А. В. Екимов, Н. В. Смирнов

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПОСТРОЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО БАЗИСА

Задача построения базиса, в котором матрица линейного оператора имеет жорданову нормальную форму, является классической и весьма важной для приложений задачей линейной алгебры. Однако стандартный алгоритм, приведенный в монографиях [1, 2], на наш взгляд, вместе с рядом достоинств имеет и один существенный недостаток. Построению канонического базиса предшествует весьма трудоемкая процедура построения некоторого вспомогательного базиса каждого из корневых подпространств. Таким образом, процедуры определения структуры разложения корневых подпространств в прямую сумму циклических и построения канонического базиса разделены и выполняются последовательно. Ниже авторами предлагается алгоритм построения канонического базиса, не требующий предварительного анализа структуры корневых подпространств.

Рассмотрим линейный оператор A, действующий в n-мерном комплексном пространстве L. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица этого оператора в некотором базисе.

Ограничимся построением канонического базиса для индуцированного оператора $A/K(\lambda)$, здесь $K(\lambda)$ — корневое подпространство, соответствующее собственному числу λ, $\dim K(\lambda) = k$, где k — алгебраическая кратность этого собственного числа λ. Обозначим через $S(\lambda)$ соответствующее собственное подпространство оператора A. В качестве базиса $S(\lambda)$ выберем произвольную фундаментальную систему решений $s_1^{(1)}, \dots, s_{r_1}^{(1)}$ линейной однородной системы

$$\mathbf{B}_0 s^{(1)} = 0, \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}.$$

Число циклических подпространств P_i, в прямую сумму которых разлагается $K(\lambda)$, совпадает с r_1 — геометрической кратностью собственного числа λ, т.е.

$$K(\lambda) = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_{r_1}.$$

Векторы $s_1^{(1)}, \ldots, s_{r_1}^{(1)}$ в общем случае не могут быть выбраны в качестве порождающих для соответствующих циклических подпространств. Для определения искомых порождающих векторов решаем линейную неоднородную систему

$$\mathbf{B}_0 s^{(2)} = \alpha_1 s_1^{(1)} + \ldots + \alpha_{r_1} s_{r_1}^{(1)}, \tag{1}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_1}$ — параметры, подлежащие определению. Система (1) эквивалентна линейной однородной системе

$$\mathbf{B}_1 c^{(2)} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{B}_0, -s_1^{(1)}, \ldots, -s_{r_1}^{(1)})$, $c^{(2)} = (s^{(2)}, \alpha)^T$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_1})^T$.

Обозначим через

$$c_i^{(2)} = (s_i^{(2)}, \alpha^{(i)})^T, \quad i = \overline{1, r_2}, \tag{3}$$

векторы из фундаментальной системы решений для (2), для которых $\alpha^{(i)}$, $i = \overline{1, r_2}$, линейно независимы. Число r_2 совпадает с максимальным числом компонент вектора α, которые могут быть выбраны в качестве независимых переменных системы (2). Определить r_2 можно по формуле

$$r_2 = r_1 - (\operatorname{rang} \mathbf{B}_1 - \operatorname{rang} \mathbf{B}_0).$$

Построим совокупность векторов

$$z_i^{(1)} = \alpha_1^{(i)} s_1^{(1)} + \ldots + \alpha_{r_1}^{(i)} s_{r_1}^{(1)}, \quad i = \overline{1, r_2}. \tag{4}$$

Векторы (4) по построению являются линейно независимыми собственными векторами матрицы $\mathbf{A}$, соответствующими собственному числу λ, и порождают циклические подпространства размерности не меньше двух. Дополним эту совокупность до базиса $S(\lambda)$ векторами из системы $s_1^{(1)}, \ldots, s_{r_1}^{(1)}$. Эти дополнительные векторы обозначим

$$z_{r_2+1}^{(1)}, \ldots, z_{r_1}^{(1)}. \tag{5}$$

Векторы (5) являются базисными для соответствующих одномерных циклических подпространств $P_{r_2+1}, \ldots, P_{r_1}$. Обьединение совокупностей (4) и (5) представляет собой новый базис собственного подпространства.

Векторы $s_i^{(2)}$, $i = \overline{1, r_2}$, из (3) по построению являются частными решениями соответствующих линейных неоднородных систем

$$\mathbf{B}_0 z^{(2)} = z_i^{(1)}, \quad i = \overline{1, r_2}. \tag{6}$$

Общее решение каждой из систем (6) представимо в виде

$$z_i^{(2)} = s_i^{(2)} + \beta_1 s_1^{(1)} + \ldots + \beta_{r_1} s_{r_1}, \tag{7}$$

где $\beta_1, \ldots, \beta_{r_1}$ — произвольные постоянные. Таким образом, совокупность векторов (7) представляет собой полное семейство корневых векторов высоты два, связанных с порождающими векторами $z_i^{(1)}$ соотношениями цикличности

$$\mathbf{B}_0 z_i^{(2)} = z_i^{(1)}, \quad i = \overline{1, r_2}. \tag{8}$$

Для определения векторов $z_i^{(3)}$, связанных с векторами $z_i^{(2)}$ соотношениями цикличности типа (8), решаем неоднородные системы

$$\mathbf{B}_1 c^{(3)} = s_i^{(2)}, \quad i = \overline{1, r_2}, \tag{9}$$

где

$$c^{(3)} = (s^{(3)}, \beta)^T, \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{r_1})^T.$$

Если при некотором i система (9) несовместна, то соответствующее циклическое подпространство P_i двумерно и в качестве его циклического базиса можно выбрать векторы

$$z_i^{(1)}, z_i^{(2)} = s_i^{(2)}. \tag{10}$$

Обозначим через r_3 число совместных систем в (9). Нетрудно видеть, что

$$r_3 = r_2 - (\operatorname{rang} \mathbf{B}_2 - \operatorname{rang} \mathbf{B}_1),$$

где $\mathbf{B}_2 = (\mathbf{B}_1, s_1^{(2)}, \ldots, s_{r_2}^{(2)})$. Через

$$c_i^{(3)} = (s_i^{(3)}, \beta^{(i)})^T, \quad i = \overline{1, r_3}, \tag{11}$$

обозначим произвольные частные решения совместных систем (9). Как и на первом шаге, найденные значения параметров $\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_{r_1}^{(i)}$ подставим в (7). В результате получим конкретные векторы

$z_i^{(2)}$, являющиеся корневыми высоты два и связанные с порождающими векторами $z_i^{(1)}$ циклических подпространств P_i соотношениями цикличности (8). Соответствующие им векторы $s_i^{(3)}$, $i = \overline{1, r_3}$, по построению являются частными решениями линейных неоднородных систем

$$\mathbf{B}_0 z^{(3)} = z_i^{(2)}, \quad i = \overline{1, r_3}. \tag{12}$$

Общее решение каждой из систем (12) представимо в виде

$$z_i^{(3)} = s_i^{(3)} + \gamma_1 s_1^{(1)} + \ldots + \gamma_{r_1} s_{r_1}^{(1)}.$$

На m-м шаге описанного выше алгоритма для определения векторов $z_i^{(m)}$, связанных с векторами $z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(m-1)}$ соотношениями типа (8), решаем линейные неоднородные системы

$$\mathbf{B}_1 c^{(m)} = s_i^{(m-1)}, \quad i = \overline{1, r_{m-1}}, \tag{13}$$

где

$$c^{(m)} = \left(s^{(m)}, \mu\right)^T, \quad \mu = \left(\mu_1, \ldots, \mu_{r_1}\right)^T.$$

Если при некотором i система (13) несовместна, то соответствующее циклическое подпространство P_i $(m-1)$-мерно и в качестве его циклического базиса можно выбрать векторы

$$z_i^{(1)}, \ldots, z_i^{(m-1)} = s_i^{(m-1)}. \tag{14}$$

Число совместных систем в (13) вычисляется по формуле

$$r_m = r_{m-1} - (\operatorname{rang} \mathbf{B}_{m-1} - \operatorname{rang} \mathbf{B}_1),$$

где $\mathbf{B}_{m-1} = (\mathbf{B}_1, s_1^{(m-1)}, \ldots, s_{r_{m-1}}^{(m-1)})$.

Процесс формирования циклических базисов подпространств P_i, $i = \overline{1, r_1}$, заканчивается тогда, когда на очередном l-м шаге все системы типа (13) становятся несовместными. При этом $r_1 + \ldots + r_l = k$. Каноническим базисом для индуцированного оператора $\mathrm{A}/\mathrm{K}(\lambda)$ является обьединение совокупностей векторов (5), (10)–(14).

Пример 1. Пусть линейный оператор задан в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Она имеет единственное собственное число $\lambda = 1$, алгебраическая кратность которого $k = 4$. Построим произвольный базис собственного подпространства $S(1)$. Для этого решим линейную однородную систему $\mathbf{B}_0 s^{(1)} = 0$, где

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$r_1 = 4 - \operatorname{rang} \mathbf{B}_0 = 2.$

В качестве искомого базиса выберем, например,

$$s_1^{(1)} = (3, 1, 0, 1)^T, \quad s_2^{(1)} = (0, 0, 1, 0)^T.$$

В соответствии со вторым шагом алгоритма решаем линейную неоднородную систему

$$\mathbf{B}_0 s^{(2)} = \alpha_1 s_1^{(1)} + \alpha_2 s_2^{(1)}.$$

Эквивалентная ей линейная однородная система имеет вид

$$\mathbf{B}_1 c^{(2)} = 0, \tag{15}$$

где $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{B}_0, -s_1^{(1)}, -s_2^{(1)})$, $\quad c^{(2)} = (s_2, \alpha)^T$, $\quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$,

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 0 & 13 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 0 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = r_1 - (\operatorname{rang}\mathbf{B}_1 - \operatorname{rang}\mathbf{B}_0) = 1.$$

Векторы

$$c_1^{(2)} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T, \quad c_2^{(2)} = (3, 1, 0, 1, 0, 0)^T,$$
$$c_3^{(2)} = (3, -1, 0, 0, 1, 3)^T$$

образуют фундаментальную систему решений для (15). Очевидно, что векторы $s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$ не порождают циклического подпространства размерности больше единицы,

$$z_1^{(1)} = s_1^{(1)} + 3s_2^{(1)} = (3, 1, 3, 1)^T,$$

$$z^{(2)} = (3,-1,0,0)^T + \beta_1 s_1^{(1)} + \beta_2 s_2^{(1)}.$$

Векторы семейства $z^{(2)}$ связаны с вектором $z_1^{(1)}$ соотношением цикличности

$$\mathbf{B}_0 z^{(2)} = z_1^{(1)}.$$

Дополним вектор $z_1^{(1)}$ до базиса собственного подпространства одним из векторов $s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$. Например, выберем $s_2^{(1)}$. Векторы $z_1^{(1)} = (3,1,3,1)^T$, $z_2^{(1)} = s_2^{(1)} = (0,0,1,0)^T$ являются порождающими для циклических подпространств P_1 и P_2, таких, что

$$K(1) = P_1 \oplus P_2.$$

Далее решаем линейную неоднородную систему

$$\mathbf{B}_0 s^{(3)} = s_1^{(2)} + \beta_1 s_1^{(1)} + \beta_2 s_2^{(1)}.$$

Эквивалентная ей неоднородная система:

$$\mathbf{B}_1 c^{(3)} = s_1^{(2)}, \quad s_1^{(2)} = (3,-1,0,0)^T.$$

В качестве частного решения этой системы возьмем, например,

$$c_1^{(3)} = (4,-1,0,0,0,3)^T.$$

Таким образом,

$$z_1^{(2)} = s_1^{(2)} + 3s_2^{(1)} = (3,-1,3,0)^T, \quad s_1^{(3)} = (4,-1,0,0)^T.$$

Базис циклического подпространства P_1 образуют векторы

$$z_1^{(1)} = (3,1,3,1)^T, \quad z_1^{(2)} = (3,-1,3,0)^T, \quad z_1^{(3)} = (4,-1,0,0)^T.$$

Циклическое подпространство P_2 одномерно и в качестве базиса имеет вектор

$$z_2^{(1)} = (0,0,1,0)^T.$$

В построенном каноническом базисе матрица линейного оператора A имеет жорданову нормальную форму

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указатель литературы

1. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963. 734 с.
2. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1974. 528 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Российского правительства, код проекта JK 3100.