ISSN 0207 — 9941

Лодкин

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Издательство
Ленинградского
университета

1 ВЫПУСК

6. В у л и х Б.З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. Калинин, 1977. 375 с.
7. B r a t t e l i O., E l l i o t t G.A., H e r m a n R.H. On the possible temperatures of a dynamical system. - Comm.Math. Phys., 1980, vol.74, p.281-295.
8. B l a c k a d a r B. A simple C*-algebra with no nontrivial projections. - Proc.Amer.Math.Soc., 1980, vol.78, p.504-508.
9. E f f r o s E.G. Dimensions and C*-algebras. Preprint, 1980.
10. K e r o v S.V., V e r š i k A.M. Characters, factor-representations and K-functor of the infinite symmetric group. - Proc. OAGR Conf., Romania, 1980.
11. Л е н г С. Алгебра. М., 1968. 267 с.
12. Г е л ь ф о н д А.О. Избранные труды. М., 1973, с.287-309.

УДК 517.986.33:517.987

А.А.Лодкин

НЕКОММУТАТИВНЫЙ АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ О РАЗЛОЖЕНИИ МЕРЫ

1. Настоящая работа посвящена доказательству обобщения теоремы об условных мерах на элементах измеримого разбиения пространства Лебега [1] на случай алгебр фон Неймана, или w^*-алгебр.

Мерой в алгебре фон Неймана называется неотрицательная функция, заданная на ее проекторах (всегда самосопряженных) и удовлетворяющая условию счетной ортоаддитивности: для любой последовательности (P_i) попарно ортогональных проекторов

$$\mu\left(\sum P_i\right)=\sum \mu(P_i).$$

Всюду далее будет предполагаться конечность меры: $\mu(1)<+\infty$.

Известно, что всякая мера μ, заданная на всех проекторах алгебры фон Неймана $\mathfrak{A}$, порождает функционал $\dot\mu$ на $\mathfrak{A}$ по формулам

$$\dot\mu(A)=\int t\, d\mu(E_t)$$

для самосопряженного оператора $A\in\mathfrak{A}$ ($\{E_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ - его спектральное семейство) и

$$\dot\mu(B)=\dot\mu(\operatorname{Re}B)+i\dot\mu(\operatorname{Im}B)$$

для произвольного $B\in\mathfrak{A}$. Ограничение этого функционала на любую коммутативную w^*-подалгебру оказывается линейным нормальным функционалом (функционалы с этим последним свойством будем называть квазилинейными). Обратно, каждый квазилинейный функционал превращается в меру, если рассмотреть его ограничение на проекторы. Эту связь мы будем всегда иметь в виду.

Пусть $\mathfrak{A}=\int_\Lambda^\oplus \mathfrak{A}(\lambda)\,dm$

- разложение алгебры фон Неймана в прямой интеграл, ассоциированное с диагональной подалгеброй $\mathfrak{M}\cong L^\infty(\Lambda,m)$, лежащей в центре $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}_0\subset\mathfrak{A}$ - некоторое семейство операторов, $\mathfrak{A}_0^\lambda=\{A(\lambda): A\in\mathfrak{A}_0\}$, μ - мера в $\mathfrak{A}$. Пусть также для m-почти всех $\lambda\in\Lambda$ в $\mathfrak{A}_0^\lambda$ задана мера μ_λ. Семейство $\{\mu_\lambda\}$ будем называть системой условных мер для ограничения μ на $\mathfrak{A}_0$, если

а) для любого оператора $A=\int_\Lambda^\oplus A(\lambda)\,dm\in\mathfrak{A}_0$ функция $\lambda\longmapsto\dot\mu_\lambda(A(\lambda))$ измерима и

б) $\dot\mu(A)=\int_\Lambda \dot\mu_\lambda(A(\lambda))\,d\mu_0$, $A\in\mathfrak{A}_0$ (в частности, для проекторов $\mu(P)=\int_\Lambda\mu_\lambda(P(\lambda))\,d\mu_0$), где μ_0 - мера на Λ, определяемая по формуле $\mu_0(E)=\mu(\chi_E)$ для измеримых множеств $E\subset\Lambda$. Мы здесь отождествили $\mathfrak{M}$ с $L^\infty(\Lambda,m)$.

Классическая система условных мер охватывается этим определением, если перейти от пространства с мерой (X,μ) и измеримого разбиения ξ к алгебре $\mathfrak{A}=L^\infty(X,\mu)$ и ее подалгебре $\mathfrak{M}$ элементов $\mathfrak{A}$, постоянных на элементах разбиения ξ. Роль (Λ, m) играет $(X/\xi, \mu_\xi)$ (см.[1]).

Нижеследующие результаты уточняют утверждение, формулировка и набросок доказательства которого приведены в [2, лемма 1]. С помощью этой леммы о разложении меры в [2] доказана формула $\dot\mu(P+Q)=\mu(P)+\mu(Q)$ для не обязательно коммутирующих проекторов, после чего сделано поспешное заключение о том, что из этого сразу следует линейность $\dot\mu$ на $\mathfrak{A}$. Доказательство линейности $\dot\mu$ для полуконечных алгебр, полученное позже М.С.Матвейчуком [3], также использует теорему об условных мерах, и поэтому мы считаем необходимым привести более аккуратную формулировку и более подробное доказательство.

2. Сформулируем результаты.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{A}$ - алгебра фон Неймана, $\mathfrak{A}=\int_\Lambda^\oplus\mathfrak{A}(\lambda)\,dm(\lambda)$ - ее разложение в прямой интеграл, ассоциированное с диагональной алгеброй $\mathfrak{M}$, лежащей в центре $\mathfrak{A}$, причем $\mathfrak{M}$ является счетно-разложимой w^*-алгеброй. Пусть μ - конечная мера в $\mathfrak{A}$. Тогда для всякой счетнопорожденной равномерно замкнутой подалгебры $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{A}$ существует система условных мер $\{\mu_\lambda\}$, определяемая в существенном единственным образом.

Последняя фраза означает, что если $\{\mu_\lambda\}$ и $\{\mu'_\lambda\}$ – две системы условных мер для $\mu|_{\mathfrak{Z}}$, то $\mu_\lambda = \mu'_\lambda$ для μ_0 = п.в. λ.

Из формулировки теоремы следует, что построенная система $\{\mu_\lambda\}$ оказывается далеко не канонической, так как зависит от выбора $\mathfrak{Z}$ и не определена, вообще говоря, во всей алгебре $\mathfrak{A}(\lambda)$. В следующем частном случае результат оказывается более удовлетворительным (степень неединственности условных мер такая же, как в коммутативном случае).

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{A}$ – алгебра фон Неймана, действующая в сепарабельном гильбертовом пространстве, $\mathfrak{A} = \int_\Lambda^\oplus \mathfrak{A}(\lambda)\, dm$ – ее разложение в прямой интеграл, ассоциированное с диагональной алгеброй $\mathfrak{M}$, лежащей в центре $\mathfrak{A}$, причем алгебры $\mathfrak{A}(\lambda)$ являются алгебрами типа I для п.в. λ. Пусть μ – конечная мера в $\mathfrak{A}$. Тогда для $\mathfrak{A}$ существует система условных мер $\{\mu_\lambda\}$, определяемая в существенном единственным образом.

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим равномерно замкнутую подалгебру $\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{A}$, порожденную операторами A_i, $i \in \mathbb{N}$. Расширяя это семейство, если нужно, не более чем счетным множеством операторов, можно добиться того, чтобы $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{M}$ было плотно в $\mathfrak{M}$ в сильной операторной топологии и содержало единицу. Пусть $\Lambda_0 \subset \Lambda$ – измеримое подмножество полной меры, на котором определены значения сразу всех векторнозначных функций $\lambda \mapsto A_i(\lambda)$. Введем на Λ_0 хаусдорфову компактную топологию следующим образом.

Пусть $H = \int_\Lambda^\oplus H(\lambda)\, dm$ – разложение гильбертова пространства, в котором действует $\mathfrak{A}$, в прямой интеграл по алгебре $\mathfrak{M}$. Выберем векторы $\xi_i \in H$, $i \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\xi_i(\lambda)$, $i = 1,2,\ldots,\dim H_\lambda$, образовали базис в H_λ, $\xi_i(\lambda) = 0$ при $i > \dim H_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda_0)$. Возьмем теперь в Λ_0 слабейшую топологию, в которой непрерывны все функции $\lambda \mapsto (A_i(\lambda)\xi_j(\lambda), \xi_k(\lambda))$, $i,j,k = 1,2,\ldots$ Пусть $\widetilde{\mathfrak{Z}} \supset \mathfrak{Z}$ – алгебра всех операторов $A = \int_{\Lambda_0}^\oplus A(\lambda)\, dm$, для которых функции $\lambda \mapsto (A(\lambda)\xi_j(\lambda), \xi_k(\lambda))$ непрерывны, $\widetilde{\mathfrak{Z}}_1^+ = \{B \in \widetilde{\mathfrak{Z}} : B \geqslant 0, \|B\| \leqslant 1\}$. Обозначим через X пространство отображений из $\widetilde{\mathfrak{Z}}_1^+$ в $[0,1]$ с топологией поточечной сходимости, $Y = \{\mu \in X : \mu$ – мера, $\mu(1) = 1\}$. Для $\mu \in Y$ обозначим через K_μ^0 совокупность мер из Y вида $\vartheta_S(\cdot) = \dot\mu(S\cdot)$, где $S \in \widetilde{\mathfrak{Z}}^+ \cap \mathfrak{M}$. Пусть K_μ – замыкание в X множества K_μ^0.

Проверим, что $K_\mu \subset Y$. Пусть $\mu_\alpha \in K_\mu$, $\mu_\alpha \to f \in X$. **Коммутативная линейность** f **очевидна. Мы убедимся в том, что**

f определяет меру, проверив счетную ортоаддитивность или, что равносильно, непрерывность f на коммутативных C^*-подалгебрах $\widetilde{\mathfrak{Z}}$. Последнее свойство следует из положительности и условия $f(\mathrm{I}) = \lim \mu_\alpha(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$.

Множество K_μ, очевидно, выпукло и компактно как замкнутое подмножество тихоновского компакта X.

Выясним геометрию K_μ. Пусть $\varphi \in C(\Lambda_0)$, $\varphi \geqslant 0$, $\int \varphi\, d\mu_0 = 1$. Положим $S(\lambda) = \varphi(\lambda) \cdot 1$, $\lambda \in \Lambda_0$, $S = \int_{\Lambda_0}^\oplus S(\lambda)\, dm$, $T(\varphi) = \vartheta_S \in K_\mu$. Рассмотрим симплекс V вероятностных борелевских мер на Λ_0 со слабой топологией.

Лемма I. Отображение T непрерывно и продолжается **до аффинного** гомеоморфизма $\widetilde{T} : V \to K_\mu$.

Доказательство. Пусть $T(\varphi_i) = \vartheta_{S_i}$, $i = 1,2$, $A \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_1^+$. Поскольку $S_1, S_2 \in \mathfrak{M}$, операторы A, S_1, S_2 коммутируют. Следовательно, $|\vartheta_{S_1}(A) - \vartheta_{S_2}(A)| = |\dot\mu(S_1 A) - \dot\mu(S_2 A)| = |\dot\mu(A(S_1 - S_2))| \leqslant |\dot\mu(S_1 - S_2)|$. Из этого неравенства вытекает непрерывность T и возможность продолжения T до непрерывного отображения $\widetilde{T} : V \to K_\mu$.

Кроме того, если $T(\varphi_\alpha) \to \vartheta$ в K_μ, то для $S_\alpha \in \mathfrak{M}$, соответствующих φ_α, $\dot\mu(S_\alpha A) \to \vartheta(A)$ для всех $A \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_1^+ \cap \mathfrak{M}$, $A = \int^\oplus a(\lambda) \cdot 1\, dm$, $a(\lambda)$ – скалярная функция. Это означает, что обобщенная последовательность $\alpha \mapsto \int a(\lambda)\varphi_\alpha(\lambda)\, d\mu_0$ **имеет предел. Следовательно,** $\widetilde{T}$ **взаимно однозначно. Поскольку** V и K_μ **хаусдорфовы,** $\widetilde{T}$ **– гомеоморфизм.**

Крайними точками K_μ являются образы крайних точек V, т.е. мер δ_λ, $\lambda \in \Lambda_0$. Обозначим $\widetilde{T}(\delta_\lambda)$ через μ_λ. Теперь к μ и K_μ можно применить теорему Шоке: для всех $A \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_1^+$ (и, следовательно, для всех $A \in \widetilde{\mathfrak{Z}}$)

$$\dot\mu(A) = \int_{\Lambda_0} \dot\mu_\lambda(A)\, dp(\lambda).$$

Очевидно, $\dot\mu_\lambda(A)$ зависит лишь от $A(\lambda)$, $p = \mu_0$. В этом можно убедиться, рассмотрев $\dot\mu_\lambda$ на коммутативной алгебре $\{AS : S \in \mathfrak{M}\}$.

Можно доказать, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. Если $\lambda \in \Lambda_0$, $A, B \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_1^+$ **и** $A(\lambda) = B(\lambda)$, **то** $\dot\mu_\lambda(A) = \dot\mu_\lambda(B)$.

Таким образом, можно считать, что мера $\dot\mu_\lambda$ **определена в слое** $\mathfrak{Z}^\lambda$.

Проверим утверждение о единственности системы условных мер. Пусть $\{\mu_\lambda\}$, $\{\mu'_\lambda\}$ **– две системы, построенные описанным выше способом. Из равенства**

$$\dot\mu(SA) = \int \dot\mu_\lambda(S(\lambda)A(\lambda))\, d\mu_0 = \int \dot\mu'_\lambda(S(\lambda)A(\lambda))\, d\mu_0,$$

справедливого для плотного в $\mathfrak{M}$ семейства операторов S и заданного $A \in \tilde{\mathfrak{Z}}$, следует совпадение $\dot{\mu}_\lambda(A(\lambda))$ и $\dot{\mu}'_\lambda(A(\lambda))$ почти всюду. ●

4. Доказательство теоремы 2. В этом частном случае можно выбрать подалгебру $\mathfrak{Z}$ так, чтобы $\tilde{\mathfrak{Z}}^\lambda$ совпадало с $\mathcal{A}(\lambda)$ для п.в. λ. После этого можно применить теорему 1.

Указатель литературы

1. Рохлин В.А. Об основных понятиях теории меры. - Мат. сб., 1949, т.25 (67), № 1, с.107-150.
2. Лодкин А.А. Всякая мера на проекторах w^*-алгебры продолжается до состояния. - Функ. анализ, 1974, т.8, вып.4, с.54-58.
3. Матвейчук М.С. Описание конечных мер в полуконечных алгебрах. - Функ. анализ, 1981, т.15, вып.3, с.41-53.

№ 1734

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ И ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Выпуск I

Межвузовский сборник

Редактор З.И.Царькова

Художественный редактор А.Г.Голубев
Технический редактор Л.А.Топорина
Корректоры С.К.Школьникова, Л.С.Львова

Подписано в печать 12.08.83. М-24337 Формат 60x84 1/16.
Бумага тип. № 2. Печать офсетная. Усл.печ.л. 11,86.
Усл.кр.-отт. 12,09. Уч.-изд.л. 10,85. Заказ 401.
Тираж 1252 экз. Цена 1 р. 60 к.

Издательство ЛГУ имени А.А.Жданова
199164. Ленинград, В-164, Университетская наб., 7/9

Типография ВНИИГ имени Б.Е.Веденеева
195220, Ленинград, Гжатская ул., 21