О построении ε-траектории,проходящей через две заданные точки

Н. Б. Ампилова, А. В. Гомера

1 Введение

Динамические системы являются одним из основных инструментов моделирования многих реальных процессов. При этом численные методы моделирования систем со сложным поведением траекторий являются неотъемлемой частью исследования. Они позволяют получить такие важные характеристики системы как инвариантные множества, периодические орбиты, энтропию.

Пусть M — подмножество q-мерного пространства R^q, Z — множество целых чисел и R — множество вещественных. Динамической системой называется непрерывное отображение $\Phi(x,t)$, где $x \in M$, $t \in Z$ (или $t \in R$), такое, что

$\Phi : M \times Z \to M$ (или $\Phi : M \times R \to M$),

$$\begin{aligned} \Phi(x,0) &= x, \\ \Phi(\Phi(x,t),s) &= \Phi(x,t+s), \end{aligned}$$

где t, s принадлежат Z (или R). Переменная t трактуется как время, а многообразие M называется фазовым пространством. Если $t \in Z$, то мы получаем дискретную динамическую систему, в случае, когда $t \in R$, мы имеем дело с непрерывной динамической системой.

Пусть $f : M \to M$ — гомеоморфизм. Тогда f порождает дискретную динамическую систему вида $\Phi(x,n) = f^n(x)$, $n \in Z$.

Траекторией (или орбитой) начальной точки x_0 называется бесконечная в обе стороны последовательность

$$T(x_0) = \{x_k = f^k(x_0),\ k \in Z\}.$$

Поскольку точные траектории системы не всегда могут быть найдены, вводится понятие ε-траектории.

Определение 1. *[1] Бесконечная в обе стороны последовательность точек $\{x_i, -\infty < i < +\infty\}$ называется ε-траекторией (или псевдотраекторией), если расстояние между образом $f(x_i)$ и x_{i+1} меньше чем ε:*

$$\rho(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$$

для любого i. Если при этом последовательность $\{x_i\}$ является периодической, то она называется периодической ε-траекторией, а точки x_i называются ε-периодическими. Если надо указать период p, то мы будем говорить о (p,ε)-периодической траектории.

Нетрудно заметить, что любая точная траектория является ε-траекторией для $\varepsilon = 0$.

2 Постановка задачи

Пусть задана динамическая система f, точки x^*, x^{**}. Определить, существует ли ε-траектория, проходящая через заданные точки.

Решим сначала несколько видоизмененную задачу: при тех же исходных данных определить существует ли ε-траектория, проходящая через точку x^* вблизи точки x^{**}.

Для этого построим траекторию точки x^*, т.е последовательность x_k такую, что $x_{k+1} = f(x_k), x_0 = x^*, k = 1, 2, \ldots$. Если существует такое число N, что $f(x_N) = x^{**}$, то мы построили точную траекторию точки x^*, проходящую через точку x^{**}. Она является ε-траекторией для $\forall\varepsilon > 0$.

Если же существует такое число N, что $\rho(f(x_N), x^{**}) < \varepsilon$, то мы построили точную траекторию точки x^*, проходящую вблизи точки x^{**}. Она является ε-траекторией с заданным ε в силу последнего неравенства.

В этой задаче ε и N являются параметрами. Число шагов зависит от выбора малого числа ε. Параметры выбираются экспериментально. Ограничение на N вводится в зависимости от системы. Если за максимальное число шагов траектория не построена, значит при заданном ε это невозможно.

Теперь вернемся к первой задаче и подправим нашу траекторию так, чтобы она проходила через точку x^{**}. Для этого рассмотрим прообраз точки x^{**}. Если он состоит из одной точки, то положим $x'_N = f^{-1}(x^{**})$ и в качестве искомой ε-траектории рассмотрим уже построенную, где x_N заменено на x'_N. Поскольку $|f(x_{N-1} - x'_N| = |f(x_{N-1} - x_N + x_N - x'_N| \leq |f(x_{N-1} - x_N| + |x_N - x'_N|$ и $|f(x_{N-1} - x_N| = 0$ по построению траектории, то оценка зависит от второго слагаемого. Положим $|x_N - x'_N| = \delta$. Если $\delta < \varepsilon$, то мы построили искомую траекторию с заданным ε. В противном случае мы построили δ-траекторию.

Если прообраз состоит из нескольких точек, то можно выбрать любую в качестве x'_N.

3 Построение близких траекторий

Возьмем построенную ε-траекторию $\{x_i\}$ и образуем из нее $\{x'_i\}$ следующим образом: $x'_0 = x^*, x'_k = x_k + \varepsilon, k = 1, \ldots, N; x'_{N+1} = x^{**}$. Для точек этой последовательности (при $k = 1, \ldots, N-1$) верно следующее:

$$|f(x'_k) - x'_{k+1}| = |f(x_k + \varepsilon) - f(x_k) + f(x_k) - x_{k+1} - \varepsilon| \leq |f(x_k + \varepsilon) - f(x_k)| + |f(x_k) - x_{k+1}| + \varepsilon.$$

Первое слагаемое можно оценить через производную функции f в некоторой точке x_k^0, второе слагаемое равно 0. Таким образом, полученная траектория будет δ-траекторией с $\delta = \max_{k=1,N-1} f'(x_k^0)(\varepsilon + 1)$.

4 Реализация

Алгоритм реализован на языке C#, в среде Visual Studio 2005 и тестировался на двух моделях: а) Система Windows XP SP2, процессор Intel Pentium III, 128 МБ ОП; б) Система Windows XP SP2, процессор Intel Pentium IV, 1ГБ ОП.

При запуске программы выбирается нужный вид динамической системы (дискретная или непрерывная). Далее в ниспадающем списке выбирается файл задания системы. При вычислении правых частей используются библиотеки из [2], которые включают в себя средства для представления функций системы в виде дерева разбора выражений.

В рабочем окне задаются числа N и ε, координаты точек x^*, x^{**} и границы области построения. Число шагов (значение N) можно задавать максимально равным 1000000 (наибольшее использованное — 500000). Такое большое число шагов не дает ощутимых преимуществ при решении, например для отображения Хенона достаточно задать $N = 10000$. Чаще всего при тестировании мы использовали значения N в промежутке от 500 до 10000. Для ε не представляют интереса значения большие 0.5, и редко требуется точность такая, что ε меньше 0.0005. Мы ограничивались значением $\varepsilon = 0.05$.

Пример 1. *Рассмотрим отображение Хенона*

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + y - ax^2, \\ y_1 &= bx. \end{aligned}$$

Известно, что при $a = 1.4, b = 0.3$ *у динамической системы, порождаемой описанным отображением, в области [-1.5,1.5] x [-1.5,1.5] существует странный аттрактор, на котором динамика системы является хаотичной [1]. При выбранных значениях параметров у системы существуют две неподвижные седловые точки*

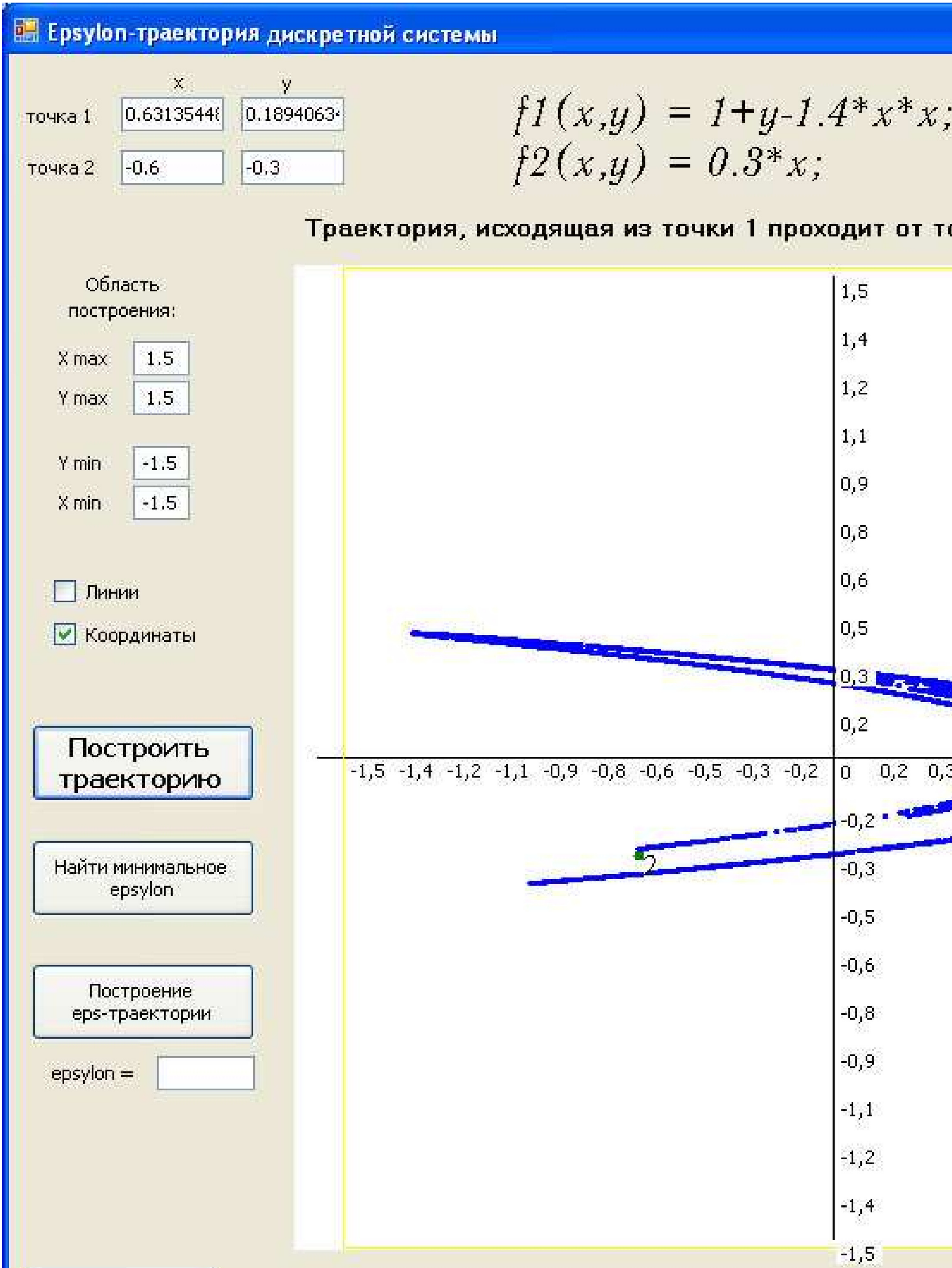
$x_1 = 0.63135448, y_1 = 0.18940634$ *и* $x_2 = -1.1313545, y_2 = -0.3394063$. *Динамика системы определяется поведением инвариантных многообразий (устойчивых и неустойчивых сепаратрис) этих точек. Как показано в [3], существует трансверсальная гомоклиническая точка, что приводит в сложному поведению траекторий. Выберем в качестве* $x^* = (0.631, 0.18)$, *а в качестве* $x_{**} = (-0.6, -0.3)$. *При* $\varepsilon = 0.05$ *существует искомая траектория (рис.1). Такую траекторию не удается построить для* $x_{**} = (-1.13, -0.33)$ *(рис.2).*

Список литературы

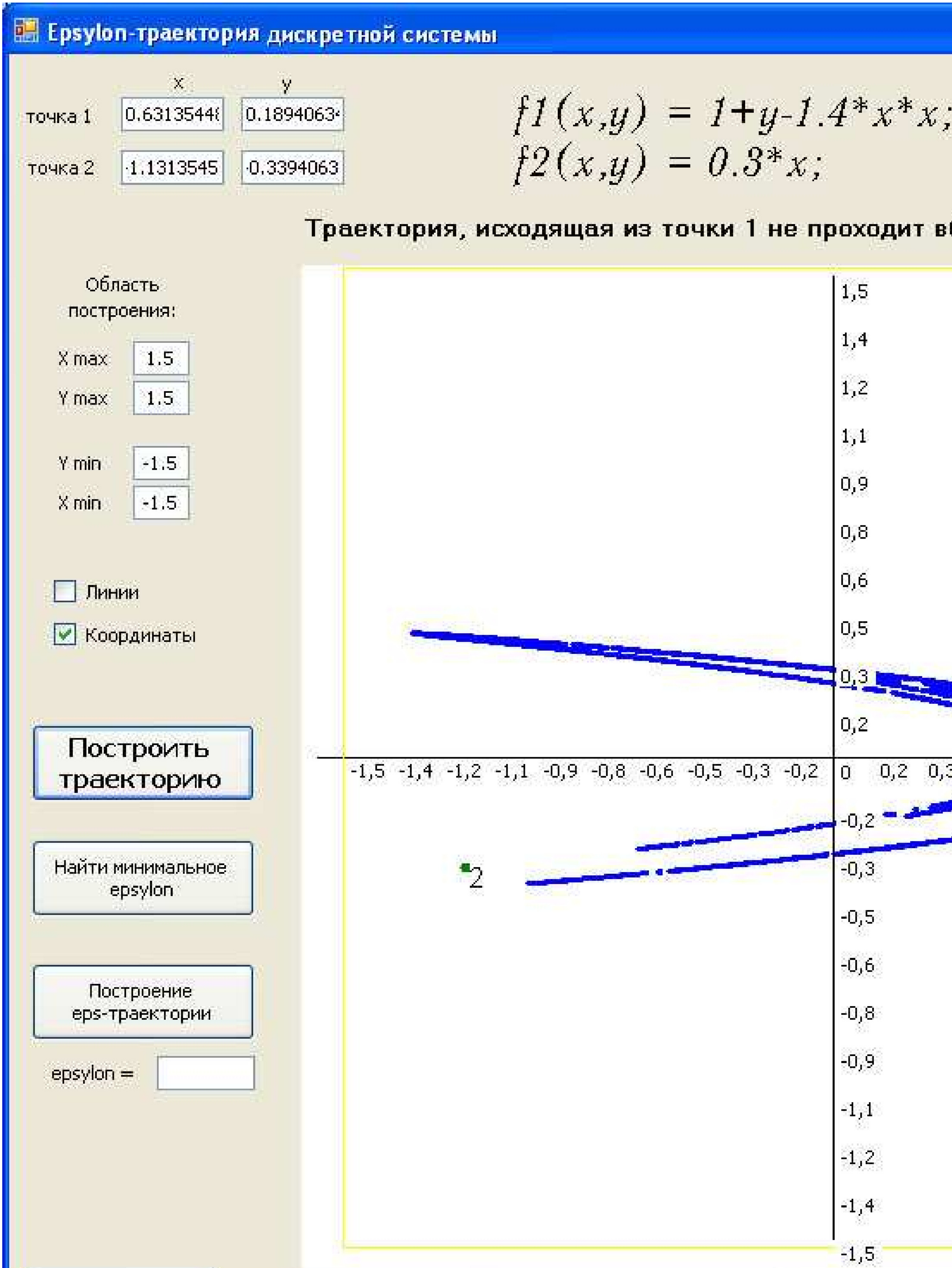
[1] Г.С. Осипенко, Н.Б. Ампилова. *Введение в символический анализ динамических систем.* изд. СПбГУ, 2005.

[2] С.В.Терентьев. *Разработка программного комплекса для компьютерного моделирования физических процессов.* (готовится к печати)

[3] M.Misiurewicz,B.Szewc. *Existence of a Homoclinic Point for the Henon Map.* Comm.Math.Phys.75,285-291(1980).



Epsylon-траектория дискретной системы
x
y
точка 1
0.6313544(
0.1894063
точка 2
-0.6
-0.3
f1(x,y) = 1+y-1.4*x*x;
f2(x,y) = 0.3*x;
Траектория, исходящая из точки 1 проходит от то
Область построения:
X max
1.5
Y max
1.5
Y min
-1.5
X min
-1.5
Линии
Координаты
Построить траекторию
Найти минимальное epsylon
Построение eps-траектории
epsylon =
1,5
1,4
1,2
1,1
0,9
0,8
0,6
0,5
0,3
0,2
0
-0,2
-0,3
-0,5
-0,6
-0,8
-0,9
-1,1
-1,2
-1,4
-1,5
-1,5 -1,4 -1,2 -1,1 -0,9 -0,8 -0,6 -0,5 -0,3 -0,2 0 0,2
2


Epsylon-траектория дискретной системы
x
y
точка 1
0.6313544(
0.1894063·
точка 2
·1.1313545
·0.3394063
f1(x,y) = 1+y-1.4*x*x;
f2(x,y) = 0.3*x;
Траектория, исходящая из точки 1 не проходит в
Область построения:
X max
1.5
Y max
1.5
Y min
-1.5
X min
-1.5
Линии
Координаты
Построить траекторию
Найти минимальное epsylon
Построение eps-траектории
epsylon =
1,5
1,4
1,2
1,1
0,9
0,8
0,6
0,5
0,3
0,2
-1,5 -1,4 -1,2 -1,1 -0,9 -0,8 -0,6 -0,5 -0,3 -0,2 0 0,2
-0,2
-0,3
2
-0,5
-0,6
-0,8
-0,9
-1,1
-1,2
-1,4
-1,5