АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ
МАТЕМАТИКИ

ОПЕРАТОРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ

КИЕВ—1979

УДК 517.986.33:517.987.5:517.984

А.А.Лодкин

АППРОКСИМАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ В ФАКТОРЕ ТИПА II_1

§ 1. Введение

Рассмотрим типичную задачу спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве: указать классификацию семейства операторов относительно следующей эквивалентности : $\{A_\alpha\} \sim \{B_\alpha\}$, если существует унитарный оператор $\mathcal{U}$, такой, что $\mathcal{U} A_\alpha \mathcal{U}^{-1} = B_\alpha$ для всех α . За пределами классической спектральной теории, дающей полную систему инвариантов (спектр, спектральная последовательность) для семейств коммутирующих нормальных операторов, имеются лишь частные результаты. Так, не поддающимися хорошей классификации ("дикими") являются задачи о классификации: ограниченных операторов общего вида; пар некоммутирующих между собой нормальных операторов; троек проекторов, находящихся в общем положении, и т.д. (см., например, [1 , 2]). Ясно , что в случае некоммутирующих семейств для получения хорошей классификации требуется наложить дополнительные условия. В этой статье будет дана классификация семейств, удовлетворяющих определенным коммутационным соотношениям (см. пп. 1–3). Эта задача эквивалентна задаче о классификации некоторых коммутативных групп унитарных операторов в факторе типа II_1 относительно его автоморфизмов (см. п.4).

1. <u>Динамические системы с дискретным спектром.</u> Рассмотрим динамическую систему (д.с.) с "временем" G , т.е. четверку $S=(X,\mu,G,T)$, где X – пространство Лебега с мерой μ ($\mu X=1$), G – счетная коммутативная группа с дискретной топологией, T – действие, т.е. гомоморфизм G в группу преобразований пространства (X,μ) , сохраняющих меру. Напомним (см. [3 , 4]), что спектром системы S называется спектр группы унитарных операторов $\{\tilde{T}_g , g\in G\}$ в $L^2(X,\mu)$, сопряженных автоморфизмам T_g : $(\tilde{T}_g f)(x) = f(T_g x)$, $f\in L^2(X,\mu)$. Он определяется последовательностью

мер $\nu_1 \succ \nu_2 \succ \ldots$, рассматриваемых с точностью до эквивалентности, на группе $\Gamma=\hat G$ характеров группы G, и операторы $\tilde T_g$ унитарно эквивалентны операторам умножения на характер в пространстве $K=\oplus\sum_n L^2(\Gamma,\nu_n)$: $f=(f_n)\in K \mapsto (\psi_g f_n)$, где $\psi_g:\gamma\in\Gamma\mapsto\langle g,h\rangle\in\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ – характер на Γ, соответствующий элементу g.

Если все ν_n дискретны, то говорят, что S имеет дискретный спектр. Если система S эргодична и имеет дискретный спектр, то носитель ν_1 – дискретная подгруппа H в Γ, также называемая спектром системы, а $\nu_n=0$ при $n\ge 2$. В этом случае, по теореме о дискретном спектре, существует такой гомоморфизм $\alpha:G\to\hat H$, что д.с. образуемая сдвигами на $\alpha(g)$ в пространстве $\hat H$, снабженном мерой Хаара, изоморфна S (см., например, [5]).

2. Соотношения коммутации, связанные с динамической системой. Пусть $G=\sum_1^\infty \mathbb{Z}_2$ – группа финитных последовательностей элементов из $\mathbb{Z}_2$. Тогда группой $\hat G$ характеров служит компактная группа бесконечных последовательностей $\prod^\infty \mathbb{Z}_2$. Если спектр S дискретен, то H изоморфна G. Действительно, из эргодичности действия следует, что G – плотная подгруппа $\hat H$, а поэтому $\hat H$ – плотная подгруппа $\hat G$. Кроме того, для всякого $x\in\hat G$ $x^2=e$. Отсюда следует, что H изоморфна $\sum_1^\infty\mathbb{Z}_2$. Обозначим изоморфизм $G\to H$ через β.

Пусть теперь m,ν – меры Хаара на G и $\hat H=Y$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}=L^2(Y,\nu)\otimes\ell^2(G,m)\cong L^2(Y\times G,\nu\times m)$ и зададим в нем унитарные операторы

$$\mathcal{U}_g f(y,g')=f(\alpha(g)y,gg'),$$

$$M_\varphi f(y,g')=\varphi(y)f(y,g'), \qquad (1)$$

где $\varphi\in L^\infty(Y)$, $f\in\mathcal{H}$, $y\in Y$, $g,g'\in G$.

Непосредственно проверяется, что эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$M_\varphi \mathcal{U}_g=\mathcal{U}_g M_\psi,\qquad \psi(y)=\varphi(\alpha(g^{-1})y). \qquad (2)$$

Если $\chi_{g'}(y)=\langle\beta(g'),y\rangle$ – характер, то $\chi_{g'}(\alpha(g^{-1})y)=\chi_{g'}(\alpha(g^{-1}))\chi_{g'}(y)=\langle\beta(g'),\alpha(g)\rangle\chi_{g'}(y)=\lambda(g',g)\chi_{g'}(y)$, и (2) превращается в коммутационное соотношение

$$M_{\chi_{g'}}\mathcal{U}_g=\lambda(g',g)\,\mathcal{U}_g M_{\chi_{g'}}, \qquad (3)$$

где $\lambda:G\times G\to\mathbb{T}$ – бихарактер. Операторы $M_{\chi_{g'}}$ естественно интерпретировать как собственные векторы, а числа $\lambda(g',g)$ – как собственные числа автоморфизма $\mathrm{Ad}\,\mathcal{U}_g$: $M\mapsto \mathcal{U}_g^{-1}M\mathcal{U}_g$ алгебры $\mathcal{M}=\{M_\varphi,\varphi\in L^\infty(Y)\}$. В нашем случае собственные векторы образуют фундаментальное в $\mathcal{M}$ семейство.

Напротив, всякая группа автоморфизмов $L^\infty(Y,\nu)$, сохраняющая интеграл, определяет д.с. на (Y,ν). Если группа автоморфизмов обладает полной системой собственных векторов, то д.с. имеет дискретный спектр, и в эргодическом случае изоморфна сдвигу на группе, описанному выше.

Таким образом, соотношение (2) с бихарактером λ однозначно, с точностью до изоморфизма, определяют д.с. и ее спектр, и обратно.

3. Основной результат. Пусть $S_i=(X,\mu,G,T_i)$, $i=1,2$ – две эргодические д.с. с дискретным спектром. Снабдим индексом i все объекты, введенные в пп.1,2, зависящие от T_i: H_i, α_i, Y_i, β_i, $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{U}_g^{(i)}$, $M_\varphi^{(i)}$, λ_i, $\mathcal{M}_i=\{M_\varphi^{(i)},\varphi\in L^\infty(Y_i)\}$.

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны:

1) семейства операторов $\{\{\mathcal{U}_g^{(i)}\},\mathcal{M}_i\}$ унитарно эквивалентны, т.е. существует унитарный оператор $W:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ такой, что $W\mathcal{U}_g^{(1)}W^{-1}=\mathcal{U}_g^{(2)}$, $W\mathcal{M}_1W^{-1}=\mathcal{M}_2$;

2) спектры H_1 и H_2 д.с. S_i совпадают;

3) бихарактеры λ_i совпадают с точностью до замены переменной: $\lambda_1(g',g)=\lambda_2(\gamma(g'),g)$, где γ – автоморфизм группы G.

Эквивалентность утверждений 2) и 3) фактически доказана в п.2. Автоморфизм γ возникает вследствие произвольного выбора изоморфизмов $\beta_i:G\to H_i$.

4. Спектральная теория в факторе. Пусть $\mathfrak{A}$ – фактор, т.е. слабозамкнутая * – алгебра операторов с тривиальным центром в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Системы операторов $\{A_\alpha\}$ и $\{B_\alpha\}$ в $\mathfrak{A}$ будем называть эквивалентными в $\mathfrak{A}$, если существует * – автоморфизм Φ фактора $\mathfrak{A}$, такой, что $\Phi(A_\alpha)=B_\alpha$. Эти системы называются внутренне эквивалентными в $\mathfrak{A}$, если существует внутренний автоморфизм $Ad\,U: U\mapsto UAU^*$, $U\in\mathfrak{A}$, переводящий A_α в B_α. Если $\mathfrak{A}=\mathcal{L}(\mathcal{H})$ – алгебра всех ограниченных операторов, т.е. фактор типа 1, то мы приходим к понятию обычной унитарной эквивалентности (хорошо известно, что в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ все автоморфизмы – внутренние, и оба понятия эквивалентности совпадают). Поэтому естественно изучение эквивалентности операторов (или групп операторов) в факторе считать предметом "спектральной теории" в факторе.

Задача о нахождении инвариантов операторов (для определенности, унитарных) относительно этой эквивалентности мало изучена. В случае фактора типа II_1 полная классификация, по-видимому, необозрима. Во всяком случае, спектра уже недостаточно для различения операторов. Как будет показано ниже (предположение 1), для целого класса операторов, среди которых есть заведомо неэквивалентные, спектр – бесконечнократный лебеговский (хааровский).

Некоторые возможности построения инвариантов открываются в связи с изучением скрещенных произведений и возникающих в этой связи операторов. Подобное предположение высказывалось А.А.Кирилловым [4] и уточнялось А.М.Вершиком.

Рассмотрим д.с. (X,μ,G,T), где G – дискретная коммутативная группа, и пространство $\mathcal{H}=L^2(X\times G,\mu\times m)$.

Пусть $M\subset\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Обозначим через $R(M)$ наименьшую * – алгебру, содержащую M и замкнутую в слабой операторной топологии. Напомним теперь конструкцию фон Неймана, связывающую с д.с. фактор (скрещенное произведение $L^\infty(X)\otimes_T G$).

Пусть $U_g f(x,g')=f(T_g x, gg')$, $M_\varphi f(x,g')=\varphi(x)f(x,g')$ – операторы сдвига и умножения в $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}=\{M_\varphi,\varphi\in L^\infty(X)\}$, $\mathcal{N}=R(\{U_g, g\in G\})$. $\mathcal{M}$ будем называть диагональной алгеброй, а $\mathcal{N}$ – групповой. Алгеброй фон Неймана

$w^*(X,\mu,G,T)$, порожденной д.с., называется алгебра $\mathfrak{A}=R(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Алгебра $\mathfrak{A}$ алгебраически изоморфна скрещенному произведению $\mathcal{M}\otimes_\alpha G$, где $\alpha: g\mapsto Ad\,U_g$ – действие G автоморфизмами $\mathcal{M}$. Говорят, что действие T свободно, если для всех $g\in G$, $g\neq e$, множество $\{x: T_g x = x\}$ имеет нулевую меру, и эргодично, если из $A\subset X$ и $T_g A = A$ для всех $g\in G$ следует, что $\mu(A)$ или $\mu(X\setminus A)$ обращается в нуль. Для того чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была фактором, необходимо и достаточно, чтобы T было свободным и эргодичным. В этом случае алгебры $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ максимальны в $\mathfrak{A}$ (но не в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$!).

Наши предположения об инвариантности и конечности меры μ приводят к тому, что фактор $\mathfrak{A}$ имеет тип II_1, т.е. обладает конечным следом (т.е. унитарно инвариантным конечным состоянием τ, $\tau(I)=1$). Для того чтобы задать этот след, рассмотрим слабо плотную в $\mathfrak{A}$ подалгебру $\mathfrak{A}_0$ всех полиномов от элементов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. В силу соотношений коммутации $M_\varphi U_g = U_g M_\psi$, $\psi(x)=\varphi(T_g^{-1}x)$, $\mathfrak{A}_0$ состоит из конечных сумм вида $\sum_g M_{\varphi_g} U_g$, где $M_{\varphi_g}\in\mathcal{M}$, $U_g\in\mathcal{N}$. Теперь положим $\tau(\sum_g M_{\varphi_g}U_g)=\int_X \varphi_e\,d\mu$ и продолжим τ на $\mathfrak{A}$ по непрерывности.

Обозначим гомоморфизм $g\in G\mapsto U_g\in\mathfrak{A}$ через $\mathcal{U}$. Четверка $(\mathfrak{A},\mathcal{M},G,\mathcal{U})$ служит алгебраическим аналогом динамической системы.

Напротив, рассмотрим четверку $(\mathfrak{A},\mathcal{M},G,\mathcal{U})$, где $\mathfrak{A}$ – фактор типа II_1 в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$ – его максимальная коммутативная подалгебра, $\mathcal{U}$ – унитарное представление G в $\mathfrak{A}$, причем $U_g\mathcal{M}U_g^{-1}=\mathcal{M}$ для всех $g\in G$ (т.е. $\mathcal{U}(G)$ лежит в нормализаторе $\mathcal{M}$). Предположим также, что выполняется свойство $\mathcal{U}(G)$-регулярности для $\mathcal{M}$: $R(\mathcal{M},\mathcal{U}(G))=\mathfrak{A}$. Построим по $(\mathfrak{A},\mathcal{M},G,\mathcal{U})$ динамическую систему. Для этого представим алгебру с мерой*) $(\mathcal{M},\tau)$, где τ – единственный след в $\mathfrak{A}$, удовлетворяющий условию $\tau(1)=1$, в виде $(L^\infty(X),\mu)$. Здесь X – спектр алгебры $\mathcal{M}$. Группа автоморфизмов $Ad\,U_g$, $g\in G$, индуцирует на (X,μ) действие T.

---

*) Унитарное кольцо в терминологии В.А.Рохлина [6]

Известно, что для коммутативных групп G факторы $w^*(X,\mu,G,T)$ оказываются изоморфными. Этот единственный, с точностью до изоморфизма, фактор $\mathfrak{A}$ типа II_1 обладает свойством гиперконечности (т.е. порожден возрастающей последовательностью конечномерных факторов [7, 8].

Теорема 2. Пусть $\mathcal{U}_i$, $i=1,2$, – два унитарных представления группы $G=\sum_1^\infty \mathbb{Z}_2$ в гиперконечном факторе $\mathfrak{A}$, типа II_1, $\mathcal{M}_i$ – максимальные коммутативные подалгебры в $\mathfrak{A}$, являющиеся $\mathcal{U}_i(G)$ – регулярными, причем динамические системы, индуцируемые $\mathcal{U}_i$ на $\mathcal{M}_i$, имеют дискретный спектр.

Тогда, для того, чтобы группы $\mathcal{U}_1(G)$ и $\mathcal{U}_2(G)$ были изоморфны относительно некоторого автоморфизма фактора, необходимо и достаточно, чтобы спектры динамических систем совпадали.

Сразу же покажем, как теорема 1 может быть выведена из теоремы 2. Пусть выполнено условие 1) теоремы 1. Тогда внутренний автоморфизм $Ad\, W$ переводит одну систему образующих фактора в другую, следовательно, является автоморфизмом фактора и, кроме того, сопрягает группы, и условие 2) следует из теоремы 2. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из того, что системы с одинаковым дискретным спектром изоморфны (о том, что 2) $\Longleftrightarrow$ 3), уже говорилось).

Следующий простой факт показывает, что обычный (в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) спектр группы $\mathcal{U}(G)$ играет второстепенную роль.

Предложение 1. Пусть $\mathfrak{A}=w^*(X,\mu,G,T)$, причем действие T дискретной счетной коммутативной группы G свободно и эргодично. Тогда спектр группы $\mathcal{U}(G)$ как группы операторов в $\mathcal{H}=L^2(X\times G)$ – бесконечнократный хааровский.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированный базис в $L^2(X,\mu)$, δ_e – δ – функция на G, сосредоточенная в единице, $\tilde{\varphi}_n(x,g)=\varphi_n(x)\delta_e(g)$. Тогда функции $\mathcal{U}_g(\tilde{\varphi}_n)\in\mathcal{H}$ образуют счетный базис, который распадается на инвариантные системы $\Phi_n=\{\mathcal{U}_g(\tilde{\varphi}_n), g\in G\}$. На каждом из соответствующих инвариантных подпространств действие группы изоморфно сдвигу. ■

Теорема 2 дает инвариант для довольно узкого класса групп операторов. Известны также некоторые инварианты, определенные для произвольных унитарных операторов. Одним из них является тип коммутативной подалгебры, порожденной оператором (группой операторов) – регулярность, сингулярность, полурегулярность (классификация Диксмье [9]). Подалгебра $\mathcal{M}\subset\mathfrak{A}$ называется регулярной, если $R(N(\mathcal{M}))=\mathfrak{A}$, где $N(\mathcal{M})=\{\mathcal{U}\in\mathfrak{A}:\mathcal{U}$ – унитарный, $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{U}=\mathcal{M}\}$, и сингулярной, если $R(N(\mathcal{M}))=\mathcal{M}$. Оказывается, что алгебра $R(\mathcal{U}(G))$ регулярна в случае, если спектр соответствующей динамической системы дискретен, и сингулярна, если в нем отсутствует дискретная компонента.

Другой инвариант унитарного оператора – энтропия определяемого им внутреннего автоморфизма фактора – определен в работе [10] . Ни тип $R(\mathcal{U}(G))$, ни естественное групповое обобщение энтропии не различают группы, о которых идет речь в теореме 2.

Теорема 2 будет доказана в § 4. Доказательство опирается на технику аппроксимации фактора, восходящую к работам фон Неймана [7] , Глимма [11] и Пауэрс [12]. Однако в настоящей статье аппроксимация фактора порождается аппроксимацией динамической системы конечными системами (§ 2). В § 3 доказываются леммы о близких конечномерных подалгебрах, которые позволяют сравнить две аппроксимации фактора и извлечь информацию о близости соответствующих динамик.

Имеется еще одно доказательство теоремы 2, предложенное А.М.Вершиком, которое опирается на траекторную теорию динамических систем. Это доказательство может быть проведено для всех счетных дискретных коммутативных групп. Излагаемое доказательство является более прямым, и развиваемая ниже техника аппроксимации может быть полезной в других задачах (ср. [10] , где имеются леммы, аналогичные некоторым леммам из § 3). Наконец, заметим, что преимущества, предоставляемые группой $\sum\mathbb{Z}_2$, по сравнению с другими локально конечными группами, незначительны, и доказательство в более общем случае может быть проведено почти так же.

§ 2. Конечномерные скрещенные произведения и их индуктивные пределы

В этом параграфе, используя локальную конечность группы G, будем строить возрастающие системы конечномерных подалгебр фактора $\mathcal{O}$, слабо плотные в нем. В отличие от традиционного подхода, при котором используется возможность приблизить исходную систему (с коммутативной группой) транзитивными д.с., а фактор, соответственно, – конечномерными подфакторами, будем аппроксимировать $\mathcal{O}$ конечномерными подалгебрами, которые не являются факторами, но зато явно связаны с динамической системой.

Результаты этого параграфа распространяются на произвольные локально конечные группы, т.е. группы вида $\bigcup_n G_n$, где G_n – возрастающая последовательность конечных групп.

1. Накрытие систем и вложение алгебр.

Определение 1. Пусть $S=(X,\mu,G,T)$ – д.с., $G_1\subset G_2$, ξ – измеримое разбиение X, инвариантное относительно действия $T(G_1)$, μ_ξ – фактор-мера на X/ξ, T_ξ – действие G_1 на X/ξ, индуцированное T. Фактор-подсистемой S_{ξ,G_1} системы S будем называть систему $(X/\xi,\mu_\xi,G_1,T_\xi)$. В частности, при $G_1=G$ получается фактор-система.

Определение 2. Пусть $S_i=(X_i,\mu_i,G_i,T_i)$, $i=1,2$ – д.с. Будем говорить, что S_2 накрывает S_1, если $G_2\supset G_1$ и существует такое измеримое $T_2(G_1)$ – инвариантное разбиение ξ пространства X_2, что фактор-подсистема $(S_2)_{\xi,G_1}$ изоморфна S_1. В таком случае должен существовать изоморфизм $\pi_0: X_2/\xi\to X_1$, коммутирующий с действием G_1:

$$\pi_0\circ T_2(g)=T_1(g)\circ\pi_0,\qquad g\in G_1. \tag{4}$$

Можно продолжить π_0 до гомоморфизма $\pi: X_2\to X_1$, $\pi=\pi_0\circ\pi_1$, где π_1 – естественная проекция X_2 на X_2/ξ. При этом, по выбору ξ, π также будет удовлетворять (4). Если зафиксировано вложение $G_1\subset G_2$, то накрытие систем

однозначно определяется гомоморфизмом π. Поэтому будем писать $S_2\xrightarrow{\pi}S_1$, если ясно, как вложены группы.

Свяжем теперь с д.с. S_i алгебры фон Неймана $w^*(S_i)$ так, как это было сделано в § 1, п. 4.

Лемма 1. Если д.с. S_2 накрывает S_1, то $\mathcal{A}_1=w^*(S_1)$ изоморфна подалгебре $\mathcal{A}_2=w^*(S_2)$.

Доказательство. Положим $\Phi(U_g^{(1)})=U_g^{(2)}$, $\Phi(M_\varphi^{(1)})=M_{\varphi\circ\pi}^{(2)}$, где $g\in G_1$, $\varphi\in L^\infty(X_1)$. Для того чтобы Φ можно было продолжить до гомоморфизма алгебры $w^*(S_1)=R(\{M_\varphi\},\{U_g\})$, достаточно проверить соотношение $\Phi(U_g^{(1)}M_\varphi^{(1)}U_{g^{-1}}^{(1)})=\Phi(U_g^{(1)})\Phi(M_\varphi^{(1)})\Phi(U_{g^{-1}}^{(1)})$, которое следует из (4):

$$\Phi(M^{(1)}_{\varphi(T_1(g)\cdot)})=M^{(2)}_{\varphi(T_1(g)\pi\cdot)}=M^{(2)}_{\varphi(\pi T_2(g)\cdot)}=M^{(1)}_{\varphi(T_2(g)\cdot)}.\ \blacksquare$$

Из определения Φ видно, что это вложение сохраняет дополнительные структуры в алгебрах $\mathcal{A}_i$: подгруппу $\{U_g, g\in G\}$ и след, определяемый мерой. Таким образом, определен функтор из категории (д.с., накрытия) в категорию (алгебры фон Неймана с отмеченной подгруппой и следом, вложения). Этот функтор "забывает" о диагональной подалгебре, и поэтому мы теряем возможность построить обратный функтор. Однако именно такая категория нам понадобится в § 4. В пп. 3–6 будет показано, какая информация о д.с. сохраняется.

2. Алгебраическая структура конечномерных скрещенных произведений. Пусть X – конечное пространство с мерой, G – коммутативная конечная группа, T – ее действие подстановками X. Рассмотрим $\mathcal{A}=w^*(X,G,T,\mu)$. Пусть X_i – компоненты транзитивности (траектории) действия T. Поскольку G коммутативны, стационарные подгруппы всех точек одной траектории совпадают. Пусть s_i – стационарная подгруппа X_i. Легко проверить, что центр $\mathcal{A}$ порожден проекторами $P_A=M_{\chi_A}\in\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ – диагональная подалгебра), отвечающими инвариантным множествам $A\subset X$, и унитарными операторами $P_{X_i}U_g$, $g\in s_i$. Таким образом, минимальные проекторы из центра $\mathcal{A}$ имеют вид $E_{i\alpha}=P_{X_i}Q_\alpha$, где $Q_\alpha=|s_i|^{-1}\sum_{g\in s_i}\langle\alpha,g\rangle U_g$ – проектор из $\mathcal{M}$, отвечающий характеру α группы s_i. Рассмотрим фактор $E_{i\alpha}\mathcal{A}$. Его "диагональная часть" $E_{i\alpha}\mathcal{M}$ порождена минимальными проекторами $P_{x_k^i}Q_\alpha$, $x_k^i\in X_i$, "групповая" – операторами

$u_g Q_\alpha$, причем последние действуют на первых транзитивно. Для всех $\alpha\in\hat{S}_i$ эти действия изоморфны и транзитивны, длина траектории X_i равна $|G|/|s_i|$. Все факторы центрального разложения разбиваются, следовательно, на группы "близнецов", отвечающие отдельным траекториям.

Если в конечномерной алгебре $\mathcal{A}$ фиксирована группа $\{u_g\}$, то имеется много способов ввести в алгебре структуру скрещенного произведения, т.е. указать $\mathcal{U}(G)$-регулярную коммутативную подалгебру $\mathcal{M}$. Можно показать, что в случае транзитивного действия $\mathbb{Z}_2$ на паре точек семейство таких $\mathcal{M}$ параметризуется окружностью, а для произвольной транзитивно действующей группы G — тором размерности $|G|-1$.

Перейдем к описанию пар конечномерных $*$-алгебр. Опишем структуру вложения $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ в терминах центральных разложений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{A}=\oplus\sum_i E_i\mathcal{A}$, $\mathcal{B}=\oplus\sum_j F_j\mathcal{B}$ — центральные разложения. Проекторы F_j приводят $\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}=\oplus\sum_j F_j\mathcal{A}F_j$, так как $F_j\in\mathcal{A}'$. Рассмотрим алгебру $F_jE_i\mathcal{A}$. Поскольку $F_jE_i\subset E_i\mathcal{A}\cap\mathcal{A}'$, $F_jE_i\mathcal{A}$ представляет собой фактор, изоморфный $E_i\mathcal{A}$, если $F_jE_i\neq 0$. Будем говорить, что $E_i\mathcal{A}$ входит в $F_j\mathcal{B}$ с кратностью n_{ij}, если минимальный проектор фактора $F_jE_i\mathcal{A}$ состоит из n_{ij} минимальных проекторов $F_j\mathcal{B}$. Наборы натуральных чисел m_i (порядки факторов $E_i\mathcal{A}$), p_j (порядки факторов $F_j\mathcal{B}$) и n_{ij} однозначно определяют, с точностью до алгебраического изоморфизма, пару алгебр $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — скрещенные произведения, то на числа m_i, p_j, n_{ij} накладываются ограничения (наличие "близнецов" и т.п.).

3. Задача о накрытии. Пусть $\mathcal{A}\subset\tilde{\mathcal{A}}$ — вложение конечномерных скрещенных произведений, причем $\mathcal{U}(G)\subset\tilde{\mathcal{U}}(\tilde{G})$. Можно ли так выбрать структуру скрещенного произведения $\mathcal{A}=\mathcal{M}\otimes_\alpha G$, $\tilde{\mathcal{A}}=\tilde{\mathcal{M}}\otimes_{\tilde\alpha}\tilde{G}$, чтобы соответствующие динамические системы накрывали друг друга в смысле определения 2? Простые примеры показывают, что в общем случае, если действие не является свободным, это неверно.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{A}=\mathcal{M}\otimes_\alpha G$, $\tilde{\mathcal{A}}=\tilde{\mathcal{M}}\otimes_{\tilde\alpha}\tilde{G}$, причем 1) $G\subset\tilde{G}$; 2) $\mathcal{A}\subset\tilde{\mathcal{A}}$; 3) α и $\tilde\alpha$ — свободные действия. Тогда д.с. $(\tilde{\mathcal{M}},\tilde{G},\tilde\alpha)$ накрывает д.с. $(\mathcal{M},G,\alpha)$.

Доказательство. Рассмотрим параметры m_i, p_j, n_{ij} вложения $\mathcal{A}\subset\tilde{\mathcal{A}}$. Условие 3) гарантирует, что $m_i=m=|G|$

для всех i, $p_j=p=|\tilde{G}|$ для всех j. Зафиксируем j и заметим, что $p=(\sum_i n_{ij})m$. Пусть $\tilde{X}_j$ — траектория, отвечающая $F_j\tilde{\mathcal{A}}$. Рассмотрим ее подразбиение ξ_j на траектории действия подгруппы $\tilde{\mathcal{U}}(G)$. Укрупним это разбиение, объединив для каждого i n_{ij} траекторий (согласно формуле для p). Получим разбиение $\xi_j'<\xi_j$.

Для каждого элемента C_{ij} разбиения ξ_j' условное разбиение $(\xi_j)_{C_{ij}}$ однородно. Существует независимое дополнение к нему, инвариантное относительно действия G. Далее, существует разбиение η_j множества $C_i=\bigcup_j C_{ij}$, состоящее из m элементов, инвариантное относительно действия $\tilde{\mathcal{U}}(G)$ и такое, что $(\eta_i)_{C_{ij}}=\eta_{ij}$. Иначе говоря, η_i — независимое $\tilde{\mathcal{U}}(G)$-инвариантное дополнение к разбиению множества C_i на элементы $(\xi_j)_{C_{ij}}$. Остается объединить разбиения η_i, т.е. взять разбиение η пространства $\tilde{X}=\bigcup_j\tilde{X}_j$, которое на каждом C_j совпадает с η_i. Действие $\tilde{\mathcal{U}}(G)$ на $\tilde{X}/\eta$ изоморфно действию $\mathcal{U}(G)$ на X (спектре $\mathcal{M}$). ∎

Замечание. Лемма остается справедливой и в том случае, когда $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$ — алгебры со следом. Для доказательства нужно использовать равенство следов всех минимальных проекторов внутри одного фактора.

4. Специальный класс скрещенных произведений. Здесь мы рассмотрим скрещенные произведения, связанные с "алгебраическим" действием. Такие алгебры до некоторой степени напоминают факторы, хотя исходное действие не эргодично.

Определение 3. Пусть G и H — изоморфные конечные коммутативные группы, и пусть на $G\times H$ задан бихарактер $\lambda: G\times H\to\mathbb{T}$. Как показано в п.2 § 1, λ однозначно, с точностью до изоморфизма, задает д.с. и представления $g\mapsto\mathcal{U}_g$, $h\mapsto V_h=M_{\chi_h}\in L^\infty(\hat{H})$, удовлетворяющие соотношениям коммутации $\mathcal{U}_gV_h\mathcal{U}_{g^{-1}}V_{h^{-1}}=\lambda(g,h)1$, $g\in G$, $h\in H$. Алгеброй $\mathcal{A}(G,H,\lambda)$ назовем соответствующее скрещенное произведение.

Рассмотрим теперь подгруппы $H^\circ=\{h:\lambda(g,h)=1\ \forall g\in G\}$, $G^\circ=\{g:\lambda(g,h)=1\ \forall h\in H\}$. Функции $h\mapsto\lambda(g,h)$ постоянны на классах смежности hH° и разделяют точки H/H°. Следовательно, гомоморфизм $g\mapsto\lambda(g,\cdot)$ отображает G на $(H/H^\circ)^\wedge$ и поэтому его ядро G° изоморфно H°.

Алгебра, натянутая на $\mathcal{U}(G^\circ)$ и $V(H^\circ)$, является центром $\mathcal{A}(G,H,\lambda)$, а все факторы центрального разложения имеют порядок $|G|^2/|G^\circ|^2$ и изоморфны $\mathcal{A}(G/_{G^\circ}, H/_{H^\circ}, \tilde{\lambda})$, где $\tilde{\lambda}=\lambda|_{G/G^\circ\times H/H^\circ}$ — невырожденный бихарактер.

Пусть $<\cdot,\cdot>$ — бихарактер, осуществляющий двойственность между H и $\hat{H}$, α' — произвольный гомоморфизм $G\to\hat{H}$ с ядром G° и образом

$$(H^\circ)^\perp=\{\gamma\in\hat{H}: <h,\gamma>=1 \quad \forall h\in H^\circ\}.$$

Тогда $<h,\gamma'\gamma>=<h,\gamma'><h,\gamma>=<h,\gamma>$ для всех $\gamma'\in(H^\circ)^\perp$ и $h\in H^\circ$. Пусть α_λ — действие группы G на $\hat{H}$, $\alpha_\lambda(g)(\gamma)=\alpha'(g)\gamma$, $\gamma\in\hat{H}$. Стационарная подгруппа для этого действия G°, инвариантные функции — функции из H°. Легко видеть, что класс изоморфных этому действий определяется не λ, а только его ядром $G^\circ\times H^\circ$.

Совершенно аналогично строится двойственное действие H на $\hat{G}$.

Лемма 3. (о накрытии для алгебр $\mathcal{A}(G,H,\lambda)$). Пусть $G_1\subset G_2$, $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}(G_i,H_i,\lambda_i)$, $i=1,2$, причем $\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{U}^{(2)}|_{G_1}=\mathcal{U}^{(1)}$, где $\mathcal{U}^{(i)}$ — представление G_i в скрещенном произведении $\mathcal{A}_i$.

Тогда д.с. $S_2=(\hat{H}_2,G_2,\alpha_{\lambda_2})$ накрывает систему $S_1=(\hat{H}_1,G_1,\alpha_{\lambda_1})$.

Доказательство. Каждый фактор центрального разложения алгебры $\mathcal{A}_i$ изоморфен алгебре, порожденной свободным транзитивным действием группы G_i/G_i° на двойственной группе.

Если $g\in G_2^\circ\cap G_1$, то $\mathcal{U}_g^{(2)}=\mathcal{U}_g^{(1)}$ лежит в центре $\mathcal{A}_2$ и, следовательно, в центре $\mathcal{A}_1$, откуда $g\in G_1^\circ$. Таким образом, $G_2^\circ\cap G_1\subset G_1^\circ$, откуда $G_1/G_1^\circ\subset G_2/G_2^\circ$. Теперь очевидно, что свободные действия этих фактор групп накрывают друг друга, а тогда и S_2 накрывает S_1. ■

Нетрудно убедиться, что возникающий при этом гомоморфизм пространств с мерой $\pi:\hat{H}_2\to\hat{H}_1$ является также гомоморфизмом групп.

5. Аппроксимация фактора $w^*(X,G)$ конечномерными подалгебрами. Пусть $S=(X,\mu,G,T)$ — д.с. с локально конечной группой $G=\bigcup_n G_n$, действующей свободно и эрго-

дично. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\}$ измеримых разбиений X, удовлетворяющих двум условиям:

А) ξ_n конечно и инвариантно относительно $T(G_n)$ $(n=1,2,\ldots)$;

В) $\xi_1<\xi_2<\ldots$ и $\bigvee_{n=1}^\infty\xi_n=\varepsilon$ — разбиение X на отдельные точки ($\vee$ — операция взятия верхней грани в пространстве измеримых разбиений).

Такую последовательность можно получить из произвольной возрастающей последовательности конечных разбиений $\eta_n\nearrow\varepsilon$, полагая $\xi_n=\bigvee_{g\in G_n}T_g\eta_n$, или из конечной образующей ξ, полагая $\xi_n=\bigvee_{g\in G_n}T_g\xi$.

В силу условия (А) для всех k и n, $k\le n$, определена д.с. $S_{kn}=(X/_{\xi_n},\mu_{\xi_n},G_k,T)$. Благодаря условию (В) пространство $X/_{\xi_{n_1}}$ является фактор-пространством $X/_{\xi_{n_2}}$ при $n_1<n_2$. Очевидно, $S_{k_1n_1}$ является фактор-подсистемой $S_{k_2n_2}$ при $k_1\le k_2$, $n_1\le n_2$, причем накрытия определяются однозначно. При этом выполняются условия согласованности: если $k_1\le k_2\le k_3$, $n_1\le n_2\le n_3$, а π_{ij}: $S_{k_in_i}\to S_{k_jn_j}$, $i>j$ — накрытия, то $\pi_{31}=\pi_{21}\circ\pi_{32}$. Это позволяет рассматривать проективный предел (относительно порядка: $k_1n_1<k_2n_2$, если $k_1\le k_2$ и $n_1\le n_2$).

Предложение 2. $\lim pr\, S_{kn}=S$.

Переходя к алгебрам $w^*(S_{kn})=\mathcal{A}_{kn}$, будем рассматривать их как алгебры с отмеченной унитарной подгруппой $\mathcal{U}(G_k)$ и следом τ. Накрытие $\pi:S_{k_2n_2}\to S_{k_1n_1}$, согласно лемме 1, индуцирует вложение $i:\mathcal{A}_{k_1n_1}\to\mathcal{A}_{k_2n_2}$.

Рассмотрим индуктивный предел этих алгебр в категории w^*-алгебр с отмеченной подгруппой и следом. Пусть $\mathfrak{A}=w^*(S)$.

Предложение 3. $\lim ind\,\mathcal{A}_{kn}=\mathfrak{A}$.

Доказательство предложений 2 и 3 не составляет труда.

Заметим, что если игнорировать меру (след), а конечные пространства X/ξ_n снабдить дискретной топологией, то можно точно так же рассматривать предел (топологических) динамических систем S_{kn}, совпадающий с системой $(\tilde{X},G,T)$, где $\tilde{X}$ — подмножество полной меры пространства X, снабженное вполне несвязной топологией. Сопряженный объект тогда удобно изучать в категории C^*-алгебр, и можно сформулировать аналоги предложений 2 и 3.

Наконец отметим, что для определения предела, очевидно, достаточно ограничиться конфинальной последовательностью $\mathcal{A}_{nn}$. Другие алгебры, особенно $\mathcal{A}_{n-1,n}$, полезны при изучении вложений в конкретных случаях.

6. Аппроксимация фактора, согласованная с динамической системой, имеющей дискретный спектр. Пусть $G=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{Z}_2$ действует на X, причем это действие свободное, эргодическое и с дискретным спектром, $H\subset\hat{G}$ – спектр системы. Напомним, (см. § 1, пп. 1,2), что можно отождествить X с $\hat{H}$, а действие – со сдвигом на элементы $\alpha(G)\subset\hat{H}$.

Рассмотрим фактор типа II_1 $\mathfrak{A}=W^*(\hat{H},G,\alpha)$, его диагональную подалгебру $\mathcal{M}$, изоморфную $L^{\infty}(\hat{H})$, представление $g\mapsto U_g$ группы G в нормализаторе $\mathcal{M}$ и естественный гомоморфизм $h\mapsto V_h$ группы H в $\mathcal{M}$.

Перенумеруем образующие группы $G: g_1, g_2, \dots$ и обозначим через G_n группу, порожденную $\{g_1,\dots,g_n\}$. Точно так же поступим и с группой H (в п.2 § 1 показано, что H изоморфна $\sum\mathbb{Z}_2$). Пусть h_k – ее образующие, H_n порождены $\{h_1,\dots,h_n\}$. В качестве $\mathcal{A}_n$ возьмем алгебру, натянутую на $U_{g_1},\dots,U_{g_n}$, $V_{h_1},\dots,V_{h_n}$. Так, определенная последовательность алгебр порождает весь фактор. Действительно, пусть $h'_1, h'_2, \dots$ – образующие $\hat{H}=\prod_1^{\infty}\mathbb{Z}_2$, двойственные образующим $\{h_n\}$, т.е. $\langle h_j, h'_k\rangle = \exp(i\pi(h_j+h'_k)\delta_{jk})$; $\hat{H}^n$ – подгруппа в $\hat{H}$, порожденная $\{h'_{n+1}, h'_{n+2},\dots\}$, ξ_n – разбиение $\hat{H}$ на классы смежности по $\hat{H}^n$. Эти разбиения, очевидно, удовлетворяют условиям A), B) из п.5 § 2, и в силу предложения 3 слабое замыкание последовательности $\mathcal{A}_n$ совпадает с $\mathfrak{A}$.

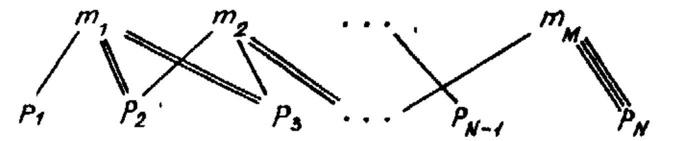
7. Примеры. 1. Действие G со стандартным спектром. Пусть действие определяется вложением $\alpha: G\to\hat{H}$, определенным формулой $\alpha(g_n)=h'_n$. В этом случае алгебры $\mathcal{A}_n$ – факторы типа I_{2^n}.

2. Другой дискретный спектр. Положим $\alpha(g_{2n-1})=h'_n$, $\alpha(g_{2n})=h'_n+h'_{2n}+\dots$. Если записывать элементы $\hat{H}$ в виде последовательностей нулей и единиц, то

$$\begin{aligned}
\alpha(g_1) &= 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots\\
\alpha(g_2) &= 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots\\
\alpha(g_3) &= 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots\\
\alpha(g_4) &= 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ \dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

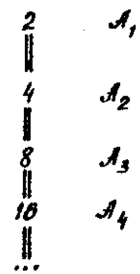
Этот пример интересен тем, что первые $\mathcal{A}_n$ $(n=1,2,\dots,6)$ – по-прежнему факторы типа I_{2^n}, однако $\mathcal{A}_7=M_{2^6}\oplus M_{2^6}$, $\mathcal{A}_8=M_{2^7}\oplus M_{2^7}$, где M_k обозначает фактор типа I_k.

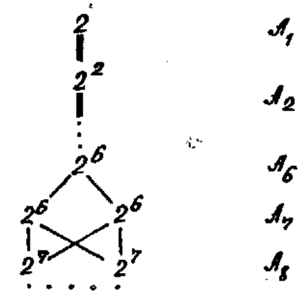
Следуя О.Браттели [13] будем задавать вложения алгебр $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$ с помощью диаграмм вида



,

где в строчках выписываются порядки факторов, входящих в центральное разложение $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, и эти числа соединяются n_{ij} чертами, если фактор порядка m_i входит в фактор порядка p_j с кратностью n_{ij} (см.п.2). Тогда для примеров 1 и 2 получим соответственно диаграммы:





В § 4 докажем, что аппроксимация факторами возможна только в случае стандартного действия.

§ 3. Теоремы об аппроксимации конечномерных $*$ – алгебр

Для целей совместного изучения двух конечномерных аппроксимаций фактора типа II_1 нам понадобятся результаты следующего типа: пусть π – отображение конечномерной $*$ – алгебры $\mathcal{A}$ в $*$ – алгебру $\mathcal{B}$, которое является почти $*$ – гомоморфным, т.е. $\|\pi(AB)-\pi(A)\pi(B)\|$ меньше некоторого δ для элементов единичного шара $\mathcal{A}$, и то же верно для других соотношений в $\mathcal{A}$, определяющих алгебраическую структуру. Тогда, если δ достаточно мало, "вблизи" π существует настоящий $*$ – гомоморфизм $\widetilde{\pi}$, т.е. $\|\widetilde{\pi}(A)-\pi(A)\|<\varepsilon$ на единичном шаре.

Результаты такого типа можно формулировать иначе: в $\mathcal{B}$ имеются операторы, "почти" удовлетворяющие некоторым соотношениям. Тогда можно их "исправить", заменив другими элементами, лежащими вблизи исходных, так, чтобы при этом все соотношения стали точными.

1. Аппроксимация алгебр общего вида. Алгебраические соотношения достаточно проверять для какой-нибудь системы образующих, например, для системы матричных единиц.

Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная $*$ – алгебра, $\mathcal{A}=\oplus\sum_{k=1}^{r}\mathcal{A}^k$ ее центральное разложение, m_k – порядок фактора $\mathcal{A}^k$.

Системой матричных единиц $\mathcal{A}$ называется совокупность $\{e_{ij}^k\}_{i,j=1}^{m_k}$, $k=1,\dots,r$, $e_{ij}^k\in\mathcal{A}^k$, удовлетворяющая соотношениям

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{m_k}e_{ii}^k=1, \tag{5}$$

$$(e_{ij}^k)^*=e_{ji}^k, \tag{6}$$

$$e_{ij}^k e_{pq}^\ell=\delta_{k\ell}\,\delta_{jp}\,e_{iq}^k. \tag{7}$$

Будем говорить, что соотношение $f(A_1,\dots,A_n)=0$ выполняется с точностью до δ, если $\|f(A_1,\dots,A_n)\|<\delta$.

Пусть далее $\mathfrak{A}$ – фактор типа II_1, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве, τ – нормированный след, $\|A\|_1=\tau((A^*A)^{1/2})$ – соответствующая следовая норма, $\|\cdot\|_\infty$ – равномерная норма.

Лемма 4. Для любого $\varepsilon>0$ и натуральных $m_1,\dots,m_r$ найдется $\delta>0$ со следующим свойством: если $\mathcal{B}\subset\mathfrak{A}$ – подфактор типа II_1 или I_N, причем в последнем случае

$$N=K\cdot m, \quad K>\frac{1}{\delta}, \tag{$*$}$$

m – наименьшее общее кратное $m_1,\dots,m_r$, $\{A_{ij}^k,\ k=1,\dots,r;\ i,j=1,\dots,m_k\}$ – семейство операторов в $\mathcal{B}$, таких, что $\|A_{ij}^k\|_\infty\le 1$ и удовлетворяющих соотношениям (5) – (7) с точностью до δ относительно следовой нормы, то найдутся матричные единицы $\{f_{ij}^k\}$ в $\mathcal{B}$,

удовлетворяющие (5) – (7), такие, что $\|A_{ij}^k-f_{ij}^k\|_1<\varepsilon$.

Доказательство этой леммы имеется в работе [14].

Лемма 5. Для любого $\varepsilon>0$ и натуральных $m_1,\dots,m_r$ найдется $\delta>0$ со следующим свойством: если $\mathcal{B}\subset\mathfrak{A}$ – w^* – подалгебра, $\{A_{ij}^k,\ k=1,\dots,r;\ i,j=1,\dots,m_k\}$ – семейство операторов в $\mathcal{B}$, удовлетворяющих условию $\|A_{ij}^k\|_\infty\le 1$ и соотношениям (5) – (7) с точностью до δ относительно $\|\cdot\|_1$, то в $\mathcal{B}$ найдутся элементы $\{f_{ij}^k\}$, удовлетворяющие условиям (6), (7) точно, а условию (5) – с точностью до ε, причем $\|A_{ij}^k-f_{ij}^k\|_1<\varepsilon$.

Доказательство. Сведем эту лемму к лемме 4, воспользовавшись центральным разложением $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}=\int_\Lambda^\oplus\mathcal{B}(\lambda)d\mu(\lambda)$, $\tau=\int_\Lambda^\oplus\tau(\lambda)d\mu(\lambda)$ (см. [14]), причем можно считать, что $\tau(\lambda)(1(\lambda))=1$, выбирая должным образом меру μ в ее классе эквивалентности. Пусть $\|\cdot\|_1^\lambda$ – норма, отвечающая следу $\tau(\lambda)$. Соотношение (5) для $A_{ij}^k=\int A_{ij}^k(\lambda)d\mu(\lambda)$ превращается в неравенство

$$\int_\Lambda\Big\|\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{m_k}A_{ii}^k(\lambda)-1(\lambda)\Big\|_1^\lambda d\mu(\lambda)<\delta.$$

Таким же образом остальные соотношения записываются в виде

$$\int_\Lambda\|R_\alpha(\lambda)\|_1^\lambda d\mu(\lambda)<\delta.$$

Применив к каждому из интегральных неравенств (пусть s их число) неравенство Чебышева, отыщем общее для них множество $\Lambda_0\subset\Lambda$ таких точек λ, для которых $\|R_\alpha(\lambda)\|_1^\lambda<\sqrt{\delta}$, $\forall\alpha$. Тогда $\mu(\Lambda\setminus\Lambda_0)<s\sqrt{\delta}$.

Теперь заметим, что в лемме 4 можно отбросить условие $(*)$, потребовав, чтобы $\{f_{ij}^k\}$ удовлетворяли условию (5) лишь с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ (см. [14]). Пусть δ_1 выбрано по $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$ в соответствии с этой модификацией леммы 4.

Полагая $\delta=\min(\varepsilon_1,\frac{\delta_1^2}{s^2})$, убеждаемся, что при $\lambda\in\Lambda_0$ для операторов $A_{ij}^k(\lambda)$ и фактора $\mathcal{B}(\lambda)$ выполняются условия этой модификации. Следовательно, существуют матричные единицы $\{f_{ij}^k(\lambda)\}$, удовлетворяющие соотношению (5) с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ в норме $\|\cdot\|_1^\lambda$, а также (6) и (7).

Положим $e_{ij}^k = \int_{\Lambda_0} e_{ij}^k(\lambda)d\mu + \int_{\Lambda\setminus\Lambda_0} 0\cdot d\mu$. Тогда

$$\Big\|\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} e_{ii}^k - 1\Big\|_1 < m(\Lambda\setminus\Lambda_0) + \frac{\varepsilon}{2} m(\Lambda_0) < \varepsilon, \quad \|A_{ij}^k - e_{ij}^k\|_1 < \varepsilon,$$

а справедливость соотношений (6) и (7) для $\{e_{ij}^k\}$ также очевидна. ■

2. <u>Леммы о почти коммутирующем операторе.</u> В качестве еще одной задачи об исправлении приведем следующее утверждение об исправлении соотношений коммутирования, которое понадобится в дальнейшем.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{B}$ – подалгебра $\mathfrak{A}$, $\mathcal{A}$ – конечномерная подалгебра $\mathcal{B}$, $m_1,\dots,m_r$ – порядки факторов центрального разложения $\mathcal{A}$, $\{e_{ij}^k\}$, $k=1,\dots,r$; $i,j=1,\dots,m_r$ – некоторая система ее матричных единиц. Тогда существует такое число K, что если $A\in\mathcal{B}$, $\delta>0$ и $\|Ae_{ij}^k - e_{ij}^k A\|_1 < \delta$, то существует такой элемент $A'\in\mathcal{A}'\cap\mathcal{B}$, что $\|A-A'\|_1 < K\delta$.

Доказательство удобно провести, разобрав последовательно частные случаи (леммы 7–9).

Лемма 7. Пусть $\mathcal{B}$ – подфактор $\mathfrak{A}$, $\mathcal{M}$ – его коммутативная подалгебра конечной размерности r, $A\in\mathcal{B}$, $\delta>0$ и $\|AP-PA\|_1<\delta$ для всех минимальных проекторов $P\in\mathcal{M}$. Тогда существует такой $A'\in\mathcal{M}'\cap\mathcal{B}$, что $\|A-A'\|_1 \le r\delta$.

Доказательство. Положим

$$A' = \sum_{i=1}^r P_i A P_i, \qquad (8)$$

где P_i, $i=1,\dots,r$ – минимальные проекторы $\mathcal{M}$. Тогда справедлива оценка

$$\|A'-A\|_1 = \sum_{i=1}^r \|P_iAP_i - A\|_1 = \Big\|\sum_{i=1}^r P_iAP_i - \sum_{i=1}^r P_i A\Big\|_1 \le \sum_{i=1}^r \|P_i\|_\infty \|AP_i - P_iA\|_1 < r\delta$$

и легко видеть, что $A'\in\mathcal{M}'$. ■

Лемма 8. Пусть $\mathcal{B}$ – подфактор $\mathfrak{A}$, $\mathcal{F}$ – его подфактор типа I_n, $\{e_{ij}\}$ – некоторая система его матричных единиц, $A\in\mathcal{B}$, $\delta>0$ и $\|Ae_{ij}-e_{ij}A\|_1<\delta$. Тогда существует такой $A'\in\mathcal{F}'\cap\mathcal{B}$, что $\|A-A'\|_1<n\delta$.

Доказательство. Пусть $\lambda_i\in\mathbb{R}^+$, $i=1,\dots,n$, $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$. Положим

$$A' = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i e_{ij} A e_{ij}. \qquad (9)$$

Тогда, очевидно, $\|A'-A\|_1 = \Big\|\sum_{i,j=1}^n \lambda_j e_{ij}Ae_{ji} - \Big(\sum_{j=1}^n\lambda_j\sum_{i=1}^n e_{ij}e_{ji}\Big)A\Big\|_1 \le$

$$\le \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^n \|e_{ij}\|_\infty \|Ae_{ji}-e_{ji}A\|_1 < \Big(\sum_{j=1}^n\lambda_j\Big)n\delta = n\delta$$

и непосредственно проверяется, что $A'\in\mathcal{F}'$. ■

Лемма 9. Пусть выполнены условия леммы 6 и дополнительно предполагается, что $\mathcal{B}$ – фактор. Тогда утверждение леммы 6 справедливо.

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ – центр $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}'\cap\mathcal{B}\subset\mathcal{M}'\cap\mathcal{B}$. Обозначим через P_k, $k=1,\dots,r$, минимальные проекторы $\mathcal{M}$. Пусть A'' – элемент алгебры $\mathcal{M}'\cap\mathcal{B} = \sum_{k=1}^r P_k\mathcal{B}P_k$, построенный по A в соответствии с леммой 7, A_k' $(k=1,\dots,r)$ – элементы алгебр $P_k\mathcal{A}'P_k$, которые получаются в результате применения леммы 8 к фактору $P_k\mathcal{B}P_k$, его подфактору $P_k\mathcal{A}P_k$ и оператору $P_kA''P_k$. Остается проверить, что $A'=\sum_{k=1}^r A_k'$ – искомый элемент:

$$\|A'-A\|_1 \le \|A-A''\|_1 + \|A''-A'\|_1 < r\delta + \sum_k \|P_k(A''-A')P_k\|_1 \le r\delta + \sum_k m_k\delta = K\delta,$$

так как $P_kA''P_k = P_kAP_k$ и $\|P_kAP_ke_{ij}^k - e_{ij}^kP_kAP_k\|_1<\delta$. ■

Доказательство леммы 6. Пусть $\mathcal{B}=\int\mathcal{B}(\lambda)d\mu(\lambda)$ – центральное разложение $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}=\int\mathcal{A}(\lambda)d\mu(\lambda)$ – индуцированное им разложение подалгебры, $A=\int A(\lambda)d\mu(\lambda)\in\mathcal{B}$. Тогда для почти всех λ по лемме 9 можно подобрать $A'(\lambda)\in\mathcal{A}'(\lambda)$ так, чтобы

$$\|A'(\lambda)-A(\lambda)\|_1^\lambda < K \max_{i,j,k} \|A(\lambda)e_{ij}^k(\lambda) - e_{ij}^k(\lambda)A(\lambda)\|_1^\lambda,$$

причем указанный в леммах 7–9 способ построения $A'(\lambda)$ приводит к измеримой операторнозначной функции.

Интегрируя последнее неравенство, окончательно получим $\|A'-A\|_1 < Ks\delta$, где s – число матричных единиц.

Замечание. Можно проверить, что формулы (8) и (9) задают ожидание $\mathcal{B}\to\mathcal{A}'\cap\mathcal{B}$. При $\lambda_i=\frac{1}{n}$ это ожидание оказывается ортогональным проектированием в гильбертовой норме $\|A\|_2=(\tau(A^*A))^{1/2}$ (Ср. с. [15]).

3. Аппроксимация с отмеченной подалгеброй. Пусть в $\mathfrak{A}$ имеются две подалгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ конечномерна), имеющие в своем пересечении коммутативную подалгебру $\mathcal{M}$, и $\mathcal{A}$ близка к $\mathcal{B}$. Требуется так аппроксимировать $\mathcal{A}$ подалгеброй в $\mathcal{B}$, изоморфной $\mathcal{A}$, чтобы соответствующий гомоморфизм $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ оставлял $\mathcal{M}$ неподвижной.

Заметим, что крайние случаи, когда $\mathcal{M}$ одномерна и когда $\mathcal{M}$ максимальна в $\mathcal{A}$, охватываются леммой 4 (см. ее доказательство в [14], которое в случае максимальности $\mathcal{M}$ нужно начинать сразу с леммы 4).

Лемма 10. Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная подалгебра в $\mathfrak{A}$, $m_1,\dots,m_r$ – размерности факторов ее центрального разложения, $\varepsilon>0$. Тогда существует такое $\delta=\delta(\varepsilon, m_1,\dots,m_r)>0$, что если $\mathcal{M}$ – коммутативная подалгебра $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – w^*-подалгебра $\mathfrak{A}$, содержащая $\mathcal{M}$, $\{e^k_{ij}\}$ – матричные единицы в $\mathcal{A}$, $\{A^k_{ij}\}\subset\mathcal{B}$,
$\|e^k_{ij}-A^k_{ij}\|_1<\delta$ $(k=1,\dots,r;\ i,j=1,\dots,m_r)$, $\|A^k_{ij}\|_\infty\le 1$,
то существуют проектор $E\in\mathcal{M}'\cap\mathcal{B}$, $\tau(1-E)<\varepsilon$ и такой гомоморфизм $\rho:\mathcal{A}\to E\mathcal{B}E$, что $\|e^k_{ij}-\rho(e^k_{ij})\|_1<\varepsilon$ для всех i,j,k, причем $\rho(A)=A$ для $A\in\mathcal{M}$.

Замечание. Если $\{\tilde e^k_{ij}\}$ – другая система матричных единиц $\mathcal{A}$, то в $\mathcal{B}$ можно найти такие элементы $\tilde A^k_{ij}$, что $\|\tilde e^k_{ij}-\tilde A^k_{ij}\|_1<C\delta$, где C зависит лишь от размерностей факторов из $\mathcal{A}$. В самом деле, существует такой унитарный оператор $\mathcal{U}\in\mathcal{A}$, $\mathcal{U}=\sum_{i,j,k}u^k_{ij}e^k_{ij}$, что $\tilde e^k_{ij}=\mathcal{U}e^k_{ij}\mathcal{U}^*$. Положим

$$\tilde{\mathcal{U}}=\sum_{i,j,k}u^k_{ij}A^k_{ij}\in\mathcal{B},\qquad \tilde A^k_{ij}=\tilde{\mathcal U}A^k_{ij}\tilde{\mathcal U}^*.$$

Нетрудно оценить $\|\mathcal U-\tilde{\mathcal U}\|_1$: если предположить для простоты, что $\mathcal A$ – фактор, то

$$\|\mathcal U-\tilde{\mathcal U}\|_1\le\sum_i\sum_j|u_{ij}|\,\|e_{ij}-A_{ij}\|_1\le\Big(\sum_{i,j}|u_{ij}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i,j}\|e_{ij}-A_{ij}\|_1^2\Big)^{1/2}\le\sqrt{n}\cdot n\delta.$$

Теперь легко оценивается и $\|\tilde e^k_{ij}-\tilde A^k_{ij}\|_1$.

Доказательство леммы 10. А) В силу только что сделанного замечания можно считать $\{e^k_{ij}\}$ уже такими, что диагональная алгебра, порожденная операторами

e^k_{ii}, содержит $\mathcal M$ своей подалгеброй.

Б) Пусть $R_\alpha(\{A^k_{ij}\})$ – левые части соотношений (5) – (7). Добавим к ним также функции $R'_{kq}=\mathcal D_kP_q-P_q\mathcal D_k$, где $\mathcal D_k=\sum_{i=1}^{m_k}A^k_{ii}$, $k=1,\dots,r$; P_q, $q=1,\dots,n=\dim\mathcal M$ – минимальные проекторы $\mathcal M$. Ясно, что если $\|e^k_{ij}-A^k_{ij}\|_1<\delta$, то

$$\|R'_{kq}\|_1\le2\Big\|\mathcal D_k-\sum_{i=1}^{m_k}e^k_{ii}\Big\|_1\le2\sum_{i=1}^{m_k}\|A^k_{ii}-e^k_{ii}\|_1<2m_k\delta.$$

Повторим теперь прием, использованный в доказательстве леммы 5 и заключающийся в разложении $\mathcal B$ по центру с последующим применением леммы Чебышева к функциям $\varphi_\alpha(\lambda)=\|R_\alpha(\lambda)\|_1^\lambda$ и $\psi_{kq}(\lambda)=\|R'_{kq}(\lambda)\|_1^\lambda$. Пусть, как и в п.1, Λ_0 – то множество почти полной меры, на котором все φ_α и ψ_{kq} малы, I_0 – центральный проектор, отвечающий Λ_0, $\tau(1-I_0)<\delta_1$, где $\delta_1=C_1\sqrt{\delta}$. Ценой перехода от $\mathcal B$ к $I_0\mathcal B$ можно свести рассуждение к рассмотрению отдельных факторов $\mathcal B(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda_0$. Для них выполнены соотношения (5) – (7) с точностью до δ_1 и $\|\mathcal D_k(\lambda)P_q(\lambda)-P_q(\lambda)\mathcal D_k(\lambda)\|_1^\lambda<C_2\delta_1$.

В) Обозначив через $E_k(\lambda)$ ортогональную проекцию (в норме $\|\cdot\|_2$, см. замечание в п.2) операторов $\mathcal D_k(\lambda)$ на подалгебру $\mathcal M(\lambda)'\cap\mathcal B(\lambda)$ и применив лемму 7 для оценки уклонений, получим $\|E_k(\lambda)-\mathcal D_k(\lambda)\|_1^\lambda\le n\delta_1$. Затем с помощью леммы 1 и 3 из работы [14] исправим $E_k(\lambda)$ (не выходя из $\mathcal M(\lambda)'\cap\mathcal B(\lambda)$) до ортогональных проекторов $F_k(\lambda)$, $\|F_k(\lambda)-E_k(\lambda)\|_1^\lambda<C_3\delta_1$.

Г) Следующий шаг состоит в дальнейшем исправлении $E_k(\lambda)$ в $\mathcal M(\lambda)'\cap\mathcal B(\lambda)$ с тем, чтобы применение леммы 4 к операторам $F_k(\lambda)A^k_{ij}(\lambda)F_k(\lambda)$ и фактору $F_k(\lambda)\mathcal B(\lambda)F_k(\lambda)$ не затронуло операторы $P_q(\lambda)$.

Пусть

$$I^k_q=\{i: e^k_{ii}\le P_q\ (k=1,\dots,r;\ q=1,\dots,n)\},$$

$$Q_k=\sum_{i=1}^{m_k}e^k_{ii}.$$

Рассмотрим вероятностный вектор

$$a_k=\left\{\frac{|I^k_q|}{m_k}\right\}_{q=1}^{n},$$

а также вектор

$$\tilde{a}_k(\lambda)=\left\{\frac{\|F_k(\lambda)P_q(\lambda)\|_1^{\lambda}}{\|F_k(\lambda)\|_1^{\lambda}}\right\}_{q=1}^{n}.$$

Для того чтобы F_k могли быть образами Q_k при гомоморфизме, который мы ищем, нужно, чтобы a_k и $\tilde{a}_k(\lambda)$ совпадали при почти всех λ (при этом матрицы $\{\|F_k(\lambda)P_q(\lambda)\|_1^{\lambda}\}_{k=1,q=1}^{r\ \ n}$ при разных λ совпадать не обязаны).

Наши оценки позволяют показать, что уклонение вектора $\tilde{a}_k(\lambda)$ от a_k не превосходит $C_4\delta_1$ (равномерно по k и λ). Для этого нужно воспользоваться элементарной оценкой нормы $F_k(\lambda)P_q(\lambda)-\sum_{i\in I_q^k}A_{ii}^k(\lambda)$ и применить неравенство треугольника для оценки уклонения

$$\frac{\sum_{i\in I_q^k}\|A_{ii}^k(\lambda)\|_1^{\lambda}}{\|\mathcal{D}_k(\lambda)\|_1^{\lambda}}-\frac{|I_q^k|}{m_k}$$

(слагаемые в числителе первой дроби "почти равны" при фиксированном k в силу соотношений (5) – (7).

Д) Теперь элементарные рассуждения позволяют показать, что если $\mathcal{N}$ – какая-нибудь максимальная коммутативная подалгебра в $\mathcal{B}(\lambda)$, содержащая все проекторы $F_k(\lambda)P_q(\lambda)$, то можно так перераспределить след между проекторами F_k, чтобы вектор $\tilde{a}_k(\lambda)$ совпал с a_k. При этом поправка каждого F_k не превысит $C_5\delta_1$, и, может быть, придется ограничить $F_k(\lambda)P_q(\lambda)$ на подалгебру $E(\lambda)\mathcal{N}$, где $E(\lambda)\in\mathcal{N}$, $\|E(\lambda)\|_1^{\lambda}>1-C_6\delta_1$.

Предположим, что F_k уже таковы. Теперь стандартным путем получим оценку $\|B_{ij}^k(\lambda)-A_{ij}^k(\lambda)\|_1^{\lambda}<C_7\delta_1$ для $B_{ij}^k(\lambda)=F_k(\lambda)A_{ij}^k(\lambda)F_k(\lambda)$. Неравенство треугольника позволяет получить тогда для $B_{ij}^k(\lambda)$ соотношения (5) – (7) с точностью до $C_8\delta_1$. По лемме 4 исправим эти элементы внутри фактора $E(\lambda)F_k(\lambda)\mathcal{B}(\lambda)F_k(\lambda)E(\lambda)$ и получим матричные единицы $f_{ij}^k(\lambda)$. Условие $\tilde{a}_k(\lambda)=a_k$ позволяет добиться того, чтобы $E(\lambda)P_q(\lambda)$ были составлены из $f_{ii}^k(\lambda)$.

Остается положить

$$\rho(e_{ij}^k)=\int_{\Lambda_0}f_{ij}^k(\lambda)d\mu(\lambda),\qquad E=1-I_0+\int_{\Lambda_0}E(\lambda)d\mu(\lambda),$$

причем $\tau(1-E)<C_9\delta_1$. Выбирая δ достаточно малым, добьемся выполнения неравенств $\tau(1-E)<\varepsilon$, $\|e_{ij}^k-\rho(e_{ij}^k)\|_1<\varepsilon$. ∎

4. <u>Аппроксимация алгебр $\mathcal{A}(G,H,\lambda)$</u>. Здесь рассматривается вариант леммы 10, который относится к алгебрам, введенным в п.4 § 2. В этом случае получается точное исправление (условие $\tau(1-E)<\varepsilon$ заменяется условием $1=E$).

Лемма 11. Пусть $n_1<n_2$, $G_q=\sum_1^{n_q}\mathbb{Z}_2$, $\mathcal{A}_q=\mathcal{A}(G_q,H_q,\lambda_q)$, $q=1,2$ – подалгебры в $\mathfrak{A}$, построенные по представлениям U_q, V_q и бихарактерам λ_q. Тогда существует такое $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\mathcal{A}_1)$, что для любого $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ найдется $\delta=\delta(\mathcal{A}_1,\varepsilon)$ со свойством: если $U_2|_{G_1}=U_1$ и для некоторой системы $\{e_{ij}^k\}$ матричных единиц в $\mathcal{A}_1$ существуют такие элементы $\{A_{ij}^k\}\subset\mathcal{A}_2$, что $\|A_{ij}^k\|_\infty\le 1$, $\|e_{ij}^k-A_{ij}^k\|_1<\delta$, то найдется гомоморфизм $\rho:\mathcal{A}_1\to\mathcal{A}_2$, тождественный на $U_1(G_1)$ и такой, что $\|\rho(e_{ij}^k)-e_{ij}^k\|_1<\varepsilon$.

Доказательство разобьем на следующие этапы.

А) Пусть $G=G_1^\circ\cap G_2^\circ$, $\varphi_0\in\hat{G}$, $P_{\varphi_0}=|G^\circ|^{-1}\sum_{g\in G^\circ}\langle g,\varphi_0\rangle U_g$ – соответствующий проектор. Он приводит $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ поэтому утверждение теоремы сводится к возможности аппроксимировать $P_{\varphi_0}\mathcal{A}_1$ подалгеброй в $P_{\varphi_0}\mathcal{A}_2$ с сохранением на месте подалгебры $P_{\varphi_0}R(U_1(G_1))$ для всех φ_0.

Б) Пусть $\mathcal{A}=P_{\varphi_0}\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}=P_{\varphi_0}\mathcal{A}_2$, $\mathcal{M}=P_{\varphi_0}R(U_1(G_1))$, $N=\sum_{k=1}^{r}m_k$ – размерность максимальной коммутативной подалгебры в $\mathcal{A}$, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2=\left(\frac{\varepsilon_1}{2N}\right)^2$. Пусть $\delta=\delta(\mathcal{A},\varepsilon_2)$ выбрано в соответствии с леммой 10, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{M}$ удовлетворяют условиям этой леммы, а проектор I_0 и гомоморфизм, который теперь обозначим $\tilde{\rho}$ – те, которые строятся в этой лемме.

Пусть E_α – минимальные центральные проекторы $\mathcal{B}$, $e_{ii}^k\in\mathcal{A}$ выбраны так же, как в предыдущей лемме. Тогда для $E_\alpha\le I_0$ проекторы $\tilde{\rho}(e_{ii}^k)E_\alpha$ удовлетворяют соотношениям (6) и (7) точно, а (5) с точностью до $\frac{\varepsilon_1}{2N}$ (относительно условной нормы $\|\cdot\|_1^\alpha$).

В) Учитывая, что порядки факторов центрального разложения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – степени двойки, можно убедиться, что при $\varepsilon_1<1$ операторы $\tilde{\rho}(e_{ii}^k)E_\alpha$ можно заменить ортогональными проекторами $A_{ii}^{k\alpha}$ с соблюдением соотношений

$$\tau^\alpha(A_{ii}^{k\alpha})=\tau^\alpha(A_{jj}^{k\alpha}),\quad\forall k,\tag{10}$$

$$\sum_{e_{ii}^k \le P_\varphi} A_{ii}^{k\alpha} = P_\varphi E_\alpha , \qquad \forall \varphi \in \hat G_1 , \tag{11}$$

$$\| A_{ii}^{k\alpha} - \tilde\rho(e_{ii}^k) E_\alpha \|_1^\alpha \le C_1 \varepsilon_1$$

для всех $E_\alpha \le I_0$. Для $E_\alpha \le 1 - I_0$ определим ортогональные проекторы произвольным образом, лишь бы выполнялись условия (10) и (11).

Г) Полагая $A_{ii}^k = \sum_\alpha A_{ii}^{k\alpha}$, получаем разбиение единицы на проекторы A_{ii}^k, причем $|\tau(A_{ii}^k) - \frac{1}{N}| < C_2 \varepsilon_1$, $\sum_{e_{ii}^k \le P_\varphi} A_{ii}^k = P_\varphi$. Можно так исправить A_{ii}^k на $\tilde A_{ii}^k$, перераспределив след между ними поровну, чтобы выполнялись следующие условия: $\tau(\tilde A_{ii}^k) = \frac{1}{N}\ \forall i, k$, $\sum_{e_{ii}^k \le P_\varphi} \tilde A_{ii}^k = P_\varphi$;

$$\tau^\alpha(\tilde A_{ii}^k E_\alpha) = \tau^\alpha(\tilde A_{jj}^k E_\alpha) \ \forall i, j, k, \alpha ; \quad \| \tilde A_{ii}^k - A_{ii}^k \|_1 < C_3 \varepsilon_1 .$$

Д) Остальные (недиагональные) операторы исправляются точно так же, как в лемме 4. При этом возможна следующая оценка уклонения:

$$\| A_{ij}^k - \tilde A_{ij}^k \|_1 < C_4 \sqrt{\varepsilon_1} .$$

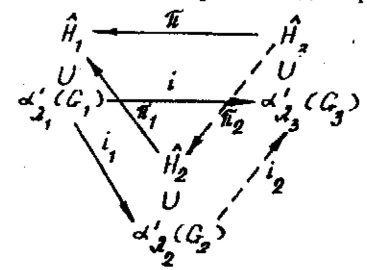
Поскольку константы $C_1, \dots, C_4$ зависят лишь от N (см. леммы 1–5 в [14]), точный гомоморфизм, который мы определили формулой $\rho(e_{ij}^k) = \tilde A_{ij}^k$, можно выбором ε_2 сделать сколь угодно близким к тождественному.

В качестве $\varepsilon_0(A_1)$ можно взять $\frac{1}{4N^2}$ (см. В)).■

§ 4. Доказательство теоремы 2

1. Лемма 12. Пусть $S_i = (\hat H_i, G_i, \alpha_{\lambda_i})$, $i = 1, 2, 3$ – динамические системы (действие α_{λ_i} – алгебраическое см. п. 4, § 2), причем S_3 накрывает S_2 и S_1, а S_2 накрывает S_1. Пусть π, i – гомоморфизмы, задающие накрытие $S_3 \to S_1$; π_1, i_1 задают накрытие $S_2 \to S_1$. Тогда существуют такие гомоморфизмы π_2, i_2, осуществляющие накрытие $S_3 \to S_2$, что $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$, $i = i_2 \circ i_1$.

Доказательство. Утверждение леммы равносильно тому, что для заданных вложений i, i_1 и проекций π, π_1 можно найти вложение i_2 и проекцию π_2 так, чтобы стала коммутативной следующая диаграмма



Обозначим для удобства $\alpha'_{\lambda_i}(G_i)$ через G'_i. Пусть π_2 – какая-нибудь проекция с условием $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi$. $\tilde i_2$ – какое-нибудь вложение G'_2 в G'_3, подчиненное условию $\pi_2 \circ \tilde i_2 = 1$ (оно существует, так как S_3 накрывает, по условию, S_1). Если ввести обозначение $K_i = \mathrm{Ker}\, \pi_i$ $(i = 1, 2)$, то группы G'_2 и G'_3 разложатся в прямые суммы:

$$G'_2 = i_1(G'_1) \oplus K_1 ,$$

$$G'_3 = i_2(i_1(G'_1)) \oplus \tilde i_2(K_1) + K_2 .$$

Тогда вложение i приобретет вид

$$i(g) = \tilde i_2(i_1(g)) + \tilde i_2(k_1(g)) + k_2(g) ,$$

где $k_1 : G'_1 \to K_1$, $k_2 : G'_1 \to K_2$ – некоторые гомоморфизмы. Положим для $g = g_1 + g_2$, $g_1 \in i_1(G'_1)$, $g_2 \in K_1$

$$i_2(g_1 + g_2) = \tilde i_2(g_1 + g_2) + k_2(g_1) .$$

Непосредственно проверяется, что $\pi_2 \circ i_2 = 1$ и $i_2 \circ i_1 = i$. ■

2. Доказательство теоремы. Пусть Φ – такой автоморфизм фактора, который осуществляет изоморфизм групп $\mathcal{U}_i(G)$, т.е. $\mathcal{U}_1 = \Phi \circ \mathcal{U}_2$. Обозначим через $\tilde{\mathcal{U}}_2$

регулярную подалгебру $\Phi(\mathcal{M}_2)$. Тогда $\mathcal{U}_1(g)\tilde{\mathcal{M}}_2\mathcal{U}_1^{-1}(g)=\tilde{\mathcal{M}}_2$. Таким образом, от четверки $(\mathfrak{A}, \mathcal{M}_2, G, \mathcal{U}_2)$ мы перешли к изоморфной четверке $(\mathfrak{A}, \tilde{\mathcal{M}}_2, G, \mathcal{U}_1)$, которая отличается от четверки $(\mathfrak{A}, \mathcal{M}_1, G, \mathcal{U}_1)$ лишь коммутативной подалгеброй.

Пусть H_1 и H_2 – спектры исходных динамических систем. Обозначим через $V_1(H_1)$ и $V_2(H_2)$ подгруппы собственных "функций" в $\mathcal{M}_1$ и $\tilde{\mathcal{M}}_2$ относительно действий в этих подалгебрах группы $\mathcal{U}_1(G)$ (напомним, что $\mathcal{M}_1$ изоморфна $L^\infty(\hat{H}_1)$, $\tilde{\mathcal{M}}_2$ изоморфна $L^\infty(\hat{H}_2)$, $V_i(h)$ соответствуют $\chi_h \in L^\infty(\hat{H}_i), h\in H_i, i=1,2$). Обозначим, наконец, через S_i систему $(\hat{H}_i, G, \alpha_i)$.

Рассмотрим соотношения

$$\mathcal{U}_1(g)V(h)\mathcal{U}_1(g^{-1}) = \lambda(g,h)V(h), \quad g\in G,\ h\in H,$$

вытекающие из определения дискретного спектра (здесь H одна из групп H_1, H_2; λ – бихарактер на $G\times H$)

Выбрав теперь произвольным образом последовательность образующих в G, H_1 и H_2, свяжем с ними, как это сделано в п.6 § 2, две аппроксимации фактора: $\mathcal{A}_n^{(i)} = R(\mathcal{U}_1(G_n), V_i(H_n^{(i)}))$, $i=1,2$; $n=1,2,\dots$. Алгебры $\mathcal{A}_n^{(i)}$ имеют структуру алгебр $\mathcal{A}(G_n, H_n^{(i)}, \lambda_i)$, определенных в п.4 §2, построенных по ограничению бихарактера λ_i в $G\times H_i$ на подгруппы $G_n\times H_n^{(i)}$.

Лемма 13. Пусть $\mathfrak{A}$ – фактор типа II_1, $\mathfrak{A}_0$ – слабо плотная $*$ – подалгебра в $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{A}_*$ плотна в $\mathfrak{A}$ также по следовой норме.

Доказательство следует из работы [16, с.270, лемма 1] и неравенства $\tau(|A|)^2 \le \tau(A^*A)$. ■

Пусть теперь $\mathcal{A}_{n_1}^{(1)}$ – произвольная алгебра из первой последовательности. Поскольку $\{\mathcal{A}_n^{(2)}\}$ – аппроксимация $\mathfrak{A}$, то по лемме 13 для заданного $\varepsilon>0$ и для какой-нибудь системы матричных единиц $\mathcal{A}_{n_1}^{(1)}$ найдется такой номер m_1, что в $\mathcal{A}_{m_1}^{(2)}$ присутствуют элементы, аппроксимирующие эти единицы в следовой норме с точностью до δ, где δ выбрано по ε и $\mathcal{A}_n^{(1)}$ так, как в лемме 11 об аппроксимации с отмеченной подгруппой, роль которой в нашем случае играет $\mathcal{U}_1(G_{n_1})$. Тогда, согласно этой лем-

ме, при $\varepsilon<\varepsilon_0(\mathcal{A}_n)$ найдется инъективный $*$ – гомоморфизм $\rho:\mathcal{A}_{n_1}^{(1)}\to\mathcal{A}_{m_1}^{(2)}$, при котором элементы группы $\mathcal{U}_1(G_{n_1})$ останутся на месте. Легко видеть, что ρ также сохраняет след.

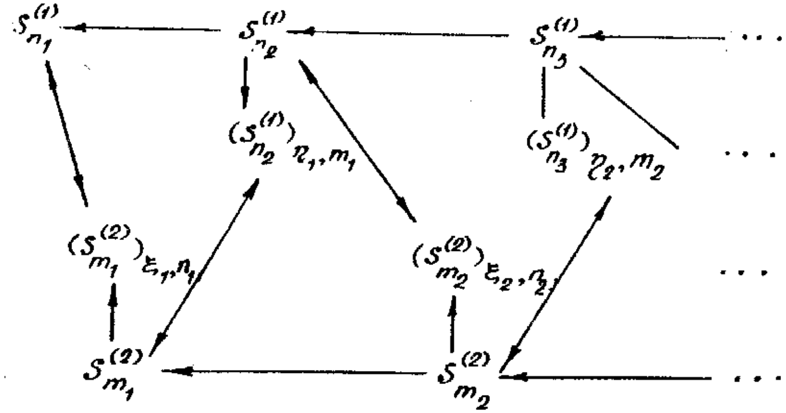
Как показывает лемма 3, динамическая система, порождающая $\mathcal{A}_{m_1}^{(2)}$, накрывает систему, порождающую $\mathcal{A}_{n_1}^{(1)}$ (с точки зрения динамики $\mathcal{A}_{n_1}^{(1)}$ и $\rho(\mathcal{A}_{n_1}^{(1)})$ одинаковы). Обозначим эти системы через $S_{n_1}^{(1)}$ и $S_{m_1}^{(2)}$, $S_{n_1}^{(1)}=(\hat{H}_1^{(1)}, G_{n_1}, \alpha_1)$, $S_{m_1}^{(2)}=(\hat{H}_{m_1}^{(2)}, G_{m_1}, \alpha_2)$, α_i – действия, определяемые λ_i. Накрытие означает, что существуют G_{n_1} – инвариантное разбиение ξ_1 в $\hat{H}_{m_1}^{(2)}$ и изоморфизм $\varphi_1:\hat{H}_{n_1}^{(1)}\to\hat{H}_{m_1}^{(2)}/\xi_1$. Будем для краткости обозначать фактор-подсистему $(\hat{H}_{m_1}^{(2)}/\xi_1, G_{n_1}, \alpha_2)$ через $(S_{m_1}^{(2)})_{\xi_1,n_1}$.

Совершенно аналогично для m_1 найдется n_2 со свойством: $S_{m_2}^{(2)}$ накрывается системой $S_{n_2}^{(1)}$. По лемме 12 разбиение η_1 пространства $\hat{H}_{n_2}^{(1)}$ и изоморфизм $\psi_1:\hat{H}_{m_1}^{(2)}\to\hat{H}_{n_2}^{(1)}/\eta_2$ можно подобрать так, чтобы стала коммутативной диаграмма

$$\begin{tikzcd}
S_{n_1}^{(1)} \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & S_{n_2}^{(1)} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[d, "\pi"'] \\
& (S_{m_2}^{(2)})_{\xi_1,n_1} & (S_{n_2}^{(1)})_{\eta_1,m_1} \\
& S_{m_2}^{(2)} \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\psi_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Далее для n_2 подберем m_2, ξ_2 в $\hat{H}_{m_2}^{(2)}$, $\varphi_2:S_{n_2}^{(1)}\to(S_{m_2}^{(2)})_{\xi_2,n_2}$ с тем условием, чтобы диаграмма, составленная из систем $S_{n_2}^{(1)}$, $(S_{n_2}^{(1)})_{\eta_1,m_1}$, $S_{m_1}^{(2)}$, $S_{m_2}^{(2)}$, $(S_{m_2}^{(2)})_{\xi_2,n_2}$ и гомоморфизмов ψ_1, φ_2, π, также была коммутативной, и так далее.

Из коммутативности построенной таким образом бесконечной диаграммы



следует, что согласованная система изоморфизмов φ_i устанавливает изоморфизм между S_1 и системой $\lim_{i\to\infty} (H^{(2)}_{m_i}/\xi_i, G_{n_i}, \alpha_i)$, которая является фактор-системой системы S_2. Симметричное рассуждение показывает, что S_2 изоморфна фактор-системе S_1, совпадающей с $\lim_{i\to\infty} pr\,(\tilde{H}^{(1)}_{n_{i+1}}/\eta_i, G_{m_i}, \alpha_1)$. Это означает, что S_1 и S_2 слабо изоморфны [17], что для систем с дискретным спектром приводит к их метрическому изоморфизму. ■

3. Следствие. Аппроксимация $\{\mathcal{A}_n\}$, связанная с системой S, может быть выбрана состоящей из факторов в том и только том случае, когда S изоморфна системе $S' = (\prod \mathbb{Z}_2, \sum \mathbb{Z}_2 \subset \prod \mathbb{Z}_2$, сдвиг).

Доказательство. Во-первых, для последней системы S' (стандартного сдвига) факторная аппроксимация существует (см.пример 1 п.7 § 2), так как действие G_n на $\hat{H}'_n$ свободно и транзитивно.

Во-вторых, для произвольной факторной аппроксимации $\{\tilde{\mathcal{A}}_n\}$, связанной с некоторой системой $\tilde{S} = (\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{U}}(G))$ и той же последовательностью $\{G_n\}$ ($\{\tilde{H}_n\}$ – любая), порядки факторов обязаны быть степенями двойки, и поэтому для всех $\tilde{\mathcal{A}}_n$ найдется изоморфный фактор $\mathcal{A}'_m$, причем изоморфизм φ_{nm} этих факторов может быть выбран с сохранением группы $\varphi_{nm}(\mathcal{U}'(g)) = \tilde{\mathcal{U}}(g)$, $g \in G_n$, независимо от пространственной близости (в смысле следовой нормы) $\tilde{\mathcal{A}}_n$ и $\tilde{\mathcal{A}}'_m$. Лемма 3 по-прежнему применима, и, следовательно, S' и $\tilde{S}$ изоморфны. ■

Пристатейный список использованной литературы

1. Вершик А.М. Счетные группы, близкие к конечным.– В кн.: Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М., 1973, с.112–135.
2. Вершик А.М. Возможна ли равномерная алгебраическая аппроксимация операторов умножения и сдвига?– Записки научных семинаров ЛОМИ, 1978, 81, с.77–81.
3. Халмош П.Р. Лекции по эргодической теории.– М.: Изд-во иностр.лит., 1959.– 147 с.
4. Кириллов А.А. Динамические системы, факторы и представления групп.– Успехи мат.наук, 1967, 22, вып.5, с. 67–80.
5. Макки Г. Эргодические преобразования групп с чисто дискретным спектром.– В кн.: Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф. Потоки на однородных пространствах. М. 1966, с.195–206.
6. Рохлин В.А. Унитарные кольца. – ДАН СССР, 1948, 59, 4, с. 643–649.
7. Von Neumann J. Collected works. v.III., On rings of operators. I,II,IV /with Murray F.J.//1936-1943/.-Oxford,1961, p.6-160, 229-321.
8. Dye H.A. On groups of measure preserving transformations. II.-Amer.J.Math., 1963, 85, N 4, pp. 551-576.
9. Dixmier J. Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini.- Ann.Math.,1954,59, N 2, pp. 279-286.
10. Connes A., Størmer E., Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras.- Acta Math., 1975, 134, N 3-4, pp. 289-306.

11. Glimm J.G. On a certain class of operator algebras. - Trans.Amer.Math.Soc., 1960, 95, N 2, pp. 318-340.

12. Powers R. Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings. - Ann. Math., 1967, 86., N 1, pp. 138-171.

13. Bratteli O. Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras. - Trans. Amer. Math.Soc., 1970, 149, N 2, pp. 601-625.

14. Лодкин А.А. Лемма об аппроксимации $*$- алгебр.- Записки научных семинаров ЛОМИ, 1974, 47, с. 175-178.

15. Davis Ch. Various averaging operations onto subalgebras. Ill. J.Math., 1959, 3, N 9, pp. 538-553.

16. Dixmier J. Les algebres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien. - Paris, 1957.- 368 c.

17. Синай Я.Г. Слабый изоморфизм преобразований с инвариантной мерой. - ДАН СССР, 1962, 147 № 4, с.797-800.