-1} , \tilde{U}_k . Будем считать, что в нижней части оболочки имеется недеформируемое плоское днище радиуса R_0 . Тогда $W_0 = const$ и $\bar{U}_0 = -W_0$, $\tilde{U}_0 = 0$ на нижнем краю. Если снизу оболочка имеет полюс, то следует положить $R_0 \rightarrow 0$. Депланации в сечениях, разделяющих КЭ, \tilde{U}_k ($k = 1, 2, \dots, N$) принимаются за обобщенные координаты.

Если при осесимметричных колебаниях жидкости в упругой оболочке пренебречь влиянием гравитации, то принцип Лагранжа можно записать в

эквивалентной форме $\delta T_{\mathcal{J}} = 0$, где $T_{\mathcal{J}} = \sum_{k=1}^N T_{\mathcal{J}}^{(k)}$. Отсюда следуют

уравнения

$$\frac{\partial T_{\mathcal{J}}}{\partial \bar{U}_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

5.2 Неосесимметричные колебания ($m=1, 2, \dots$). При неосесимметричных колебаниях нормальные перемещения оболочки и плоского днища радиуса R_0 имеют вид

$$w(s, \theta, t) = W(s, t) \cos m\theta, \quad w_0(r, \theta, t) = W_0(s, t) \cos m\theta \quad (10)$$

Если днище недеформируемое, то $W_0 = \mathcal{G}_0 r$ при $m=1$ и $W_0 = 0$ при $m = 2, 3, \dots$; если оболочка снизу имеет полюс, то $R_0 \rightarrow 0$.

Продольное перемещение ищем в виде

$$v_X = U(x, t) \alpha^m \cos m\theta, \quad (\alpha = r/R). \quad (11)$$

Здесь аппроксимирующая функция α^m , характеризующая распределение продольных перемещений жидкости в сечении $x = const$, правильно описывает входящие в точное решение гидродинамической задачи в цилиндрической системе координат функции Бесселя при малых значениях аргументов: $J_m(z) \approx I_m(z) \sim z^m / (2^m m!)$ при $z^2 \ll 4(m+1)$. Поэтому аппроксимация (11) обладает весьма высокой точностью. В пределах толщины тонкого слоя неизвестную функцию аппроксимируем по линейному закону

$$U = U_{k-1}(t) \eta_{k-1}^{(k)}(s) + U_k(t) \eta_k^{(k)}(s). \quad (12)$$

Радиальное и окружное перемещения жидкости и возмущенное давление в ней при использовании аппроксимации (11) определяются в зависимости от $W(s, t)$ и $U(s, t)$ на основании точного решения уравнения неразрывности с учетом кинематического граничного условия при $r = R$. При этом, кроме того, точно удовлетворяются уравнения движения жидкости в радиальном и окружном направлениях.

Кинетическая энергия k -го КЭ жидкости записывается в виде

$$T_{\mathcal{J}}^{(k)} = \frac{\pi \rho \omega^2}{4m(m+1)} \int_0^{l_k} (2(m+1)R^2 \cdot W^2 + 2R^2 W (RU' + 2(m+1) \cos \varphi \cdot U) + R^2 [m + (m+2) \cos^2 \varphi] U^2 + 2R^3 \cos \varphi U U' + m \beta_m^{-2} R^4 U'^2) \frac{ds}{\sin \varphi}, \quad (13)$$

$$\beta_m^{-2} = \frac{3m+4}{4m((m+1)(m+2))}.$$

С учетом аппроксимации (12) выражение (13) записывается в зависимости от W , U_{k-1} , U_k .

Потенциальная энергия волновых движений свободной поверхности записывается в виде

$$П_{Ж} = \frac{\pi \rho g R_N^2}{4(m+1)} U_N^2. \quad (14)$$

Уравнения неосесимметричных колебаний жидкости в упругой оболочке получаются из уравнения $\delta(T_{Ж} - П_{Ж}) = 0$ в обобщенных координатах U_k ($k = 1, 2, \dots, N$) с учетом полученных выражений

$$T_{Ж} = \sum_{k=1}^N T_{Ж}^{(k)} \text{ и } П_{Ж}.$$

Представленные здесь одномерные КЭ-модели для осесимметричных и неосесимметричных колебаний жидкости в подвижных полостях вращения обладают достаточно высокой точностью благодаря хорошей аппроксимации продольных перемещений жидкости в поперечном сечении и того, что кроме уравнения движения жидкости в осевом направлении и граничного условия на свободной поверхности, которые удовлетворяются приближенно, все остальные уравнения и граничные условия удовлетворяются точно.

6. Примеры расчета. Выполним оценки численной сходимости результатов расчета колебаний жидкости в полостях методом конечных элементов на основе приведенных здесь вариационных принципов при использовании гармонических степенных функций.

Рассмотрим осесимметричные ($m = 0$) колебания жидкости в круговой цилиндрической полости. Объем жидкости в этой полости делится на кольцевые конечные элементы с одинаковыми поперечными сечениями. Интегралы в функционалах J_1 , J_2 , J_3 вариационных принципов представляются в виде сумм интегралов по V , S и σ . В пределах КЭ функция Φ аппроксимируется в виде ряда по гармоническим степенным функциям. При использовании принципа Лагранжа берется ряд с восемью такими функциями $\varphi_k^{(0)}$, $k = 1, 2, \dots, 8$, коэффициенты которого выражаются через 8 узловых перемещений – осевое $\partial\Phi/\partial x$ и радиальное $\partial\Phi/\partial r$ в каждом из четырех узлов, расположенных в углах КЭ. При использовании принципа Кастильяно и смешанного вариационного принципа для аппроксимации Φ берется ряд с четырьмя функциями $\varphi_k^{(0)}$, $k = 0, 1, 2, 3$, т.е. $\Phi = \alpha_0 + \beta_1 x + \beta_2 r + \beta_3 xr$, коэффициенты которого выражаются через значения Φ в узлах КЭ.

В табл. 1 приведены значения $\lambda_p = \omega_p^2 R/g$ для трех низших собственных форм колебаний жидкости в неподвижной полости радиуса

при $R=1$ м при глубине заполнения $H=2$ м, полученные при различном числе КЭ.

Таблица 1

Число КЭ		72	128	200	288
Принцип Лагранжа	λ_1	3.8295	3.8325	3.8318	3.8317
	λ_2	6.9995	7.0058	7.0201	7.0186
	λ_3	9.4433	9.7433	9.9832	10.0125
	μ_1	21.9012	21.9037	21.9037	21.9037
Принцип Кастильяно	λ_1	4.0505	3.9549	3.9107	3.8867
	λ_2	8.1695	7.6516	7.4199	7.2958
	λ_3	13.6192	12.0199	4.3290	10.9672
Смешанный вариационный принцип	λ_1	4.2631	4.0441	3.9569	3.9138
	λ_2	11.4554	8.7460	7.9442	7.5933
	λ_3	125.5310	19.4044	28.8626	12.3971
	$\mu_1^{(1)}$	21.9095	21.9056	21.9048	21.9044
	$\mu_1^{(2)}$	21.9156	21.9129	21.9094	21.9073

В этой же таблице приведены значения коэффициента μ присоединенной массы жидкости $2\pi\rho R^3\mu$ для осесимметричных нормальных перемещений боковой стенки по форме $W = \cos(\pi \cdot x / 2H)$ при $g=0$; координата x отсчитывается от плоского дна. При использовании смешанного вариационного принципа коэффициент $\mu^{(1)}$ вычислялся по величине кинетической энергии жидкости, а $\mu^{(2)}$ - по величине работы гидродинамического давления на перемещении W . При использовании принципа Лагранжа $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu$.

Для сравнения с численными результатами табл. 1 приведем их точные значения: $\lambda_1 = 3.8317$, $\lambda_2 = 7.0156$, $\lambda_3 = 10.1735$, $\mu = 21.9037$.

В табл.2 приведены результаты расчета значения $\lambda_1 = \omega_1^2 R/g$ для низшей собственной частоты поперечных колебаний ($m=1$) жидкости со свободной поверхностью в неподвижной круговой цилиндрической полости с плоским дном при $R=1$ м, $H=2$ м, полученных при использовании одномерной КЭ-модели. Жидкость делилась на N одинаковых поперечных слоев (КЭ).

Таблица 2

N	4	8	16	32	48
λ_1	1.78723	1.83324	1.84532	1.84837	1.84894

Точное значение λ_1 , полученное из решения дифференциального уравнения для соответствующей одномерной континуальной модели равно: $\lambda_1 = 1.84939$, а из решения трехмерной задачи для потенциального движения жидкости $\lambda_1 = 1.83885$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00698).

Литература

1. Григолюк Э.И., Шклярчук Ф.Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью // ПММ. 1970. - т. 34, вып. 3. – С. 401 - 411.
2. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэроупругость конструкций. – М.: Физматлит, 2000. –592 с.
3. Шклярчук Ф.Н. О вариационных методах расчета осесимметричных колебаний оболочек вращения, частично заполненных жидкостью // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. С. 835 - 840.
4. Григолюк Э.И., Горшков А.Г., Шклярчук Ф.Н. Об одном методе расчета колебаний жидкости, частично заполняющей упругую оболочку вращения. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. №3. С. 74 - 80.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

**Щербина В.Ю., *Гондляр А.В., **Чжан Юлин*
(**НТУУ «КПИ», Киев, Украина,*

***Уханьский технологический университет, Ухань, Китай)*

Рассматриваются вопросы нанесения сеточной области на 3D конструкции полученные выдавливанием, или обжатием. Предложен алгоритм решения задачи и тестовый пример. Алгоритм отличается резким сокращением вычислительных затрат и возможностью указывать различные приращения для создаваемых конечных элементов.

ABOUT ONE METHOD OF SPATIAL OBJECTS DISCRETIZATION

**Shcherbina V., *Gondljakh A., ** Zhang Youlin*
(**NTUU "KPI", Kiev, Ukraine,*

*** Wuhan University of Technology, Wuhan, China)*

The problems of mesh generation for extruded or pressed out 3D bodies are considered. Task solution algorithm and example are proposed. The algorithm is remarkable for significant decrease of computational burden and allows to set different increments for finite elements generation.

Введение. При решении задач численными методами одним из важнейших этапов является нанесение сеточной области на исследуемый объект. В настоящее время эффективно используются автоматические методы построения сетки для четырехгранных элементов. При этом построение сеток шестигранных элементов для 3D solid - все еще является

проблемой, требующей исследований, хотя такие элементы предпочтительнее для целого ряда прикладных задач.

При создании сеточных генераторов широкое распространение получил метод четырехгранных элементов с использованием триангуляции Делоне [1], причем с возможным переходом к шестигранным. Но существенным недостатком всех этих методов, является невозможность ввода различных значений для dx , dy , dz , что вызывает существенное увеличение числа конечных элементов (КЕ).

Некоторые исследования были посвящены вопросам автоматического построения шестигранных сеток – Plastering, Whisker [2] и HEXAR [3]. Однако, эти методы и системы - все еще находятся в развитии, не всегда устойчивы, и, как правило, не могут управлять размером элемента.

Постановка проблемы. При решении задач часто встречаются конструкции, которые получены выдавливанием, или обжатием. Очевидно, что решать такие задачи стандартными методами для полной 3D конструкции нецелесообразно, как по затратам машинного времени, так и по неэффективному использованию машинных ресурсов. Задачей данного исследования является разработка систем для нанесения сеточной области на такие конструкции, с генерацией шестигранных элементов. При этом с помощью редактора (Acad, SolidWorks и другие) создается объект, состоящий из одного или нескольких твердых тел выполненных как Solid. Эти тела выполняются вращением, выдавливанием по направляющей с возможностью сжатия/расширения, или другими методами.

Решение. Для реализации поставленной задачи использовались методы, основанные на решении дифференциальных уравнений, которые относятся к числу самых развитых. Для этой цели часто применяют уравнения Лапласа и Пуассона, причем рассматривается задача стационарной теплопроводности с граничными условиями Дирихле. Решение этой задачи дает гладкие, и непересекающиеся изотермы. Использование эллиптических уравнений для построения внутренних точек сетки имеет то преимущество, что сетка изменяется гладко, даже если граница области имеет излом.

Число изотерм в данной области может быть увеличено добавлением источникового члена. Если изотермы брать за линии сетки, последние будут гладкими и непрерывными. Величиной источникового члена можно управлять с помощью сгущения его в любой области.

Поскольку нужно решать эллиптические уравнения в частных производных, в качестве граничных условий необходимо задавать либо положение точек на ребрах (гранях), либо наклон координатных линий на границе.

Наиболее общим уравнением в частных производных, используемым для построения сеток, является уравнение Пуассона, записанное в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial^2 z} &= P(\xi, \eta, \omega) \\
\frac{\partial^2 \eta}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial^2 z} &= Q(\xi, \eta, \omega) \\
\frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 z} &= T(\xi, \eta, \omega)
\end{aligned} \tag{1}$$

где P , Q и T известные функции, используемые для контроля сгущения внутренних точек сетки.

Эллиптические уравнения, подобные (1), при различных ограничениях на P , Q и T удовлетворяют принципу максимума, т.е. максимальное и минимальное значения ξ , η и ω достигаются на границе. Однако при некоторых экстремальных выборах P , Q и T возможно локальное, самопересечение сетки.

Решение системы ищется в косоугольной неортогональной системе координат, что позволяет рассматривать произвольную геометрию исследуемой конструкции. Для этого преобразуем уравнение (1) к виду [4]:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \chi^m} \left(g^{mn} \sqrt{g} \frac{\partial \xi}{\partial \chi^n} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \chi^n} \cdot \frac{\partial (g^{mn} \sqrt{g})}{\partial \chi^m} + g^{mn} \sqrt{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \chi^n \partial \chi^m} \right] \tag{2}$$

где g - третий инвариант метрического тензора; g^{nm}, \sqrt{g} - метрические тензоры;

В общем случае $n, m=1, 2, 3$. Ограничившись $n, m=1, 2$, получим:

$$\begin{aligned}
&g^{11} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{(\partial \chi^1)^2} + g^{22} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{(\partial \chi^2)^2} + 2g^{12} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \chi^1 \partial \chi^2} + \\
&+ \frac{\partial \xi}{\partial \chi^1} \left(\frac{\partial (g^{11} \sqrt{g})}{\partial \chi^1} + \frac{\partial (g^{12} \sqrt{g})}{\partial \chi^2} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial \chi^2} \left(\frac{\partial (g^{12} \sqrt{g})}{\partial \chi^1} + \frac{\partial (g^{22} \sqrt{g})}{\partial \chi^2} \right) = \sqrt{g} \left(P \frac{\partial \xi}{\partial \chi^1} + Q \frac{\partial \xi}{\partial \chi^2} \right) \\
&g^{11} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{(\partial \chi^1)^2} + g^{22} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{(\partial \chi^2)^2} + 2g^{12} \sqrt{g} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial \chi^1 \partial \chi^2} + \\
&+ \frac{\partial \eta}{\partial \chi^1} \left(\frac{\partial (g^{11} \sqrt{g})}{\partial \chi^1} + \frac{\partial (g^{12} \sqrt{g})}{\partial \chi^2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial \chi^2} \left(\frac{\partial (g^{12} \sqrt{g})}{\partial \chi^1} + \frac{\partial (g^{22} \sqrt{g})}{\partial \chi^2} \right) = \sqrt{g} \left(P \frac{\partial \eta}{\partial \chi^1} + Q \frac{\partial \eta}{\partial \chi^2} \right)
\end{aligned} \tag{3}$$

Для замыкания системы задаются граничные условия, которые определяются по координатам ребер. Узлы контурных точек «жестко» фиксируются, а узлы на ребрах, с возможностью перемещения вдоль ребра.

При решении уравнений применяются итерационные методы. Применяя метод последовательной верхней релаксации, получим, что

параметр ускорения K может быть больше единицы, поскольку его оптимальный выбор необходимый для достижения сходимости, зависят от выбора P и Q .

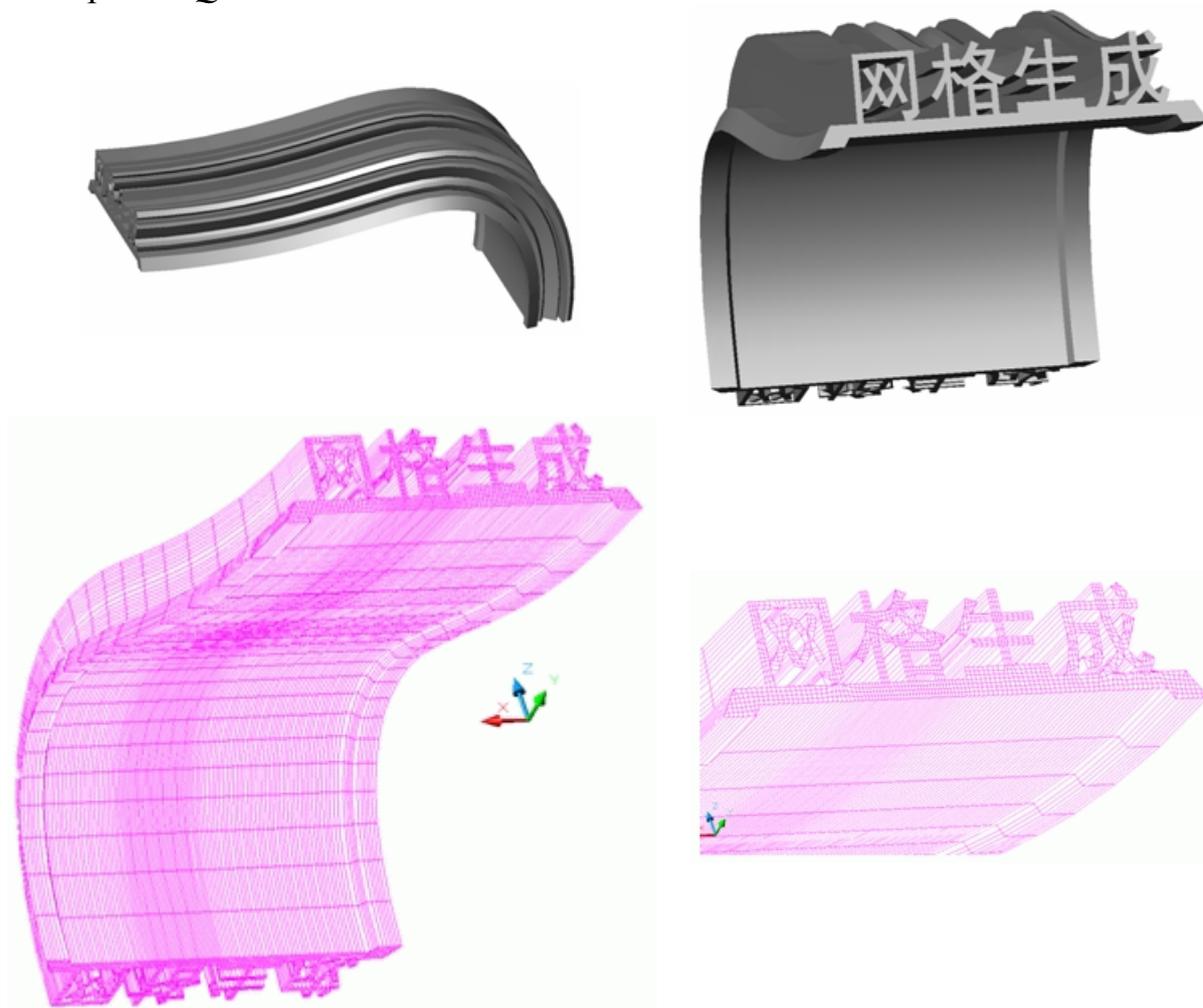


Рис.1. Тестовый пример. (Надпись – «генератор сеточной области»)
Количество точек 73626. Количество КЕ 55145.
Время счета на процессоре Intel 3.2 Mgz – 755 секунд.

Алгоритм решения задач.

Общий алгоритм сводится к следующему.

1. Определение однотипных FАСЕ между которыми находятся ребра.
2. Выделение FАСЕ, площадь которого больше чем другого (других).
3. Установка пользовательской системы координат на этот FАСЕ.
 - Ось OX направляется по такому ребру этого FАСЕ, длина которого максимальна.
4. Нанесение сеточной области на этот FАСЕ.
 - Перенос узлов на ближайшие ребра конструкции
 - Анализ полученных КЕ и при необходимости ввод дополнительных узлов
 - Решение уравнений (3)

5. Перенос пользовательской системы координат в следующее сечение с корректировкой граничных точек сетки согласно текущему сечению.
6. Решение задачи по корректировке сеточной области для нового сечения.
7. Решение уравнений (3)
8. Если сечение не последнее, то перейти на пункт 5.

Анализ результатов.

В качестве тестовых примеров выполнены расчеты конструкций некоторые из которых приведенные на рисунках.

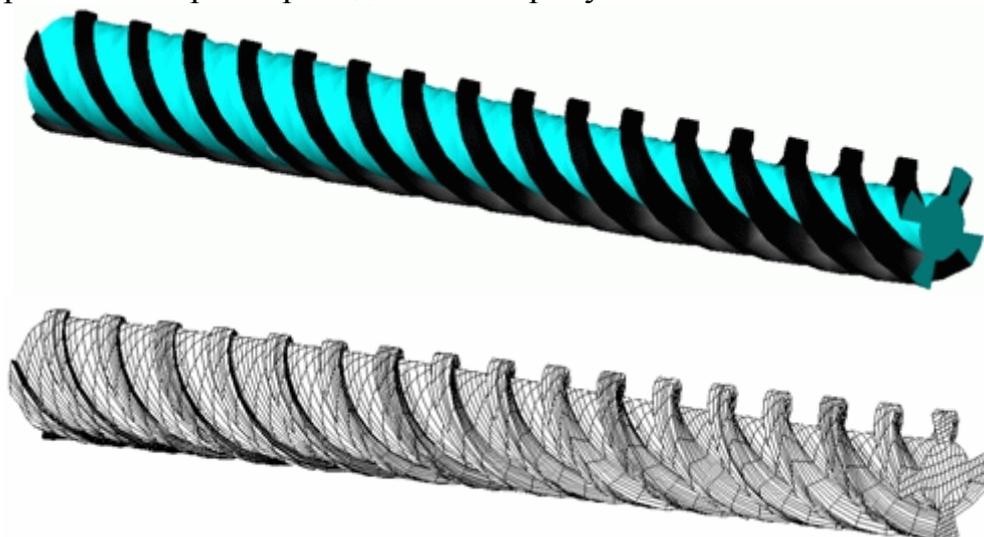


Рис.2. Червяк экструдера.

Количество точек 12250. Количество КЕ 9408. $Dx=2$; $dy=6$; $dz=20$.

Время счета на процессоре Intel 3.2 Mgz – 125 секунд

Заключение.

После выполнения тестовых примеров было установлено, что решение задач выполняется на порядок быстрее, чем для этой же задачи в чисто 3D постановке. Разработанный алгоритм дает возможность указывать различные приращения для dx , dy и dz со сгущением/разрежением сетки в локальных областях. После одного расчета конструкции расстоянием по dz можно произвольно варьировать, и время выполнения задачи существенно сокращается, так как фактически происходит только пересчет системы с уже заданными достаточно близкими начальными условиями.

В настоящее время проводятся работы направленные:

1. на автоматическое сгущение сетки в местах тонких элементов и улучшению КЕ, особенно в местах пересечения ребер;
2. ограничения при смещении вершин КЕ;
3. доработка конечных элементов для получения более правильной формы с изменением углом между ребрами $90^\circ \pm 15^\circ$.

Описанный алгоритм и программы успешно применялся для нанесения сеточной области из шестигранных элементов в УКРНИИПластмаш для тел полученных выдавливанием или обжатием.

Литература

1. А.В.Скворцов. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне. Вычислительные методы и программирование.2002.Т.3
2. Tautges, T. J., Blacker, T. and Mitchell, S. A. (1996), The Whisker Weaving Algorithm : A Connectivity-based Method for Constructing All-hexahedral Finite Element Meshes, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.39, pp.3327-3349.
3. Kimura, N., Mochizuki, Y. and Mikami, K. (1996), The HEXAR System as a Software Tol Designed for Automatic, All Hexahedral, Boundary-Fitted Unstructured Grid Generation, Proceedings of the Conference on Computational Engineering and Science, Vol.1, pp.683-686 (in Japanese).
4. Сахаров А.С., Щербина В.Ю., Величко Ю.М., и др. Математическая модель для исследования полей скоростей о давлений в механическом оборудовании промышленности строительных материалов. // Будівельні матеріали вироби та санітарна техніка, 2000,– № 15, с.–14-18.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

	Контактный E-Mail	Страницы
Аверьянова Г.В.	avergv@rambler.ru	6
Акимов П.А.	pavel.akimov@gmail.com	12, 235
Александров А.В.		19
Алексеев Е.Е.		99
Анхянец Е.К.	string@inmech.kiev.ua	223
Аристович К.Ю.		23
Арутюнян Р.А.	Robert. Arutyunyan@paloma.spb	35, 39
Арясов Г.П.	garjasov@staff.ttu.ee	46
Атрошенко С.А.	satroshe@impact.ipme.ru	53
Безделев В.В.		59, 63
Белкин А.Е.	belkin@rk5.bmstu.ru	68
Белов М.В.	sitm@gasa.penza.com.ru	73
Белостоцкий А.М.	stadyo@stadyo.ru, amb@stadyo.ru	79, 84
Белубекян М.В.	mbelubekyan@yahoo.com	91
Бенин А.В.		446
Бережной Д.В.	Lili.Sekaeva@ksu.ru	95
Березюк А.И.	cpl@po-mayak.ru	99
Берендеев Н.Н.	N.N.Beren@mm.unn.ru	107
Боровкова Т.В.		113
Бражникова Н.В.		35
Бригадирова Т.Е.	bugaev@mai.ru	119
Буклемишев А.В.		59, 63
Быстрицкий В.В.		130
Вайнер-Прима Д.А.		130
Видюшенков С.А.		135
Власов А.Ю.	vay@atomlink.ru	229
Власов Н.М.	iifedik@podolsk.ru	141
Воронкова А.И.		147
Воронова Г.А.		79

Гаврюшин С.С.	gss@spacenet.ru, gss@rk5.bmstu.ru	155, 161
Геворкян Г.А.		167
Глаговский В.Б.		172
Голованов А.И.	Alexandr.Golovanov@ksu.ru	178
Голоскоков Д.П.		6
Гондлях А.В.	avg@ukrnet.net	184, 530
Горохов М.Ю.	gorohovm@mail.ru	190
Горшков А.Г.	bugaev@mai.ru	199
Груздков А.А.	gruzdkov@mail.ru	207
Даутов Р.З.		439
Дружинин М.А.	mihadr@mail.ru	172
Егорова О.В.	bugaev@mai.ru	199
Елисеев В.Н.		113
Жаворонок С.И.	zhavor71@mail.ru	213, 218
Завьялова Н.В.	zavnata@rambler.ru	253
Заруцкий В.А.		223
Захаров Ю.В.		229
Золотов А.Б.	courier@fromru.com	12, 235
Иванова М.С.		285
Индейцев Д.А.		242
Кадисов Г.М.	kadisov@rambler.ru	253
Карпов В.В.		259
Кассирова Н.А.	r205@ground.vniig.ru	172
Катилина Н.Н.	dip_zenit@mail.ru	263
Кирс Ю.	jkirs@staff.ttu.ee	269
Клепец О.Ю.		79
Колесников Г.Н.	ksk@onego.ru	278
Колесников Г.П.		235

Колпак Е.П.		285
Кочанов А.Н.	ksk@onego.ru	291
Крапивин К.Ю.		293
Кривошеев С.И.	integr@delfa.net	53, 207, 302
Крылова О.В.	olgav.krylova@mail.ru	307
Курков С.В.	dip_zenit@mail.ru	263, 313
Лащенко В.К.	dim_sp@mail.ru	319
Лебедев В.Л.		402
Леоненко Д.В.		432
Лобода О.С.		323
Ловцов А.Д.	smitu@cef.spbstu.ru	395
Ломакин Е.В.		293
Лопухов И.И.		113
Любимов А.К.		107
Малкин С.А.	smalkin@ksu.ru	95
Масленников А.М.		259
Матросов А.В.	avmatrosov@mail.ru	328
Медведский А.Л.	bugaev@mai.ru	119, 213, 218, 334
Мельников Б.Е.	strength@mtr.hop.stu.neva.ru	190
Мсхалая И.Ж.		84
Нарская Н.Л.	belkin@rk5.bmstu.ru	68
Одинцов О.А.	odintsov@bmstu.ru	68
Опякин В.С.	opiakin@land.ru	135
Отто Т.	tauno@staff.ttu.ee	46
Охоткин К.Г.		229
Пеньков И.В.	ipenkov@staff.ttu.ee	343
Пеньковой С.Б.	12vm3@mail.ru, stadyo@stadyo.ru	84, 348
Петров Ю.В.	yp@yp1004.spb.edu	53, 207
Петрушенко Ю.Я.		439

Погодин В.К.		59
Полякова Ю.В.	vcvulitin@mail.ru	354, 360
Постнов В.А.	Postnov@VP4690.spb.edu	363, 370, 380
Потапенко А.Л.		79
Преженцева В.В.		59
Прозорова Э.В.	NUM @ NIIMM.spb.su	147
Проничев М.В.	cpl@po-mayak.ru	99
Рабинский Л.Н.	bugaev@mai.ru	387
Разов А.И.	ar@ar1425.spb.edu	207
Раковская М.И.	ksk@onego.ru	278, 291
Ровный С.И.		99
Розин Л.А.	smitu@cef.spbstu.ru	395
Ротанин С.М.		522
Рутман Ю.Л.	comby@infopro.spb.su	402
Рынди́н И.П.		135
Саноян Ю.Г.	mbelubekyan@yahoo.com	91
Свойский Ф.М.	irfel@peterlink.ru	408
Семенов А.С.		190
Семенов Б.Н.	semenov@bs1892.spb.edu	242
Семенов В.А.		402, 416
Семенов П.Ю.		416
Сидоров В.Н.	sidorov.vladimir@gmail.com	12, 235
Синицын Е.Н.		99
Смирнов В.И.	smirnov@VS13866.spb.edu	53
Соколов Е.В.		135
Старовойтов С.А.		424
Старовойтов Э.И.		432
Степанова Е.М.	Ekastepanova@mail.ru	439
Стрижак В.И.		343
Султанов Л.У.	Lenar.Sultanov@ksu.ru	178
Сутырин Ю.А.		63

Тананайко О.Д.	kpmk@pgups.edu	446
Ткачев П.В.		452
Трутаев С.Ю.		59, 63
Тумашик Г.А.	mecglat@mail.spbnit.ru, smk@smtu.ru	363, 370
Тутнов Ал.А.		99
Тутнов Ан.А.		99
Улитин В.В.	vcvulitin@mail.ru	354, 360, 456
Уткин А.А.	lom@unicorn.math.spbu.ru	53
Файзуллин А.М.	chernikov@kfti.knc.ru	506
Федик И.И.		141
Федоровский Г.Д.	g.fed@pobox.spbu.ru	53, 207, 302, 462, 470, 474
Фиалко С.Ю.	sfialko@poczta.onet.pl	483
Филенкова Н.В.		229
Фрумен А.И.	Alex@AF4689.spb.edu, smk@smtu.ru	489
Цейтлин Б.В.	tseitlin@robotek.ru tseitlin@concrete.vniig.ru	493
Чемерис А.О.	chemer73@mail.ru	184
Черников С.К.	chernikov@kfti.knc.ru	506
Чжан Юлин		530
Шадрин Д.А.		59
Шигабутдинов А.Ф.	chigaboutdinov@ksu.ru	512
Широколобова О.Б.	olyushka66.66@mail.ru	518
Шклярчук Ф.Н.		522
Щербина В.Ю.	xpsm@ukr.net	530
Якимова К.С.		39
Яровая А.В.		432

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ ОРГКОМИТЕТА.....	5
ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН ПРИ ПОМОЩИ ПОЛИНОМОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В СИСТЕМЕ MAPLE.....	6
<i>Аверьянова Г.В., Голоскоков Д.П.</i>	
НЕКОТОРЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С НАЛИЧИЕМ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ И КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ, ПРИ РЕАЛИЗАЦИЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	12
<i>Акимов П.А., Золотов А.Б., Сидоров В.Н.</i>	
ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕДУКЦИОННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ДЕФОРМИРОВАННОЙ БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	19
<i>Александров А.В.</i>	
ЗАВИСИМОСТЬ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ КОЛЕБАНИЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ОТ МИКРОСТРУКТУРЫ	23
<i>Аристович К.Ю.</i>	
ОПИСАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ПО МОДЕЛИ СТАРЕЮЩУЮЩЕЙ СРЕДЫ МАКСВЕЛЛА И КЕЛЬВИНА-ФОЙХТА.....	35
<i>Арутюнян Р.А., Бражникова Н.В.</i>	
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЗАТРАТЫ ПРИ РАЗРУШЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ.....	39
<i>Арутюнян Р.А., Якимова К.С.</i>	
ВЛИЯНИЕ ВИБРАЦИИ НА ХАРАКТЕР МИКРОНЕРОВНОСТЕЙ ОБРАБАТЫВАЕМЫХ ДЕТАЛЕЙ.....	46
<i>Арясов Г.П., Отто Т.</i>	
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД С РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ УДАРНО-ИМПУЛЬСНОМ И СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ	53
<i>Атрошенко С.А., Кривошеев С.И., Петров Ю.В., Смирнов В.И., Уткин А.А., Федоровский Г.Д.</i>	

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЪЕМНО-НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ «COMPASS»	59
<i>Безделев В.В., Буклемишев А.В., Погодин В.К., Трутаев С.Ю., Преженцева В.В., Шадрин Д.А.</i>	
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОЙ СИСТЕМЫ COMPASS ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОЙ СЕЙСМОИЗОЛЯЦИИ РЕКОНСТРУИРУЕМЫХ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ	63
<i>Безделев В.В., Сутырин Ю.А., Буклемишев А.В., Трутаев С.Ю.</i>	
ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИЙ АВТОМОБИЛЬНОЙ ШИНЫ ПРИ СТАЦИОНАРНОМ КАЧЕНИИ	68
<i>Белкин А.Е., Нарская Н.Л., Одинцов О.А.</i>	
МЕТОД РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИЗ УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ	73
<i>Белов М.В.</i>	
СОВРЕМЕННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И САПР-ТЕХНОЛОГИИ В ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТАХ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС АСТРА-НОВА'2005	79
<i>Белостоцкий А.М., Воронова Г.А., Потапенко А.Л., Клепец О.Ю.</i>	
КОМПЛЕКСНЫЙ РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОЧНОСТИ ОБОРУДОВАНИЯ АЭС	84
<i>Белостоцкий А.М., Мсхалая И.Ж., Пеньковой С.Б.</i>	
РАСЧЕТ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ КОНСОЛИ	91
<i>Белубекян М.В., Саноян Ю.Г.</i>	
ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО И ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ АРМОГРУНТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ	95
<i>Бережной Д.В., Малкин С.А.</i>	
ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА, СЖАТОГО В ДИАМЕТРАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ	99
<i>Березюк А.И., Ровный С.И., Проничев М.В., Тутнов Ал.А., Тутнов Ан.А., Алексеев Е.Е., Сеницын Е.Н.</i>	
ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНОГО РОСТА МИКРОТРЕЩИН ПРИ МНОГОЦИКЛОВОЙ УСТАЛОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ	107
<i>Берендеев Н.Н., Любимов А.К.</i>	

ИССЛЕДОВАНИЕ ИСКАЖЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ КОНСТРУКЦИИ, ВНОСИМЫХ ТЕРМОПАРНЫМ ДАТЧИКОМ	113
<i>Боровкова Т.В., Елисейев В.Н., Лопухов И.И.</i>	
ДИФРАКЦИЯ УПРУГИХ ВОЛН НА НЕОДНОРОДНОМ СФЕРИЧЕСКОМ ВКЛЮЧЕНИИ	119
<i>Бригадирова Т.Е., Медведский А.Л.,</i>	
РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ СУДОРЕМОНТНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ КАК СОСТАВНОЙ ЧАСТИ ВИРТУАЛЬНОГО СРП	130
<i>Вайнер-Прима Д.А., Быстрицкий В.В.</i>	
ШАРНИРНО ОПЕРТАЯ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНКА С КОЛОННАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ	135
<i>Видюшенков С.А., Опякин В.С., Рындин И.П., Соколов Е.В.</i>	
ПОВРЕЖДЕНИЕ МАТЕРИАЛА ПРИ ИЗГИБЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ	141
<i>Власов Н.М., Федик И.И.</i>	
ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ БЛАЗИУСА	147
<i>Воронкова А.И., Прозорова Э.В.</i>	
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СТОМАТОЛОГИИ.....	155
<i>Гаврюшин С.С.</i>	
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С УПРАВЛЯЕМОЙ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ	161
<i>Гаврюшин С.С.</i>	
ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН	167
<i>Геворкян Г.А.</i>	
ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ДАВЛЕНИЯ ЛЬДА НА КОНСТРУКЦИИ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	172
<i>Глаговский В.Б., Кассирова Н.А., Дружинин М.А.</i>	
ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ.....	178
<i>Голованов А.И., Султанов Л.У.</i>	
ПРИМЕНЕНИЕ КОНТАКТНО-ФРИКЦИОННОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛУЖЕСТКИХ ДИСКОВЫХ МУФТ	184
<i>Гондлях А.В., Чемерис А.О.</i>	

РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР ВЕЛИЧИНЫ ПАРАМЕТРА ШТРАФА ПРИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ РЕШЕНИИ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ	190
<i>Горохов М.Ю., Семенов А.С., Мельников Б.Е.</i>	
НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ	199
<i>Горшков А.Г., Егорова О.В.</i>	
ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУПРУГОСТИ НИКЕЛИДА ТИТАНА	207
<i>Груздков А.А., Кривошеев С.И., Петров Ю.В., Разов А.И., Федоровский Г.Д.</i>	
РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОЕКЦИОННЫМ МЕТОДОМ	213
<i>Жаворонок С.И., Медведский А.Л.</i>	
РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК.....	218
<i>Жаворонок С.И., Медведский А.Л.</i>	
КОЛЕБАНИЯ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ, С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ СОЕДИНЕНИЯ РЕБЕР С ОБШИВКОЙ.....	223
<i>Заруцкий В.А., Анкянец Е.К.</i>	
ИЗГИБ ЖЕСТКО И УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННОЙ КОНСОЛИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ НАГРУЖЕНИИ – ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ	229
<i>Захаров Ю.В., Охоткин К.Г., Власов А.Ю, Филенкова Н.В.</i>	
ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	235
<i>Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Колесников Г.П.</i>	
ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВОДОРОДНОГО ОХРУПЧИВАНИЯ	242
<i>Индейцев Д.А., Семенов Б.Н.</i>	
РАСЧЕТ СКЛАДОК С ПЕРФОРИРОВАННЫМИ РЕБРАМИ.....	253
<i>Кадисов Г.М., Завьялова Н.В.</i>	
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СКЛАДЧАТОЙ ОБОЛОЧКИ	259
<i>Карнов В.В., Масленников А.М.</i>	
ПРОГРАММА РАСЧЁТОВ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ «ЗЕНИТ-95». НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ	263
<i>Катилина Н.Н., Курков С.В.</i>	

ЗАДАЧА МИНИМАЛЬНОГО ВЕСА КРУГЛОЙ УПРОЧНЯЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕАССОЦИИРОВАННОГО ЗАКОНА ТЕЧЕНИЯ	269
<i>Курс Ю.</i>	
О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ	278
<i>Колесников Г.Н., Раковская М.И.</i>	
О ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ БИОЛОГИЧЕСКОГО РЕАКТОРА	285
<i>Колтак Е.П., Иванова М.С.</i>	
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛИТЫ С ОСНОВАНИЕМ.....	291
<i>Кочанов А.Н., Раковская М.И.</i>	
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРЕССОВАННОЙ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ СЕТКИ ПРИ СЖАТИИ	293
<i>Крапивин К.Ю., Ломакин Е.В.</i>	
ОБ УНИФИКАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДИК УСТАНОВЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКОЙ И СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ СРЕД ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НАГРУЗОК	302
<i>Кривошеев С.И., Федоровский Г.Д.</i>	
ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ ЭНЕРГИИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ С ВЕТВЛЕНИЯМИ. ПРОЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЭФФЕКТОВ	307
<i>Крылова О.В.</i>	
КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ	313
<i>Курков С.В.</i>	
ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ РАЗВИТИЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРЕЩИН	319
<i>Лащенко В.К.</i>	
СРАВНЕНИЕ СТАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО ПОДХОДОВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК НАНОСТРУКТУР	323
<i>Лобода О.С.</i>	
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕТОДА НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	328
<i>Матросов А.В.</i>	

ГИПОТЕЗА ТОНКОГО СЛОЯ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ АКУСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ	334
<i>Медведский А.Л.</i>	
ВЛИЯНИЕ УГЛА ДАВЛЕНИЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ В ШАРИКОВИНТОВЫХ МЕХАНИЗМАХ	343
<i>Пеньков И.В., Стрижак В.И.</i>	
ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ФУНКЦИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЯМ	348
<i>Пеньковой С.Б.</i>	
УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ	354
<i>Полякова Ю.В., Улитин В.В.</i>	
КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И КАСАТЕЛЬНЫМ МОДУЛЕМ ДЛЯ СТАЛЕЙ И ДРУГИХ МЕТАЛЛОВ	360
<i>Полякова Ю.В., Улитин В.В.</i>	
ОПТИМИЗАЦИЯ ПО КРИТЕРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, ПОДВЕРЖЕННОГО ДЕЙСТВИЮ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛЫ, ПРИ КОНТРОЛЕ ЧАСТОТНОГО СПЕКТРА	363
<i>Постнов В.А., Тумашик Г.А.</i>	
ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ И КВАЗИ-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	370
<i>Постнов В.А., Тумашик Г.А.</i>	
ДИНАМИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СТРУКТУРНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	380
<i>Постнов В.А.</i>	
ДЕЙСТВИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ НА ШАРНИРНО ОПЕРТУЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ	387
<i>Рабинский Л.Н.</i>	
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНО- УПРУГОЙ СРЕДОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ КУЛОНА	395
<i>Розин Л.А., Ловцов А.Д.</i>	
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ГЛАВНЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ РАСЧЕТА СИСТЕМ С ЛОКАЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ И ДРУГИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ	402
<i>Рутман Ю.Л., Лебедев В.Л., Семенов В.А.</i>	

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И УСЛОВИЯ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.....	408
<i>Свойский Ф.М.</i>	
МЕТОД СОЕДИНЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К СТЕРЖНЯМ И ОБОЛОЧКАМ.....	416
<i>Семенов В.А., Семенов П.Ю.</i>	
ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА ДЕФОРМИРУЕМОМ ОСНОВАНИИ.....	424
<i>Старовойтов С.А.</i>	
ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ТРЕХСЛОЙНАЯ ПЛАСТИНА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ	432
<i>Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В.</i>	
ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА	439
<i>Степанова Е.М., Петрушенко Ю.Я., Даутов Р.З.</i>	
КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА	446
<i>Тананайко О.Д., Бенин А.В.</i>	
УСТОЙЧИВОСТЬ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ МАТЕРИАЛА.....	452
<i>Ткачев П.В.</i>	
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ.....	456
<i>Улитин В.В.</i>	
О ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДЕФОРМАТИВНЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ СПЛОШНЫХ СРЕД.....	462
<i>Федоровский Г.Д.</i>	
ОБ ЭНДОХРОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ТЕХНИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ	470
<i>Федоровский Г.Д.</i>	
ВИД И ВЗАИМОСВЯЗЬ ОСНОВНЫХ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛИМЕРНЫХ И КОМПОЗИТНЫХ СРЕД В ШИРОКОМ ИНТЕРВАЛЕ ЗНАЧЕНИЙ ВРЕМЕНИ, НАПРЯЖЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ	474
<i>Федоровский Г.Д.</i>	

БЛОЧНЫЙ МНОГОФРОНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ РАЗРЕЖЕННЫХ МАТРИЦ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ БОЛЬШЕРАЗМЕРНЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ	483
<i>Фиалко С.Ю.</i>	
ПЕРВИЧНЫЕ ПРИЗНАКИ НАЛИЧИЯ ОШИБОК В РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ МКЭ	489
<i>Фрумен А.И.</i>	
СИНТЕЗ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И УТОЧНЕННЫМ ПРЕДСТАВЛЕНИЕМ ПОДСТРУКТУР	493
<i>Цейтлин Б.В.</i>	
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ ПАССИВНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ АВТОМОБИЛЕЙ.....	506
<i>Черников С.К., Файзуллин А.М.</i>	
АНАЛИЗ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ И БЕЗ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЗВЕНЬЕВ	512
<i>Шигабутдинов А.Ф.</i>	
ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СДАВЛИВАНИИ СИСТЕМЫ ТОЛСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК.....	518
<i>Широколобова О.Б.</i>	
ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ МКЭ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ.....	522
<i>Шклярчук Ф.Н., Ротанин С.М.</i>	
ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ.....	530
<i>Щербина В.Ю., Гондях А.В., Чжан Юлин</i>	
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	536

