МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Тюмень. 1982 г.

УДК 536.75;519.21

Сборник содержит работы, посвященные использованию различных математических моделей в современной статистической физике и примыкающих к ней разделах математической физики.

Работы сборника обсуждались на Координационном совещании по теории многокомпонентных случайных систем и приложениям ее в физике и кибернетике, проведенном Научным советом по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР совместно с Тюменским госуниверситетом (Тюмень, сентябрь 1980 г.).

Темплан 1982, п. 78.

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета Тюменского государственного университета

Рецензент: д.ф.-м.н. Р.А. Минлос, кафедра теории функций и функционального анализа МГУ

СОГЛАСОВАННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ФАКТОРА

Лодкин А.А.

1. Гиперконечный фактор типа II_1 представим, по определению, в виде слабого замыкания возрастающей последовательности конечномерных подфакторов. С другой стороны, этот фактор изоморфен алгебре фон Неймана $W^*(X,\mu,G,\alpha)$, порожденной динамической системой с конечной инвариантной мерой (G - коммутативная группа, α - ее свободное эргодическое действие автоморфизмами на пространстве с мерой (X, μ)). При определенных предположениях относительно динамической системы удается согласовать ее аппроксимацию конечными под-системами с аппроксимацией фактора конечномерными подалгебрами (не обязательно факторами). Такой подход оказывается полезным при изучении расположения в факторе определенных подгрупп и подалгебр.

2. <u>Основные определения</u>. Предположим (здесь и далее), что G - коммутативная дискретная группа. Алгебра $\mathfrak{A}=W^*(X,\mu,G,\alpha)$ - алгебра фон Неймана, действующая в $\mathcal{H}=L^2(X\times G,\mu\times dg)$, порожденная операторами $M_\varphi f(x,g)=\varphi(x)f(x,g)$, $U_g f(x,g')=f(\alpha(g)x,gg')$ $(f\in\mathcal{H},\varphi\in L^\infty(X,\mu),x\in X,g,g'\in G)$ со следом τ, который однозначно определяется формулами $\tau(M_\varphi)=\int\varphi d\mu$, $\tau(U_g)=0$ при $g\neq e$. Обозначим через $\mathcal{U}$ представление $g\to U_g$. В случае, когда действие α свободно и эргодично, $\mathfrak{A}$ является фактором, а подалгебры $\mathfrak{M}=\{M_\varphi:\varphi\in L^\infty(X)\}''$, $\mathfrak{N}=\mathcal{U}(G)''$ - максимальные коммутативные подалгебры в $\mathfrak{A}$ ("диагональная" и "групповая").

Будем говорить, что динамическая система имеет дискретный спектр, если спектр группы унитарных операторов $\alpha^*(g):\varphi\in L^2(X)\to\varphi\circ\alpha(g)$ является дискретной подгруппой H группы характеров $\Gamma=\hat{G}$. В таком случае система (X, μ, G, α) изоморфна системе ($\hat{H}$, мера Хаара, G, сдвиг) (G естественно вкладывается в $\hat{H}$).

3. <u>Теорема двойственности</u>. Если система $S=(X,\mu,G,\alpha)$ имеет дискретный спектр, то существует такая динамическая система S', для которой $W^*(S')=\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ служит диагональной, а $\mathfrak{M}$ - групповой алгеброй. В качестве S' можно взять систему ($\hat{G}$, мера Хаара, H, сдвиг).

4. Аппроксимация. Введем понятие ковариантного проектирования (накрытия) систем. Пусть $S_i=(X_i,\mu_i,G_i,\alpha_i)$, $i=1,2$. Будем говорить, что S_2 накрывает S_1, если $G_1\subset G_2$ и существует гомоморфизм пространств с мерой $\pi: X_2\to X_1$, удовлетворяющей условию $\pi\circ\alpha_2(g)=\alpha_1(g)\circ\pi$, $g\in G_1$. Накрытие π индуцирует вложение алгебр $i: W^*(S_1)\to W^*(S_2)$ причем i сохраняет след и вложение подгруппы G_1: $i\,U_1(g)=U_2(g)$, $g\in G_1$. Конструкция фон Неймана $S\to W^*(S)$ определяет контравариантный функтор из категории (динамические системы, накрытия) в категорию (алгебры фон Неймана с отмеченной подгруппой и следом, вложения).

Рассмотрим динамическую систему $S=(X,\mu,G,\alpha)$ с локально конечной группой G (т.е. G совпадает с объединением последовательности конечных подгрупп $G_1\subset G_2\subset\ldots\subset G$). Тогда существует последовательность $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ измеримых разбиений X, удовлетворяющая условиям: 1) ξ_n конечны и инвариантны относительно преобразований $\alpha(g)$, $g\in G_n$; 2) ξ_n возрастают и $\bigvee_n\xi_n=\varepsilon$ – разбиение X на точки. При этом корректно определено действие G_n на X/ξ_n, приводящее к системе $S_n=(X/\xi_n,\mu_{\xi_n},G_n,\alpha)$.

Пусть $\mathfrak{A}_n=W^*(S_n)$.

Предложение. $S=\lim pr\, S_n$, $\mathfrak{A}=W^*\text{-}\lim ind\,\mathfrak{A}_n$.

5. Регулярность и сингулярность. Описанная аппроксимация фактора оказывается полезной для классификации подгрупп вида $U(G)$ в $\mathfrak{A}$ относительно группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$ всех его автоморфизмов. Простейшим инвариантом здесь служит тип максимальной коммутативной подалгебры (м.к.п.) $\mathfrak{N}=U(G)''$.

Определение [1]. Подалгебра $C\subset\mathfrak{A}$ называется регулярной (соот., сингулярной), если ее нормализатор $N(C)=\{U\in\mathfrak{A}: U$ унитарен, $U^*CU=C\}$ совпадает с $\mathfrak{A}$ (соотв., C). Будем также говорить, что C является $U(G)$-регулярной, если $U(G)\subset N(C)$ и $\{C,U(G)\}''=\mathfrak{A}$.

Теорема. 1) Алгебра $\mathfrak{N}$ регулярна, если спектр динамической системы S дискретен; 2) $\mathfrak{N}$ сингулярна в том и только том случае, когда спектр S не содержит дискретной компоненты.

Первая часть теоремы следует из теоремы двойственности, вторая имеется в [2].

Интересно проследить за эффектом возникновения регулярности или сингулярности в процессе аппроксимации алгебрами $\mathfrak{A}_n$. В факторе все регулярные м.к.п. изоморфны относительно группы $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$. В частности, в случае дискретного спектра $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ изоморфны.

Для конкретных аппроксимаций $\mathfrak{A}$ оказывается возможным построить автоморфизмы $\mathfrak{A}_n$, переводящие $\mathcal{N}_n = \mathcal{N} \cap \mathfrak{A}_n$ в $\mathcal{M}_n = \mathcal{M} \cap \mathfrak{A}_n$ таким образом, чтобы они сходились к нужному автоморфизму $\mathfrak{A}$. В случае непрерывного спектра это сделать невозможно по соображениям размерности.

Пример (бернуллиевское действие). $G = \sum_1^\infty \mathbb{Z}_2$, $G_n = \sum_1^n \mathbb{Z}_2$, $X = 2^G = \{f : G \to \{0,1\}\}$, $\alpha(g)(f) = f(g\,\cdot)$, $\xi_n = \bigvee_{g \in G_n} \alpha(g)\xi$, где ξ - разбиение X на множества $A_i = \{f : f(e) = i\}$, $i = 0,1$. Спектр бернуллиевского действия непрерывен (бесконечнократный хааровский) [3].

Предложение. $\dim \mathcal{M}_n = 2^{\dim \mathcal{N}_n (1+o(1))}$ при $n \to \infty$

6. С помощью аппроксимаций, введенных в п. 4, в [4] получено условие сопряженности двух представлений группы $G = \sum_1^\infty \mathbb{Z}_2$ в $\mathfrak{A}$.

Теорема. Пусть U_i, $i = 1, 2$ - два унитарных представления G в $\mathfrak{A}$; $\mathcal{M}_i - U_i(G)$ - регулярные м.к.п. в $\mathfrak{A}$, причем динамические системы, индуцируемые $U_i(G)$ на $\mathcal{M}_i$, имеют дискретный спектр. Для того, чтобы $U_1(G)$ и $U_2(G)$ были изоморфны относительно $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы спектры динамических систем совпадали.

Литература.

1. Dixmier J. Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini, Ann. Math., 59 (1954), 279-286.

2. Nielsen O.A. Maximal Abelian subalgebras of hyperfinite factors. II, I. Funct. Anal., 6(1970), N° 2, 192-202.

3. Кириллов А.А. Динамические системы, факторы и представления групп. УМН, 22 (1967), № 5, 67-80.

4. Лодкин А.А. Аппроксимация динамических систем и спектральная теория в факторе типа II_1. В кн. Операторы математической физики и бесконечномерный анализ. Сб. научн. тр., Киев, 1979, 73-102.

Ленинградский университет.