САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Р.Букаты, И.С.Зорин, Н.Ю.Кропачева,
М.С.Матвеева, В.Ю.Сахаров, Н.Б.Шепелявая

Основы интегрального исчисления в вопросах и ответах

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2023

*Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики
в качестве учебного пособия
для студентов нематематических и естественных факультетов*

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат физ.-мат. наук, доцент *Павилайнен Г.В.* (СПбГУ)
кандидат физ.-мат. наук, доцент *Утина Н.В.* (СПбГАСУ)

*Печатается по рекомендации к опубликованию
Учебно-методической комиссии
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Букаты В.Р., Зорин И.С., Кропачева Н.Ю., Матвеева М.С., Сахаров В.Ю., Шепелявая Н.Б. Основы интегрального исчисления в вопросах и ответах. Учебное пособие; Под ред. В.Ю. Сахарова — СПб.: С.-Петерб. ун-т, 2023 — 50 с.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям “Экономика”, “Экономика (с углубленным изучением экономики Китая и китайского языка)”, “Управление персоналом”, “Экономика (Экономико-математические методы)”, “Бизнес-информатика”, “Менеджмент”, “Государственное и муниципальное управление”, “Социология”, “Социологические исследования в цифровом обществе”, “Химия”, “Химическое материаловедение”, “Общая и прикладная фонетика”, “Геология”, “География”, “Картография и геоинформатика”, “Гидрометрология”, “Экология и природопользование”, “Биология”, “Почвоведение”, “Нефтегразовое дело”, “Кадастр недвижимости: оценка и информационное обеспечение”, “Биоинформатика”, “Биология: биоинженерные технологии”.

В пособии рассматривается тема “Интегралы” из дисциплины “Математический анализ” или “Высшая математика”. Пособие основано исключительно на тех вопросах, которые задавались студентами экономического факультета СПбГУ на консультациях. Приведенные в пособии решения и объяснения иногда могут показаться слишком подробными, но ведь, если обучающимся этот материал оказался непонятен “с первого раза”, то, естественно, отвечать приходится не только повторяя фрагмент лекции или практического занятия, а и комментируя его с разных сторон.

Настоящее пособие может быть полезно для студентов, изучающих общий курс высшей математики самостоятельно.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4
Глава I. Неопределенные интегралы 5
Глава II. Определенные интегралы 22
Глава III. Несобственные интегралы 35
Задания на самостоятельную работу 39
Литература 50

Предисловие

Данное пособие создано на основе некоторой части годового курса “Адаптационная математика”, введенного в учебную программу экономического факультета СПбГУ по инициативе $\boxed{\text{О.А.Иванова}}$ и П.К.Черняева. В настоящее время подобные занятия организованы и в институте химии. Изначально планировалось, что эта дисциплина призвана ликвидировать пробел в знаниях современных студентов, возникший в средней школе, а их уровень поднять до того, который имели их сверстники 30 лет назад. Но в процессе работы оказалось, что у студентов возникает большое количество вопросов и по текущему материалу тоже. Эти вопросы были собраны и отсортированы по темам. Иногда читателю будет казаться, что вопросы слишком простые и их не следовало обсуждать в книге. Если эти вопросы все-таки были заданы, то это значит, что существуют студенты, которые либо действительно не знали, как решить такую простую задачу, либо хотели убедиться в правильности своих знаний.

Пособие написано в жанре диалога студента, пришедшего на консультацию, и дежурного преподавателя. Иногда, для полного ответа на вопрос, преподаватель, желая показать обучающемуся проблему с разных сторон, придумывал свой пример. Некоторые задачи оказались слишком громоздкими. При изложении в учебном пособии они разделены на серии вопросов.

Авторы выражают благодарность рецензентам за внимательное отношение к рукописи и ряд полезных замечаний.

Глава I. Неопределенные интегралы

Рассмотрим непрерывные функции, определенные на промежутке, который может как содержать концы промежутка, так и не содержать их. Обозначим этот промежуток $\langle a, b \rangle$.

Вопрос 1.1. *Какая разница между понятиями «первообразная» и «неопределенный интеграл»?*

Каждая непрерывная функция $f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, имеет первообразную $F(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$, которая определяется равенством:

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx$$

В отличие от производной функции, которая (если она существует) единственна, первообразных у данной функции бесконечное множество, причем все они отличаются друг от друга на постоянные величины. Совокупность всех первообразных данной функции имеет вид $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Множество этих функций обозначается $\int f(x)dx$ и называется неопределенным интегралом функции $f(x)$.

Таким образом, $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – какая-либо из первообразных.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а «произведение» $f(x)dx$ подынтегральным выражением. Учитывая, что дифференциал dx может быть воспринят, как сомножитель, при записи интеграла от дроби его даже пишут в числителе, например: $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

На первый взгляд кажется, что множитель dx не несет дополнительной информации и просто является признаком конца записи. Это не совсем так. Если переменных в функции несколько, то он показывает по какой именно из переменных ведется интегрирование. Наличие дифференциала удобно для выполнения подстановок (см. ниже) и интегрировании по частям. И наконец, это исторически сложившееся обозначение приобретает геометрический смысл для определенного интеграла (см. следующую главу).

В теме «дифференциальное исчисление» доказывается свойство линейности производной:

$$\big(\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)\big)' = \alpha_1 f_1{}'(x) + \ldots + \alpha_n f_n{}'(x),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – постоянные.

Отсюда вытекает свойство линейности неопределенного интеграла

$$\int \big(\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)\big) dx = \alpha_1 \int f_1(x)\, dx + \ldots + \alpha_n \int f_n(x)\, dx.$$

Основная задача: для данной функции $f(x)$ найти неопределенный интеграл. Принято говорить, что интеграл берется, если первообразные могут быть записаны с помощью элементарных функций.

Утверждение, что интеграл «не берется», означает, что он не выражается через элементарные функции.

Например, $\int \frac{e^x}{x}\, dx$, $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$, $\int \frac{\cos x}{x}\, dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int e^{\operatorname{arctg} x} dx$, $\int e^{x^2} dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, $\int \sqrt[3]{x^2+1}\, dx$, $\int \sqrt{\sin x}\, dx$, $\int \ln \sin x\, dx$ не берутся.

Вопрос 1.2. *Какие интегралы называют табличными?*

Табличными называют те неопределённые интегралы, которые непосредственно (или с помощью линейных преобразований) следуют из таблицы производных основных элементарный функций. То есть табличные интегралы это не интегралы от основных элементарных функций, а интегралы, приводящие к основным элементарным функциям. Рассмотрим таблицу основных интегралов:

I. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ $(n \neq -1)$, отметим, что n – вещественное число.

В частности, $\int dx = x + C$.

II. $\int x^{-1} dx = \ln |x| + C$, $x \neq 0$.

Замечание. Так как мы рассматриваем функции, заданные на промежутках, то эту формулу следует рассматривать как краткую запись двух равенств

$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$, $(x > 0)$ и $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(-x) + C$, $(x < 0)$

III. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

IV. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

V. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$

VI. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$

VII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,,$ где $a > 0$ и $a \neq 1$

VIII. $\int e^x dx = e^x + C$

Целесообразно таблицу интегралов дополнить следующими формулами

IX. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$

X. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$

XI. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \operatorname{th} x + C$

XII. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = -\operatorname{cth} x + C$

XIII. $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C\,,$ где $a \neq 0$

XIV. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C\,,$ где $a \neq 0$

XV. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C\,,$ где $a > 0$

XVI. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C\,,$ где $a \neq 0$

XVII. $\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$

XVIII. $\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$

XIX. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln |\cos x| + C$

XX. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln |\sin x| + C$

Используя таблицу неопределённых интегралов и формулу (свойство линейности неопределенного интеграла)

$$\int \big(\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)\big) dx = \alpha_1 \int f_1(x)\, dx + \ldots + \alpha_n \int f_n(x)\, dx,$$

можно находить неопределенные интегралы в простейших случаях. Например, рассмотрим многочлен

$$f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_0\,.$$

Имеем:

$$\int f(x)\, dx = \alpha_n \int x^n dx + \ldots + \alpha_0 \int dx = \alpha_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots + \alpha_0 x + C\,.$$

Полезно выучить, что, если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C}$. Этот факт можно проверить дифференцированием результата:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = \frac{1}{a}\big(F(ax+b)\big)' + C' = \frac{1}{a}\cdot f(ax+b)\cdot(ax+b)' + 0 = \frac{1}{a}\cdot f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)\,.$$

Получилась подынтегральная функция, что и доказывает справедливость формулы.

Пример 1.1. $\int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cdot\cos 3x + C$.

Выведем формулы XIII и XV таблицы интегралов.

Пример 1.2. Пусть $a \neq 0$.

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{a}\cdot x\right)^2+1\right)}\,dx = \frac{1}{a^2\cdot\frac{1}{a}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\cdot x\right) + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Пример 1.3. Пусть $a > 0$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\cdot x\right)^2}}\,dx = \frac{1}{a\cdot\frac{1}{a}}\arcsin\left(\frac{1}{a}\cdot x\right) + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Вопрос 1.3. *Как вычислять интегралы в более сложных случаях?*

Первая идея это выполнить замену переменных (подстановку), приводящую интеграл к виду, для которого можно использовать непосредственное интегрирование, как в приведенном выше примере.

Подстановки бывают двух типов: на новую переменную можно заменить некоторую функцию или наоборот, переменную интегрирования можно заменить на некотрую функцию от новой переменной.

Рассмотрим подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – строго монотонная дифференцируемая функция.

Так как $dx = \varphi'(t)dt$, то

$$I = \int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int g\,(t)\,dt.$$

Если этот интеграл удается найти, то есть $\int g\,(t)\,dt = G\,(t) + C$, то $I = G\big(\psi\,(x)\big) + C$, где $\psi\,(x)$ – обратная к $\varphi(t)$ функция, то есть $t = \psi(x)$.

Пример 1.4. $I = \int \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1\,.$

Используем подстановку $x = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\,, \quad \cos t \geqslant 0\,, \quad dx = \cos t\,dt$. Тогда

$$I = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2t + C =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sin t\cdot\cos t + C\,.$$

Так как $t = \arcsin x$, то, возвращаясь к переменной x, получаем

$$I = \frac{1}{2}\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot\sin(\arcsin x)\,\cos(\arcsin x)\ + C =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} + C = \frac{1}{2}\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2} + C\,.$$

Вопрос 1.4. *Если рассматриваем подстановку $x = \sin t$ на другом промежутке монотонности, например, при $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то не получим ли мы другой результат?*

Нет, так как все первообразные отличаются на постоянную. Например, если $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $\cos x \leqslant 0$ и при выполнении интегрирования

$$I = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = -\int \cos^2 t\,dt =$$
$$= -\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = -\frac{1}{2}\cdot t - \frac{1}{4}\cdot\sin 2t + C_1$$

на выбранном промежутке изменения t

$$t = \psi(x) = \pi - \arcsin x, \quad \text{хотя} \quad x = \sin t, \quad \text{как и раньше.}$$

Тогда $I = -\frac{1}{2}\cdot\pi + \frac{1}{2}\cdot\arcsin x\ + \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{1-x^2} + C_1$, что совпадает с полученным выше, поскольку можно положить $C = C_1 - \frac{\pi}{2}$.

Другой тип подстановки $t = \varphi(x)$ применяется к интегралам вида (и не только)

$$I = \int h\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)dx = \int h(t)\,dt.$$

Если $\int h(t)\,dt$ берется, то есть $\int h(t)\,dt = H(t) + C$, то $I = H\big(\varphi(x)\big) + C$.

Пример 1.5. $\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)}$.

Здесь $t = \varphi(x), \quad dt = \varphi'(x)dx, \quad h(t) = \frac{1}{t}$.
Следовательно, $I = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\big|\varphi(x)\big| + C$.

Вопрос 1.5. *Разве интеграл в примере 1.4. нельзя было взять с помощью второго варианта замены переменной, положив $t = \arcsin x$?*

Да. Можно было. И это несмотря на то, что арксинуса не было в подынтегральной функции! В качестве примера приведём похожий неопределенный интеграл.

Пример 1.6. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Используем подстановку $t = \operatorname{arctg} x$, хотя никакого арктангенса в подынтегральной функции нет. Тогда: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, $\quad x = \operatorname{tg} t$, $\quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, $\quad 1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$, $\quad \cos^2 t = \frac{1}{1+x^2}$.

$$I = \int \frac{\cos^4 t}{\cos^2 t} dt = \int \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(t + \frac{1}{2} \cdot \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{4} \cdot \sin 2t \; + C = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \sin t \cdot \cos t + C.$$

Так как $t = \operatorname{arctg} x$, то, возвращаясь к переменной x, получаем

$$I = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \sin t \cos t + C = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \cos^2 t + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} t \cdot \cos^2 t + C = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{1 + x^2} + C.$$

Пример 1.7. В очень простых случаях применяют прием, называемый “подведение функции под знак дифференциала”. $I = \int e^{\sin x} \cos x \, dx$. Трудно не согласиться с тем, что $d(\sin x) = \cos x \, dx$. Поэтому $I = \int e^{\sin x} d(\sin x)$. Фактически осуществлена замена переменной, где за новую переменную принята функция $\sin x$ без введения для этой новой переменной конкретной буквы. $I = e^{\sin x} + C$.

Пример 1.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} \cos^2 x}$.

Введем новую переменную: $t = 1 - \operatorname{tg} x$, тогда $dt = -\frac{1}{\cos^2 x} dx$. Введение такой новой переменной оправдано, поскольку производная от неё $\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)$ является сомножителем (наличие или отсутствие минуса или любой другой константы-сомножителя роли не играет) в подынтегральной функции. Произведем замену:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} \cos^2 x} = \int \frac{-dt}{\sqrt{t}} = -\int t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)} + C = -2\sqrt{t} + C = -2\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} + C.$$

Вопрос 1.6. *Интеграл от произведения двух функций не равен произведению интегралов от этих функций. Как быть в этом случае?*

Рассмотрим метод “интегрирование по частям”. Объяснение начнем с правила дифференцировавния произведения $(UV)' = U'V + UV'$. Тогда $UV = \int U'V dx + \int UV' dx$. Эту формулу обычно записывают в виде

$$\int U dV = UV - \int V dU.$$

Если интеграл, стоящий справа в данной формуле, проще интеграла, стоящего слева, то применение формулы имеет смысл.

Пример 1.9. $I = \int x e^x dx$. Обозначим $U = x$, $\quad dV = e^x dx$, $\quad dU = dx$, $\quad V = e^x$. $I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

Если в составе подынтегральной функции имеется множитель, упрощающийся от дифференцирования, то при применении формулы $\int U dV = UV - \int V dU$ этот множитель следует принять за U, а все оставшееся автоматически окажется равно dV.

Например, для интегралов вида $\int P(x) \sin \alpha x \, dx$, $\int P(x) \cos \alpha x \, dx$, $\int P(x) e^{\alpha x} dx$, где $P(x)$ – многочлен, за U следует принять $P(x)$;
для $\int P(x) \arcsin x \, dx$, $\int P(x) \arccos x \, dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x \, dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} x \, dx$, $\int P(x) \ln x \, dx$ за U принимаются, соответственно, функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$.

Часто формулу интегрирования по частям приходится применять последовательно несколько раз.

Пример 1.10. $I = \int x^2 e^{-x} dx$.

Используем формулу интегрирования по частям: $U = x^2, \quad dV = e^{-x}dx, \quad dU = 2x\,dx$, $V = -e^{-x}$.

$I = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$.

Вторично воспользуемся формулой интегрирования по частям: $U = x, \quad dV = e^{-x}dx$, $dU = dx, \quad V = -e^{-x}$.

$I = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$.

Вот еще один похожий пример, показывающий, что если метод интегрирования ясен, то технические трудности, связанные с объемом работы, преодолимы.

Пример 1.11. $I = \int (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)\sin x\,dx$.

Многочлен, являющийся сомножителем рядом с синусом, третьей степени. Каждое дифференцирование будет уменьшать его степень на единицу. Это означает, что формулу интегрирования по частям нужно будет применить три раза.

Первый раз: $U = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \quad dV = \sin x\,dx, \quad dU = (3x^2 + 4x + 3)\,dx$, $V = -\cos x$.

$I = -(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)\cos x + \int (3x^2 + 4x + 3)\cos x\,dx$

Второй раз: $U = 3x^2 + 4x + 3, \quad dV = \cos x\,dx, \quad dU = (6x + 4)\,dx, \quad V = \sin x$.

$I = -(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)\cos x + (3x^2 + 4x + 3)\sin x - \int (6x + 4)\sin x\,dx$

Третий раз: $U = 6x + 4, \quad dV = \sin x\,dx, \quad dU = 6\,dx, \quad V = -\cos x$.

$$I = -\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 4\right)\cos x + \left(3x^2 + 4x + 3\right)\sin x - \left((6x+4)(-\cos x) + \int 6\cos x\,dx\right) =$$
$$= -\left(x^3 + 2x^2 + 3x + 4\right)\cos x + \left(3x^2 + 4x + 3\right)\sin x + (6x+4)\cos x - 6\sin x + C =$$
$$= \left(-x^3 - 2x^2 + 3x\right)\cos x + \left(3x^2 + 4x - 3\right)\sin x + C.$$

Иногда простое задание вызывает бóльшие трудности, чем сложное.

Пример 1.12. $I = \int \ln x\,dx$.

Может показаться, что пример не на эту тему. Ведь подынтегральная функция не является произведением. Но, тем не менее: $U = \ln x, \quad dV = dx, \quad dU = \frac{1}{x}dx, \quad V = x$.

$I = x\ln x - \int \left(x \cdot \frac{1}{x}\right)dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$.

Приведем еще один такой интеграл.

Пример 1.13. $I = \int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Используем формулу интегрирования по частям: $U = \operatorname{arctg} x, \quad dV = dx$, $dU = \frac{1}{1+x^2}dx, \quad V = x$.

$I = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx$

Сделаем несложную замену переменной: $t = 1 + x^2, \quad dt = 2x\,dx$. Тогда

$I = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{dt}{2t} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\ln|t| + C = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\ln(1 + x^2) + C$.

Вопрос 1.7. *Что такое возвратные интегралы и почему они так называются?*

Существуют случаи, когда повторное применение формулы интегрирования по частям приводит к уравнению относительно искомого интеграла. Такие интегралы называются возвратными.

Пример 1.14. $I = \int e^x \sin x \, dx$.

Используем формулу интегрирования по частям: $U = \sin x, \quad dV = e^x, \quad dU = \cos x$, $V = e^x$.

$I = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$.

Полное впечатление, что ничего не добились. Ведь под знаком интеграла синус поменялся на косинус, что по степени сложности то же самое. Вторично воспользуемся формулой интегрирования по частям: $U = \cos x, \quad dV = e^x, \quad dU = -\sin x, \quad V = e^x$.

$I = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx\right) = e^x \sin x - (e^x \cos x + I)$.

В результате, искомый интеграл оказался выражен через себя. Осталось решить простейшее уранение $I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$. Имеем: $2I = e^x \cdot (\sin x - \cos x)$. В итоге получаем: $I = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin x - \cos x)$. Осталось вспомнить, что после нахождения первообразной к ней нужно прибавить произвольную постоянную и записать окончательный ответ: $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin x - \cos x) + C$.

Интересно, что иногда возвратный интеграл можно взять и обычным способом.

Пример 1.15. $I = \int e^x \cos x \, dx$.

Вспомним знаменитую формулу Эйлера из темы «Комплексные числа»: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

$$I = \int e^x \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx = \frac{1}{2} \int \left(e^{x+ix} + e^{x-ix}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{x(1+i)}}{1+i} + \frac{e^{x(1-i)}}{1-i}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{x+ix}(1-i) + e^{x-ix}(1+i)}{(1+i)(1-i)} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x e^{ix}(1-i) + e^x e^{-ix}(1+i)}{1^2 - i^2} + C$$

Есть еще формулы Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x (\cos x + i \sin x)(1-i) + e^x (\cos x - i \sin x)(1+i)}{1+1} + C =$$
$$= \frac{e^x}{4} \cdot \left(\cos x + i \sin x - i \cos x - i^2 \sin x + \cos x - i \sin x + i \cos x - i^2 \sin x\right) + C =$$
$$= \frac{e^x}{4} \cdot (2\cos x + 2\sin x) + C = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + C.$$

Вопрос 1.8. *Если существуют «неберущиеся» интегралы, то получается, что берутся только те неопределенные интегралы, для нахождения которых подходит хотя бы один из известных приемов. Какие еще существуют идеи для интегрирования, кроме очевидных замен переменной и интегрирования по частям?*

Таблица основных типов неопределённых интегралов и методов их интегрирования.

1. $\int F\big(f(x)\big) f'(x) \, dx$	Подстановка $f(x) = t$.

2. $\int UV'dx = \int UdV$	Интегрирование по частям по формуле: $\int udv = uv - \int vdu$. Метод интегрирования по частям применим к интегралам вида $\int P(x)f(x)dx$, где $P(x)$ – многочлен, а $f(x)$ – одна из следующих функций: e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, а также к интегралам от произведений показательной функции на синус или косинус. За U берут ту функцию, которая при дифференцировании упрощается, а за dV – часть подынтегрального выражения, интеграл от которой может быть найден. Например, для интегралов вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin ax\,dx$, $\int P(x)\cos ax\,dx$, где $P(x)$ – многочлен, за U следует принять $P(x)$, для интегралов вида $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$ за U принимают, соответственно, функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.
3. $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$	Выделение полного квадрата $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$ Подстановка $x + \frac{p}{2} = t$.
4. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$	Выделение в числителе дроби производной знаменателя: $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$.
5. $\int R(x)dx$, где здесь и дальше $R(x)$ дробно-рациональная функция	Выделение целой части (например, с помощью деления многочлена на многочлен уголком) с последующим разложением знаменателя на множители вида $(x-a)^n$ и $(x^2+px+q)^m$ и представления оставшейся дробной части в виде суммы простейших дробей.
6. $\int R(\sin x, \cos x)dx$	Универсальная подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ или, если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ подстановка $\cos x = t$; если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ подстановка $\sin x = t$; если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ подстановка $\operatorname{tg} x = t$.
7. Интеграл произведения синусов и косинусов	Разложение подынтегральной функции по формулам: $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$ $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$ $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\big)$.
8. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$	Если n – нечетное положительное число, то применяют подстановку $\sin x = t$, если же m – нечетное положительное число, то применяют подстановку $\cos x = t$.
9. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$, где m и n – четные неотрицательные числа	Преобразование подынтегральной функции с помощью формул: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.
10. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$, где $(m+n)$ – четное отрицательное число	Подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

11. $\int \operatorname{tg}^m x\,dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x\,dx$, где m – целое положительное число	Применение формул: $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ или $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$, с помощью которых понижают степень тангенса и котангенса.
12. $\int R\left(\sqrt[n]{x}\right) dx$	Подстановка $x = t^n$, n – наименьшее общее кратное показателей всех радикалов, под которыми входит в подынтегральную функцию.
13. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	Подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, где n – наименьшее общее кратное показателей всех радикалов, под которыми $\frac{ax+b}{cx+d}$ входит в подынтегральную функцию.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Выделение полного квадрата из квадратного трехчлена.
15. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$	Выделение в числителе производной квадратного трехчлена, находящегося под знаком корня в знаменателе: $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)x+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx\,.$
16. $\int \frac{Ax+B}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$	Подстановка $\frac{1}{x} = t\,.$
17. $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx$	Подстановка $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$).
18. $\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right) dx$	Подстановка $x = a\operatorname{tg} t$ (или $x = a\operatorname{ctg} t$) или $t = x + \sqrt{x^2+a^2}\,.$
19. $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx$	Подстановка $x = \frac{a}{\cos t}$ (или $x = \frac{a}{\sin t}$) или $t = x + \sqrt{x^2-a^2}\,.$
20. $\int R\left(e^x\right) dx$	Подстановка $e^x = t\,.$

Вопрос 1.9. *Приведите примеры, иллюстрирующие таблицу.*

Пример 1.16. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}\,dx\,.$

См. пункт 3 таблицы (дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе меньше нуля). Выделим полный квадрат $x^2-6x+18 = x^2-6x+9+9 = (x-3)^2+9\,.$

Подстановка $x-3=t$ сводит интеграл к виду

$$\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3} + C.$$

Пример 1.17. $\int \frac{x}{2x^2-3x+2}\,dx.$

В этом случае подынтегральная функция вида: $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$, в числителе возможно выделить производную знаменателя.

$$\int \frac{x}{2x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x-3)+\frac{3}{4}}{2x^2-3x+2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{4x-3}{2x^2-3x+2}\,dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2x^2-3x+2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\left(2x^2-3x+2\right)}{2x^2-3x+2}\,dx + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}x+1} =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\ln\left|2x^2-3x+2\right| + \frac{3}{8}\int \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}+\frac{7}{16}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\ln\left(2x^2-3x+2\right) + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\ln\left(2x^2-3x+2\right) + \frac{3}{2\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{7}} + C.$$

Пример 1.18. Выведем табличный интеграл XIV. Пусть $a \neq 0$.

$I = \int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx$. Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

$$1 = A(x+a) + B(x-a).$$

Полагая $x = a$ получаем: $1 = 2aA$, $A = \frac{1}{2a}$.
При $x = -a$: $1 = -2aB$, $B = -\frac{1}{2a}$.

Итак, подынтегральную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}.$$

Следовательно,

$$I = \int \left(\frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Пример 1.19. $\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx$.

См. пункт 5 таблицы:

$$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)}.$$

Знаменатель имеет только действительные корни, раскладывается на неповторяющиеся множители первой степени. Поэтому данную правильную дробь (степень числителя меньше степени знаменателя) можно представить в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$
$$x^2+1 = A\,(x-1)\,(x+1) + Bx\,(x+1) + Cx(x-1).$$

Полагая $x = 1$ получаем: $2 = 2B$, $B = 1$.
При $x = -1$: $2 = 2C$, $C = 1$.
При $x = 0$: $1 = -A$, $A = -1$.

Итак, подынтегральную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} =$$
$$= -\ln|x| + \ln|x-1| + \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + C.$$

Разумеется, то число C, которое было равно единице, и которым был временно обозначен числитель третьей дроби не имеет ни малейшего отношения к произвольной постоянной, прибавленной к найденной первообразной в конце решения.

Пример 1.20. $\int \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\,dx$.

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби.

$$\frac{x^3+x^2+2}{\left(x^2+2\right)^2} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+2\right)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$
$$x^3+x^2+2 = Ax+B+(Cx+D)\left(x^2+2\right)$$
$$x^3+x^2+2 = Ax+B+Cx^3+Dx^2+2Cx+2D.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1=C \\ x^2 & 1=D \\ x & 0=A+2C \\ x^0 & 2=B+2D \end{array}$$

Имеем $A=-2$, $B=0$, $C=1$, $D=1$

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{\left(x^2+2\right)^2}dx = \int \frac{-2x}{\left(x^2+2\right)^2}dx + \int \frac{x+1}{(x^2+2)}dx =$$
$$= -\int \frac{d(x^2+2)}{\left(x^2+2\right)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2)}{(x^2+2)} + \int \frac{dx}{(x^2+2)} =$$
$$= \frac{1}{x^2+2} + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример 1.21. Интегрирование неправильной рациональной дроби

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}\,dx.$$

Перед интегрированием неправильной рациональной дроби следует выделить у нее целую часть, то есть представить в виде: $\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$, где $M(x)$ – многочлен, а $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Здесь степень числителя подынтегральной дроби больше степени знаменателя. Выделим целую часть дроби:

$$\begin{array}{rl|l} - & x^3+x^2 & x^2-6x+5 \\ & x^3-6x^2+5x & x+7 \\ \hline - & 7x^2-5x & \\ & 7x^2-42x+35 & \\ \hline & 37x-35 & \end{array}$$

Имеем:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx = \int \left(x+7+\frac{37x-35}{x^2-6x+5}\right)dx$$

$$\frac{37x-35}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5}$$

$$37x-35 = A(x-5)+B(x-1)$$

$$37x-35 = Ax-5A+Bx-B$$

$$\begin{cases} 37 = A+B \\ -35 = -5A-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 37-35 = -4A \\ -35 = -5A-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{70}{2} = 5\cdot\dfrac{1}{2}-B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{75}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx = \int x\,dx + 7\int dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{75}{2}\int\frac{dx}{x-5} =$$
$$= \frac{x^2}{2}+7x-\frac{1}{2}\cdot\ln|x-1|+\frac{75}{2}\cdot\ln|x-5|+C.$$

Пример 1.22. Интегрирование иррациональных функций.

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx \quad \text{(Берман Г.Н. задача №1175)}$$

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = \int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$
$$= \arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C\,.$$

Пример 1.23. Выведем формулу XVII таблицы неопределённых интегралов.

$$I = \int\frac{1}{\sin x}\,dx = \int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int\frac{1}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \int\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}dx.$$

Сделаем замену переменной $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\quad dt = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,dx.$

$$I = \int\frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 1.24. Выведем формулу XVIII таблицы неопределённых интегралов.

$$\int\frac{1}{\cos x}dx = \int\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right|+C = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

Пример 1.25. Интегрирование тригонометрических функций.

$$I = \int\sin^{\frac{5}{7}}x\cos^3 x\,dx.$$

Согласно пункту 8 таблицы (степень косинуса нечетное положительное число) подстановка $\sin x = t$, $\quad dt = \cos x\,dx$ сводит исходный интеграл к следующему:

$$I = \int\sin^{\frac{5}{7}}x\cos^2 x\cos x\,dx = \int\sin^{\frac{5}{7}}x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\,dx = \int t^{\frac{5}{7}}(1-t^2)dt =$$
$$= \int t^{\frac{5}{7}}dt - \int t^{\frac{19}{7}}dt = \frac{7}{12}\cdot t^{\frac{12}{7}} - \frac{7}{26}\cdot t^{\frac{26}{7}}+C = \frac{7}{12}\cdot\sin^{\frac{12}{7}}x - \frac{7}{26}\cdot\sin^{\frac{26}{7}}x+C.$$

Пример 1.26. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx.$

Подынтегральная функция четная относительно синуса и косинуса:

$$\frac{(-\cos x)^2}{(-\sin x)^8} = \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}.$$

Полагаем (пункт 6 таблицы): $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin^8 x = \frac{t^8}{(1+t^2)^4},$$
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Имеем:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x} dx = \int \frac{(1+t^2)^4\, dt}{(1+t^2)\, t^8\, (1+t^2)} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^8} dt = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^8} dt =$$
$$= \int \frac{dt}{t^8} + 2\int \frac{dt}{t^6} + \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{t^{-7}}{7} + 2\cdot\frac{t^{-5}}{-5} + \frac{t^{-3}}{-3} + C =$$
$$= -\frac{1}{7\operatorname{tg}^7 x} - \frac{2}{5\operatorname{tg}^5 x} - \frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C.$$

Пример 1.27. Указанные общие методы интегрирования не следует применять, когда виден более простой путь. Например, для нахождения интеграла $\int \frac{x^4}{x^5-1} dx$ не следует раскладывать подынтегральную дробь на простейшие, так как $x^4 dx = d\left(x^5-1\right)$.

$$\int \frac{x^4}{x^5-1} dx = \int \frac{d\left(x^5-1\right)}{x^5-1} = \ln\left|x^5-1\right| + C.$$

Пример 1.28. $\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)}$.

Если представить подынтегральную функцию последовательно в виде суммы более простых дробей, то интеграл сводится к сумме табличных интегралов

$$\int \frac{dx}{x^4(x^2+1)} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(x^2+1)} dx = \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} =$$
$$= \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)} dx = \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 1.29. Выведем табличный интеграл XVI. Пусть $a \neq 0$.

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

Произведем замену, называемую «заменой Эйлера»: $t = x + \sqrt{x^2+a}$, $\quad t - x = \sqrt{x^2+a}$, $(t-x)^2 = \left(\sqrt{x^2+a}\right)^2$, $\quad t^2 - 2xt + x^2 = x^2 + a$, $\quad t^2 - 2xt = a$, $\quad t^2 - a = 2xt$, $\quad x = \frac{t^2-a}{2t}$, $dx = \frac{2t\cdot 2t - 2\left(t^2-a\right)}{(2t)^2} dt = \frac{2t^2-\left(t^2-a\right)}{2t^2} dt = \frac{t^2+a}{2t^2} dt$, $\quad \sqrt{x^2+a} = t - x = t - \frac{t^2-a}{2t} = \frac{2t^2-t^2+a}{2t} = \frac{t^2+a}{2t}$.
Тогда:

$$I = \int \frac{\left(\frac{t^2+a}{2t^2}\, dt\right)}{\left(\frac{t^2+a}{2t}\right)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Пример 1.30. $I=\int\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Применим замену Эйлера: $t=x+\sqrt{x^2+1}$, $t-x=\sqrt{x^2+1}$, $(t-x)^2=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2$, $t^2-2xt+x^2=x^2+1$, $t^2-2xt=1$, $t^2-1=2xt$, $x=\frac{t^2-1}{2t}$, $dx=\frac{2t\cdot 2t-2\left(t^2-1\right)}{(2t)^2}\,dt=\frac{2t^2-\left(t^2-1\right)}{2t^2}\,dt=\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$, $\sqrt{x^2+1}=t-x=t-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{2t^2-t^2+1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t}$.
Тогда:

$$I=\int\left(\frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\right)dt=\int\frac{t^4+2t^2+1}{4t^3}dt=\int\left(\frac{t}{4}+\frac{1}{2t}+\frac{1}{4t^3}\right)dt=$$

$$=\frac{t^2}{8}+\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{8t^2}+C=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{8}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|-\frac{1}{8\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}+C.$$

Пример 1.31. $I=\int\frac{dx}{e^{2x}(e^x+1)}$.

См. пункт 20 таблицы. Осуществим замену $t=e^x$, $dt=e^x dx$, $dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$. Тогда

$$I=\int\frac{dt}{t\cdot t^2(t+1)}=\int\frac{dt}{t^3(t+1)}$$
$$\frac{1}{t^3(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}+\frac{D}{t+1}$$
$$1=At^2(t+1)+Bt(t+1)+C(t+1)+Dt^3$$
$$1=At^3+At^2+Bt+Bt^2+Ct+C+Dt^3.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, имеем:

$$\begin{array}{c|l} t^3 & 0=A+D\\ t^2 & 0=A+B\\ t & 0=B+C\\ t^0 & 1=C \end{array}$$

Получили: $A=1$, $B=-1$, $C=1$, $D=-1$.

$$I=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln|t|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}-\ln|t+1|+C=$$
$$=\ln|e^x|+\frac{1}{e^x}-\frac{1}{2\left(e^x\right)^2}-\ln|e^x+1|+C=x+\frac{1}{e^x}-\frac{1}{2e^{2x}}-\ln\left(e^x+1\right)+C.$$

Вопрос 1.10. *Что такое подстановки Чебышева?*

Русский математик П.Л. Чебышев показал, что интеграл вида $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где m, n, p – рациональные числа, выражается через элементарные функции лишь тогда, когда одно из чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$ – целое.

С помощью подстановки
1) $x=t^s$, при p – целом отрицательном, $m=\frac{q}{s}$, $n=\frac{r}{s}$, где q, r и s – целые числа;
2) $a+bx^n=t$ при $\frac{m+1}{n}$ – целом;
3) $\frac{a}{x^n}+b=t$ при $\frac{m+1}{n}+p$ – целом.
Эти интегралы сводятся к ранее рассмотренным.

Пример 1.32. $\int\frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx$.

$$p<0,\ m=\frac{1}{2}=\frac{3}{6},\ n=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$$

С помощью подстановки $x=t^6$, $\sqrt{x}=t^3$, $\sqrt[3]{x}=t^2$, $dx=6t^5dt$ интеграл сводится к:

$$\int\frac{6t^8}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{\left(1+t^2\right)^2}\right)dt$$

$$\frac{4t^2+3}{\left(1+t^2\right)^2}=\frac{At+B}{\left(1+t^2\right)^2}+\frac{Ct+D}{\left(1+t^2\right)}$$

$$4t^2+3=At+B+(Ct+D)\left(1+t^2\right)$$

$$4t^2+3=At+B+Ct+D+Ct^3+Dt^2$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, имеем:

$$\begin{array}{r|l} t^3 & 0=C \\ t^2 & 4=D \\ t & 0=A+C \\ t^0 & 3=B+D \end{array}$$

Получили: $A=0$, $B=-1$, $C=0$, $D=4$.

$$\int\frac{4t^2+3}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt=-\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}+\int\frac{4\,dt}{1+t^2}$$

Пользуясь случаем, выведем рекуррентную формулу для интеграла $I_n=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^n}$ при $n\geqslant 2$ и тогда интеграл (который уже был найден в примере 1.6) будет обозначаться

$$I_2=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$I_n=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^n}=\int\frac{1+t^2-t^2}{\left(1+t^2\right)^n}dt=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^{n-1}}-\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)^n}=I_{n-1}-\int\frac{t^2dt}{\left(1+t^2\right)^n}$$

Последний интеграл возьмем по частям, положив $U=t$, $dV=\frac{tdt}{\left(1+t^2\right)^n}$

$$V=\int\frac{tdt}{\left(1+t^2\right)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+t^2\right)^{-n+1}}{-n+1}=-\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n-1}}$$

$$I_n=I_{n-1}-\left(-\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n-1}}\cdot t+\int\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n-1}}dt\right)$$

$$I_n=I_{n-1}-\left(-\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n-1}}\cdot t+\frac{1}{2n-2}\cdot I_{n-1}\right)$$

$$I_n=I_{n-1}+\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{\left(1+t^2\right)^{n-1}}\cdot t-\frac{1}{2n-2}\cdot I_{n-1}$$

$$I_n=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{t}{\left(t^2+1\right)^{n-1}}+\frac{2n-2-1}{2n-2}\cdot I_{n-1}$$

Таким образом, пришли к рекуррентной формуле:

$$I_n=\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{t}{\left(t^2+1\right)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1},\qquad n\geqslant 2$$

Применяя полученную формулу при $n = 2$, получим

$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C$$

Что совпадает с ответом в примере 1.6.

Имеем:

$$\int \frac{4t^2+3}{\left(1+t^2\right)^2} dt = -\frac{t}{2\left(t^2+1\right)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + 4\operatorname{arctg} t + C = -\frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{7}{2}\operatorname{arctg} t + C$$

$$\int \frac{6t^8 dt}{\left(t^2+1\right)^2} = 6\cdot\frac{t^5}{5} - 4t^3 + 18t + \frac{3t}{t^2+1} - 21\operatorname{arctg} t + C =$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2} dx = 6\cdot\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} - 4\sqrt{x} + 18\sqrt[6]{x} + \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} - 21\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$$

Пример 1.33. $\int x^3\left(1-x^2\right)^{-3/2}dx$

$m = 3$, $n = 2$, $p = -\frac{3}{2}$.

Применив подстановку $1 - x^2 = t, \quad -2x\,dx = dt, \quad x^2 = 1 - t$ имеем

$$\int x^3\left(1-x^2\right)^{-3/2}\,dx = -\frac{1}{2}\int t^{-3/2}\,\left(1-t\right)dt = \frac{1}{2}\int\left(-t^{-3/2}+t^{-1/2}\right)dt =$$

$$= t^{-1/2} + t^{1/2} + C = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 1.34. $\int x\sqrt{1+x^4}\,dx$

$$m = 1, \quad p = \frac{1}{2}, \quad n = 4, \quad \frac{m+1}{n} + p = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1.$$

Поэтому применяем подстановку

$$\frac{1}{x^4} + 1 = t, \quad x = (t-1)^{-\frac{1}{4}}, \quad dx = -\frac{1}{4}(t-1)^{-\frac{5}{4}}dt;$$

$$\int x\sqrt{1+x^4}\,dx = \int x\sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}\,dx = \int x^3\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}\,dx =$$

$$= \int (t-1)^{-\frac{3}{4}}\cdot t^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{4}(t-1)^{-\frac{5}{4}}\right)dt = -\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}(t-1)^{-2}dt = -\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{t}}{(t-1)^2}dt$$

Согласно пункту 12 таблицы

$$\sqrt{t} = z, \quad t = z^2, \quad dt = 2z\,dz.$$

Тогда

$$\int x\sqrt{1+x^4}\,dx = -\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{t}}{(t-1)^2}dt = -\frac{1}{4}\int\frac{z\cdot 2z}{\left(z^2-1\right)^2}dz.$$

Интегрируя по частям, получим

$$U = z, \quad dU = dz, \quad dV = \frac{2z\,dz}{\left(z^2-1\right)^2} = \frac{d\left(z^2-1\right)}{\left(z^2-1\right)^2}, \quad V = -\frac{1}{z^2-1}.$$

$$\int x \cdot \sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{z}{4(z^2-1)} - \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2-1} =$$

$$= \frac{z}{4\left(z^2-1\right)} - \frac{1}{8}\int \frac{(z+1)-(z-1)}{(z+1)(z-1)}dz =$$

$$= \frac{z}{4\left(z^2-1\right)} - \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)dz =$$

$$= \frac{z}{4\left(z^2-1\right)} - \frac{1}{8}\ln|z-1| + \frac{1}{8}\ln|z+1| + C =$$

$$= \frac{z}{4\left(z^2-1\right)} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{t}}{4(t-1)} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}\right| + C =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}}{4\left(\frac{1}{x^4}+1-1\right)} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}+1}{\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}-1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{4}x^2\sqrt{1+x^4} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^4}+x^2}{\sqrt{1+x^4}-x^2}\right| + C.$$

Вопрос 1.11. $I = \int e^{x^2}\left(2x^2+1\right)dx$. *Что делать в этом случае? Ведь если воспользоваться свойством линейности* $I = \int 2x^2e^{x^2}dx + \int e^{x^2}dx$, *то получится сумма неберущихся интегралов.*

Нужно помнить аксиому, что если задача дана на контрольной работе, то она имеет решение. Применим к первому слагаемому формулу интегрирования по частям $U = x$, $dV = 2xe^{x^2}dx, \quad dU = dx, \quad V = e^{x^2}$. Тогда
$I = \int 2x^2e^{x^2}dx + \int e^{x^2}dx = xe^{x^2} - \int e^{x^2}dx + \int e^{x^2}dx = xe^{x^2} + C$.

Вопрос 1.12. *Что делать, если в реальной деятельности после окончания университета понадобится найти интеграл, не выражающийся через элементарные функции?*

Такое вполне может случиться и во время обучения в университете. Например, в дисциплине «Теория вероятностей» большое значение имеет интеграл, линейно выражаемый через $\int e^{-x^2}dx$. Можно находить выражения для интегралов от сложных функций, используя представления последних в виде равномерно сходящихся степенных рядов и возможность почленного интегрирования таких рядов. Для этого нужно знать, что $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.
Тогда

$$\int e^{-x^2}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\int x^{2n}dx\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) + C = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

В данном случае и в следующих двух примерах ряды действительно сходятся равномерно.

Пример 1.35. $I = \int \frac{\sin x}{x} dx$.

Для решения нужно знать, что $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$. Тогда

$$I = \int \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} dx \right) = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-1)!} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{(2n-1)!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \int x^{2n-2} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right) + C = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}.$$

Пример 1.36. $I = \int \frac{\cos x}{x} dx$.

Для решения нужно знать, что $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!}$. Тогда

$$I = \int \left(\frac{1}{x} \cdot \cos x \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)!} dx \right) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n-1}}{(2n)!} dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n-1}}{(2n)!} \right) dx.$$

Первое слагаемое отделено от общей суммы, поскольку интеграл от него берется по формуле, отличной от той, по которой он берется от остальных слагаемых:

$$I = \int \frac{dx}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{(-1)^{n} x^{2n-1}}{(2n)!} dx = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n}}{(2n)!} \int x^{2n-1} dx \right) =$$

$$= \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n}}{(2n)!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n} \right) + C = \ln|x| + C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} x^{2n}}{(2n)! \cdot 2n}.$$

Глава II. Определенные интегралы

Не вдаваясь в вопрос о том, что именно называется определённым интегралом, скажем, что практическим правилом для нахождения определённого интеграла от функции $f(x)$ определенной и непрерывной на отрезке $[a;b]$, является формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$. При решении конкретных примеров удобно предварительно записать разность первообразных с помощью обозначения скачка функции:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Для неотрицательных (в частности, положительных) функций $f(x)$ определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ имеет геометрический смысл и равен площади криволинейной трапеции, ограниченной слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу осью абсцисс, а сверху – графиком функции $y = f(x)$. При этом знак интеграла оказывается аналогом знака суммы, слагаемыми которой являются площади приставленных друг к другу тончайших прямоугольников с высотами, равными $f(x)$ и бесконечно малой толщиной dx.

Заметим, что хотя первообразных данной функции существует бесчисленное множество, определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

вычисляется однозначно.

Вопрос 2.1. *Приведите пример использования формулы Ньютона–Лейбница.*

Пример 2.1. Вычислить $I = \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-x^2}dx$.

В примере 1.4 найдена первообразная функции $\sqrt{1-x^2}$. Она равна

$$F(x) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}.$$

Согласно формуле Ньютона–Лейбница

$$I = \frac{1}{2}\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} -$$
$$-\left(\frac{1}{2}\cdot\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

С формулой Ньютона–Лейбница согласуются следующие свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

2) $\int\limits_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$.

3) Линейность:

$$\int_a^b \big(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)\big)dx =$$
$$= \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + \alpha_n \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

4) Аддитивность: $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Последнее свойство при $f(x) \geqslant 0$ имеет вполне понятный геометрический смысл.

Вопрос 2.2. *В чем состоит особенность при выполнении подстановки в определенном интеграле?*

Коротко можно ответить так: нужно пересмотреть пределы интегрирования. Точнее: справедливы следующие формулы:

1) Если подстановка имеет вид $x = \varphi(t)$, причем $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$.

В качестве примера вычислим тот же определенный интеграл $I = \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-x^2}dx$ с помощью подстановки $x = \sin t, \quad dx = \cos t\,dt, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

По формуле $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$, как было написано в примере 1.4

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right)\,dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,.$$

2) Если подстановка имеет вид $t = \varphi(x)$, причем $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b h\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta h(t)\,dt.$$

Пример 2.2. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

Подстановка $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$ дает при $x = 1, \quad t = \ln 1 = 0$, а при $x = e, \quad t = \ln e = 1$, поэтому:

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}\,.$$

При применении подстановки к вычислению определенного интеграла отпадает необходимость возвращения к исходной переменной. Из-за этого решение получается гораздо короче.

Вопрос 2.3. *Такое впечатление, что определённый интеграл из примера 2.1 можно было вычислить ещё короче за счет того, что подынтегральная функция четная и при этом промежуток интегрирования симметричен относительно нуля.*

Выведем формулу для определенного интеграла от четной функции по симметричному относительно нуля промежутку. Пусть $f(x)$ четная функция, то есть выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Тогда по свойству аддитивности определенного интеграла:

$$I = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Сделаем в первом слагаемом замену переменной $x = -t, \quad t = -x, \quad dx = -dt$. При $x = -a$, будет $t = a$, а при $x = 0, \quad t = 0$.

$$I = \int_a^0 f(-t)\cdot(-dt) + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx =$$

$$= \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Итак, вывели, что для четной подынтегральной функции справедливо равенство $\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx}$.

Вопрос 2.4. *Есть ли аналогичная формула для определенного интеграла от нечетной подынтегральной функции при симметричном относительно нуля промежутке интегрирования?*

Выведем формулу для определенного интеграла от нечетной функции по симметричному относительно нуля промежутку. Пусть $f(x)$ нечетная функция, то есть выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. Тогда по свойству аддитивности определенного интеграла:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Сделаем в первом слагаемом замену переменной $x = -t, \quad t = -x, \quad dx = -dt$. При $x = -a$, будет $t = a$, а при $x = 0, \quad t = 0$.

$$I = \int_a^0 f(-t)\cdot(-dt) + \int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx =$$

$$= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Итак, вывели, что для нечетной подынтегральной функции справедливо еше более простое равенство $\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0}$.

Вопрос 2.5. *Есть ли особенность при вычислении определенного интеграла по частям?*

Единственное, на что нужно обратить внимание в этом случае, это на то, что внеинтегальное слагаемое факттически является фрагментом искомой первообразной функции. И поэтому пределы интегрирования должны быть подставлены и в него тоже. Формула интегрирования по частям для определенных интегралов выглядит так: $\boxed{\int\limits_a^b U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b U'(x)V(x)dx}$. Обратите внимание, что в этой формуле не используются дифференциалы функций $U(x)$ и $V(x)$, как это было в соответствующей формуле для неопределенного интеграла. Дело в том, что пределы интегрирования a и b относятся к той переменной, котороя записана под знаком дифференциала. А в данной формуле этой переменной является x, а не $U(x)$ или $V(x)$.

Пример 2.3. $\int\limits_0^\pi x\sin 2x\,dx.$

$U = x, \quad U' = 1, \quad V' = \sin 2x, \quad V = -\frac{\cos 2x}{2}$. Поэтому

$$\int\limits_0^\pi x\sin 2x\,dx = -\frac{x\cos 2x}{2}\bigg|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \frac{\cos 2x}{2}dx = -\frac{\pi\cos 2\pi}{2} + \frac{0\cdot\cos(2\cdot 0)}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\bigg|_0^\pi =$$
$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\pi}{4} - \frac{\sin(2\cdot 0)}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Как видно из решения, пределы интегрирования можно подставлять во внеинтегральное слагаемое до нахождения всей первообразной. То, что полученный ответ отрицательный, смущать не должно. Ведь определенный интеграл это не обязательно площадь. А подынтегральная функция рассмотренного определенного интеграла при некоторых аргументах из промежутка интегрирования отрицательная.

Вопрос 2.6. *Есть ли особенность при вычислении определенного интеграла от правильной рациональной дроби с помощью разложения на сумму простейших дробей?*

Если автор задачи позаботился о ее корректности (то есть корни знаменателя не находятся ни внутри промежутка интегрирования, ни совпадают с одной из его границ), то никаких особенностей нет.

Пример 2.4. $\int\limits_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx.$

$$\frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$$
$$1 = A(x-3) + B(x+1)$$
$$1 = Ax - 3A + Bx + B$$
$$\begin{cases} 1 = -3A + B \\ 0 = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-3)}\,dx = \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-3)}\right)dx = \left(-\frac{\ln|x+1|}{4} + \frac{\ln|x-3|}{4}\right)\bigg|_0^1 =$$
$$= -\frac{\ln|1+1|}{4} + \frac{\ln|1-3|}{4} - \left(-\frac{\ln|0+1|}{4} + \frac{\ln|0-3|}{4}\right) = -\frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln 2}{4} - \frac{\ln 3}{4} = -\frac{\ln 3}{4}$$

Вопрос 2.7. *Может ли определенный интеграл играть роль первообразной функции?*

Может, если один из пределов a или b считать переменной величиной.

Пусть в интеграле $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ верхний предел интегрирования изменяется на некотором промежутке.

Запишем интеграл в виде $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Заметим, что поскольку переменная x оказалась аргументом функции $\Phi(x)$ и поэтому была использована в записи определенного интеграла в виде верхнего предела, то она уже не может быть второй раз использована в записи определенного интеграла качестве аргумента подынтегральной функции (разумеестя, если такого не было в планах автора задачи). Чтобы не было противоречия с логикой записи выражения, в качестве аргумента подынтегральной функции использована буква отличная от x.

По формуле Ньютона–Лейбница $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$. Заметим, что функция $\Phi(x)$ тоже первообразная.

Действительно, $\Phi'(x) = (F(x) - F(a))' = F'(x) - (F(a))' = f(x) - 0 = f(x)$.

Вопрос 2.8. *Как бы изменилась ситуация, если бы переменным оказался нижний предел интегрирования?*

$\Phi(x) = \int\limits_x^b f(t)dt = -\int\limits_b^x f(t)dt$. Поэтому $\Phi'(x) = -\left(\int\limits_b^x f(t)dt\right)' = -f(x)$.

Вопрос 2.9. *Что делать, есть подынтегральная функция не является непрерывной функцией?*

Не исключено, что в этом случае определенного интеграла не существует (не путайте с ситуацией, когда первообразная не выражается через элементарные функции!).

Для практики важно, что если подынтегральная функция кусочно непрерывна, то определенный интеграл может быть найден с помощью свойства аддитивности.

Пример 2.5. $I = \int\limits_0^2 f(x)dx$, где $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, \text{ если } & x < 1, \\ x^2, \text{ если } & x \geqslant 1. \end{cases}$

$$I = \int\limits_0^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx + \int\limits_1^2 x^2dx.$$

Воспользуемся знанием первообразной из примера 1.13.

$$I = \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \operatorname{arctg} 1 - \frac{\ln 2}{2} + \frac{9}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{8}{3}.$$

Вопрос 2.10. *Существуют ли определенные интегралы, которые можно вычислить, но при этом соответствующие им неопределенные интегралы не выражаются через элементарные функции?*

Пример 2.6. $I = \int\limits_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$. Предоставим читателю самостоятельно убедиться в том, что соответствующий неопределенный интеграл $\int \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ через элементарные функции не выражается.

Сделаем замену переменной $t = \pi - x$, $\quad dx = -dt$, $\quad x = \pi - t$, $\quad$ при $\quad x = 0 \quad t = \pi$, а при $\quad x = \pi \quad t = 0$.

$$I = \int\limits_\pi^0 \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)}(-dt) = \int\limits_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = \int\limits_0^\pi \frac{\pi\cdot\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int\limits_0^\pi \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt$$

Второй определенный интеграл фактически совпадает с тем, который нужно было найти. Получается, что данный в условии определенный интеграл, своего рода возвратный. Первый из получившихся определенных интегралов вычислим с помощью замены переменной $u = \cos t$, $du = -\sin t\, dt$, при $t = 0$ $u = \cos 0 = 1$, а при $t = \pi$ $u = \cos\pi = -1$.

$$I = \int\limits_{1}^{-1} \frac{-\pi\, du}{1+u^2} - I = \pi \int\limits_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} - I = 2\pi \int\limits_{0}^{1} \frac{du}{1+u^2} - I = 2\pi \operatorname{arctg} u \Big|_0^1 - I =$$

$$= 2\pi(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) - I = 2\pi \cdot \frac{\pi}{4} - I = \frac{\pi^2}{2} - I.$$

Окончательно имеем

$$2I = \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow I = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Вопрос 2.11. *Где применяются определенные интегралы?*

1. Вычисление площади в прямоугольных координатах.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$ $\big($где $f(x)$ непрерывная неотрицательная функция$\big)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси OX, вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Если функция $f(x)$ непрерывна и $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant 0\,$.

Абсолютная величина этого интеграла равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху отрезком $[a; b]$ оси OX, слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу – кривой $y = f(x)$. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и не знакопостоянна на этом отрезке, то $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ численно равен алгебраической сумме площадей криволинейных трапеций, лежащих над и под осью OX.

Площадь фигуры, ограниченной слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, снизу и сверху – непрерывными кривыми, заданными равенствами $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, можно вычислить по формуле

$$S = \int\limits_a^b \big| f_2(x) - f_1(x) \big| dx\,.$$

Площади фигур более сложного вида вычисляются с помощью определенного интеграла после разбиения на части указанного выше вида.

Пример 2.7. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = -x$ от параболы $y = 2x - x^2$.

Решение. Преобразуем уравнение параболы.

$$y = -\big(x^2 - 2x\big)$$
$$y = -\big(x^2 - 2x + 1\big) + 1$$
$$y = -(x-1)^2 + 1$$

Вершина параболы имеет координаты $(1; 1)$, ветви направлены вниз. Находим точки пересечения параболы с прямой $y = -x$:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = 2x - x^2 \end{cases}$$

$$-x = 2x - x^2 \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \quad x_1 = 0,\ x_2 = 3$$

Вычисляем искомую площадь

$$S = \int\limits_0^3 \left(\left(2x - x^2\right) - (-x)\right) dx = \int\limits_0^3 \left(3x - x^2\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{9}{2}\,.$$

2. Вычисление площади, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной уравнениями в параметрической форме: $x = \varphi\,(t)$, $y = \psi\,(t)$, двумя вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси OX, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi\,(t)\,\varphi'(t)dt,$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$ на отрезке $[t_1; t_2]$.

Пример 2.8. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $\quad y = a\,(1 - \cos t)$, $\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение.

$$S = \int\limits_0^{2\pi} a\,(1 - \cos t)\,\big(a\,(t - \sin t)\big)' dt = \int\limits_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

3. Вычисление площади, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах.

Площадь сектора, ограниченного дугой кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, выражается интегралом:

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример 2.9. Найти площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли

$$\rho^2 = a^2 \cos(2\varphi).$$

Решение. В силу симметрии кривой относительно обеих координатных осей вычислим длину ее четвертой части, расположенной в первой четверти. Определим границы изменения полярного угла. Чтобы равенство, задающее лемнискату Бернулли, имело возможность выполниться, необходимо выполнение условия $\cos(2\varphi) \geqslant 0$. Для этого должно быть $2\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, где k целое число. Поэтому $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$, что для первой четверти означает $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos(2\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin(2\varphi)}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}\,.$$

$$S = a^2.$$

4. Вычисление длины дуги плоской кривой.

Если кривая задана параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$ (где $x(t)$, $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции), $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, длина дуги кривой, соответствующая изменению параметра t от t_1 до t_2, вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Если кривая задана уравнением вида $y = f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$, то, приняв x за параметр, из формулы, получим

$$l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Если кривая задана уравнением вида $x = g(y)$, где $p \leqslant y \leqslant q$, то, приняв y за параметр, из формулы, получим

$$l = \int\limits_{p}^{q} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

Пример 2.10. Вычислить длину астроиды

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$$

Решение. В силу симметрии кривой относительно обеих координатных осей вычислим длину ее четвертой части, расположенной в первой четверти.

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t\,, \quad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t\,.$$

Следовательно, по формуле $l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$, имеем

$$\frac{1}{4}\cdot l = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 3a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}\,dt = 3a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt = \frac{3a}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\,dt =$$

$$= \frac{3a}{2}\cdot\left.\frac{-\cos(2t)}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{4}\cdot(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{3a}{4}\cdot(1+1) = \frac{3a}{2}$$

$$l = 4\cdot\frac{3a}{2} = 6a\,.$$

Пример 2.11. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Находим производную $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$ и подставляем ее в формулу $l = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$:

$$l = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) - \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Если кривая задана уравнением вида $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах, где: $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то, приняв φ за параметр, получим $x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$, $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi - \rho\sin\varphi$, $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi + \rho\cos\varphi$; формула в этом случае примет вид:

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\right)^2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi\right)^2 - 2\rho\frac{d\rho}{d\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + (\rho\sin\varphi)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi\right)^2 + 2\rho\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi\cos\varphi + (\rho\cos\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi.$$

Пример 2.12. Найти длину дуги кривой $\rho = \sin^3\frac{\varphi}{3}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$$

По формуле $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$, имеем

$$l = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3} + \sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}} d\varphi = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\varphi}{3} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\left(\varphi - \frac{3}{2}\cdot\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\pi - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

5. Вычисление объемов. Объем произвольного тела.

Пусть $S = S(x)$ – функция, задающая площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси OX в точке x. Объем тела, ограниченного плоскостями $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле:

$$V = \int\limits_{a}^{b} S(x)dx.$$

Пример 2.13. Найти объем эллипсоида с центром в начале координат и полупсями a, b, c.

Решение. Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Таким образом, площадь поперечного сечения эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси OX, имеет вид:

$$S(x) = \pi\cdot b\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\cdot c\cdot\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$S(x) = \pi\cdot b\cdot c\cdot\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Объем эллипсоида равен

$$V = \int\limits_{-a}^{a} S(x)dx = \pi bc \int\limits_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi bc \int\limits_{0}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx =$$

$$= 2\pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi bc \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{4}{3} \cdot \pi abc.$$

6. Вычисление объема тела вращения.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой, заданной формулой $y = f(x)$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$,

вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int\limits_a^b y^2 dx = \pi \int\limits_a^b f^2(x) dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривой $x = \psi(y)$, осью OY и двумя прямыми $y = p$ и $y = q$, вычисляется по формуле:

$$V_y = \pi \int\limits_p^q x^2 dy = \pi \int\limits_p^q \psi^2(y) dy.$$

Пример 2.14. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = 2x - x^2$ и $y = 0$ вокруг оси OX.

Решение. Корнями функции $y = 2x - x^2$ являются $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

$$V_x = \pi \int\limits_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi \int\limits_0^2 \left(4x^2 - 4x^3 + x^4\right) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{4}{3} \cdot x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \pi \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - 16 + \frac{32}{5}\right) = \pi \cdot \frac{160 - 240 + 96}{15} = \frac{16}{15} \cdot \pi.$$

Пример 2.15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью OY и прямыми $y = 0$ и $y = 1$.

Решение.

$$V_y = \pi \int\limits_0^1 x^2 dy = \pi \int\limits_0^1 y\, dy = \pi \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2.16. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и прямой $y = 0$.

Решение.

$$V_x = \pi \int\limits_a^b y^2 dx$$

$$y^2 = a^2 \left(1 - \cos t\right)^2$$

$$dx = a\left(1 - \cos t\right) dt.$$

Первой арке циклоиды

соответствует изменение t от 0 до 2π, поэтому

$$V_x = \pi \int\limits_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2}\right) - \cos^2 t \cos t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\left(t - 3\sin t + \frac{3}{2}\cdot t + \frac{3}{4}\cdot \sin(2t)\right)\Bigg|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 t\right)\cos t\, dt\right) =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}\cdot 2\pi - \int\limits_0^{0} \left(1 - u^2\right) du\right) = 5\pi^2 a^3.$$

В последнем слагаемом была сделана замена переменной интегрирования $u = \sin t$, $du = \cos t\, dt$, при $t = 0$ и при $t = 2\pi$ одинаковое значение $u = 0$.

7. Площадь поверхности вращения.

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $y = f(x)$ между точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, выражается формулой:

$$S = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

где $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ – дифференциал дуги кривой.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$, то

$$S = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt,$$

где t_1 и t_2 – значения параметра t, соответствующие концам дуги.

Пример 2.17. Найти площадь поверхности, образованной при вращении вокруг оси OX одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение.

$$S=2\pi\int\limits_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{a^2\,(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2\,(1-\cos t)}\,dt=2\sqrt{2}\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^3}\,dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^3}\,dt=8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\int\limits_1^{-1}\left(1-u^2\right)(-2du)=16\pi a^2\int\limits_{-1}^{1}\left(1-u^2\right)du=$$

$$=32\pi a^2\int\limits_0^{1}\left(1-u^2\right)du=32\pi a^2\left(u-\frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=32\pi a^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{64\pi a^2}{3}\,.$$

В конце решения была сделана замена переменной интегрирования: $u=\cos\frac{t}{2}$, $du=-\sin\frac{t}{2}\,dt$, при $t=0$ $u=\cos 0=1$, а при $t=2\pi$ $u=\cos\pi=-1$.

8. Моменты. Центр тяжести.

Статические моменты M_x и M_y дуги плоской кривой $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, соединяющей точки $A\big(a,f(a)\big)$ и $B\big(b,f(b)\big)$, относительно осей OX и OY вычисляются по формулам

$$M_x=\int\limits_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,,$$

$$M_y=\int\limits_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,,$$

соответственно. Координаты центра тяжести той же дуги вычисляются следующим образом:

$$\overline{X}=\frac{M_y}{L}=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}\,,$$

$$\overline{Y}=\frac{M_x}{L}=\frac{\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}\,,$$

где L – длина дуги AB.

Статические моменты M_x и M_y криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2 dx, \quad M_y = \int\limits_a^b xy\,dx\,.$$

Координаты центра тяжести той же трапеции вычисляются следующим образом:

$$\overline{X} = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}$$

$$\overline{Y} = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y\,dx}$$

(S – площадь трапеции).

Глава III. Несобственные интегралы

Вопрос 3.1. *Что такое несобственные интегралы?*

Несобственными интегралами называют:
I. интегралы с бесконечными пределами интегрирования;
II. интегралы неограниченных функций.
Несобственные интегралы I типа:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)\,dx, \tag{a}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)\,dx. \tag{b}$$

Интеграл (b) сводится к интегралу (a) заменой x на $(-x)$.

Если предел в формулах (a) и (b) существует и конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся; если же предел не существует или равен бесконечности – расходящимся.

Для функции $f(x)$, непрерывной на всей числовой оси, несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

определяется равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$$

где a – любое число, если каждый из интегралов в правой части равенства сходится. При этом несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся.

Если хотя бы один из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся.

Если $a_1 > a$, то $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (напомним, что рассматривается непрерывная функция $f(x)$).
Справедлива формула Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$

Где $F(x)$ – первообразная, а $F(+\infty) = \lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$

Пример 3.1. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $a > 0$, $p > 0$.

Решение. Рассмотрим $p \neq 1$:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{a}^{A} x^{-p}dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{-p+1} \cdot x^{-p+1} \right)\Bigg|_a^A = \frac{1}{-p+1} \cdot \lim_{A\to+\infty} A^{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \cdot a^{-p+1}.$$

Пусть $p > 1$; тогда $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{-p+1} = 0$. Значит, при $p > 1$ несобственный интеграл сходится.

При $p < 1$ $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{-p+1} = \infty$. Значит, при $p < 1$ несобственный интеграл расходится.

Теперь исследуем случай $p = 1$:

$$\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{a}^{A} \frac{dx}{x} \lim_{A\to+\infty} \ln|x|\Bigg|_a^A = \lim_{A\to+\infty} \ln A - \ln a = +\infty.$$

Следовательно, при $p = 1$ несобственный интеграл тоже расходится.

Окончательно имеем: при $p > 1$ несобственный интеграл сходится, а при $p \leqslant 1$ расходится.

Пример 3.2. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{\mu x}dx$.

Решение. Рассмотрим $\mu \neq 0$:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{\mu x}dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{0}^{A} e^{\mu x}dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{\mu} \cdot e^{\mu x} \right)\Bigg|_0^A = \frac{1}{\mu} \left(\lim_{A\to+\infty} e^{\mu A} - e^0 \right) = \frac{1}{\mu} \left(\lim_{A\to+\infty} e^{\mu A} - 1 \right).$$

Пусть $\mu > 0$; тогда $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{\mu A} = +\infty$. Значит, при $\mu > 0$ несобственный интеграл расходится.

При $\mu < 0$ $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{\mu A} = 0$. Значит, при $\mu < 0$ несобственный интеграл сходится.

Теперь исследуем случай $\mu = 0$:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{0\cdot A} dx = \int\limits_0^{+\infty} 1\, dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^{A} 1\, dx = \lim_{A\to+\infty} x\Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} A = +\infty.$$

Следовательно, при $\mu = 0$ несобственный интеграл тоже расходится.

Окончательно имеем: при $\mu < 0$ несобственный интеграл сходится, а при $\mu \geqslant 0$ расходится.

Пример 3.3. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ или доказать его расходимость.

Решение. Используя формулу XIV таблицы неопределенных интегралов, имеем:

$$\int\limits_5^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_5^{A} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \ln\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right)\Bigg|_5^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \ln\left| \frac{A-1}{A+1} \right| - \frac{1}{2} \cdot \ln\left| \frac{5-1}{5+1} \right| \right) = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1-\frac{1}{A}}{1+\frac{1}{A}} - \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{6}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln 1 - \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{2}{3}\,.$$

Вопрос 3.2. *Какими свойствами обладают несобственные интегралы?*

1) Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f\,(x)dx$ сходится и равен I, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} cf\,(x)dx$, где c – число ($c \neq 0$), также сходится и равен cI.

2) Если интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f\,(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} f_1\,(x)dx$ сходятся и соответственно равны I и I_1, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \big(f(x) + f_1(x)\big)dx$ также сходится и равен $I + I_1$.

Вопрос 3.3. *Как геометрически иллюстрируется несобственный интеграл?*

Это площадь подграфика функции $f(x)$, когда $f(x)$ – неотрицательная функция,

и, взятая с противоположным знаком, площадь надграфика функции $f(x)$, если $f(x) \leqslant 0$

Вопрос 3.4. *Какие есть способы сравнения для исследования несобственного интеграла на сходимость/расходимость?*

Теорема 1. *Если существвет число M, такое что для всех $x > M$ верно неравенство $0 \leqslant f\,(x) \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} \varphi\,(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f\,(x)dx$.*

Если при тех же предположениях интеграл $\int_a^{+\infty} f\,(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi\,(x)dx$.

Теорема 2. *Пусть $0 \leqslant f\,(x)$, $\quad 0 < \alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta$. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} f\,(x)\varphi(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_a^{+\infty} f\,(x)dx$.*

Доказательство. а) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда сходится $\int\limits_a^{+\infty} \beta f(x)dx$. Тогда по теореме 1 сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$.

б) Пусть сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$. Тогда сходится $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{\alpha} f(x)\varphi(x)dx$, откуда сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, т.к. $\frac{\varphi(x)}{\alpha} \geqslant 1$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c > 0$, *где* c *конечное число,* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывные функции и существет число* M, *такое что для всех* $x > M$ *верно, что* $f(x) > 0$ *и* $g(x) > 0$. *Тогда несобственные интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Обозначим: $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{1}{c} > 0$.

Следовательно, существуют конечные числа α и β, такие что: $0 < \alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant \beta$, причем $g(x) = \varphi(x) f(x)$.

Применяя теорему 2, получаем, что $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. □

Несобственные интегралы II типа: $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ где $f(x)$ – функция, неограниченная на $[a;b)$.

Предполагаем, что $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$, а в остальных точках промежутка $[a;b)$ непрерывна.

Выполним замену: $b - x = \frac{1}{t}$, $\quad x = b - \frac{1}{t}$, $\quad dx = \frac{dt}{t^2}$, $\quad t = \frac{1}{b-x}$, $\quad$ при $x = a \quad t = \frac{1}{b-a}$, $\quad$ а при $x \to b - 0 \quad t \to +\infty$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}.$$

Таким образом интеграл II типа сводится к интегралу I типа.

Пример 3.4. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^a \frac{dx}{x^p}$, $a > 0$, $p > 0$.

Решение. Выполним замену: $x = \frac{1}{t} \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt$, $\quad$ при $x \to +0 \quad t \to +\infty$, $\quad$ а при $x \to a \quad t = \frac{1}{a}$. Тогда

$$\int\limits_0^a \frac{dx}{x^p} = \int\limits_{+\infty}^{\frac{1}{a}} \left(-t^p \cdot \frac{1}{t^2}\right) dt = \int\limits_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2-p}}.$$

См. пример 3.1.

Если $2 - p > 1 \Leftrightarrow p < 1$, то интеграл сходится.

Если $2 - p \leqslant 1 \Leftrightarrow p \geqslant 1$, то интеграл расходится.

Пример 3.5. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. Выполним замену: $1-x=\frac{1}{t}$, $\quad x=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$ $\quad dx=\frac{dt}{t^2}$, $t=\frac{1}{1-x}$, при $x=0$ $t=1$, $\quad$ а при $x\to 1-0$ $\quad t\to+\infty$. Имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2\sqrt{1-\left(\frac{t-1}{t}\right)^4}}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{t^4-(t-1)^4}{t^4}}}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^4-(t-1)^4}}=$$

$$=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^4-t^4+4t^3-6t^2+4t-1}}=\int\limits_1^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{4t^3-6t^2+4t-1}}.$$

По теореме 3 $\left(\text{при} \quad g(t)=\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ и согласно примеру 3.1 $\left(\text{так как} \quad \frac{3}{2}>1\right)$ несобственный интеграл сходится.

Пример 3.6. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^p dx$, $p>0$.

Решение. После замены $\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}-x$, $\quad x=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{t}$, $\quad dx=\frac{dt}{t^2}$, $\quad t=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$, при $x=0$ $\quad t=\frac{2}{\pi}$, а при $x\to\frac{\pi}{2}-0$ $\quad t\to+\infty$. Имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^p dx=\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{\sin^p\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{t}\right)}{t^2\cos^p\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{t}\right)}dt=\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{\cos^p\frac{1}{t}}{t^2\sin^p\frac{1}{t}}dt.$$

Применяя теорему 3 $\left(\text{при} \quad g(t)=\frac{1}{t^{-p+2}}\right)$ и вывод из примера 3.1, заключаем, что условие сходимости интеграла имеет вид: $-p+2>1$ или $0<p<1$.

Задания на самостоятельную работу

Вариант 1

Найдите интегралы:

1) $\int x^3\sqrt{5x^4-3}\,dx$

2) $\int \arccos x\,dx$

3) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

4) $\int (\sin 2x+\cos 2x)^2 dx$

5) $\int \frac{\cos x+1}{\sin^2 x}\,dx$

6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin 2x\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=x^2$, $y=6-5x$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^x dx$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=x^2$, $y^2=x$.

Вариант 2

Найдите интегралы:

1) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

2) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} \, dx$

3) $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} \, dx$

4) $\int \cos^2 x \sin 2x \, dx$

5) $\int \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+x\right)^2} \, dx$

6) $\int\limits_4^9 \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}} \, dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = 6x - x^2$ и осью OX.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2+x}}$.

Найдите объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $x^2 + y^2 = 64$, $y = -5$, $y = 5$, $x = 0$.

Вариант 3

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x\sqrt{1-x^3}}$

2) $\int e^x(x+5)dx$

3) $\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+2)^2} \, dx$

4) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} \, dx$

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \, dx$

6) $\int\limits_0^1 xe^{-2x} dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = -x^2 + 7x - 10$ и $y = x^2 - x - 10$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

Найдите объем тела, получаемого вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$.

Вариант 4

Найдите интегралы:

1) $\int \arcsin(x-7)\,dx$

2) $\int \frac{x^5}{\sqrt{9-x^6}}\,dx$

3) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$

4) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

5) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$

6) $\int\limits_1^9 \frac{(x+2)^2}{x}\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $xy = 2$ и $y = 7 - \frac{7x}{5}$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^4 x}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линией, заданной равенством: $y = 2x - x^2$.

Вариант 5

Найдите интегралы:

1) $\int x^2 e^{x^3} dx$

2) $\int x\cos x\,dx$

3) $\int \frac{x}{9+8x-x^2}\,dx$

4) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$

5) $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx$

6) $\int\limits_1^4 \frac{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}{x^2}\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линией $y = \ln x$, осью OX и прямой $y + x = 4$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(3+x)^3}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Вариант 6

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

2) $\int x \cos\left(x^2+5\right)\, dx$

3) $\int \frac{x^2}{x^3-x^2-6x}\, dx$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$

5) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\, dx$

6) $\int\limits_0^3 \ln(x+3) dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $x+y-6=0$ и $y=\frac{7}{x}$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx$.

Найдите объем тела, получаемого вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=x^2$, $y=x^3$.

Вариант 7

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin x+\cos x}}\, dx$

2) $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$

3) $\int \frac{x}{(x+1)(x^2-4)}\, dx$

4) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx$

5) $\int \frac{\cos 3x}{5+3\sin 3x}\, dx$

6) $\int\limits_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\, dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линией: $y=\frac{x^2}{8}$ и прямой $y=3$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$.

Найдите объем тела, получаемого вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

Вариант 8

Найдите интегралы:

1) $\int x^6\sqrt{x^7-8}\,dx$

2) $\int \ln(2x-7)dx$

3) $\int \frac{x+6}{(x+21)(x+3)^2}\,dx$

4) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$

5) $\int \frac{\sin 2x}{3\sin^2 x+4}\,dx$

6) $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=4x^2$ и $x-y+3=0$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{16-x^4}}$.

Найдите объем тела, получаемого вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$.

Вариант 9

Найдите интегралы:

1) $\int x\ln x\,dx$

2) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2-x^2}}\,dx$

3) $\int \frac{x-7}{x^2-5x+6}\,dx$

4) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$

5) $\int \sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$

6) $\int\limits_3^9 \frac{\ln x}{x}\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y^2=4x$ и $x^2=4y$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{8-x^3}}\,dx$.

Найдите объем тела, получаемого вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=x$, $y=2x-x^3$ $(x\geqslant 0)$.

Вариант 10

Найдите интегралы:

1) $\int e^x x^2 dx$

2) $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}\, dx$

3) $\int \frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}\, dx$

4) $\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2-2)}\, dx$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}\, dx$

6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = \frac{x^2}{4}$ и $y^2 = 4x$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_2^{+\infty} 2e^{-3x} dx$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y^2 = 4x$, $y = x$.

Вариант 11

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{\ln(x-25)}{x-25}\, dx$

2) $\int (x+9)2^x dx$

3) $\int \frac{x+5}{x^2-8x+7}\, dx$

4) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 2}}\, dx$

5) $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\, dx$

6) $\int\limits_3^9 \frac{\ln x}{x}\, dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = x^3$ и $y = 2x$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Вариант 12

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{\arcsin^5 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2) $\int x^7 \ln x\,dx$

3) $\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}\,dx$

4) $\int \frac{\cos(3x)}{5+3\sin(3x)}\,dx$

5) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$

6) $\int\limits_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = x^2 - x$ и $y^2 = 2x$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^3}}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = x^2$, $y = x^3$, $x = 1$, $x = 3$.

Вариант 13

Найдите интегралы:

1) $\int e^{x^7} x^6 dx$

2) $\int \operatorname{arcctg}(4x-7)dx$

3) $\int \frac{x^2+5}{x^3+6x^2+8x}\,dx$

4) $\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\cos^2 x+3}}\,dx$

5) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

6) $\int\limits_0^1 xe^{x^2}dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = x^2 - 3x$ и $y + 3x - 4 = 0$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$.

Вариант 14

Найдите интегралы:

1) $\int x^5\sqrt{5x^6+9}\,dx$

2) $\int \arccos(3x-6)dx$

3) $\int \frac{x-6}{(x+1)^2(x-4)}\,dx$

4) $\int \sin^3 x\cos^8 x\,dx$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}\,dx$

6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = x^3$, $y = 8$ и $x = 0$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{9x^2+1}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$.

Вариант 15

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{x^5}{\sqrt{9-x^{12}}}\,dx$

2) $\int (x-6)\cos(x-6)dx$

3) $\int \frac{x+3}{x^2-7x+12}\,dx$

4) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$

5) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

6) $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y^2 = 2x+4$, $y = 0$ и $y = -x+2$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln 2\,dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = x$, $y = 2x - x^3$ $(x \geqslant 0)$.

Вариант 16

Найдите интегралы:

1) $\int 2^{x^2} x\,dx$

2) $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$

3) $\int \frac{x-4}{9+8x-x^2}\,dx$

4) $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$

5) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

6) $\int\limits_0^1 x e^{x^2} dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $xy = 4$ и $y = -x + 5$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = x^2$, $y = x + 4$, $x = 0$, $x = 2$.

Вариант 17

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{x+\operatorname{arctg}(2x)}{1+4x^2}\,dx$

2) $\int e^{-x} x\,dx$

3) $\int \frac{x}{x^2-6x-7}\,dx$

4) $\int \sin^5 x\,dx$

5) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

6) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = 3x - x^2$ и $y = -x$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^2\,dx$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y^2 = 4x$, $y = x$.

Вариант 18

Найдите интегралы:

1) $\int 3^x x\,dx$

2) $\int x^4 \sin(x^5+5)\,dx$

3) $\int \frac{x-1}{x^3+6x^2-7x}\,dx$

4) $\int \cos^5 x\,dx$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{6-4x-2x^2}}\,dx$

6) $\int\limits_0^1 \operatorname{tg}^2 x\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=x^2+4x$ и $y=x+4$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{1-x^4}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=\sin\frac{x}{2}$, $y=\cos\frac{x}{2}$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 19

Найдите интегралы:

1) $\int 2^x(x+9)dx$

2) $\int \frac{x^2}{x^6+4}\,dx$

3) $\int \frac{x-7}{(x+1)^2(x^2-9)}\,dx$

4) $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$

5) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$

6) $\int\limits_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=3-2x-x^2$ и $y=-x-9$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^e \frac{\ln^5 x\,dx}{x}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y=4+\sqrt{x}$, $y=4-\sqrt{x}$, $y=-x+6$.

Вариант 20

Найдите интегралы:

1) $\int 7^{x^7} x^6 dx$

2) $\int \ln\left(x^2+1\right) dx$

3) $\int \frac{11x+16}{(x+3)(x-4)^2}\, dx$

4) $\int \frac{\sin(2x)}{3\cos^2 x+4}\, dx$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\, dx$

6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx$

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = x$, $y = x^2$ и $x = 2$.

Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{7+2x^6}}$.

Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями, заданными следующими равенствами: $y = -\ln x$, $x = 3$, $y = 0$.

Литература

1. Андрианова Т.Н., Волков В.А., Ефимова Т.А., Коломойцева З.Д., Марданов А.М., Павлова М.В., Райнес А.А., Халин В.Г., Черняев П.К. Задачник-практикум по высшей математике: В 2 ч. Ч. I. Интегральное исчисление. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 1994. — 232 с. [http://hdl.handle.net/11701/28676]

2. Барт В.А., Черняев П.К. Индивидуальные задания по математическому анализу: Учеб. пособие. СПб.: ЭФ СПбГУ, 2014. — 32 с. [http://hdl.handle.net/11701/24539]

3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. СПб.: Изд-во «Лань», 2020. — 492 с.

4. Ефимова Т.А. Некоторые методы интегрирования элементарных функций, методическое пособие. СПб.: СПбГУ, 2019. — 32 с. [http://hdl.handle.net/11701/16628]

5. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. М.: Изд-во Высшая школа, 1964. — 684 с.

6. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. СПб.: Изд-во «Лань», 2021. — 728 с.

7. Осипов А.В. Лекции по высшей математике. СПб.: Изд-во С-Петерб. ун-та, 2012. — 311 с. [http://hdl.handle.net/11701/39144]

8. Осипов А.В. Лекции по высшей математике: Учебное пособие. — 2-е изд. испр. — СПб.: Издательство «Лань», 2014. — 320 с. [http://hdl.handle.net/11701/39145]

9. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.2., СПб.: Изд-во «Лань», 2022. — 464 с.