Об изотопии компактных множеств в евклидовых пространствах

Условие слабой изотопии, рассматриваемое в этой работе, является, конечно, значительным ослаблением условия изотопии. В то время как изотопия компакта A, лежащего в пространстве E^m, требует наличия изотопической деформации всего пространства E^m, слабая изотопия требует наличия изотопической деформации только самого компакта A, а это далеко не одно и то же. Так, например, все вложения окружности S^1 в трехмерное евклидово пространство E^3 слабо изотопны, в то время как существуют вложения S^1 в E^3, называемые узлами, не изотопные «стандартно расположенной» окружности. В работе А. А. Маркова показывается, что, с другой стороны, понятие слабой изотопии в некоторых ситуациях — «достаточное хорошее». В частности, слабо изотопны все вложения компакта A в E^m при условии: $m \geqslant 2 \cdot \dim A + 2$. В этой теореме слабую изотопию нельзя заменить изотопией, как показывает пример Антуана (1921), дающий неизотопные вложения некоторого нульмерного компакта в E^3.

А. А. Иванов

О конечномерных векторных пространствах

В этой работе, которой предшествовала краткая заметка «О векторных пространствах, рассматриваемых как топологические группы» (Sur les espaces vectoriels considérés comme groupes topologiques // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1933. — Bd. 197. — S. 610–612), А. А. Марков ставит задачу характеризации конечномерного векторного пространства как топологической группы. Постановка вопроса отличается от целей аксиоматик геометрического (Гильберт) или алгебро-геометрического (Г. Вейль) характера и примыкает к теории непрерывных групп. Результат состоит в том, что локально компактная (тогда говорили «бикомпактная») связная коммутативная группа без нетривиальных компактных подгрупп есть аддитивная группа конечномерного пространства над R. Следует помнить, что теория топологических групп в те годы только зарождалась и результат А. А. Маркова получен прямыми методами. Разумеется, использование теории характеров локально компактных абелевых групп, созданной чуть позже (Ван-Кампен — Понтрягин) позволяет получить его довольно просто. Последующая деятельность по пятой проблеме Гильберта о группах Ли дает еще более мощные методы для доказательства подобных характеризаций. Впрочем, метод А. А. Маркова (теорема уплощения) содержит некоторые черты метода экспоненциального отображения.

А. М. Вершик

Некоторые теоремы об абелевых множествах

Теорема 1 известна сейчас под названием «теорема Маркова — Какутани» (см., например, [1]). В статье Какутани [2], появившейся позже статьи Маркова, содержится другое доказательство той же теоремы, не опирающееся на теорему Тихонова. Теорема 1 допускает следующее обобщение: в формулировке теоремы семейство Г коммутирующих преобразований можно заменить группой аффинных преобразований, удовлетворяющей так называемому условию аменабельности. Это условие накладывает ограничения лишь на внутреннюю тополого-алгебраическую структуру группы и состоит в том, что (топологическая) группа Г имеет лево- или правоинвариантное среднее. Последнее означает, что существует функционал M на пространстве $L^\infty(\Gamma)$ ограниченных измеримых функций на самой группе, удовлетворяющий свойствам 1°–4° из теоремы 2[3)]. Более того, аменабельность Г есть необходимое и достаточное условие того, что Г обладает общей неподвижной точкой при каждом аффинном действии на компакте (см., например, [3]). Класс дискретных аменабельных групп был впервые выделен фон Нейманом в [4] (в этой статье аменабельные группы назывались измеримыми).

[3)] Отметим, что прообразом понятия инвариантного среднего служит банахов предел.

Аменабельность эквивалентна многим другим свойствам группы. См. по этому поводу книгу [5] и комментарии к упомянутой статье фон Неймана в [6].

Теорема Маркова — Какутани стимулировала изучение пространств мер на компакте и групп их преобразований.

Литература

1. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. — М.: ИЛ, 1959.

2. Kakutani S. Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets // Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1938. — V. 14. — P. 242–245.

3. Rickert N. Some properties of locally compact groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1967. — V. 142.

4. von Neumann J. Zur allgemeinen Theorie des Masses // Fundam. Math. — 1929. — Bd. 13. — S. 73–116. (Русский перевод см. в [6]).

5. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. — М.: Мир, 1973.

6. фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. Т. 1. — М.: Наука, 1987.

А. А. Лодкин

О свободной эквивалентности замкнутых кос. Основы алгебраической теории кос

Среди разнообразных по своей тематике работ А. А. Маркова, где мы можем найти труды и по функциональному анализу, и по топологии, и по теории динамических систем, и по топологической алгебре и, конечно, фундаментальные исследования по математической логике, — эти две работы, посвященные теории узлов и кос, занимают особое место. Насколько нам известно, в других работах к этой теме А. А. Марков не возвращался и долгое время они были известны очень узкому кругу специалистов. Некоторая необычность истории первой из этих статей в том, что совсем недавно она оказалась в самом центре нового прогресса в теории узлов.

В первой работе А. А. Марков делает важный шаг по реализации программы Александера — Артина, состоящей в алгебраизации теории узлов. Напомним, что Дж. Александер в 1923 г. доказал, что каждый узел (или зацепление) комбинаторно эквивалентен некоторой замкнутой косе, а в 1925 г. Э. Артин описал группу кос в терминах образующих и соотношений.

Эти результаты преследовали цель сведения проблемы комбинаторной эквивалентности зацеплений к алгебраической задаче о классификации элементов группы кос. И вот именно в этой работе А. А. Марков сделал завершающий шаг, а именно, сформулировал понятие эквивалентности элементов групп кос, которое равносильно комбинаторной эквивалентности ручных зацеплений. Мы приведем этот результат в современной формулировке ниже, а сейчас заметим, что в статье содержится описание ряда преобразований кос и намечено доказательство того, что эти преобразования задают нужную эквивалентность. Окончательная формулировка приводится в конце статьи в виде гипотезы, которая несколькими годами позже (1939) была заявлена в краткой заметке ученика А. А. Маркова — Н. М. Вайнберга (ДАН СССР. — 1939. — Т. 23, № 3. — С. 215–216). Следует помнить, что статья самого Маркова есть по существу доклад, прочитанный на I Международной топологической конференции в Москве (1935). В 1954 г. на топологическом семинаре в Принстоне (США) работа А. А. Маркова была подробно прореферирована одним из его участников, и на основе этого реферата присутствовавшая там Дж. Бирман, впоследствии известная специалистка по теории узлов, дала полное доказательство, приведенное позже в ее книге [1]. Некоторые авторы называют с тех пор этот результат теоремой Маркова — Бирман. Вот в чем он состоит.

Пусть B_n, $n = 2, \ldots$ — группа кос с n нитями, $B_m \subset B_n$, и $\sigma_1 \ldots \sigma_{n-1}$ — ее стандартные образующие. Замыкания кос $w \in B_m$ и $v \in B_n$ комбинаторно эквивалентны тогда и только