УДК 519.71

ПРИМЕНЕНИЕ MATLAB ДЛЯ ОЦЕНКИ ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МНОГОПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Соловьева И. В., Смирнов Н. В.
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
e-mail: isolovyeva@mail.ru

1 Введение

Многие задачи управления для различных классов динамических систем сводятся к задачам анализа устойчивости и стабилизации положений равновесия. Впервые задача многопрограммной стабилизации была поставлена В.И. Зубовым. В его работах [1, 2] рассмотрены задача определения правых частей систем дифференциальных уравнений, имеющих заданное конечное семейство решений, и задача синтеза управлений, реализующих заданный набор программных движений и обеспечивающих их асимптотическую устойчивость по Ляпунову. В [2] решена задача многопрограммной стабилизации для линейных стационарных управляемых систем в случае полной обратной связи.

В данной работе рассматривается метод построения многопрограммного управления и оценки области притяжения положений равновесия. В основе предложенного метода лежит идея построения одного общего управления в виде интерполяционного полинома специального вида, под действием которого, система реализует некоторое программное движение из заданного конечного набора. Здесь мы рассмотрим ситуацию, когда весь вектор состояний доступен для измерения. Для демонстрации этого метода выбрана система, положения равновесия которой могут быть рассмотрены как желаемые программные режимы.

2 Программные и многопрограммные управления

Рассмотрим задачу многопрограммного управления для системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_k = \left(p_k + \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x_j\right) x_k + u_k, \quad k = \overline{1,m}, \tag{1}$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{u},$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & p_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j} x_j x_1 \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{mj} x_j x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Пусть желаемые (заданные) положения равновесия $\mathbf{x}_i$, $i = \overline{1,n}$, для системы (1) обеспечиваются программными управлениями

$$\mathbf{u}_{p_i} = -\left(p_k + \sum_{j=1}^{m} a_{kj}x_j\right)\mathbf{x}_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Чтобы реализовать n выбранных положений равновесия построим многопрограммное управление [3]:

$$\mathbf{u}_{mp}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_{p_i} \prod_{j\neq i} \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_j)^2}{(\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j)^2}, \tag{2}$$

где под произведением $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2$ понимаем квадрат нормы вектора $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$. Многопрограммное управление (2) обладает очевидным свойством $\mathbf{u}_{mp}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}_{p_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Для каждого положения равновесия $\mathbf{x}_i, i = \overline{1,n}$ построим систему в отклонениях. Рассмотрим векторы $\mathbf{y}_s = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s$, $s = \overline{1,n}$, для них получим

$$\dot{\mathbf{y}}_s = \mathbf{P}(\mathbf{y}_s + \mathbf{x}_s) \ + \ \mathbf{E}\mathbf{u}_{mp}(\mathbf{y}_s + \mathbf{x}_s) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_s + \mathbf{x}_s) - (\mathbf{P}\mathbf{x}_s + \mathbf{E}\mathbf{u}_{mp}(\mathbf{x}_s) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_s)).$$

Поскольку, для программных управлений $\mathbf{u}_{p_s}$ выполнено $\mathbf{P}\mathbf{x}_s + \mathbf{E}\mathbf{u}_{p_s} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = 0$, то последняя система имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}}_s = \mathbf{P}(\mathbf{y}_s + \mathbf{x}_s) + \mathbf{E}\mathbf{u}_{mp}(\mathbf{y}_s + \mathbf{x}_s) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_s + \mathbf{x}_s). \tag{3}$$

Далее рассмотрим слагаемое $\mathbf{u}_{mp}(\mathbf{y}_s + \mathbf{x}_s)$ при $s = \overline{1,n}$:

$$\mathbf{u}_{mp}(\mathbf{y}_s + \mathbf{x}_s) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_{p_i} \quad \prod\nolimits_{j\neq i} \quad \frac{(\mathbf{x}_s + \mathbf{y}_s - \mathbf{x}_j)^2}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2} =$$

$$= \sum_{i=1, i\neq s}^{n} \mathbf{u}_{p_i} \frac{\mathbf{y_s^2}}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_s)^2} \prod_{j\neq i, j\neq s} \frac{(\mathbf{x}_s + \mathbf{y}_s - \mathbf{x}_j)^2}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2} \quad + \quad \mathbf{u}_{p_s} + 2\mathbf{u}_{p_s} \sum_{j=1, j\neq s}^{n} \frac{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)\mathbf{y}_s}{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)^2} +$$
$$+ \sum_{j\neq s, i\neq s} \frac{\mathbf{u}_{p_s}\mathbf{y}_s^2}{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)} + \ldots + \quad \mathbf{u}_s \quad \prod_{j\neq s, i\neq s} \frac{\mathbf{y}_s^2}{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)}. \tag{4}$$

Кроме того

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_s + \mathbf{y}_s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) + \mathbf{f}(\mathbf{y}_s) + \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j} y_{s_j} x_{s_1} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{mj} y_{s_j} x_{s_m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j} y_{s_1} x_{s_j} \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{mj} y_{s_m} x_{s_j} \end{pmatrix}.$$

Используя (3), (4) и основное свойство программных управлений $\mathbf{u}_{p_s}$:

$$\mathbf{P}\mathbf{x}_s + \mathbf{E}\mathbf{u}_{p_s} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = 0,$$

получим систему в отклонениях в окончательной форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_s \quad = \quad & \left(\tilde{\mathbf{P}} + 2\mathbf{E}\mathbf{u}_{p_s} \sum_{j=1, j\neq s}^{n} \frac{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)^T}{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)^2}\right)\mathbf{y}_s + \mathbf{E}\left(\sum_{i=1, i\neq s}^{n} \mathbf{u}_{p_i} \frac{\mathbf{y_s^2}}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_s)^2} \prod_{j\neq i, j\neq s} \frac{(\mathbf{x}_s + \mathbf{y}_s - \mathbf{x}_j)^2}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2}\right. \\ & + \left. \sum_{j\neq s, i\neq s} \frac{\mathbf{u}_{p_s}\mathbf{y}_s^2}{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)} + \ldots + \mathbf{u}_s \prod_{j\neq s, i\neq s} \frac{\mathbf{y}_s^2}{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_i)(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)}\right) + \mathbf{f}(\mathbf{y_s}), \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_1 + a_{11}x_{s_1} + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{1j}x_{s_j} & \dots & a_{1m}x_{s_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_{s_m} & \dots & p_m + a_{mm}x_{s_m} + \sum\limits_{j=1}^{m} a_{mj}x_{s_j} \end{pmatrix}.$$

3 Оценка области притяжения для желаемых положений равновесия

В случае, если нулевые решения систем в отклонениях (5) асимптотически устойчивы, можно поставить задачу об исследовании области притяжения. Оценку области притяжения для каждого из n желаемых положений равновесия в задаче многопрограммного управления будем строить используя метод Зубова [4], [5]. В предположении, что системы линейного приближения асимптотически устойчивы, найдем две квадратичные формы $\mathbf{V}(\mathbf{y}_s) = \mathbf{y}_s^T\mathbf{Q}\mathbf{y}_s$ и $\mathbf{W}(\mathbf{y}_s) = \mathbf{y}_s^T\mathbf{R}\mathbf{y}_s$, матрицы которых удовлетворяют уравнению Ляпунова. На множестве $M = \{\mathbf{y}_s \,|\, \frac{d\mathbf{V}}{dt}\,\Big|_{(5)} = 0\}$ найдем $\lambda_{min} = \inf\limits_{\mathbf{y}_s \in M} \mathbf{V}(\mathbf{y}_s)$. Оценку области приближения для положения равновесия $\mathbf{x}_s$ опишет неравенство $\mathbf{V}(\mathbf{y}_s) < \lambda_{min}$.

4 Пример

Рассмотрим систему (1) и два желаемых положения равновесия $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Система в отклонениях для каждого положения $\mathbf{x}_i, i = \overline{1,2}$ имеет вид

$$\dot{\mathbf{y}}_s = \left(\tilde{\mathbf{P}} + 2\mathbf{E}\mathbf{u}_{p_s}\sum_{j=1, j\neq s}^{2} \frac{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)^T}{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)^2}\right)\mathbf{y}_s + \mathbf{E}\sum_{i=1, i\neq s}^{n} \mathbf{u}_{p_i}\frac{\mathbf{y_s^2}}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_s)^2} + \mathbf{f}(\mathbf{y_s}). \tag{6}$$

Пусть система линейного приближения $\dot{\mathbf{y}}_s = \widehat{\mathbf{P}}\mathbf{y}_s$ асимптотически устойчива. Найдем две положительно определенные квадратичные формы $\mathbf{V}(\mathbf{y}_s) = \mathbf{y}_s^T\mathbf{Q}\mathbf{y}_s$ и $\mathbf{W}(\mathbf{y}_s) = \mathbf{y}_s^T\mathbf{R}\mathbf{y}_s$, матрицы которых удовлетворяют уравнению Ляпунова $\widehat{\mathbf{P}}^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\widehat{\mathbf{P}} = -\mathbf{R}$, где

$$\widehat{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}} + 2\mathbf{E}\mathbf{u}_{p_s}\sum_{j=1, j\neq s}^{2} \frac{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)^T}{(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)^2}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}.$$

Решив уравнение Ляпунова, определим элементы матрицы $\mathbf{Q}$:

$$q_{12} = \frac{\widehat{p}_{12}\widehat{p}_{21}r_{12} - \widehat{p}_{12}\widehat{p}_{21}r_{21} + \widehat{p}_{12}\widehat{p}_{22}r_{11} + \widehat{p}_{11}\widehat{p}_{21}r_{22} - 2\widehat{p}_{11}\widehat{p}_{22}r_{12}}{2(\widehat{p}_{11} + \widehat{p}_{22})(\widehat{p}_{11}\widehat{p}_{22} - \widehat{p}_{12}\widehat{p}_{21})},$$

$$q_{21} = \frac{r_{12} - r_{21}}{\widehat{p}_{11} + \widehat{p}_{22}} + q_{12}, \quad q_{11} = \frac{1}{2\widehat{p}_{11}}\left(-r_{11} - 2\widehat{p}_{21}q_{12} - \widehat{p}_{21}\frac{r_{12} - r_{21}}{\widehat{p}_{11} + \widehat{p}_{22}}\right),$$

$$q_{22} = \frac{1}{2\widehat{p}_{22}}\left(-r_{22} - 2\widehat{p}_{12}q_{12} - \widehat{p}_{12}\frac{r_{12} - r_{21}}{\widehat{p}_{11} + \widehat{p}_{22}}\right).$$

Тогда, $\mathbf{V}(\mathbf{y}_s) = q_{11}y_{s_1}^2 + q_{12}y_{s_1}y_{s_2} + q_{21}y_{s_1}y_{s_2} + q_{22}y_{s_2}^2$. Ее полная производная в силу системы (6) имеет вид

$$\left.\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right|_{(6)} = 2q_{11}y_{s_1}\dot{y}_{s_1} + (q_{12}+q_{21})y_{s_1}\dot{y}_{s_2} +$$

$$\left. + (q_{12}+q_{21})y_{s_2}\dot{y}_{s_1} + 2q_{22}y_{s_2}\dot{y}_{s_2}\right|_{(6)} = F(\mathbf{y}_s).$$

На множестве

$$M = \{\mathbf{y}_s \,|\, F(\mathbf{y}_s) = 0\} \tag{7}$$

найдем локальный минимум функции $\mathbf{L}(\mathbf{y}_s, \lambda) = \mathbf{V}(\mathbf{y}_s) + \lambda F(\mathbf{y}_s)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_{s_1}} &= 2q_{11}y_{s_1} + 2q_{12}y_{s_2} + \lambda\frac{\partial F(\mathbf{y}_s)}{\partial y_{s_1}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y_{s_2}} &= 2q_{12}y_{s_1} + 2q_{22}y_{s_2} + \lambda\frac{\partial F(\mathbf{y}_s)}{\partial y_{s_2}} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= F(\mathbf{y}_s) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Параметр λ можно легко исключить из системы (8), а затем решить систему из оставшихся двух уравнений используя теорию исключения [6]. Пусть λ_k – найденные таким образом решения системы (8). Обозначим

$$\lambda_{min} = \min_k \lambda_k.$$

Тогда следующее неравенство

$$\mathbf{V}(\mathbf{y}_s) < \lambda_{min}$$

описывает оценку области притяжения для одного из двух желаемых положений равновесия.

Алгоритм построения оценки области притяжения для числовых примеров с параметрами $n = 2$, $m = 2$ реализован в среде Matlab. На рисунках приведены результаты работы программы, для примера с входными параметрами $n = 2$, $m = 2$, $p_1 = -3$, $p_2 = -1$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 0$ и желаемыми положениями равновесия $\mathbf{x}_1 = (0.5, 1.3)$, $\mathbf{x}_2 = (1.2, 0.3)$. На Рис. 1. и Рис. 2. изображены оценки областей притяжения одного из двух положений равновесия и кривые $F(\mathbf{x}) = 0$. На каждом рисунке приведены результаты, полученные при разных значениях матрицы $\mathbf{R}$. На Рис. 3. изображены оценки областей притяжения для двух положений равновесия в задаче многопрограммного управления.

5 *Заключение*

Оценки области асимптотической устойчивости получены в предположении, что системы линейного приближения асимптотически устойчивы. В случае, если системы линейного приближения не являются асимптотически устойчивыми можно поставить задачу построения стабилизирующего управления.

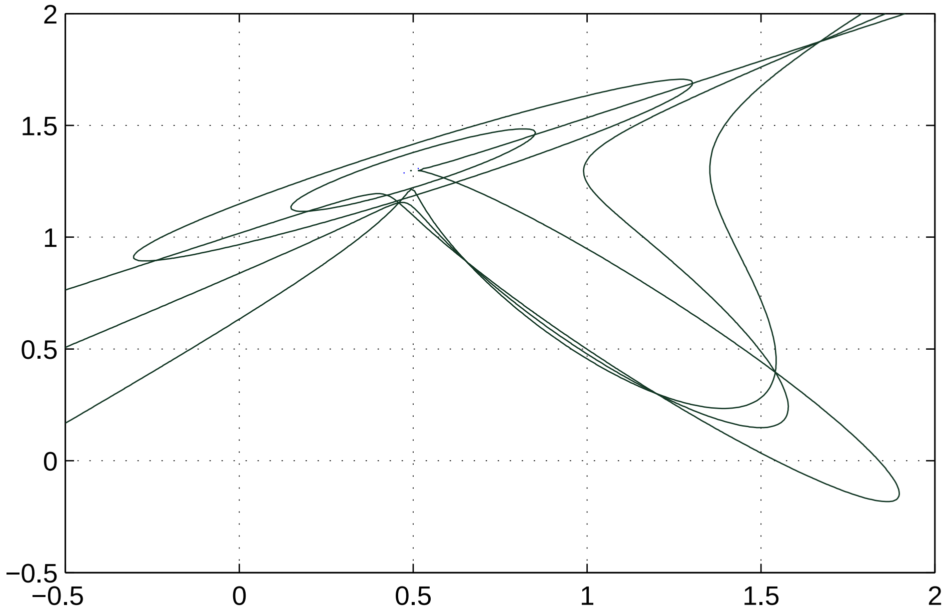

Рис. 1: Оценка области притяжения для первого положения равновесия.

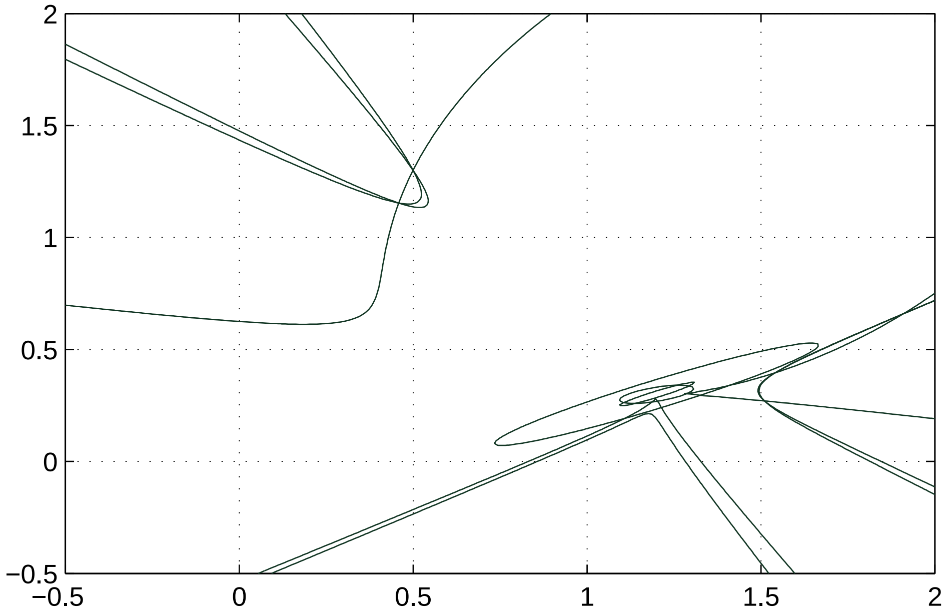

Рис. 2: Оценка области притяжения для второго положения равновесия.

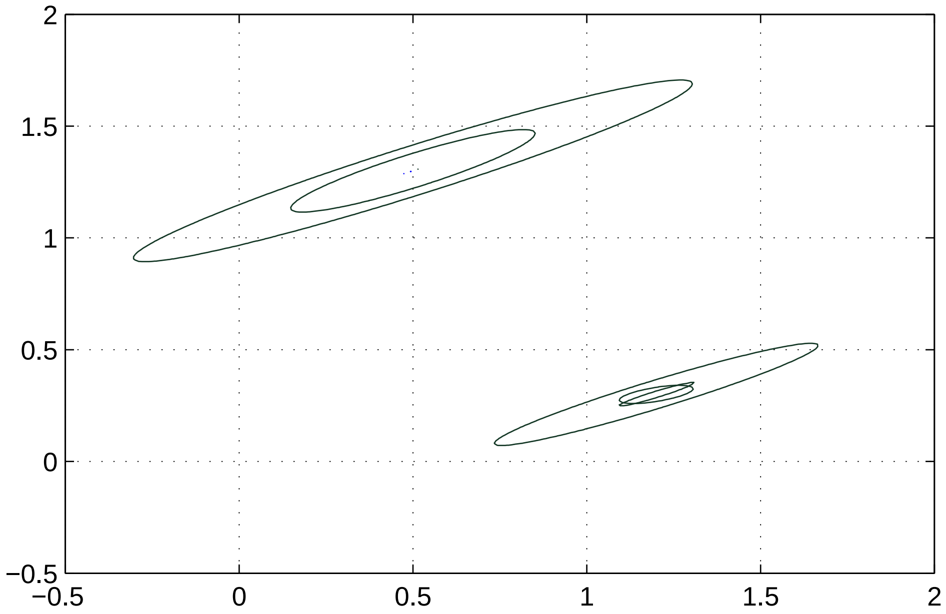

Рис. 3: Оценки областей притяжения для двух положений равновесия в задаче многопрограммного управления.

Пусть $T = [t_*, t^*],\ h = (t_* - t^*)/N,\ t_* < t^* < +\infty$, функцию $u(t),\ t \in T$ определим как дискретное управление, если $u(t) = u(t_* + kh)$, $t \in [t_* + kh,\ t_* + (k+1)h)$, $k = \overline{1, N-1}$. Рассмотрим задачу [7] поиска позиционного управления в классе дискретных управлений

$$B_\tau(\mathbf{z}) = \min_u \int\limits_{t_*}^{t^*} \mid u(t) \mid dt, \tag{9}$$

$$\dot{\mathbf{y}}_s = \widehat{\mathbf{P}}\mathbf{y}_s + \mathbf{l}u, \quad \mathbf{l} \in \mathbf{R}^m, \quad l_k = 1, \quad k = \overline{1, m}, \tag{10}$$

$$\mathbf{y}_s(\tau) = \mathbf{z}, \quad \mathbf{y}_s(t^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u(t)| \le L, \quad t \in T = [t_*, t^*]. \tag{11}$$

Пусть

$$u^*(\tau, \mathbf{z}) = u^*(\tau \mid \tau, \mathbf{z}) \tag{12}$$

есть оптимальное программное управление в задаче (9) – (11) для позиции $(\tau, \mathbf{z})$. При этом $\mathbf{Y}_s(\tau)$ – набор начальных состояний $\mathbf{z}$, для которых задача (9) – (11) имеет решение при фиксированном τ, $\mathbf{z} = \mathbf{y}_s(\tau) \in \mathbf{Y}_s(\tau)$, $t \in T(\tau) = [\tau, t^*]$. Функция (12) называется оптимальным управлением типа обратной связи для задачи (9) – (11). Для решения этой задачи можно применить метод позиционной оптимизации [7].

После того, как стабилизирующее управление построено, можно вновь перейти к задаче оценки области асимптотической устойчивости по описанной выше методике.

Литература

1. *Зубов В. И. Итерполяция систем дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР Т. 318. 1991. № 1. С. 28–31.*

2. *Зубов В. И. Синтез многопрограммных устойчивых управлений // Доклады АН СССР. Т. 318. 1991. № 2. С. 274–277.*

3. *Смирнов Н.В., Смирнова Т.Е. Многопрограммные управления в одном классе социально-экономических моделей // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды 13-й межвузовской конференции Ч.3. – Самара: СамГТУ, 2003. С.152–155.*

4. *Кирин Н. Е., Нелепин Р. А., Байдаев В. Н. Построение области притяжения по методу Зубова // Диф. уравнения. Т. XVII. 1981. № 8. С. 1347-1361.*

5. *Александров А. Ю., Александрова В. М., Екимов А. В., Смирнов Н. В. Сборник задач и упражнений по теории устойчивости. СПб, 2005. 164 с.*

6. *Калинина Е. А., Утешев А. Ю. Теория исключения. Учебное пособие. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. 72 с.*

7. *Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф. М. Численные методы программной и позиционной оптимизации для линейных систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. Вып. 40. 2000. № 6. С. 838–859.*