

**Международная научная конференция по механике**

**СЕДЬМЫЕ ПОЛЯХОВСКИЕ ЧТЕНИЯ**

*Конференция посвящается  
110-летию со дня рождения К.И.Страховича*

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

2 - 6 февраля 2015 г.

Санкт-Петербург, Россия

---

**International Scientific Conference on Mechanics**

**THE SEVENTH POLYAKHOV'S READING**

*Conference is dedicated to the  
110<sup>th</sup> anniversary of Konstantin I. Strakhovich*

BOOK OF ABSTRACTS

February 2-6, 2015.

Saint Petersburg, Russia

УДК 531+532+533+534+539  
ББК 22.2  
Ш52

### **Редакционная коллегия:**

*академик РАН Н.Ф. Морозов (СПбГУ)*  
*профессор С.М. Бауэр (СПбГУ)*  
*доцент В.Г.Быков (СПбГУ)*  
*профессор С.А. Зегжда (СПбГУ)*  
*профессор Е.В. Кустова (СПбГУ)*  
*профессор С.К. Матвеев (СПбГУ)*  
*профессор Р.Н. Мирошин (СПбГУ)*  
*профессор Е.А. Нагнибеда (СПбГУ)*  
*доцент Е.Н. Поляхова (СПбГУ)*  
*доцент А.Л. Смирнов (СПбГУ)*  
*профессор А.А. Тихонов (СПбГУ)*  
*профессор П.Е. Товстик (СПбГУ)*  
*профессор С.Б. Филиппов (СПбГУ)*  
*профессор М.П. Юшков (СПбГУ)*

**Седьмые Поляховские чтения:** Тезисы докладов Международной научной конференции по механике, Санкт-Петербург, 2 – 6 февраля 2015 г. – М.: Издатель И.В. Балабанов, 2015. – 307 с.

ISBN 978-5-91563-101-3

В сборник включены тезисы докладов, представленные на Международной научной конференции по механике «Седьмые Поляховские чтения», посвященной 110-летию со дня рождения Константина Ивановича Страховича (1904–1968). Обсуждаются современные проблемы теоретической и прикладной механики, динамики космического полета, механики жидкости и газа, механики деформируемого твердого тела, электромеханики, мехатроники и робототехники, биомеханики, физической механики, а также истории механики

Международная научная конференция по механике «Седьмые Поляховские чтения» проводится при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета и Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 15-01-200070-г.).

ISBN 978-5-91563-101-3

© Коллектив авторов, 2015  
© Санкт-Петербургский  
государственный университет, 2015

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник включает тезисы докладов, представленных на Международной научной конференции по механике «Седьмые Поляховские чтения», посвященной 110-летию со дня рождения Константина Ивановича Страховича (1904-1968). Конференция проводится 2 – 6 февраля 2015 г. в Санкт-Петербурге на базе Санкт-Петербургского государственного университета.

В программу конференции включены пленарные и секционные доклады по следующим направлениям:

- I. Теоретическая и прикладная механика
- II. Динамика естественных и искусственных небесных тел
- III. Гидроаэромеханика
- IV. Механика деформируемого твердого тела
- V. Устойчивость и стабилизация механических и электромеханических систем
- VI. Электромеханика, мехатроника и робототехника
- VII. Микроэлектромеханические системы
- VIII. Биомеханика
- IX. Физическая механика
- X. История механики

**Организатор конференции**  
Санкт-Петербургский государственный университет

## Соорганизаторы конференции

Российская Академия Наук (РАН)  
Национальный Комитет по Теоретической и Прикладной Механике  
Санкт-Петербургский Дом ученых РАН  
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет  
Институт проблем машиноведения РАН  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»  
Балтийский государственный технический университет «Военмех»  
ФГУП Крыловский государственный научный центр  
IEEE Russia (Northwest) Section

## Председатель конференции

Морозов Никита Федорович, академик РАН.

## Организационный комитет конференции

Сопредседатели: Леонов Г.А. (член-корр. РАН), Матвеев С.К., Юшков М.П. (СПбГУ).

Ученые секретари: Быков В.Г., Тихонов А.А. (СПбГУ).

## Члены оргкомитета

Алдошин Г.Т. (БГТУ «Военмех»), Даль Ю.М. (СПбГУ), Кустова Е.В. (СПбГУ), Мирошин Р.Н. (СПбГУ), Нагнибеда Е.А. (СПбГУ), Никитин Г.В. (Дом Ученых РАН), Поляхова Е.Н. (СПбГУ), Рыдалевская М.А. (СПбГУ), Рябинин А.Н. (СПбГУ), Смирнова Л. (СПбГУ), Соловьев С.Ю. (Крыловский центр), Трифоновко Б.В. (СПбГУ), Усков В.Н. (БГТУ «Военмех»), Филиппов С.Б. (СПбГУ), Цибаров В.А. (СПбГУ).

## Научный программный комитет конференции

Бегун П.И. (Россия)	Кривцов А.М. (Россия)	Рыжов Ю.А. (Россия)
Белецкий В.В. (Россия)	Левин В.А. (Россия)	Смирнов Е.М. (Россия)
Блехман И.И. (Россия)	Маркеев А.П. (Россия)	Спасич Д. (Сербия)
Вуйичич В. (Сербия)	Михайлов Г.К. (Россия)	Степанов С.Я. (Россия)
Доличанин Ч. (Сербия)	Михасев Г.И. (Беларусь)	Товстик П.Е. (Россия)
Егоров И.В. (Россия)	Мэй Фунсян (Китай)	Тхай В.Н. (Россия)
Журавлев В.Ф. (Россия)	Пальмов В.А. (Россия)	Федоров М.П. (Россия)
Индейцев Д.А. (Россия)	Папаставридис Дж. (США)	Фомин В.М. (Россия)
Исаев Ю.Н. (Россия)	Паскаль М. (Франция)	Черноусько Ф.Л. (Россия)
Карапетян А.В. (Россия)	Петров Ю.В. (Россия)	Эрикссон А. (Швеция)
Каспер Р. (Германия)	Радев С. (Болгария)	
Козлов В.В. (Россия)	Ребров А.К. (Россия)	

# PREFACE

The book includes the abstracts of papers presented at the International Scientific Conference on Mechanics «The Seventh Polyakhov's Reading» dedicated to the 110<sup>th</sup> anniversary of Konstantin I. Strakhovich (1904-1968). The Conference is held at the Department of Mathematics and Mechanics, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, February 2-6, 2015.

## Conference Topics

- I. Theoretical and Applied Mechanics
- II. Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies
- III. Mechanics of Fluids and Gases
- IV. Mechanics of Solids
- V. Stability and Stabilization of Mechanical and Electromechanical Systems
- VI. Electromechanics, Mechatronics, Robotics
- VII. Microelectromechanical Systems
- VIII. Biomechanics
- IX. Physical Mechanics
- X. History of Mechanics

## Conference organizer

Saint Petersburg State University

## Conference co-organizers

Russian Academy of Sciences  
Russian National Committee on Theoretical and Applied Mechanics  
Saint Petersburg House of Scientists, RAS  
Saint Petersburg State Polytechnical University  
Institute of Problems of Mechanical Engineering, RAS  
Saint-Petersburg Electrotechnical University "LETI"  
Baltic State Technical University "Voenmech"  
Krylov State Research Centre  
IEEE Russia (Northwest)

## Conference Chairman

Nikita F. Morozov, academician of RAS

## Organizing Committee

Co-chairmans: Leonov G.A., corresponding member of RAS, Matveev S.K., Yushkov M.P. (Saint Petersburg University)

Co-chairmans: Bykov V.G., Tikhonov A.A. (Saint Petersburg University)

Members: Aldoshin G.T., Dahl Yu.M., Filippov S.B., Kustova E.V., Miroshin R.N., Morozov V.A., Nagnibeda E.A., Nikitin G.V., Polyakhova E.N., Ryabinin A.N., Rydalevskaya M.A., Smirnov A.L., Solov'ev S.U., Trifonenko B.V., Tsibarov V.A., Uskov V.N.

## Scientific Program Committee

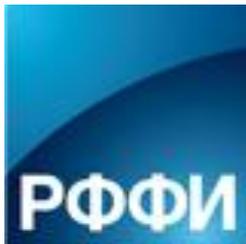
Begun P.I. (Russia)	Kozlov V.V. (Russia)	Rebrov A.K. (Russia)
Beletsky V.V. (Russia)	Krivtsov A.M. (Russia)	Ryzhov Yu.A. (Russia)
Blekhman I.I. (Russia)	Levin V.A. (Russia)	Smirnov E.M. (Russia)
Chernous'ko F.L. (Russia)	Markeev A.P. (Russia)	Spasic D. (Serbia)
Dolicanic C. (Serbia)	Mei Fengxiang (China)	Stepanov S.Ya. (Russia)
Egorov I.V. (Russia)	Mihasev G.I. (Belarus)	Tkhai V.N. (Russia)
Eriksson A. (Sweden)	Mikhailov G.K. (Russia)	Tovstik P.E. (Russia)
Fomin V.M. (Russia)	Pal'mov V.A. (Russia)	Vorobyov S.V. (Russia)
Indeitsev D.A. (Russia)	Papastavridis J. (USA)	Vujicic V. (Serbia)
Isaev Yu.N. (Russia)	Pascal M. (France)	Zhuravlev V.F. (Russia)
Karapetyan A.V. (Russia)	Petrov Yu.V. (Russia)	
Kasper R. (Germany)	Radev S. (Bulgaria)	

## Организации-спонсоры конференции

Международная научная конференция по механике «Седьмые Поляховские чтения», посвященная 110-летию со дня рождения Константина Ивановича Страховича, проводится при финансовой поддержке:



Санкт-Петербургского государственного университета



Российского фонда фундаментальных исследований  
( номер проекта 15-01-200070-г.)



IEEE Russia (Northwest) Section  
(информационно-техническая часть)



ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

---

**PLENARY LECTURES**

**ПАМЯТИ ПРОФЕССОРА К.И. СТРАХОВИЧА  
(К 110-летию со дня рождения)**

**Р.Н. Мирошин, М.П. Юшков**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: miroshin-roman1938@yandex.ru, yushkovmp@mail.ru*

Доклад посвящен 110-летию выдающегося ученого-механика Константина Ивановича Страховича (1904 – 1968). Приводится подробное жизнеописание Константина Ивановича, значение его дружбы с известными учеными того времени Д.А.Вентцелем, Е.С.Вентцель, В.П.Глушко, Б.Н.Окуневым, Н.Н.Поляховым, П.П.Юшковым. Поражает кипучая многогранная организаторская и научно-педагогическая деятельность К.И.Страховича в период с 1925 по 1941 годы. В частности, за семь лет (1934 – 1940 гг.) он издал шесть пионерских монографий в области различных направлений гидроаэромеханики. С 1938 по декабрь 1941 года он заведовал кафедрой гидромеханики математикомеханического факультета Ленинградского университета. После необоснованного ареста и осуждения на 10 лет пребывания в тюрьме К.И.Страхович работал совместно с В.П.Глушко и С.П.Королевым, а затем возглавлял крупный коллектив, создававший один из первых газотурбинных двигателей в СССР.

После полной реабилитации в 1955 г. К.И.Страхович заведовал кафедрой теоретических основ теплотехники Ленинградского политехнического института, был награжден орденом Ленина. Скончался Константин Иванович на 65-ом году жизни после тяжелой болезни.

Текст доклада обсуждался с Л.А.Акуловым, Г.Е.Ивановым, А.И.Кирилловым, М.С.Невинской, А.Н.Штымом, являвшимися учениками Константина Ивановича.

**In Commemoration of Professor K.I. Strakhovich  
(to the 110th anniversary of his birth)**

**R.N. Miroshin, M.P. Yushkov**

*Saint Petersburg State University, Russia*

The paper is dedicated to the 110th anniversary of the birth of the great scientist, specialist in mechanics Konstantin Ivanovich Strakhovich (1904 – 1968). The detailed biography of Konstantin Ivanovich, importance of his friendship with well-known scientists of the time: D.A. Venttsel, E.C. Venttsel, V.P. Glushko, B.N. Okunev, N.N. Polyakhov, P.P. Yushkov are presented. One can't help admiring his many-sided passionate organizational, scientific, and educational activity during the period from 1925 to 1941. In particular, during the seven years (1934 – 1940) he edited six pioneer monographs in the field of various areas of aerohydrodynamics. Since 1938 till December, 1941, he was at the head of the department of hydromechanics of the Mathematics and Mechanics Faculty of the Leningrad University. After the unreasonable arrest and ten years in prison K.I. Strakhovich worked together with V.P. Glushko, S.P. Korolev, and then was at the head of an outstanding team that created one of the first gas turbine engines in the U.S.S.R.

After the full rehabilitation in 1955 K.I. Strakhovich was at the head of the department of fundamentals of thermotechnics of Leningrad Institute of Technology, was awarded the Order of Lenin. Konstantin Ivanovich died at the age of 64 after a serious illness.

The text of the paper has been discussed with L.A. Akulov, G.E. Ivanov, A.I. Kirillov, M.S. Nevinskaya, A.N. Shtym which were the students of Konstantin Ivanovich.

# ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СЖАТИИ

А.К.Беляев<sup>1</sup>, Н.Ф. Морозов<sup>2</sup>, П.Е. Товстик<sup>2</sup>, Т.П. Товстик<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Институт проблем машиноведения РАН, Россия*

<sup>2</sup> *Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: peter.tovstik@mail.ru*

Дается краткий обзор работ по динамической устойчивости тонкого стержня под действием осевого сжатия. При действии кратковременной ударной нагрузки в стержне устанавливается периодический волновой процесс, порождающий параметрические резонансы. В линейном приближении эти резонансы приводят к неограниченному росту амплитуды, а при наличии сопротивлений – к их существенному росту. Введение геометрической нелинейности существенно меняет картину движения. Реализуются устойчивые биения, при которых происходит обмен энергии продольных колебаний и поперечных колебаний. При этом движение не зависит от начальных условий. При наличии сопротивлений амплитуда биений затухает.

При длительном статическом действии силы критическая нагрузка найдена Л.Эйлером. В работе М.А.Лаврентьева и А.Ю.Ишлинского установлено, что при интенсивном нагружении, существенно превосходящем Эйлерову статическую критическую нагрузку, наибольшую скорость роста амплитуды поперечного прогиба имеет форма с большим числом волн в продольном направлении. С ростом поперечного прогиба следует обратиться к геометрически нелинейной постановке. С течением времени форма упругой линии переходит в одну из эластик Эйлера. При этом конечная форма существенно зависит от способа нагружения. Представленные результаты позволяют проследить за эволюцией формы упругой линии.

Установлена возможность появления неустойчивости при внезапно приложенной осевой нагрузке, меньшей эйлеровой. Эта неустойчивость связана с параметрическим резонансом. В линейном приближении амплитуда неограниченно растет, а при малом сопротивлении имеет место существенный рост амплитуды. Введение в рассмотрение нелинейных членов переводит систему в режим биений.

При поддержке РФФИ, гранты 12.01.92000.ННС-а, 13.01.00523.

## Л и т е р а т у р а

1. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при продольном ударе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2009. № 2. С. 105-111.
2. Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф. Динамический подход к задаче Ишлинского—Лаврентьева // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. №5. С.28-33.
3. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при кратковременном продольном ударе // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. № 3. С.131-141.
4. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Поперечные колебания стержня, вызванные продольным ударом // Доклады АН. 2013. Т.452, № 1.
5. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. // ДАН СССР, 1949. Т. 5. № 6.
6. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О динамической потере устойчивости стержня при нагрузке, меньшей Эйлеровой // Доклады АН, 2013. Т.453. №3. С. 282-285.

## Dynamic Stability of a Thin Rod Under Axial Compression

A.K.Belyaev, N.F.Morozov, P.E.Tovstik, T.P.Tovstik

*Institute for Problems in Mechanical Engineering of RAS, Sankt-Petersburg State University. Russia*

In linear approach a short longitudinal impact generates the periodic system of longitudinal waves, which lead to the parametric resonances. To get the finite transversal amplitudes it is necessary to take into account the geometric non-linearity. Then we obtain beatings with the energy exchange of longitudinal and transversal vibrations. In the case of the long-time compression we investigate the evolution of the elastic line from the small to the large deflections. A connection between works by Lavrentiev-Ishlinsky and Euler is established. Also it is shown that the stability loss under axial compression, smaller than the critical Eulerian one, sometimes is possible.

# **Dynamics of Continuum with Variable Structure**

**D.A. Indeitsev, Yu.A. Mochalova**

*Institute of Problems in Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, St-Petersburg, Russia*  
*E-mail: dmitry.indeitsev@gmail.com, yumochalova@yandex.ru*

The note deals with the dynamics of the material with complex internal structure. A two-component continuum model is utilised to this end. The approach allows one to describe the internal evolution processes in materials basing on the Euler equations and the mass balance equations containing the source terms is proposed. The influence of exchange mass between the components on the internal structure of the materials is investigated. The source terms determining the mass transfer between material components are defined. The following examples are delivered: the diffusive growth of thin films, the structured liquids in nanochannels, the metals with impurities and dissolved hydrogen.

# ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ И УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

**В.М. Морозов, В.И. Калёнова**

*НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия*  
*E-mail: moroz@imec.msu.ru, kalen@imec.msu.ru,*

Многие задачи механики и техники, в частности, задачи динамики и управления движущимися объектами, приводят к необходимости исследования нестационарных нелинейных систем и их линеаризованных моделей. Для успешного решения этих задач необходимы эффективные, удобные в применении методы исследования процессов, протекающих в нестационарных линейных системах. Один их конструктивных подходов к исследованию нестационарных линейных систем состоит в выделении таких классов этих систем, которые имеют практическое значение, и для которых можно получать новые теоретические результаты.

Авторами доклада распространено понятие приводимости, введенное А.М.Ляпуновым для линейных однородных нестационарных систем, на нестационарные системы, включающие в себя управляющие воздействия и уравнения измерений (наблюдений) [1-5]. Свойство приводимости нестационарных линейных систем позволяет применять для их исследования простые и хорошо разработанные методы анализа и синтеза систем с постоянными параметрами. Разработанная авторами теория приводимости нестационарных неоднородных систем позволила получить новые результаты по управляемости и наблюдаемости приводимых нестационарных систем и предложить алгоритмы управления и оценивания этих систем, основанные на приведенных стационарных системах.

Сформулирован и доказан ряд теорем об устойчивости линейных нестационарных систем второго порядка определенного класса, содержащих потенциальные, диссипативные и гироскопические силы [2,4]. Как известно, введение произвольных гироскопических и диссипативных сил в устойчивую потенциальную стационарную систему не нарушает ее устойчивости. Для нестационарной потенциальной системы введение гироскопических сил может привести к дестабилизации. Более того, введение диссипативных сил также может привести к неустойчивости в том случае, когда имела место устойчивость в отсутствие диссипации [4].

Применение разработанных теоретических результатов позволило решить ряд прикладных задач из теории гироскопических приборов и космической техники.

## **Л и т е р а т у р а**

1. В.И.Калёнова, В.М.Морозов. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. Физматлит. 2010. 205с.
2. Калёнова В.И.Морозов В.М. О приводимости линейных однородных нестационарных систем второго порядка. ПММ. Т.75. 2011. Вып. 6. С. 923-929.
3. В.И.Калёнова, В.М.Морозов. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением. ПММ. Т.76. 2012. Вып. 4. С.576-588.
4. В.И.Калёнова, В.М.Морозов. О влиянии диссипативных и гироскопических сил на устойчивость линейных нестационарных систем. ПММ. 2013. Т.77. Вып.3. С. 386-397.
5. В.И.Калёнова, В.М.Морозов. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида. Изв. РАН. Теория и Системы Управления. 2013. №3. С.6-15.

## **Stability and Control Problems in Linear Time-Varying Systems**

**V.M. Morozov, V.I. Kalenova**

*Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Russia*

The reducibility concept (in the sense of Ljapunov) of linear homogeneous time-varying (LTV) systems is extended to LTV systems with control and observation systems. On the base of the developed by authors theory the new theoretical results were obtained. Methods of analysis and synthesis for the linear time-varying reducible systems with control and observation are considered. Effectiveness of this theory is demonstrated on some mechanical problems of the gyroscopic theory and space dynamics.

# БИО-ПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ ПОЛИМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**В.В. Ерохин**

*Национальный совет по науке, институт материалов для электроники и магнетизма, Парма, Италия  
E-mail: victor.erokhin@fis.unipr.it*

Понятие «биоподобная система обработки информации» допускает неоднозначную интерпретацию. Это могут быть электронные системы, воспроизводящие свойства нервной системы, компьютеры, используемые для вычислений биохимические реакции, системы, включающие гетероструктуры, состоящие из живых систем и традиционных электронных и/или оптических элементов, и многие другие.

Доклад посвящен краткому обзору работ в данном направлении, выполненных в нашей группе в последние годы.

Реализация электронных нейронных сетей на приборном уровне требует использования определенных приборов, обладающих некоторыми свойствами биологических синапсов. В этой связи, большой интерес представляет органический мемристор – электронный элемент, специально разработанный для построения перестраиваемых сетей [1, 2].

Будут рассмотрены такие характеристики, как архитектура, методы сборки, характеристики. Особое внимание будет уделено работам, выполненным в последние 2 года и направленным на создание компьютерных элементов нового типа (логика с памятью [3], перестраиваемые процессоры, обучение стохастических сетей [4]).

Кроме того, на настоящий момент большое внимание в области нетрадиционных вычислительных устройств уделяется системам, включающим гетероструктуры живых организмов и электронных устройств. В этой связи, большое внимание уделяется плесени *Physalum polycephalum* – одноклеточному организму, способному к выполнению ряда задач, связанных с оптимизацией.

В докладе будут рассмотрены возможности использования данного объекта в качестве биоробота (направленная доставка микроскопических систем в нужное место), а также реализация структур, в которых рост и внутренняя активность плесени влияет на электрические и оптические свойства системы в целом.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Erokhin V, Berzina T., Fontana M.P.* Hybrid electronic device based on polyaniline-polyethylene oxide junction//J. Appl. Phys. 2005. V. 97., 064501.
2. *Erokhin V., Fontana M.P.* Thin film electrochemical memristive systems for bio-inspired computation//J. Computational Theor. Nanosci. 2011. V. 8. 313-330.
3. *Erokhin V., Howard G.D., Adamatzky A.* Organic memristor devices for logic elements with memory//Int. J. Bifurcation and Chaos. 2012. V. 22. 1250283.
4. *Erokhin V., Berzina T., Gorshkov K., Camorani P., Pucci A., Ricci G., Ruggeri G., Sigana R., Schuz A.* Stochastic hybrid 3D matrix: Learning and adaptation of electrical properties//J. Mater. Chem. 2012. V. 22. 22881-22887.

## **Bio-Inspired Systems of the Information Processing Based on Polymeric Elements**

**V. Erokhin**

*CNR-IMEM, Parma, Italy*

The presentation is dedicated to two types of systems: neuromorphic networks based on the organic memristive devices and heterostructures of conducting polymers with living being – slime mold *Physalum polycephalum*.

## **О РОЛИ ДОМА УЧЕНЫХ ИМ. М.ГОРЬКОГО РАН В НАУЧНОЙ ЖИЗНИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА (К 95-ЛЕТИЮ СО ДНЯ ОСНОВАНИЯ)**

**Ш.Х. Солтаханов<sup>1</sup>, А.А. Тихонов<sup>2</sup>, М.П. Юшков<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Грозненский государственный университет, Россия*

<sup>2</sup> *Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: atikhonov@spbu.ru, yushkovmp@mail.ru*

В докладе дается краткая история создания дворца великого князя Владимира Александровича, брата императора Александра III, и создания на его базе в 1920 г. по инициативе М.Горького Дома ученых Академии Наук. В сложные послереволюционные годы Дом ученых много сделал для спасения российской науки. Хозяйственные службы снабжали деятелей науки и культуры всем необходимым для жизни и работы. Всего к Дому ученых было приписано около 6 тысяч человек. В научно-просветительской работе в разные годы участвовали всемирно известные ученые: И.П. Павлов, Л.С. Берг, Н.И. Вавилов, В.И. Вернадский, А.Ф. Иоффе. Первым председателем Совета Дома ученых был ученый-генетик академик Н.И. Вавилов. Поддерживая научную жизнь в городе, Дом ученых поневоле оказывался вовлеченным в политическую борьбу. В этом отношении интересна история развернутой в 1928 г. борьбы математиков-методистов А.Р. Кулишера, Л.А. Лейферта, В.В. Люша, В.И. Милинского, Е.С. Рабиновича, Б.И. Сегала и других членов «Общества математиков-материалистов» при «Ленинградском отделении Коммунистической академии» против председателя Ленинградского математического общества чл.-корр. АН СССР Н.М. Гюнтера, профессоров С.А. Богомолова, А.В. Васильева, Г.М. Мюнца. Результатом этого явилось заявление Н.М. Гюнтера об уходе с поста председателя. С 1930-х годов в Доме ученых начали создаваться научные секции, стали проводиться Всесоюзные и международные научные конференции. В 1932 году Дому ученых присвоили имя М.Горького. В тяжелейшие годы Великой Отечественной войны и блокады Ленинграда Дом ученых не переставал работать и помогал выживать деятелям отечественной науки. Члены Дома ученых получали продовольственные пайки, одежду, обувь, дрова. Для ослабленных и больных при нем был открыт лазарет, где ученые могли лечиться и восстанавливать силы для работы.

Приводится история создания и работы секции теоретической механики, которая в 1989 г. получила имя профессора Н.Н. Поляхова, руководившего ею в течение 32-х лет. Плодотворной работе научных секций способствует блестящее состояние дворца, руководимого в настоящее время Г.В. Никитиным.

## **On the Role of Saint Petersburg House of Scientists RAS in the Scientific Life of Saint Petersburg (on the 95th anniversary of the foundation)**

**Sh.Kh. Soltakhanov<sup>1</sup>, A.A. Tikhonov<sup>2</sup>, M.P. Yushkov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Grozny State University, Russia*

<sup>2</sup> *Saint Petersburg State University, Russia*

The report gives a brief history of the Palace of Grand Duke Vladimir Alexandrovich, brother of Emperor Alexander III, and the history of creation on its base in 1920 on the initiative of M. Gorky the House of scientists of the Academy of Sciences. In difficult years after the Revolution Saint Petersburg House of scientists did much to save Russian science. Household services supplied scientists with everything necessary for living and working. About 6 thousand people were associated with the House of scientists. A lot of internationally renowned scientists, such as I.P. Pavlov, L.S. Berg, N.I. Vavilov, V.I. Vernadsky, A.F. Ioffe participated in the scientific and educational work in Saint Petersburg House of scientists. The first chairman of the Council of the House of Scientists was academician N.I. Vavilov. Since 1930 scientific sections were established at the House of Scientists. All-union and international scientific conferences were held in the palace. In 1932, the House of scientists was named after M. Gorky. In the difficult years of the Great Patriotic War and the Siege of Leningrad the House of Scientists never stopped working and helped to survive Russian scientists. Members of the House of Scientists received food rations, clothing, footwear, wood. The history of creation and activities of the section for theoretical mechanics is discussed. In 1989 this section was named after professor N.N. Polyakhov, who directed it for 32 years. A brilliant state of the palace, led now by G.V. Nikitin, contributes the fruitful work of the sections.

# МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Г.Т. Алдошин, С.П. Яковлев

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова,  
Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: kaf\_b3@bstu.spb.su, yakovlev\_sp@mail.ru

В работе [1] Н.Н. Поляхов, используя установленное Гамильтоном соответствие между геометрической оптикой и динамикой точки, указал на возможность решения ряда задач, связанных с уравнением Шредингера, на основе законов классической механики. В 1931 г. Э. Ферми [2] дал интерпретацию комбинационного рассеивания в спектре углекислого газа, открытого ранее Раманом, на основе квантово-механической теории. Этот эффект взаимодействия колебательных мод между собой, сопровождающегося перекачкой энергии между ними, получил название резонанса Ферми. В докладе методом инвариантной нормализации исследуются нелинейные колебания молекулы  $CO_2$ . При соотношении частот симметричных и деформационных колебаний 2:1 в молекуле возникает резонанс третьего порядка, сопровождающийся взаимодействием колебательных мод между собой, т.е. наблюдается резонанс Ферми. Зависимость потенциальной энергии от симметричной и деформационной координат имеет выраженный двухъямочный характер, рис. 1, а. Из качественного анализа и численного моделирования следует, что в такой системе могут существовать периодические движения вокруг центров равновесия на рис. 1, б. В зависимости от начальных условий при достаточно большой амплитуде происходит перескок решения из одной ямки в другую, и в системе возникает стохастический режим автоколебаний (странный аттрактор), рис. 1, в [3].

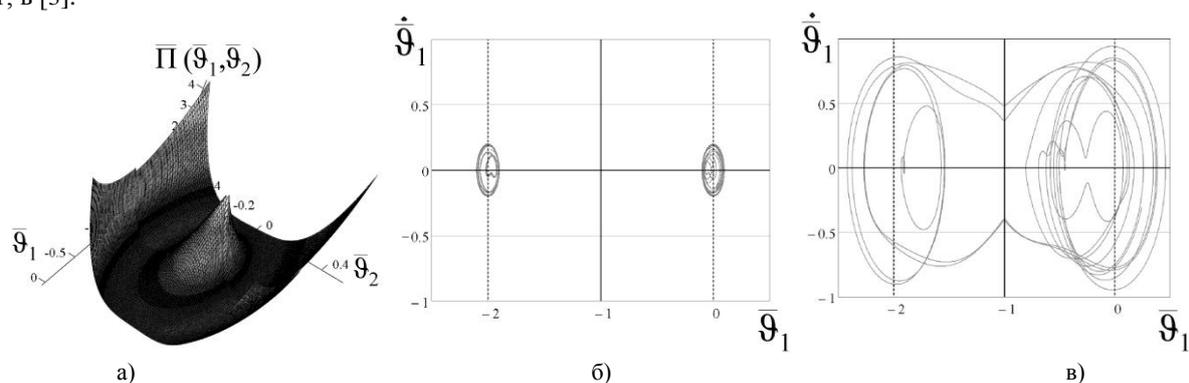


Рис.1. Потенциал (а) и фазовые портреты при начальных отклонениях от положений устойчивого равновесия  $\{\bar{\vartheta}_{1p}; 0\}$ :

б) –  $\bar{\vartheta}_{10} = 0,1$ ;  $\bar{\vartheta}_{1p} = 0$  и  $\bar{\vartheta}_{10} - \bar{\vartheta}_{1p} = -0,1$ ;  $\bar{\vartheta}_{1p} = -2$ ; в) –  $\bar{\vartheta}_{10} = 0,5$ ;  $\bar{\vartheta}_{1p} = 0$ .  $\bar{\vartheta}_{20} = 0,1|\bar{\vartheta}_{10} - \bar{\vartheta}_{1p}|$

## Л и т е р а т у р а

- Поляхов Н.Н. Что привнесли теория относительности и классическая механика в квантовую механику // Институт проблем механики АН СССР Ленингр. гос. университет. М. 1988. Препринт № 330. 38 с.
- E. Fermi. Über den Ramaneffekt des Kohlendioxids // Zs. für Physik. 1931. №71. S.250
- Алдошин Г.Т. Теория линейных и нелинейных колебаний: учебное пособие. – СПб.: Изд-во «Лань», 2013. – 320 с.

## Mechanical Models of Quantum Mechanics Systems Oscillations

G.T. Aldoshin, S.P. Yakovlev

Baltic State Technical University, St.-Petersburg, Russia

Applicability mechanical models to describing regular and chaotic molecular spectra components, showed on carbon dioxide Raman Effect example.

**NIKOLAY NIKOLAEVICH POLYAKHOV (1906 - 1987)**  
**(short personal and scientific biography)**

**N.N. Polyakhov ( Jr.)**

*Санкт-петербургский государственный политехнический университет, Россия*  
*E-mail: pol@astro.spbu.ru*

POLYAKHOV, NIKOLAY NIKOLAEVICH /17 Dec.1906, Kiev - 27 Jan. 1987, Saint-Petersburg/ was a well-known scientist in the field of Aerohydrodynamics, Classical Analytical Mechanics and History of Mechanics, Professor at the Mathematics and Mechanics Department of the Leningrad (now Saint Petersburg) State University, Russia.

He was born on December 17, 1906, in Kiev, Russia, in an engineer's family. In 1923 he entered the Physics-Mathematics Department of the Moscow University and graduated from it in 1929. He began his professional scientific activity and career in Moscow at the Zhoukovsky Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), the widely known center of the aeronautical science. Nikolay Polyakhov worked there under the guidance of Academician Sergei A. Chaplygin and Professor Vladimir P. Vetchinkin. He taught at several Moscow colleges and lectured widely as well.

He moved to Leningrad (now Saint Petersburg again, as prior to 1914) in 1932. Since 1932 he had worked at the Theoretical Mechanics Department of the Leningrad University and since 1938 at the Aerohydrodynamics Division of the Leningrad Polytechnic Institute while continuing to co-operate actively with TsAGI. During the Great Patriotic War of USSR (World War 2) against fascism (1941-1945) he lived and worked in Leningrad. Since 1952, for 25 years and until his death, N. N. Polyakhov continued to be the Professor of the Leningrad (later the St.-Petersburg) State University: since 1952 to 1977 as the Head of the Theoretical and Applied Mechanics Department; since 1977 as the Department Head of the Hydroaerodynamics Department, and the Department Head of the Mechanics Section of the Mathematics and Mechanics Department of this University. In 1954-1965 he was the Dean of this Department. Being a Candidate of Technical Sciences since 1937 (without the dissertation defense), Doctor of Technical Sciences since 1948, Professor since 1950, he was awarded the Honour Degree "Honoured Scientist of Russian Federation" in 1968.

The scientific legacy of N.N.Polyakhov consists of about 90 papers on Aerodynamics and Classical Mechanics, including three books. His main scientific results in the field of Aerodynamics refer to the air propeller theory and the wing theory on the base of vortex systems in steady and unsteady motions cases. In the field of Classical Mechanics he investigated nonholonomic systems with constraints of arbitrary orders, found a new variational principle, which generalized the well-known classical Gauss's principle. He studied the problems of relationships between Classical Newtonian Mechanics and Relativistic Mechanics. He investigated History of Mechanics, especially the L.Euler's and M.V.Ostrogradsky's scientific legacy in Mechanics. N.N.Polyakhov's basic scientific works:

## **References**

1. Theory and Computation of Air Propeller Characteristics. Moscow. 1940. In coauthorship with V.P.Vetchinkin.
2. Theory of Unsteady Movements of a Vortex Surface. Leningrad. 1960.
3. Theoretical Mechanics. Leningrad. 1985. (1 st Ed.) 536 p.; Moscow. 2000 (2 nd Ed.). 592 p. 2012. (3 rd Ed.). Moscow. 593 p. // Educational Textbook. In coauthorship with S.A. Zegida and M.P.Yushkov.
4. Development of Mechanics in St.Petersburg University. In: History of Mechanics in Russia. A.N.Bogolyubov ed., Kiev. 1987.
5. Investigations of Leonhard Euler in Analytical Mechanics during his First St.Petersburg's Period. In: " Leonhard Euler's Ideas Development and Modern Science". N.N.Bogolyubov and al. eds., Moscow. 1988.
6. Selected Works of N.N.Polyakhov. Aerohydrodynamics. St.-Petersburg University Press. 1997. 381 p.p.



# I

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

---

**THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS**

# ОБ УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В S-ПАРАМЕТРАХ

Ч.Б. Доличанин<sup>1</sup>, А.А. Тихонов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Государственный университет г. Нови Пазар, Сербия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: rektorat@np.ac.rs a.tikhonov@spbu.ru

Рассматривается вращательное движение твердого тела относительно центра масс. Для параметризации динамики этого процесса в работе [1] предложено использовать в качестве неизвестных три  $s$ -параметра (модифицированные параметры Родрига-Гамильтона), модуль угловой скорости тела и два угла, определяющие направление вектора угловой скорости тела. Анализируются возможности использования полученных дифференциальных уравнений движения для аналитического и численного исследования вращательного движения твердого тела. Исследуется топологическая структура конфигурационного  $s$ -пространства для уравновешенного тела. Доказывается ограниченность модуля  $s$ -вектора в конфигурационном пространстве. Рассматривается применение полученных уравнений для описания движения тела в среде с сопротивлением.

Для задачи о вращательном движении твердого тела в потенциальных силовых полях предлагается использовать в качестве неизвестных три  $s$ -параметра и соответствующие им три обобщенные импульса. В результате выводится новая форма канонических дифференциальных уравнений, описывающих динамику вращательного движения твердого тела относительно центра масс. Построенные уравнения применяются для аналитического и численного исследования задачи о движении тела в гравитационном и магнитном полях. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 13-01-00347-а и № 13-01-00376-а.

## Л и т е р а т у р а

1. A.A. Tikhonov, C. Dolicanin, T.A. Partalin, I. Arandjelovic A new form of equations for rigid body rotational dynamics // Tehnicki vjesnik/Technical Gazette. 2014. vol. 21. № 6. pp. 1221-1227.

## On Dynamical Equations in S-Parameters for Rigid Body Attitude Motion

С.В. Dolicanin<sup>1</sup>, А.А. Tikhonov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> State University of Novi Pazar, Serbia

<sup>2</sup> St. Petersburg State University, Russia

In the paper, the attitude motion of a rigid body is under consideration. A new forms of differential equations for rigid body attitude dynamics are discussed. Three  $s$ -parameters (modified Rodrigues-Hamilton parameters) and three angular velocity parameters are used as unknown variables. The usage of constructed differential equations for analytical investigation and computer modeling of a rigid body attitude motion is analyzed. The topological structure of configurational  $s$ -manifold for a balanced rigid body is investigated. The boundedness of  $s$ -vector in configurational space is shown. An example of the use of constructed equations to describe the rotational motion of a rigid body in a resisting medium is considered.

Another approach is suggested for the problem of rigid body attitude motion in potential force fields. Three  $s$ -parameters and corresponding three generalized momenta are used as unknown variables. As a result a new form of canonical differential equations for rigid body attitude dynamics is obtained. Built equations are suitable for analytical and numerical studying the problem of rigid body dynamics in gravitational and magnetic fields.

# A New Model of Dry Friction Oscillator : Periodic Motions with Overshooting Parts

M. Pascal<sup>1</sup>, S.Ya. Stepanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Universite d'Evry Val d'Essonne, France*

<sup>2</sup> *Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre, Moscow, Russia*  
*E-mail: madeleine.pascal3@wanadoo.fr, stepsj@ya.ru*

We consider a model of dry friction oscillator which consists of two masses ( $m_1, m_2$ ) connected by two linear springs of stiffness ( $k_1, k_2$ ). The masses are in contact with a driving belt moving at a constant velocity. Friction forces ( $F_1, F_2$ ) act between the masses and the belt. These friction forces are obtained from Coulomb's laws.

The corresponding dynamical model is a piecewise-linear system and all possible motions of the masses are composed of phases during which the velocity of the mass is less than the velocity of the belt (slipping motion), or phases during which the velocity of the mass is exactly the velocity of the belt (sticking motion) and at last, phases during which the velocity of the mass is greater than the velocity of the belt (overshooting motion). For each kind of motion, the close form solution is known. The dynamical behaviour of the system is very complex and can include several phases of these motions. However, it is possible to obtain by analytical methods several kinds of periodic orbits, involving a set of transitions between the various configurations of the system.

In the past [1], two sets of periodic solutions were obtained: The first set includes for each period, a global slip motion followed by a phase where one of the mass performs a slipping motion while the other one performs a sticking motion. An interesting property of symmetry is proved for this orbit. A second set of periodic orbits involves for each period, a global sticking phase followed by three other kinds of motions (slip of  $m_1$ , stick of  $m_2$ , global slip motion, stick of  $m_1$ , slip of  $m_2$ ).

In this new investigation, another kinds of periodic orbits including a phase of overshooting motion for one of the masses are found by analytical methods. In the past, this kind of motions has been observed only for more complex friction characteristics than Coulomb's ones. Moreover, it is easy to show that this kind of orbits is not possible in the case of a one degree of freedom system with Coulomb's laws of friction. We prove that for the two degrees of freedom system considered, several kinds of periodic orbits including a phase of overshooting motions of  $m_1$  or  $m_2$  can be obtained.

## References

1 *M.Pascal*. Two models of non smooth dynamical systems // Int.J. of Bifurcation and Chaos, 21,(10), (2011), 2853-2860.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КУРСА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

**С.А. Корнеев, И.Г. Коляри, С.П. Андросов**

*ОмГТУ, Омск, Россия  
E-mail: Cagliari@list.ru*

В решении задач по дисциплине «Сопротивление материалов» одним из основных вопросов является построение графиков внутренних силовых факторов (ВСФ), называемых эпюрами. ВСФ используются для определения напряжений в поперечных сечениях элементов конструкций и оценки их прочности. Этому вопросу, в связи с важностью приобретения навыков при обучении в технических вузах, уделяется особое внимание. В курсе дисциплины при изучении материала о построении эпюр излагаются различные методы, которые позволяют обойти непосредственное решение дифференциальных уравнений [1]: метод сил, метод начальных параметров и другие.

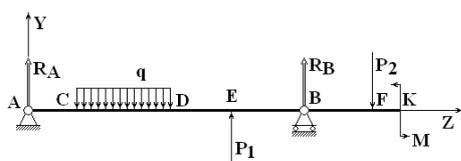


Рис. 1. Рассматриваемая модельная задача.

В данной работе во главу угла ставится написание дифференциальных уравнений, отображающих внешнюю нагрузку и решение этих дифференциальных уравнений как аналитически, так и численно. Следующим этапом предлагается использовать богатый опыт математического подхода использования преобразования Лапласа [2] для постановки задачи и ее решения в модельной (учебной) конструкции либо аналитически, либо используя стандартные пакеты для решения систем дифференциальных уравнений. При таком подходе нет необходимости делить конструкцию на участки, и появляется возможность записать уравнения для всей конструкции в целом. Дифференциальная зависимость между продольной силой и интенсивностью погонной осевой

нагрузки  $q(z)$ , имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{dQ(z)}{dz} = q(z) \\ \frac{dM(z)}{dz} = -M + Q(z) \end{cases}$$

Так, например, для конструкции (см. рис.1) можно записать систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dQ(z)}{dz} = R_A \delta_{(z-Z_A)} - q_* [H_{(z-Z_C)} - H_{(z-Z_D)}] + P_1 \delta_{(z-Z_E)} - P_2 \delta_{(z-Z_F)} + R_B \delta_{(z-Z_B)} \\ \frac{dM(z)}{dz} = -M \delta_{(z-Z_K)} + Q(z) \end{cases}$$

с условием:  $M(Z_A = 0) = M(Z_B) = 0$ ; где  $\delta_{(z-z_i)}$  – дельта-функция Дирака,  $H_{(z-z_i)}$  – функция Хевисайда, при заданных:  $P_i$  – внешние силы;  $M$  – момент, действующий в т.К;  $q$  – плотность погонной нагрузки на участке CD;  $R_i$  – реакции опор. Решая систему уравнений аналитически [2] или численно, или с помощью какого-либо известного пакета (Maple, Mathcad), получим эпюры: продольных нагрузок  $Q = Q(z)$  и моментов  $M = M(z)$ .

## Л и т е р а т у р а

1. Федосеев В.И. Сопротивление материалов» / В.И.Федосеев. - М., Наука, 1986. – 512 с.
2. М.А. Лаврентьев. Методы теории функций комплексного переменного / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. М., Наука, 1957. – 688 с.

## Use of Operational Calculation in the Solution of Problems of the Course of Resistance of Materials

**S.A. Korneev, I.G. Kolyari, S.P. Androsov**

*OmSTU, Omsk, Russia*

In this work writing of the differential equations displaying external loading and the solution of these differential equations either analytically, or in number is regarded as of paramount importance; also it is offered to make use of a vast experience of mathematical approach of use of transformation of Laplace.

# ПОСТРОЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ НЕАВТОНОМНЫХ ИНТЕГРАЛОВ КВАЗИКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ ИЛИ ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

**А.Е. Байков**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия*

*E-mail: alexbaikov16@gmail.com*

Рассматриваются неконсервативные механические системы с одной или двумя степенями свободы, где кроме консервативных сил действуют малые неконсервативные позиционные силы и малые диссипативные силы вязкого трения. Предполагается, что уравнения движения невозмущенной системы (в отсутствие неконсервативных позиционных и диссипативных сил) имеет вид интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы.

В квазиконсервативных системах с одной степенью свободы неавтономные интегралы можно использовать для построения предельных циклов, исследования устойчивости, оценки области и времени притяжения предельных циклов. С помощью техники неавтономных интегралов мы обобщаем результаты книги [1] по оценке числа предельных циклов систем с полиномиальными гамильтонианами и возмущениями. Для систем с двумя степенями свободы метод позволяет строить инвариантные циклы или торы, исследовать устойчивость и область притяжения.

Предлагается два способа построения неавтономных интегралов. Первый способ относится к асимптотическому методу усреднения Крылова-Боголюбова: неавтономный интеграл строится в виде (формального) ряда по малому параметру определенного вида; коэффициенты ряда определяются из цепочки дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Доказывается, что построенный ряд асимптотически близок к истинному неавтономному интегралу, порожденному тем же интегралом невозмущенной системы. Заметим, что классический метод усреднения дает аналогичную информацию о возмущенной системе, однако для дальнейшего анализа приходится исследовать усредненную систему. Метод неавтономных интегралов свободен от этого недостатка.

Второй способ построения неавтономных интегралов происходит из метода ускоренной сходимости [2]. Он эффективен для квазиконсервативных систем, где отсутствуют диссипативные силы – в этой ситуации не работают наши теоремы об асимптотическом приближении из метода усреднения.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Морозов А.Д.* Резонансы циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2005. 424 с
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1969. 248 с.

## **Non-Autonomous Integrals of Quasi-Conservative System with One or Two Degrees of Freedom: Construction and Application**

**A.E. Baikov**

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia*

Quasi-conservative mechanical system with one or two degrees of freedom are considered. It is assumed that the unperturbed system is integrable. Non-autonomous integrals can be used for limit cycles or tori construction, for investigation of stability, for estimate domain and time attraction. Two methods are proposed for constructing non-autonomous integrals.

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ, НАГРУЖЕННОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ

А.Ю. Майоров, А.Е. Байков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия  
E-mail: ylam123@gmail.com, alexbaikov16@gmail.com

Рассматривается трёхзвенный стержневой механизм, состоящий из одинаковых однородных стержней, который находится на гладкой горизонтальной плоскости  $AXY$ . На свободный конец третьего стержня действует следящая сила  $F$ . Твёрдые стержни, имеющие одинаковую длину  $l$  и массу  $m$ , соединены идеальными сферическими шарнирами: первый стержень прикреплен таким шарниром к неподвижной стенке. Кроме шарниров стержни соединены упругими спиральными пружинами с коэффициентом жёсткости  $c$ . Спиральные пружины также создают момент демпфирования, противоположный относительной угловой скорости, с коэффициентом демпфирования  $b$ . Данная механическая система может служить дискретной моделью вязкоупругого стержня, на свободный конец которого действует следящая сила.

Составлены и обезразмерены уравнения движения, найдено единственное положение равновесия. Для исследования устойчивости положения равновесия записаны уравнения возмущённого движения, проведена их линеаризация, а затем произведён линейный анализ устойчивости в двух случаях: при отсутствии демпфирования в пружинах и при его наличии. В первом случае с помощью техники, разработанной в [1], получены условия устойчивости равновесия в виде трансцендентных неравенств. Построены области устойчивости в пространстве двух безразмерных параметров системы.

Исследование влияния сил демпфирования в пружинах разбивается на два этапа. На первом этапе силы демпфирования предполагаются малыми, что даёт возможность применить теорию возмущений. Исследуется эффект Циглера, когда устойчивое в отсутствие диссипации положение равновесия теряет устойчивость при добавлении сил вязкого трения (демпфирования), сколь угодно малых по величине. Ранее был построен критерий асимптотической устойчивости равновесия неконсервативной системы с малыми диссипативными силами и, как следствие, необходимое и достаточное условие эффекта Циглера [2]. При этом частоты малых колебаний предполагались известными. На основании этих результатов получены условия асимптотической устойчивости равновесия, когда силы демпфирования малы.

На втором этапе исследовалось влияние больших сил трения. Предложен метод, основанный на понятии критического коэффициента демпфирования, и сделан полный анализ устойчивости положения равновесия трёхзвенной стержневой системы.

## Л и т е р а т у р а

1. Брюно А. Д. Множество устойчивости многопараметрических задач. // Препринт ИМП им. М. В. Келдыша, Москва, 2010, 14 с.
2. Байков А. Е., Красильников П. С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе. // ПММ. 2010. Т. 74, Вып. 1. С. 74 – 88.

## On the Stability of Rod-Like System with Three Degrees of Freedom under the Action of Tracking Force

A. U. Mayorov, A. E. Baikov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia

The destabilization of the stable equilibrium position of a non-conservative system with three degrees of freedom under the action of a small linear viscous friction force is considered. Stability of the three-link rod system's equilibrium position is investigated, when there is no dissipative force. Zigler's area and criterion for the stability of the equilibrium position of a system with three degrees of freedom, in which the friction forces take small values, are constructed.

# КОЛЕБАНИЯ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ИДЕНТИЧНЫХ СИСТЕМ

**И.Н. Барабанов, В.Н. Тхай**

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия,

E-mail: ivbar@ipu.ru, tkhai@ipu.ru

Рассматривается гладкая система следующего вида:

$$\dot{x}^s = X^s(x^s) + \varepsilon \tilde{X}^s(\varepsilon, x^1, \dots, x^m), \quad x^s \in R^{n_s}, \quad s = 1, \dots, m, \quad (1)$$

– модель, содержащая связанные подсистемы (МССП). Такие системы введены в [1], где предложен «естественный подход» к изучению динамики МССП, поставлены задачи о колебаниях, их устойчивости, бифуркации, стабилизации и резонансе.

Предполагается, что несвязанная система (система (1) при  $\varepsilon = 0$ ) допускает одночастотные колебания так, что  $s$ -я подсистема ( $s = 1, \dots, m$ ) имеет семейство колебаний по параметру  $h_s$ , период колебаний  $T_s$  – монотонная функция  $h_s$ , а значению  $h^*$  векторного параметра  $h = (h_1, \dots, h_m)$  отвечает колебание всей несвязанной системы.

В настоящей работе рассматривается случай, когда несвязанная система состоит из идентичных подсистем, т.е.  $X^1 = \dots = X^m$ . Показывается, что, как и в работе [1], вопрос о существовании колебания в системе (1) приводит к необходимым условиям вида

$$g(h^*) = 0, \quad (2)$$

где функция  $g(h)$  определяется через функции  $\tilde{X}$ , а вместо переменных  $x^1, \dots, x^m$  подставлена функция  $\varphi(h, t)$  – колебание в подсистеме. Условия (2) представляет собой систему из  $m$  алгебраических уравнений относительно  $m$ -мерного параметра  $h$ . Однако, в отличие от ситуации работы [1], система (2) не имеет простого корня.

Находятся достаточные условия существования колебаний МССП. Приводятся примеры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00347, № 13-01-00376) и Программы 14 ОЭММПУ РАН.

## Л и т е р а т у р а

1. Тхай В.Н. Модель, содержащая связанные подсистемы // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 32-41.

## Oscillations of Identical Weakly Coupled Systems

**I.N. Barabanov, V.N. Tkhai**

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

For coupled systems with identical subsystems sufficient conditions of periodic solutions are found.

# ПРОБЛЕМА ОСОБЫХ ПОЛОЖЕНИЙ В ДИНАМИКЕ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

**А.Б. Бячков**

*Пермский государственный научный исследовательский университет, Россия*

*E-mail: abb@rambler.ru*

В докладе рассматриваются проблемы возникновения особых положений при моделировании динамики связанных механических систем.

Рассматривается решение задач учёта дополнительно наложенных связей путём построения системы независимых вариаций скоростей (метод Маджи [1]). При выборе новых кинематических характеристик системы возникают ситуации, когда при определённых значениях координат новые независимые кинематические характеристики не могут быть выражены через зависимые однозначно. Такие положения, как правило, соответствуют понятию «особые положения», поскольку бесконечно малым перемещениям одних (ведущих) звеньев механической системы отвечают несколько возможных бесконечно малых перемещений других (ведомых) звеньев.

Известно, что можно выбрать так новые кинематические характеристики, чтобы подобные особые точки или выходили за область конструктивно возможных изменений координат, или от них можно было избавиться вовсе [2].

Обычно, особые положения механической системы изучаются на основе анализа якобиана связей, и устраняются путём подбора базисных векторов подпространства реакций. В докладе показано что, если исследователя интересует полное состояние системы, в том числе значения реакций связей, следует обращать внимание на полный базис пространства [3].

Рассматриваемые положения иллюстрируются примерами механических систем.

## **Л и т е р а т у р а**

1. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления. М.: Наука. 2005. 269 с.
2. Лилов Л.К. Моделирование систем связанных тел. М.: Наука. 1993. 272 с.
3. Величенко В.В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. М.: Наука, 1988, 279 с

## **Problem of Particular Configuration in Constrained System Dynamics**

**A.B. Biachkov**

*Perm State University, Russia,*

In the report the problem of generation of particular configuration in constrained system dynamics is considered. The solution consists in the analysis of orthogonal and tangential subspaces to the configuration manifold of the constrained system. Examples are presented

# ON SOME BIFURCATIONS NEAR RESONANT HOPF–HOPF INTERACTION

**D. Yu. Volkov<sup>1</sup>, K.V. Galunova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Mathematics and mechanics faculty, St.Petersburg State University, Russia*

<sup>2</sup> *Institute of International Educational Programs,*

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia*

*E-mail: dmitrivolkov@mail.ru*

Let us consider a four - dimensional  $C^k$  smooth system depending on parameters.

$$\dot{x} = F(x, \mu) = A(\mu)x + G(x, \mu), \quad (1)$$

where  $F(0, \mu) = 0$  and  $F(x, \mu)$  is a  $C^k$  smooth function,  $G(x, \mu) = O(|x|^2)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^3$ . Suppose the matrix  $A(\mu)$  has two pairs of simple complex - conjugate eigenvalues

$$\lambda_{1,4}(\mu) = \alpha_1(\mu) \pm i\omega_1(\mu), \lambda_{2,3} = \alpha_2(\mu) \pm i\omega_2(\mu),$$

for all sufficiently small  $\mu$ , where  $\alpha_{1,2}$  and  $\omega_{1,2}$  are smooth functions of  $\mu$  and

$$\alpha_{1,2}(0) = 0, \quad \omega_1(0) > 0, \quad \omega_2(0) = 2\omega_1(0).$$

We refer to (1) as a Hopf-Hopf interaction with 2:1 resonance. Our interest in this interaction is due to their role in applications. We will discuss local bifurcations arising in generic unfoldings of equilibrium point  $x = 0$  in system (1). Some global of the bifurcations diagram will also treated. The most complete previous works to date on the 2:1 resonance interaction are that of [3], [4]. The dynamics of this system is (still only) partially understood. We derive truncated normal form of (1):

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 &= \alpha_1(\mu)\rho_1 + \cos(\phi_2 - 2\phi_1 + \theta_1)\rho_1\rho_2 + \rho_1(a_{11}\rho_1^2 + a_{12}\rho_2^2) + \Phi_1(\rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2, \mu) \\ \dot{\rho}_2 &= \alpha_2(\mu)\rho_2 + \cos(-\phi_2 + 2\phi_1 + \theta_2)\rho_1^2 + \rho_2(a_{21}\rho_1^2 + a_{22}\rho_2^2) + \Phi_2(\rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2, \mu) \\ \dot{\phi}_1 &= \omega_1(\mu) + \sin(\phi_2 - 2\phi_1 + \theta_1)\rho_2 + (b_{11}\rho_1^2 + b_{12}\rho_2^2) + \Psi_1(\rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2, \mu) \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2(\mu) + \sin(-\phi_2 + 2\phi_1 + \theta_2)\rho_1^2 / \rho_2 + (b_{21}\rho_1^2 + b_{22}\rho_2^2) + \Psi_2(\rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2, \mu) \end{cases} \quad (2)$$

Due to the resonance 2 : 1 between the frequencies  $\omega_1$  and  $\omega_2$  nonlinear terms of the normal form depend only on the relative phase  $\varphi = \phi_2 - 2\phi_1$ . Let us define new variables

$$X = \rho_2 \cos(\psi), \quad Y = \rho_2 \sin(\psi), \quad \psi = \phi_2 - 2\phi_1 + \theta_1, \quad Z = \rho_1^2.$$

The first three equations of system (2) take the form

$$\begin{cases} \dot{X} = \alpha_2 X - \nu Y + \cos(\theta_0)Z + 2Y^2, \\ \dot{Y} = \nu X + \alpha_2 Y + \sin(\theta_0)Z - 2XY, \\ \dot{Z} = 2(\alpha_1 + X)Z. \end{cases} \quad (3)$$

where  $\theta_0 = \theta_1 + \theta_2$ . The three-dimensional system (3) is the main object of study in this paper. In the case  $\theta_0 = \pi$  the system (3) is isomorphic to the system of equations governing second-harmonic generation in nonlinear optics [1] and system of resonant interaction of waves in a plasma [2],[5]. It has been shown that eqs.(3) with  $\theta_0 = \pi$  demonstrate period-doubling cascades and chaotic attractor [2],[5]. We consider system (4) with any  $\theta_0$ . A discussion of the bifurcation diagram is presented.

## References

1. *Akhmanov S., Khokhlov R.* Problems of Nonlinear Optics, Gordon and Breach, New-York, 1972
2. *N. Bussac.* The Nonlinear three-wave system. Strange attractors and asymptotic solutions, Physica Scripta, 1982, v. T2/1, 110-118.
3. *E. Knobloch, R.E. Proctor.* The Double Hopf bifurcation with [Trial mode] resonance. Proc.R.Soc.Lond. A 415, 61-90(1988)
4. *V.G. LeBlanc, W.F. Langford.* Classification and unfoldings of 1:2 resonant Hopf bifurcation. Arch.Rational Mech. Anal. 136(1996), 305-357
5. *J.M. Wersinger, J.M. Finn, Edward Ott.* Bifurcation and strange behavior in instability saturation by nonlinear three-wave mode coupling Physics of Fluids, 1980, 23, 1142-1164.

# ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ КОЭНЕРГИИ К ОПИСАНИЮ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

**В.А. Диевский**

*Военная академия материально-технического обеспечения, Санкт-Петербург, Россия*

*E-mail: victor.dievsky@gmail.com*

Рассматривается система, состоящая из материальной точки массы  $m$  и присоединяющейся к ней (или отделившейся) за время  $dt$  элементарной массы  $dm$ . Пусть абсолютные скорости масс  $m$  и  $dm$  перед моментом соединения равны соответственно  $\bar{v}$  и  $\bar{u}$  ( $\bar{u}_r = \bar{u} - \bar{v}$  – относительная скорость), а после их соединения скорость общей массы  $m+dm$  становится равной  $\bar{v} + d\bar{v}$ ; внешние силы отсутствуют.

Тогда получается известное уравнение Мещерского:  $m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \bar{u}_r$ , где  $\bar{R} = \frac{dm}{dt} \bar{u}_r$  – реактивная

сила для массы  $m$ . Отсюда при  $\bar{u}_r = const$  и  $v_0=0$ :  $\bar{v} = \bar{u}_r \ln \frac{m}{m_0}$  – формула Циолковского.

В случае переменной массы известные теоремы об изменении кинетической энергии, количества движения и кинетического момента оказываются неверными, в частности, производная от кинетической энергии массы  $m$  не равна мощности реактивной силы.

Для описания явления может быть также использован подход, развитый в электромеханике [1], где вводятся две энергетические характеристики: запасённая магнитная энергия и коэнергия. В случае движения точки переменной массы можно аналогично ввести две энергетические характеристики:

$T' = \int_0^{\bar{v}} \bar{Q} d\bar{v}$  и  $T'' = \int_0^{\bar{Q}} \bar{v} d\bar{Q}$ , первую из которых можно назвать коэнергией. При этом  $T = \frac{T' + T''}{2}$ , а если

$m=const$ , то  $T' = T'' = T$ . Тогда  $\frac{dT'_m}{dt} = \frac{dm}{dt} \bar{u}_r \bar{v} = \bar{R} \bar{v} = N_R$  – производная от коэнергии массы  $m$  равна

мощности реактивной силы. Если  $\bar{u}_r = const$ , то  $T'_m = m u_r^2 \left( \ln \frac{m}{m_0} + \frac{m_0}{m} - 1 \right) = \int_0^t N_R dt = A_R$  – приращение

коэнергии равно работе реактивной силы. При этом  $T'_m \neq T_m = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m u_r^2 \ln^2 \frac{m}{m_0}$ .

Аналогично можно ввести две характеристики количества движения:  $\bar{Q}' = \int_0^{\bar{v}} m d\bar{v}$  и  $\bar{Q}'' = \int_{m_0}^m \bar{v} dm$ ,

первую из которых можно назвать коимпульсом. При этом  $\bar{Q} = \bar{Q}' + \bar{Q}''$ , и если  $m=const$ , то  $\bar{Q}' = \bar{Q}$  и

$\bar{Q}'' = 0$ . В случае движения точки переменной массы:  $\frac{d\bar{Q}'_m}{dt} = \bar{R}$  – производная от коимпульса равна реак-

тивной силе, а при  $\bar{u}_r = const$ :  $\bar{Q}'_m = (m - m_0) \bar{u}_r = \int_0^t \bar{R} dt = \bar{S}_R$  – приращение коимпульса равно импуль-

су реактивной силы. При этом  $\bar{Q}'_m \neq \bar{Q}_m = m \bar{v} = m \bar{u}_r \ln \frac{m}{m_0}$ .

Таким образом, в случае движения точки переменной массы действующая на неё реактивная сила определяет изменение не кинетической энергии, количества движения точки и момента количества движения (кинетического момента), а её коэнергии и коимпульса.

## Л и т е р а т у р а

1. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханическое преобразование энергии, М., «Энергия», 1964.

## Applying the Coenergy Concept to the Description of the Variable Mass Point Movement

**V. A. Dievskii**

*Military Academy of Material and Technical Provision, St. Petersburg, Russia*

The presented work shows that in the case of a variable mass point movement the applied reactive force influences its coenergy and linear comomentum instead of energy and linear momentum.

# СТАТИКА И ДИНАМИКА СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ОРТОТРОПНОГО АСИММЕТРИЧНОГО ТРЕНИЯ

**Н.Н. Дмитриев, О.А. Силантьева**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: dn7@rambler.ru, olga.silantyeva@gmail.com*

Сухое трение, для которого сила трения зависит от направления скольжения, называется анизотропным. Представляют также интерес условия фрикционного взаимодействия, когда коэффициент трения зависит от знака скорости скольжения, т.е. изменяется при реверсировании (изменении направления движения на противоположное). В этом случае трение называется асимметричным.

*Утверждение.* Пусть на материальную точку, находящуюся на плоскости, действует активная сила  $P = P(\cos \delta i + \sin \delta j)$ , где  $P$  - величина этой силы,  $\delta$  - угол, отсчитываемый от оси  $Ox$  против часовой стрелки, задающий ее направление. Между точкой и плоскостью возникает сила асимметричного ортотропного трения: коэффициенты трения вдоль положительных направлений осей  $Ox$  и  $Oy$  -  $f_{x+}$  и  $f_{y+}$ , в противоположных направлениях -  $f_{x-}$  и  $f_{y-}$  соответственно. Считаем, что  $f_{x+} \geq f_{x-}$ ,  $f_{y+} \geq f_{y-}$

и  $f_{y+} \geq f_{x+}$ . Тогда условия начала движения имеют вид: 
$$\begin{cases} P \sin(\delta - \vartheta) - N \mu_i \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \\ P \cos(\delta - \vartheta) - N(f_{xi} + \mu_i \sin^2 \vartheta) > 0 \end{cases}$$

$i = I, II, III, IV$ , где  $f_{xI} = f_{xIV} = f_{x0} + f_{x1} = f_{x+} > 0$ ,  $f_{xII} = f_{xIII} = f_{x0} - f_{x1} = f_{x-} > 0$ ,

$\mu_I = \mu_0 + \mu_1 > 0$ ,  $\mu_{II} = \mu_0 + 2f_{x1} + \mu_1 > 0$ ,  $\mu_{III} = \mu_0 - \mu_1 < 0$  или  $> 0$ ,  $\mu_{IV} = \mu_0 - \mu_1 - 2f_{x1} < 0$  или  $> 0$  и соответствуют квадранту (обозначенному римскими цифрами), в котором лежит вектор силы  $P$ . Направление начального движения определяется углом  $\vartheta_s$ , который принадлежит следующим интервалам:

а)  $\delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\vartheta_s \in \left(\arctg \frac{f_{xI}}{f_{xI} + \mu_I} \operatorname{tg} \delta, \delta\right) \subset [0, \delta]$ , б)  $\delta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $\vartheta_s \in \left[\delta, \pi - \arctg \frac{f_{xII}}{f_{xII} + \mu_{II}} |\operatorname{tg} \delta|\right] \subset [\delta, \pi]$ ,

в)  $\delta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ,  $\vartheta_s \in \left[\pi + \arctg \frac{f_{xIII}}{f_{xIII} + \mu_{III}} \operatorname{tg} \delta, \delta\right] \subset [\pi, \delta]$   
при  $\mu_{III} > 0$   
при  $\mu_{III} < 0$   $\vartheta_s \in \left[\delta, \pi + \arctg \frac{f_{xIII}}{f_{xIII} + \mu_{III}} \operatorname{tg} \delta\right] \subset \left[\delta, \frac{3\pi}{2}\right]$ ,

г)  $\delta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ,  $\vartheta_s \in \left[\delta, 2\pi - \arctg \frac{f_{xIV}}{f_{xIV} + \mu_{IV}} |\operatorname{tg} \delta|\right] \subset [\delta, 2\pi]$   
при  $\mu_{IV} > 0$   
при  $\mu_{IV} < 0$   $\vartheta_s \in \left[\frac{3\pi}{2} + \arctg \frac{f_{xIV}}{f_{xIV} + \mu_{IV}} \operatorname{tg} \delta, \delta\right] \subset \left[\frac{3\pi}{2}, \delta\right]$ .

Решены задачи о равновесии и движении двухмассовой системы, кольца и диска по плоскости при ортотропном асимметричном трении.

## Л и т е р а т у р а

1. *Дмитриев Н.Н.* Движение материальной точки и равновесие двухмассовой системы в условиях асимметричного ортотропного трения// Трение и износ. 2013. Т34. №6. С. 565-574

## Static and Dynamics of Systems under Asymmetric Orthotropic Friction

**N.N.Dmitriev, O.A.Silantyeva**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The effect of asymmetric orthotropic friction on the inertial motion of a mass point is studied. A theorem about the beginning of motion of a mass point due to an active force under asymmetric friction is proved. The equilibrium problem and the problem of the beginning of motion for a two-mass system are also solved.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОНКОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С АНИЗОТРОПНЫМ ТРЕНИЕМ

О.А. Силантьева, Н.Н. Дмитриев

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: olga.silantyeva@gmail.com, dn7@rambler.ru*

В данной работе рассмотрено влияние анизотропных свойств силы трения на характер движения плоского тела при различных законах распределения давления. Область контакта принята эллиптической. Выведены дифференциальные уравнения движения пластины. Исследована зависимость расстояния от центра эллипса до мгновенного центра скоростей непосредственно перед моментом остановки, а также связь между линейной скоростью центра площадки и угловой скоростью и моментом инерции. Показано, что скольжение и вращение прекращаются одновременно.

Данная работа обобщает результаты, полученные для круговой пластины при различных законах распределения давления и ортотропных свойствах трения [1, 2, 3]. В случае эллиптической пластины результаты [4] существенно расширены и дополнены рядом новых численных результатов. Система уравнений получена в несколько иной форме, чем в [4], что упростило её анализ. Исследовано поведение нормальной и тангенциальной силы. Показано, что нормальная составляющая силы трения стремится к нулю при приближении решения к точке останова. Проведено сравнение поведения эллиптической пластины и диска. Во всех случаях распределения давления при одних и тех же значениях коэффициентов трения отношение линейной и угловой скоростей центра эллиптической пластины непосредственно перед остановкой меньше, чем для диска и существенно зависит от начальной ориентации пластины.

## Л и т е р а т у р а

1. *Дмитриев Н.Н.* Скольжение твёрдого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Часть 1. Равномерное распределение нагрузки // Трение и износ. 2009. Т. 30, №4. С. 317-326.
2. *Дмитриев Н.Н.* Скольжение твёрдого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Часть 2. Распределение давления по закону Буссинеска // Трение и износ. 2009. Т. 30, №5. С. 429-439.
3. *Дмитриев Н.Н.* Скольжение твёрдого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Часть 3. Распределение давления по закону Герца // Трение и износ. 2010. Т. 31, №4. С. 342-352.
4. *Dmitriev N.N., Silantyeva O.A.* About the movement of a solid body on a plane surface in accordance with elliptic contact area and anisotropic friction force // Proceedings of jointly organised WCCM XI, ECCM V, ECFD VI. Spain, Barcelona: International Center For Numerical Methods in Engineering (CIMNE), 20-25 July 2014. P. 4440-4452.

## Movement Evolution of Thin Elliptical Plate on a Plane Surface under Anisotropic Friction Forces

O.A. Silantyeva, N.N. Dmitriev

*Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia,*

We studied influence of anisotropy of friction forces on movement of thin plate taking into account several pressure laws. We assumed that contact area is elliptic. Differential equations of movement were achieved. Dependence of distance between plate center and instantaneous velocity center was investigated. It was shown that sliding and spinning end simultaneously. Several numerical experiments were done.

# О ДВИЖЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ ПО НЕПОДВИЖНОЙ АБСОЛЮТНО ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

А.С. Кулешов, Д.С. Добрынин

*Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*  
*E-mail: kuleshov@mech.math.msu.su*

Задача о качении без скольжения тяжёлого динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной горизонтальной плоскости является одной из классических задач механики неголономных систем. В 1897 году С.А. Чаплыгин в работе [1] установил, что решение данной задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось симметрии. Однако не всегда удаётся отыскать решение данного дифференциального уравнения. В случае, когда движущееся тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар, решение соответствующего уравнения выражается через элементарные функции [1]. При движении по горизонтальной плоскости круглого диска или обруча решение указанного уравнения выражается через гипергеометрические ряды [1]. Некоторые другие случаи, когда возможно найти общее решение данного уравнения, указаны в работах [2-5].

В данной работе рассматривается задача о качении без скольжения динамически симметричного эллипсоида вращения по неподвижной горизонтальной плоскости. Указан ряд случаев, когда при дополнительных ограничениях на параметры эллипсоида (его моменты инерции и длины полуосей), удаётся разрешить дифференциальное уравнение второго порядка, к интегрированию которого сводится решение задачи, и привести решение задачи к квадратурам. Доказана физическая допустимость полученных ограничений. Проведён анализ соответствующих квадратур и дано полное описание движения эллипсоида по плоскости в указанных случаях.

## Л и т е р а т у р а

1. Чаплыгин С.А. О движении тяжёлого тела вращения на горизонтальной плоскости // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т. 9. Вып. 1. С. 10-16.
2. Муштаров Х.М. О катании тяжёлого твёрдого тела вращения по неподвижной горизонтальной плоскости // Мат. сборник. 1932. Т. 39. № 1-2. С. 105-126.
3. Кулешов А.С. Первые интегралы в задаче о движении параболоида вращения по шероховатой плоскости // Доклады РАН. 2005. Т. 400. № 1. С. 46-48.
4. Кулешов А.С. О первых интегралах уравнений движения симметричного гиростата на абсолютно шероховатой плоскости // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 40-45.
5. Кулешов А.С., Черняков Г.А. Применение алгоритма Ковачича для исследования задачи о движении тяжёлого тела вращения по абсолютно шероховатой плоскости // Вестник Санкт – Петербургского университета. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 2013. Вып. 4. С. 93-102.

## Motion of a Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Perfectly Rough Plane

A.S. Kuleshov and D.S. Dobrynin

*Department of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

The problem of rolling without sliding of a heavy rotationally symmetric ellipsoid is considered. Several cases of integrability of this problem are found under the additional restrictions on the parameters of the ellipsoid. The physical permissibility of the obtained restrictions is proved. The analysis of quadratures for every integrable case is performed.

## ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ МОДЕЛИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

А.А. Долгая<sup>1</sup>, А.М. Уздин<sup>2</sup>, М.Ю. Федорова<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения,

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: uzdin@mail.ru, mgfed@mail.ru

Анализируются особенности кинематического воздействия, определяющие отклик линейных и нелинейных механических систем, а также их повреждаемость. Указанная задача имеет принципиальное значение для оценки силы землетрясений. Традиционная оценка силы сейсмического воздействия производится по повреждаемости жилой застройки в регионе, пострадавшем от землетрясения. Это описательная модель. Для численной же оценки силы используется инструментальная шкала пиковых ускорений, скоростей и смещений [1]. Отсутствие согласованности инструментальной шкалы с результатами землетрясений приводит к тому, что землетрясение оценивается по-прежнему в баллах, а инженеры и сейсмологи характеризуют воздействие его пиковыми значениями [2]. Между тем, очевидно, что для повреждения застройки необходимо обладать энергией. Поэтому численной характеристикой воздействий должна быть величина, характеризующая энергию землетрясения.

В предлагаемом докладе рассмотрены кинематические, спектральные и энергетические характеристики сейсмического воздействия. К кинематическим характеристикам отнесены пиковые значения ускорений, смещений и скоростей, средний уровень ускорений, смещений и скоростей, количество циклов, продолжительность воздействия. К спектральным характеристикам – преобладающие периоды воздействия, спектры Фурье и спектры ответа. К энергетическим – интенсивность по Ариасу:

$I_A = \int_0^{\tau} a^2(t) dt$  (1), где  $a(t)$  - зависимость ускорения от времени (акселерограмма),  $\tau$ - общая продол-

жительность процесса; кумулятивная абсолютная скорость:  $CAV = \int_0^{\tau} |a(t)| dt$  (2); спектр работы сил

пластического деформирования.

По указанным характеристикам были построены модели сейсмических воздействий и исследованы зависимости между уровнями повреждаемости и значениями характеристик, а также корреляции характеристик между собой.

### Л и т е р а т у р а

1. Айзенберг Я.М. Модели сейсмического риска и методологические проблемы планирования мероприятий по смягчению сейсмических бедствий// Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2004.№6. С.31-38.
2. Kenneth W. Campbell, Yosef Bozorgnia. Cumulative Absolute Velocity (CAV) and Seismic Intensity Based on the PEER-NGA Database// Earthquake Spectra. 2008. Vol. 28. № 2. P. 457-485.

## The Analysis of Parameters for Modeling Earthquake Inputs

А.А. Dolgaja<sup>1</sup>, А.М. Uzdin<sup>2</sup>, М.У. Fedorova<sup>3</sup>

<sup>1,2</sup> Saint-Petersburg State University of Railways, Russia

<sup>3</sup> Saint-Petersburg State University, Russia

The properties of input which account for the response and the damageability of linear and nonlinear mechanical systems are analyzed. Kinematical, spectral and energy characteristics of real inputs are considered. Kinematical characteristics include peak acceleration, velocity and displacement, medium values of the abovementioned characteristics, the number of cycles and the input duration. Spectral characteristics include predominant periods, Fourier spectra and response spectra. Energy characteristics include Arias intensity (IA), cumulative absolute velocity (CAV) and the response spectra of plastic deformation work. Investigations are aimed at the analysis and classification of earthquake input.

## К ДИНАМИКЕ СИМПАТИЧЕСКИХ МАЯТНИКОВ

А.П. Евдокименко<sup>1</sup>, В.Н. Тхай<sup>2</sup>

<sup>1</sup>СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия,

<sup>2</sup>ФГБУ ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

E-mail: artem.evdokimenko@gmail.com, tkhai@yandex.ru

В работе изучается динамика механической системы, представляющей собой два маятника одинаковой длины и веса, связанных линейной пружиной; при этом точки подвеса маятников находятся на одной горизонтальной прямой, а длина пружины в недеформированном состоянии равна расстоянию между точками подвеса. Такие маятники названы в [1] «симпатическими». Модель используется при демонстрации связанных колебаний [1]. Малые нелинейные колебания симпатических маятников и орбитальная устойчивость одного типа нормальных колебаний исследовались также в [2, 3, 4].

Рассматриваемая система имеет два очевидных тривиальных положения равновесия, когда пружина недеформирована и маятники занимают положение одновременно вдоль нисходящей или восходящей вертикали. В работе найдены все нетривиальные положения равновесия, когда маятники отклонены от вертикали на некоторый угол, зависящий от коэффициента жесткости пружины. Приводятся результаты анализа устойчивости этих равновесий, а также анализ динамики системы на одномерном многообразии, на котором углы отклонения маятников равны по величине и противоположны по знаку.

Работа выполнена при поддержке РФФИ(№13-01-00347).

### Л и т е р а т у р а

1. Зоммерфельд А. Механика. Москва-Ижевск: РХД, 2001. 368 с.
2. Маркеев А.П. Нелинейные колебания симпатических маятников // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. №3. С. 1-17.
3. Маркеев А.П. О динамике связанных маятников // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. №1. С. 27-38.
4. Маркеев А.П. Об устойчивости нелинейных колебаний связанных маятников // Изв. РАН. МТТ. 2013. №4. С. 20-30.

## On Sympathetic Pendulums Dynamics

A.P. Evdokimenko<sup>1</sup>, V.N. Tkhai<sup>2</sup>

<sup>1</sup>AESC MSU, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Trapeznikov ICS of RAS, Moscow, Russia

Dynamics of a mechanical system consisting of two identical pendulums with the same length and weight is investigated in the present paper. It's supposed pendulums are connected with linear spring which length in the undeformed state is equal to the distance between points of the suspension. Zommerfeild called [1] such pendulums «sympathetic» and used them as a model of bounded oscillations. Small non-linear oscillations as well as orbital stability of one type of the normal oscillations are also studied in [2,3,4].

The mechanical system has two obvious trivial states of equilibria in which pendulums lay up or down along vertical axis and spring is undeformed. Sympathetic pendulums have also nontrivial states of equilibria, and all of them as well as their stability are studied in this paper. Each pendulum forms non-zero angle depended on stiffness coefficient with vertical line for these nontrivial states.

Analysis of the system's dynamics on one-dimension manifold for which angles of the declination have the same values and opposite signs is presented.

# ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННОГО ПРИНЦИПА ГАУССА С ПОСЛЕДУЮЩЕЙ МИНИМИЗАЦИЕЙ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

С.А. Зегжда<sup>1</sup>, Ш.Х. Солтаханов<sup>2</sup>, М.П. Юшков<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,

<sup>2</sup>Чеченский государственный университет, Россия,

E-mail: zegzhda@mail.ru; soltakhonov@ya.ru, yushkovmp@mail.ru

Задача о гашении колебаний исследуется на примере горизонтально перемещающейся тележки с двумя маятниками. задается время перемещения тележки и длина пути. В начале и в конце пути скорости тележки и маятников равны нулю. Искомой управляющей силой является горизонтальная сила, приложенная к тележке. В [1] показывается, что при определении этой силы с помощью принципа максимума Понтрягина движение всегда начнется со скачка по ускорению. Построить решение без скачков по ускорению позволяет обобщенный принцип Гаусса. Плавная управляющая сила, найденная в виде полинома по времени, существенно зависит от параметра  $\lambda$ , равного отношению времени перемещения тележки к периоду первой собственной частоты. Выяснилось [2] наличие особых значений параметра  $\lambda$ , при приближении к которым управляющая сила неограниченно возрастает. Решение без особых точек строится следующим образом. Решается новая задача. В ней дополнительно предполагается, что в начале и в конце пути производная от ускорения тележки по времени равна нулю. У новой задачи есть особые точки, но они отличны от точек исходной задачи. Пусть  $U_1(t)$  – управляющая сила исходной задачи, а  $U_2(t)$  – новой. Тогда при любых значениях параметра  $\mu$  функция  $U(t) = U_1(t) + \mu(U_2(t) - U_1(t))$  является решением исходной задачи. Величина  $\mu$  определялась из условия минимальности за время, соответствующее половине пути, работы управляющей силы, полной энергии всей системы и интеграла от квадрата функция  $U(t)$ . Приведены результаты численных расчетов для этих трех функционалов.

## Л и т е р а т у р а

1. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука. Физматлит. 2009. 344 с.
2. Гаврилов Д.Н., Зегжда С.А. Гашение колебаний упругого тела при его перемещении // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 73-83.

## Oscillation Suppression on the Basis of a Generalized Gauss Principle Followed by the Minimization of Functionals Given

S. A. Zegzhda<sup>1</sup>, Sh. Kh. Soltakhanov<sup>2</sup>, M. P. Yushkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Chechen State University, Russia

The problem of oscillation suppression is studied by the example of a trolley with two pendula moving horizontally. The time of motion of the trolley and the path length are given. In the beginning and in the end of the path the velocity of the trolley, its acceleration, and velocities of pendula are equal to zero. The sought control force is the horizontal force applied to the trolley. It is defined on the basis of a generalized Gauss principle followed by the minimization of the work of the control force, the total energy of the whole system, and the integral of the control force squared in a time corresponding to the half of the path. The numerical results for these three functionals are presented.

# УПРАВЛЯЕМОЕ РАСКРЫТИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СОЛНЕЧНОГО ПАРУСА ИЗ УЛОЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

**А.В. Зыков**

*Ракетно-космическая корпорация «Энергия» им. С.П. Королёва, Королёв, Россия  
E-mail: zyvaldrvich@gmail.com*

Рассматривается модель выпуска полотна солнечного паруса [1], в рамках которой парус, раскрываемый из уложенного состояния, представляется в виде четырех выпускаемых тросов (рис. 1). Для описания режима раскрытия солнечного паруса на начальном этапе с учетом центральной симметрии расположения катушек с тросами рассматривается динамика выпуска одного троса с точечной массой на конце в предположении, что все остальные тросы выпускаются синхронно и система управления выпуском обеспечивает динамическую симметрию процесса.

В уложенном состоянии паруса тросы намотаны на катушки, которые равномерно распределены по ободу центрального цилиндра симметрично относительно оси вращения. После окончания процесса вытягивания тросов центробежными силами выпускается и расправляется связанное с тросами полотнище солнечного паруса.



Рис. 1. Представление паруса в виде четырех выпускаемых тросов.

Приведено дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний в плоскости вращения точечной массы на невесомом тросе в процессе выпуска из вращающегося центрального блока. Получено аналитическое решение линеаризованного уравнения выпуска точечной массы, выраженное через функции Бесселя при равномерном выпуске и через гипергеометрические функции при равномерно замедленном выпуске [2].

Для проверки различных предлагаемых способов выпуска рассматривается приближенная дискретная математическая модель выпуска тросов. Каждый трос представляется в виде совокупности материальных точек, последовательно соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями. В этих точках сосредоточены действующие на трос центробежные силы, силы Кориолиса и силы натяжения соединяющих цепь нитей. Кроме того, такая модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет учесть массу троса и действие на трос сил инерции вследствие вращательного движения троса. Силы считаются приложенными к указанным материальным точкам и определяются их массами, положением в пространстве и скоростями.

Численное моделирование проводится для случая, когда трос представлен в виде совокупности материальных точек, последовательно соединенных невесомыми нерастяжимыми нитями, а также в случае невесомой нерастяжимой нити с весомым грузом на свободном конце.

## Л и т е р а т у р а

1. Легостаев В.П., Субботин А.В., Тимаков С.Н., Зыков А.В. Исследование динамики управляемого углового движения космического аппарата с вращающимся солнечным парусом // Труды МФТИ. 2013. Т. 5. № 2. С. 106–119.
2. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. 303 с.

## Controllable Deployment of a Rotating Solar Sail from the Packed Configuration

**A.V. Zykov**

*S.P. Korolev Rocket and Space Corporation «Energia», Korolev, Russia*

The objective of this study is to develop control algorithm of solar sail deployment. A new model where the solar sail is presented as four independent cables is proposed to efficiently simulate the deployment process. Taking into account the central symmetry of the structural arrangement of the drums with un-deployed cables at the initial step of deployment one of the cables is simulated on the assumption that all other cables are produced simultaneously and deployment management system provides dynamic symmetry process.

# ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

**А.П. Иванов, Ю.Я. Остов.**

*Санкт-Петербургский государственный университет. Россия*

*E-mail: YuriOstov@mail.ru*

Управление, найденное как результат решения трудоемкой краевой задачи на основе принципа максимума Л.С.Понтрягина в его классической формулировке, является программным управлением и при наличии всякого рода возмущений оказывается неэффективным, т.е. не обеспечивает оптимум заданного критерия качества. Поэтому целесообразнее построить субоптимальное управление с обратной связью, при котором значение оптимизируемого функционала отличается от его оптимального значения не более, чем на заданную величину  $\varepsilon$ . Предлагаемая методика складывается из трех этапов решения исходной вариационной задачи.

На первом этапе производится упрощение модели, описывающей реальный управляемый процесс и задаваемой в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это упрощение возможно за счет рационального выбора фазового пространства, независимой переменной интегрирования, замены исходных связей и функционала эквивалентными и т.п. Однако такое упрощение модели не дает желаемого результата в виде управления с обратной связью. Поэтому осуществляется второй этап упрощения модели на основе принципа расширения (частичного снятия ограничений), приводящий к вырожденной задаче теории оптимального управления. Конструктивность решения задачи на этом этапе достигается за счет двойственности выпуклой функции  $c_y=f(c_x)$ ,  $c_y, c_x$  – коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления соответственно.

Третий этап решения задачи (восстановление связи, исключенной на втором этапе) приводит к конечному результату в виде управления с обратной связью. Эта методика применена для решения следующей задачи: оптимизировать траекторию продольного движения ЦМ ЛА, совершающего полет из начальной точки атмосферного пространства в заданную конечную точку на поверхности Земли. Критерием оптимальности управления является максимум кинетической энергии ЛА в конечной точке траектории. Результатом решения задачи является субоптимальное управление в виде угла атаки  $\alpha$ , которое находится через сопряженную переменную  $z$ . Последняя является корнем полинома 3-ей степени, коэффициенты которого зависят от фазового состояния ЦМ и констант. Уникальность работы состоит в том, что решение сложной нелинейной краевой задачи (при подобранных константах) получено с помощью конечного числа арифметических операций. Этот эффект достигнут благодаря существованию, по крайней мере, ещё одного полинома 3-ей степени относительно  $z$  (линейно независимого от первого), имеющего тот же корень. Поэтому вычисление корня осуществляется по алгоритму Эвклида. Численные результаты подтверждают эффективность данной методологии, которая может быть применена при более сложных моделях ЛА и задачах динамики полёта. В отличие от задачи, рассмотренной в [1], в этой работе на третьем этапе решения задачи использовано свойство инвариантности функционала относительно ортогональной составляющей гравитационной силы, что повысило точность решения задачи в смысле значения оптимизируемого функционала.

В работе приведен также алгоритм решения двухточечной краевой задачи, соответствующей традиционной схеме принципа максимума Л.С.Понтрягина. Дана сравнительная оценка полученных результатов.

## Л и т е р а т у р а

1. *Иванов А.П., Остов Ю.Я.* К задаче динамики полёта. V-е Поляховские чтения. Международная научная конференция по механике. Избранные Труды. Санкт-Петербург, Россия. 3-6 февраля 2009, с.159-164.

## About the Problem of Flight Dynamics

**A.P. Ivanov, Y.J. Ostov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

An analytical method is proposed for solving the problem of suboptimal control of the flying apparatus mass centre motion in the atmosphere. Numeric estimations are presented of the synthesized control quality for various variants characterized by atmosphere parameters and boundary conditions.

# РАСЧЕТ ДИНАМИКИ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ В СКВАЖИНЕ В ТРЕНАЖЕРЕ БУРЕНИЯ

А.А. Малюгин<sup>1</sup>, Д.В. Казунин<sup>1</sup>, Н.В. Кузнецов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ЗАО «Транзас», Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: alexey.malyugin@transas.com, dmitry.kazunin@transas.com, kuznetsov@math.spbu.ru

Создание тренажеров рабочего места бурильщика является в настоящее время актуальной задачей. Обучение на таких системах позволит операторам приобрести необходимые навыки работы на реальном оборудовании в безопасных для персонала, оборудования и окружающей среды условиях. Это и экономически выгодно, так как не происходит износ дорогостоящего оборудования и вывод его из эксплуатации на время обучения. Математические модели являются важнейшей частью тренажеров, при этом на них накладывается ряд условий, связанных с функциональностью и ресурсоемкостью.

В докладе обсуждаются вопросы моделирования динамики бурильной колонны (БК) в скважине. Бурильная колонна рассматривается как длинный тонкий стержень. Учитывается его связь с верхним приводом и спуско-подъемными устройствами, взаимодействие с вязкопластичным буровым раствором, контакт со стенками скважины и обсадных колонн, процесс углубления забоя скважины (рис. 2б, 2в). Математическая модель описана системой нелинейных уравнений в частных производных, которая позволяет имитировать продольные, крутильные и изгибные колебания буровой колонны.

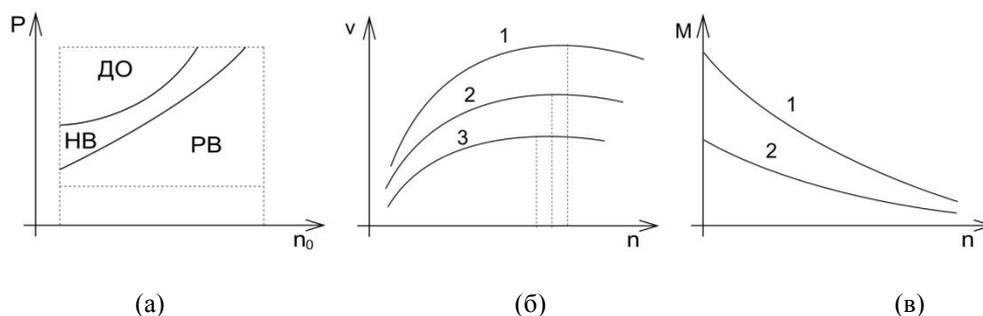


Рис. 1. (а) Диаграмма зон динамики БК,  $n_0$  – скорость вращения верхнего привода,  $P$  – нагрузка на долото, (б) график зависимости скорости проходки  $v$  от скорости вращения долота  $n$  ( $P_1 > P_2 > P_3$ ), (в) график зависимости момента сопротивления на долоте от его скорости вращения  $n$  ( $P_1 > P_2$ ).

В завершении доклада представлен анализ системы на устойчивость. Коэффициенты модели настроены на основе неполных опытных данных. Исследованы различные режимы бурения в зависимости от частоты вращения и нагрузки на долото. Для типичной конфигурации бурильного инструмента численные эксперименты и информация с буровых установок подтверждают наличие различных зон динамики: длительная остановка (ДО), равномерное (РВ) и неравномерное вращение (НВ) (рис. 1а).

## Л и т е р а т у р а

1. Басарыгин Ю.М., Булатов А.И., Проселков Ю.М. Технология бурения нефтяных и газовых скважин. М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2002. - 632 с.
2. Юнин Е.К. Автоколебания в глубоком бурении. М.: Книжный дом «Либроком», 2013. - 264 с.

## Drillstring-hole Calculation in Drilling Simulator

A.A. Malyugin<sup>1</sup>, D.V. Kazunin<sup>1</sup>, N.V. Kuznetsov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ZAO "Transas", St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Sankt Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

In this paper mathematical modeling of drillstring dynamics in the hole in drilling simulator is discussed. The longitudinal, torsional and bending vibrations of the drill string are described by a system of nonlinear partial differential equations. The coefficients of the model are set based on incomplete experimental data. Explore different regimes of drilling, depending on the top drive speed and weight on bit: long stop, uniform and stick-slip rotation.

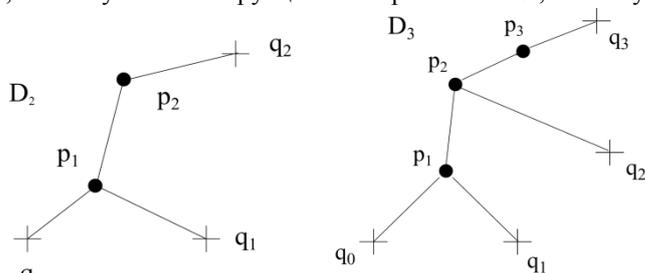
# ПЛОСКИЕ ШАРНИРНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, НЕВОССТАНОВИМЫЕ ПО ВНУТРЕННЕМУ НАПРЯЖЕНИЮ

М.Д. Ковалёв

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Россия,  
E-mail: mdkovalev@mtu-net.ru,*

Рассматриваются идеальные плоские шарнирно-рычажные конструкции. А именно, конструкции, составленные из прямолинейных стержней-рычагов, имеющих на своих концах вращательные пары—шарниры  $p_i$ . Шарнир  $p_i$  мы считаем точкой плоскости, имеющей радиус-вектор  $p_i$ . Часть шарниров закреплена в плоскости (стойке). Пусть такая конструкция  $P$  связна и допускает внутреннее напряжение, которое мы будем задавать ненулевой совокупностью скаляров  $\omega = \{\omega_{ij}\}$ ,  $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ , отвечающих всем рычагам  $p_i p_j$  конструкции. При этом, сила, действующая на шарнир  $p_i$  со стороны рычага  $p_i p_j$ , считается равной  $\omega_{ij}(p_i - p_j)$ .

Мы исследуем вопрос [1]: определяется ли конструкция  $P$  своей структурной схемой, положениями закреплённых в стойке шарниров и своим внутренним напряжением  $\omega$  однозначно или нет? В первом случае мы называем конструкцию восстанавливаемой по внутреннему напряжению  $\omega$ . Во втором случае – невозстанавливаемой. В случае невозможности существует по крайней мере двумерное множество конструкций, допускающих напряжение  $\omega$ . В этом вопросе разумно ограничиться напряжениями  $\omega$ , ненулевыми на каждом рычаге. Соответствующую конструкцию  $P$  мы называем полностью напряжённой. А также считая длины всех рычагов  $P$  ненулевыми, такую конструкцию мы называем несократимой. Внутренние напряжения конструкции, как легко понять, не меняются при её аффинных преобразованиях. Отсюда следует невозможность по внутреннему напряжению  $\omega$  конструкции  $P$ , все закреплённые шарниры которой лежат на одной прямой  $L$ , а свободные шарниры не все лежат на  $L$ . Действительно, выполнив над  $P$  аффинное преобразование, оставляющее точки прямой  $L$  неподвижными, мы получим конструкцию с напряжением  $\omega$ , отличную от  $P$ .



Для бесконечной серии структурных схем  $D_m$ , первые из которых показаны на рисунке, автор доказал существование полностью напряжённых, несократимых и невозстанавливаемых по внутреннему напряжению конструкций с закреплёнными шарнирами, не лежащими

на одной прямой. На рисунке закреплённые в стойке шарниры обозначены крестиками, свободные — кружочками. Каждая следующая схема получается из предыдущей добавлением так называемой двуподковой группы.

## Л и т е р а т у р а

8. Ковалёв М.Д. О восстанавливаемости шарнирников по внутренним напряжениям // Известия РАН. Серия математическая. 1997. Т. 60. №4. С. 37-66.

## Plane Hinge Devices not Restorable from Self Stresses

M.D. Kovalev

*Lomonosov Moscow State University, Russia*

A theorem on the existence of infinite series of structural schemes adopting flat frameworks with noncollinear fastened hinges and distinct adjacent hinges not restorable from their self stresses is proved.

# ПОВЕДЕНИЕ ПОТОКА ЭНЕРГИИ ПРИ АБСОЛЮТНО УПРУГОМ УДАРЕ ТРЕХ ТЕЛ

*Коляри И. Г.*

*ОмГТУ, Омск, Россия*

*E-mail: Cagliari@list.ru*

Предлагается теоретическая модель, которая позволяет решить задачу абсолютно упругого удара трех тел (материальных точек).

Для решения поставленной задачи используется понятие потока энергии  $\vec{\Lambda} = \frac{m\vec{v}^3}{3!}$  и полагается, что замкнутая система сохраняет величины:  $\sum_{i=1}^3 m_i = const$ ,  $\sum_{i=1}^3 m_i \vec{v}_i = const$ ,  $\sum_{i=1}^3 \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2!} = const$ ,  $\sum_{i=1}^3 \frac{m_i \vec{v}_i^3}{3!} = const$ . Запишем систему уравнений для абсолютно упругих точечных тел, которые расположены так, что два тела, соприкоснувшись, покоятся, а третье движется со скоростью  $v_{1(0)}$ .

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 = m_1 \vec{v}_{1(0)}, \quad \frac{m_1 \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2^2}{2} + \frac{m_3 \vec{v}_3^2}{2} = \frac{m_1 \vec{v}_{1(0)}^2}{2}, \quad \frac{m_1 \vec{v}_1^3}{6} + \frac{m_2 \vec{v}_2^3}{6} + \frac{m_3 \vec{v}_3^3}{6} = \frac{m_1 \vec{v}_{1(0)}^3}{6}$$

где  $m_1, m_2, m_3$  – массы тел;  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  – скорости тел после соударения;  $\vec{v}_{1(0)}$  – скорость первого (проектятого) тела до удара. То, что два тела до удара покоятся и удар центральный, взято для упрощения ситуации. Решая систему, получим значения скоростей тел после удара.

$$\text{С динамической точки зрения имеем: } d\left(\sum_{i=1}^3 \frac{m_i \vec{v}_i^3}{3!}\right) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i^2 dt. \quad (1)$$

Левая часть выражения будет *const* в том случае, если правая равна нулю, т.е. должно выполняться условие:  $\vec{F}_{12} \vec{v}_1^2 + (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}) \vec{v}_2^2 + \vec{F}_{32} \vec{v}_3^2 = 0$ .

Составим дифференциальные уравнения для тел, расположенных на прямой, не имеющей трения, с массами  $m_1, m_2, m_3$ , связанных пружинами жесткостью  $c_{12}, c_{23}$ , удовлетворяющих условию (1).

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\xi}_1 = -c_{12}(\xi_1 - \xi_2)^n \\ m_2 \ddot{\xi}_2 = -c_{12}(\xi_2 - \xi_1)^n - c_{23}(\xi_2 - \xi_3)^n \\ m_3 \ddot{\xi}_3 = -c_{23}(\xi_3 - \xi_2)^n \end{cases} \quad (3)$$

В данной работе  $n = 11$ . Решая систему уравнений (3), можем определить скорости тел, потенциальную энергию и поток энергии всей системы для любого момента времени, что отражено на рисунках (рис.1, рис.2).

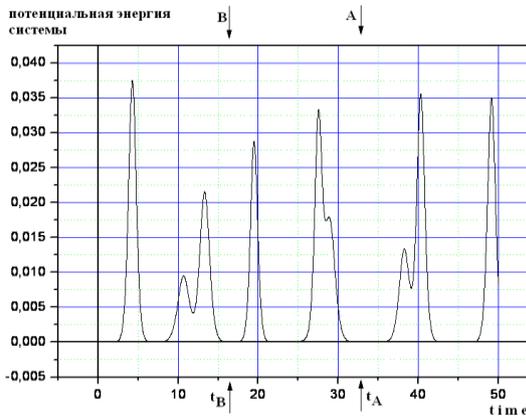


Рис.1. Зависимость потенциальной энергии системы от времени

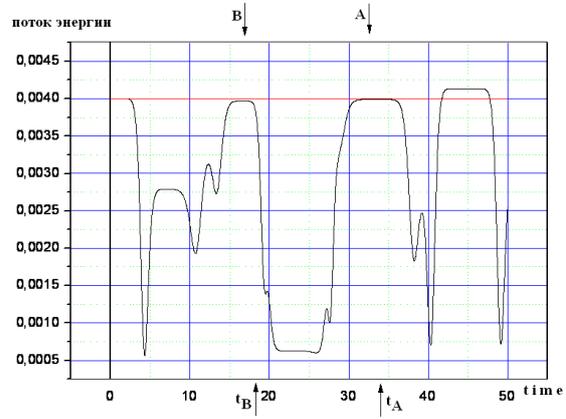


Рис.2. Зависимость потока энергии системы от времени

Видно, что в момент разрыва (т.А или т.В) кинетическая энергия налетающего тела распределена между телами, поскольку потенциальная энергия системы равна нулю, поток энергии равен потоку до удара. Значения скоростей, полученные обоими способами, совпадают.

## Behaviour of the Stream of Energy at Absolutely Elastic Blow of Three Bodies

I.G. Kolyari

Omsk, Russia

Theoretical model which allows to solve a problem of impact tree bodies is offered. The decision is checked for various combinations of weights three bodits.

# УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ОДНОКОЛЕСНОГО ЭКИПАЖА НА ЛЕДЯНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д.А. Лебедев, В.М. Морозов

*НИИ механики МГУ, Москва, Россия*  
*E-mail: lebedev.dmitri@list.ru, moroz@imec.msu.ru*

В данной работе рассматривается механическая система (моноцикл), состоящая из кругового диска, который может катиться по горизонтальной ледяной поверхности, твердого тела (маятника), соединенного с диском в его центре при помощи цилиндрического шарнира и ротора - динамически симметричного твердого тела, вращающегося относительно маятника вокруг оси, содержащей центры масс маятника и диска. Положение диска определим при помощи горизонтальных координат центра диска  $X, Y$ , углов Эйлера  $\psi, \theta, \varphi$ . Введем угол между линией наибольшего ската диска и осью маятника  $\chi$ , и угол поворота ротора относительно маятника  $\alpha$ . Таким образом, положение системы описывается семью обобщенными координатами. Уравнения движения данной системы напишем в форме уравнений Эйлера-Лагранжа в квазикоординатах [1]. Так как диск с острым краем катится по льду, то скорость точки контакта всегда направлена по линии узлов, то есть имеет место неголономная связь [2]:

$$-\dot{X} \sin(\psi) + \dot{Y} \cos(\psi) + a\dot{\theta} \sin(\theta) = 0$$

( $a$  – радиус диска).

Можно показать, что уравнения движения допускают частные решения, описывающие стационарные движения системы, при которых позиционные координаты  $\theta, \chi$  и циклические квазискорости остаются постоянными. Шесть параметров, определяющих эти движения, связаны четырьмя соотношениями. Необходимым условием существования многообразия стационарных движений является выполнение равенства  $\sin(\chi_0) = 0$ , которое означает, что центр масс системы должен принадлежать прямой, проходящей через центр диска и точку касания диска и плоскости. При выполнении этого условия размерность многообразия стационарных движений равна четырем и совпадает с числом циклических координат.

Рассмотрены некоторые наиболее интересные виды стационарных движений из всего многообразия стационарных движений, в частности, прямолинейное движение моноцикла в вертикальной плоскости со скольжением и без проскальзывания. Исследована устойчивость этих стационарных движений и сопоставлены полученные условия устойчивости с условиями устойчивости аналогичных движений при отсутствии проскальзывания [3].

## Л и т е р а т у р а

1. Лурье А. В., Аналитическая механика. М.: Физматгиз. 1961. 824с.
2. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. – М.: Наука. 1992. 336 с.
3. Каленова В. И., Карапетян А. В, Морозов В. М., Салмина М. А. Неголономные механические системы и стабилизация движений.//Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, вып. 7, с. 117-158.

## Stability of Stationary Movements of a Monocycle On the Ice Surface

D.A. Lebedev, V.M. Morozov

*Scientific research institute of mechanics of the Moscow State University, Moscow, Russia*

In the given work the monocycle is considered. The equations of movement of the given system are written in the form of Euler-Lagrang equations in quasicordinates. The variety of stationary movements of a monocycle is defined. The stability of some stationary movements is investigated.

# МЕТОД ПУАНКАРЕ-ДЮЛАКА С ЭКОНОМИЗАЦИЯМИ ЧЕБЫШЕВА В ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ АВТОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**В.Г. Мельников, К.С. Малых, Г.И. Мельников**

*Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия*  
*E-mail: melnikov@mail.ifmo.ru, malykh-konstantin@yandex.ru, melnikov.ifmo@yandex.ru*

Рассматривается уравнение автономной динамической системы с одной степенью свободы, содержащее линейную, квадратичную и кубическую формы относительно фазовых переменных. С целью упрощения математической модели применяется асимптотический метод преобразования Пуанкаре-Дюлака, дополненный приемом существенного уменьшения невязки преобразованной модели посредством аппроксимации Чебышева многочленов высоких степеней многочленами меньших степеней, при этом к невязкам отнесены только погрешности данных экономизаций.

Рассматриваются неколебательные и колебательные механические системы, исследуется случай отсутствия внутренних резонансов Пуанкаре, приводящий уравнение к линейному виду.

## Л и т е р а т у р а

1. Dulac H. Solution dun systeme de equations differentielles dans le voisinage des valeurs singulieres. Bull. Soc. Math., 1912, 40, P. 324-383.
2. Мельников Г.И. О приближенном интегрировании уравнений возмущенного движения // Вестник Ленинградского государственного университета. – 1963. – № 19. – Вып. 14. – С. 112–123.
3. Мельников Г.И. К теории нелинейных колебаний // Вестник Ленинградского государственного университета. – 1964. – № 1. – Вып. 1. – С. 88–98.
4. Melnikov V. G. Chebyshev economization in Poincare-Dulac transformations of nonlinear systems// Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Elsevier, 2005, 63, С. e1351-e1355.
5. Melnikov V. G. Chebyshev economization in transformations of nonlinear systems with polynomial structure 14th WSEAS international conference on systems, 2010, 1: Latest trends on systems, С. 301-303.

## **Poincare-Dulac Method with Chebyshev Economization in Autonomous Mechanical Systems Simulation Problem**

**V.G. Melnikov, K.S. Malykh, G.I. Melnikov**

*ITMO University, St.-Petersburg, Russia*

We consider an equation of an autonomous dynamical system with one degree of freedom. It contains the linear, quadratic and cubic forms relative phase variables. In order to simplify the mathematical model we use the modified asymptotic method of Poincare-Dulac conversion. Using Chebyshev approximations of high degree polynomials with polynomials of smaller degrees we reduce the residual error.

We consider non-oscillatory and oscillatory mechanical systems in the case of absence of internal Poincare resonances that leads to a linear form.

# ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПУАНКАРЕ В ЗАДАЧАХ О КАЧЕНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. УРАВНЕНИЯ АППЕЛЯ. ЭНЕРГИЯ УСКОРЕНИЙ\*

Р.П. Мошкин

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Россия  
E-mail: rmoshkin@yandex.ru

\*Доклад посвящен XXII Олимпийским зимним играм в Сочи 2014 г.

**1. Краткое пояснение при подготовке к спортивным соревнованиям и Олимпийским зимним Играм.** При подготовке к спортивным соревнованиям и Олимпийским зимним Играм с помощью компьютера и специальных датчиков имитатора движения, прикрепленных к телу спортсмена, рассчитываются наиболее уязвимые (хоккей) и наиболее уставаемые места – мышцы спортсмена, несущие основную нагрузку (лыжный спорт). Снаряд как правило изготавливается индивидуально по слепку тела спортсмена (сани, коньки) и продуваются в специальной аэродинамической трубе. Например, при изготовлении клюшек в хоккее учитывается сила удара и изгиб самой клюшки при ударе в трех основных местах: основание и места, за которые руками держится непосредственно сама клюшка. В основном, учитывается сопротивление воздуха и направление ветра, а также технические характеристики, полученные опытным путем при прохождении самой трассы. Так, сани изготавливаются таким образом, чтобы поворот на трассе при скорости свыше 130 км/ч осуществлялся приподнятием и одновременным поворотом головы и приподнятием ноги.

Но, как правило не используются физико-математические аспекты и расчеты в том виде, в котором они должны преобладать на самом деле. Уравнения Пуанкаре-Четаева позволяют это сделать.

## 2. Постановка задачи.

В первой части работы рассматривается упрощенная модель качения плоского твердого тела по шероховатой поверхности. Для вывода уравнений движения используются уравнения Пуанкаре.

Во второй части работы исследуется усложненное движение-качение плоского твердого тела по сфере и эллипсоиду вращения. Используются уравнения Аппеля, считается энергия ускорений.

**3. Об уравнениях Пуанкаре.** Задание дополнительных  $k$  линейных форм  $\omega_1, \dots, \omega_k$

$$\omega_\alpha = \sum_{s=1}^n a_{\alpha s} \delta x_s \quad (\alpha = 1, \dots, k)$$

определяет кинематический смысл параметров возможных перемещений  $\omega_\alpha$ , если за оператор возможных перемещений принять  $X_\alpha$ . Интересно заметить, что в некотором смысле произвол в выборе дополнительных форм  $\omega_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, k$ ) позволяет находить наиболее удобный кинематический смысл для параметров  $\omega_\alpha$  и группу Ли  $X_\alpha$ , для которой  $c_{rsj}$  будут постоянными.

## Л и т е р а т у р а

1. Poincaré H. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique. *Compt. rend. Acad. sci. Paris*, 1901, v. 132, p. 369-371.
2. Картан Е. Интегральные инварианты. Перевод с франц. М.-Л., Гостехиздат, 1940, 216 стр., гл. X.
3. Chetaev N. Sur les équations de Poincaré. *Compt. Rend Acad. Sci. Paris*, 1927, v. 185, p. 1577-1578.
4. Четаев Н.Г. Sur les équations de Poincaré. Докл. АН СССР-А, 1928 № 7, стр. 103-104.

## Application of Poincare Equations in the Problems about Rolling Solid Bodies. Appel Equations. Energy of Accelerations

R.P. Moshkin

Lomonosov Moscow State University, Russia

At preparation for sporting events and the Olympic Winter Games with a computer and special simulator motion sensors attached to the athlete body, we can calculate the most vulnerable zones (hockey) and most tired zoned in the athlete muscles bearing the basic load (skiing). But, as a rule, sport does not use physical and mathematical aspects and calculations in the form, in which they should prevail in reality. Poincare and Chetaev equations allow doing this.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВИБРАЦИОННОЙ ЩЕКОВОЙ ДРОБИЛКИ С НАКЛОННОЙ КАМЕРОЙ ДРОБЛЕНИЯ

Е.В. Шишкин<sup>1</sup>, А.Н. Сафронов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВПО «Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург,

<sup>2</sup>НПК «Механобр-техника», Санкт-Петербург, Россия

E-mail: wiwki@rambler.ru, safronov\_an@npk-mt.spb.ru

Строительные отходы, образующиеся в городах любого масштаба при сносе старых зданий и сооружений различного назначения, являются составной частью твердых коммунальных отходов, переработка которых является актуальной экологической, экономической и социальной задачей. К рециклингу бытовых строительных отходов примыкает также и задача утилизации строительных отходов производственной деятельности железнодорожной индустрии.

С целью решения задачи утилизации отходов длинномерных железобетонных конструкций (колонн, столбов, опор, шпал и т.п.) с получением вторичного щебня и кондиционного металлолома в НПК «Механобр-техника» предложена конструкция новой вибрационной щековой дробилки с наклонной камерой дробления.

Дробилка включает в себя мягко амортизированную раму и две щеки, которые соединены с рамой пружинами кручения (торсионами). В отличие от традиционной динамической схемы вибрационной щековой дробилки [1] вертикальная ось симметрии в рассматриваемой машине образует с вертикалью угол  $\gamma$ . Кроме того, модернизированная дробилка приводится в движение только от одного вибровозбудителя, установленного на расположенной справа щеке, но при этом является симметричной. Наклонная дробилка с одним вибровозбудителем значительно проще в обслуживании и позволяет существенно снизить непроизводительные энергозатраты.

В данной работе исследуется симметричная плоская динамическая схема дробилки в рамках вибрационной механики [2]. Составлены дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы с шестью степенями свободы. Получены законы вынужденных колебаний щёк, а также построены их амплитудно- и фазо-частотные характеристики, позволяющие определить наиболее выгодный режим работы машины: для эффективной работы дробилки желательно, чтобы колебания щёк осуществлялись строго в противофазе и с одинаковой частотой. Показано, что противофазное движение щёк реализуется в низкочастотном диапазоне (до симметричного резонанса) и в высокочастотном диапазоне (за кососимметричным резонансом). Кроме того, существует небольшая область в межрезонансном частотном диапазоне, где возможно требуемое движение щёк.

## Л и т е р а т у р а

1. Вибрационная щековая дробилка: пат. 2228221 Рос. Федерация: С2 В02С19/16 / Вайсберг Л.А., Зарогатский Л.П., Сафронов А.Н., Сибрина А.П., Туркин В.Я., Черкасский В.А., заявитель и патентообладатель ОАО «НПК «Механобр-техника» – №2002106311/03; заявл. 11.03.2002; опубл. 10.05.2004. // Бюл.-2004.-№13.
2. *Блехман И.И.* Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. СПб.: ИД «Руда и Металлы», 2013. 640 с.

## Research of Dynamics of Vibratory Jaw Crusher with Inclined Crushing Chamber

E.V. Shishkin<sup>1</sup>, A.N. Safronov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> The National Mineral Resources University – University of Mines, Saint-Petersburg, Russia

<sup>2</sup> REC «Mechanobr-Tekhnika», Saint-Petersburg, Russia

The crusher is intended for recycling of lengthy ferroconcrete designs (columns, bearing parts, cross ties, etc.) with receiving secondary crushed stone and standard scrap metal. In this work the symmetric flat dynamic scheme of a crusher within vibration mechanics is considered. The differential equations of the movement of the considered system with six degrees of freedom are worked out. Laws of forced oscillations of the jaws are obtained, and also their amplitude and phase-frequency characteristics allowing to determine the most profitable operation of the crusher are built: it is necessary for efficient work of a crusher that oscillations of jaws were realized strictly in an antiphase and with an identical frequency.

## О РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИНЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

**В.С. Сергеев**

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской академии наук, Москва, Россия  
E-mail: vssergeev@yandex.ru*

Рассматривается задача о вращательных движениях твердой вытянутой пластины в воздушном потоке при учете нестационарности обтекания в рамках модели [1], учитывающей нестационарность введением в моменты аэродинамических сил интегральных членов. Один конец пластины имеет вязко-упругое закрепление, которое моделируется вязко-упругой пружиной.

Исследование проводится в критическом случае пары чисто мнимых корней теории устойчивости по Ляпунову для интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра [2]. На основной поток, движущийся с постоянной скоростью, наложено малое возмущение, которое задается предельно периодической функцией времени, т.е. представляется в виде суммы периодической части и функции, экспоненциально стремящейся к нулю при неограниченном возрастании времени. Система находится в резонансе, т.к. частота периодических колебаний возмущения совпадает с собственной частотой линеаризованной невозмущенной системы. По членам третьего порядка уравнений построены амплитудные уравнения, разрешающие задачу о существовании предельно периодических вращательных колебаний пластины, и проводится анализ этих колебаний. Найденное семейство решений представляется степенными рядами по некоторому малому параметру, характеризующему величину возмущения, и произвольным начальными значениями некритических переменных задачи. Начальные значения критических переменных определяются в форме степенных рядов по малому параметру на основании амплитудных уравнений.

### **Л и т е р а т у р а**

3. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.
4. Сергеев В.С. О предельно периодических движениях в некоторых системах с последствием // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 2. С. 221-231.

## **On the Resonance Oscillations of a Plate in an unsteady flow**

**V.S. Sergeev**

*Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre, Moscow, Russia*

The problem on oscillatory motions of a long rigid plate in an unsteady flow is investigated by using the Volterra-type integro-differential equations [1]. The plate is fastened using a viscoelastic material which can be modelled by viscoelastic springs. The critical case (in Lyapunov sense) of pure imaginary roots of characteristic equation is considered under resonance [2] when an oscillatory frequency of an airflow perturbation coincides with a frequency of the linearized unperturbed system. The limit periodic motions of the plate are determined. Such motions tend exponentially to periodic oscillations. The limit periodic motions are represented by power series with respect to the small parameter and initial data of noncritical variables. The small parameter characterizes value of the perturbation.

# **n-ШАГОВЫЕ УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ ПОРЯДКА n+2 для ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**В.М. Солопов**

*Московский государственный университет приборостроения и информатики, Россия*

*Email: solopoval@mail.ru*

Построены  $n/2-1$  - параметрические семейства  $n$ -шаговых методов порядка  $n+2$  для систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка для четных  $n \geq 4$ . Найдены области устойчивости методов.

Проведено сравнение с методом Рунге-Кутты 4-го порядка и методом Дормана-Принса 8-го порядка [1]. Как показано в результате численного эксперимента, при одной и той же среднеквадратичной погрешности порядка  $10^{-13} - 10^{-14}$  время нахождения решения рассмотренным методом может быть уменьшено в 100-2000 раз по сравнению со временем решения указанными методами, что является немаловажным фактором при решении трудоемких численных задач механики. Проведено также сравнение с методом Магнуса [2], специализированным для линейных дифференциальных уравнений. Определены области, в которых каждый из методов имеет преимущества.

## **Л и т е р а т у р а**

1. Э. Хайпер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1993. 512 с.
2. A. Iserles. Magnus expansions and beyond // Contemporary Maths. 2011. № 539. С. 171-186 .

## ***n*-step *n* + 2th Order Stable Method for Linear Ordinary Differential Equations**

**V.M. Solopov**

*Moscow State University of Instrument Engineering and Computer Science, Russia*

$n / 2-1$  - parameter families of the  $n$ -step methods of order  $n + 2$  for systems of linear differential equations of the 1st order are built for even  $n \geq 4$ . The stability domain of the methods are found.

A comparison with the Runge-Kutta 4th order method and Dorman-Prince 8th order [1] was made. As shown in the results of numerical experiments with the same mean-square error of the order of  $10^{-13} - 10^{-14}$ , time to find a solution to the considered method can be reduced to 100-2000 times compared to the time to find a solution by these methods, which is an important factor in the decision laborious numerical problems in mechanics. Also carried out a comparison with the method of Magnus [2], specialized for linear differential equations. Areas in which each of the methods has its advantages to be determined.

## **О СИММЕТРИЧНОСТИ КОЛЕБАНИЙ ЛАГРАНЖЕВОЙ СИСТЕМЫ**

**В.Н. Тхай**

*Институт проблем управления им.В.А.Трапезникова РАН, Москва, Россия  
E-mail: tkhaivn@mail.ru*

Рассматривается механическая система, подверженная действию потенциальных и неконсервативных позиционных сил, описываемая уравнениями Лагранжа второго рода. Устанавливается, что все одночастотные колебания (периодические движения) такой системы являются симметричными и в невырожденном случае образуют семейство, на котором период зависит только от одного параметра. Результат применяется к задаче о классификации и построении всех колебаний системы маятников, точки подвесов которых принадлежат неподвижной горизонтальной прямой, а сами маятники связаны между собой пружинами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ(№13-01-00347).

## **On the symmetry of the oscillations of the Lagrange systems**

**V.N. Tkhai**

*V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

It is proved that all periodic motions of a mechanical system under the action of positional forces are symmetric. These motions belongs to the family and in the nondegenerate case a period on the family of the motions depends only on one parameter.

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТЯЖЁЛОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

**Ю.И. Ханукаев**

*Московский физико-технический институт (государственный университет)  
г.Долгопрудный Московской области, Россия  
E-mail: kha.n.yuri@gmail.com*

Н.В.Розе в курсе лекций [1], используя два первых интеграла  $A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K^2$ ,  $A p^2 + B q^2 + C r^2 = 2T$  совместно с выражением  $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$ , преобразовал уравнения динамики твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера к уравнению

$$\frac{d\omega^2}{dt} = 2\sqrt{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2)(a_3 - \omega^2)}.$$

Решением этого уравнения является функция Вейерштрасса  $\wp$ , имеющая полюс второго порядка. Отсюда следует, что решение уравнений динамики твёрдого в случае Эйлера в виде степенных по времени рядов имеют полюс первого порядка:

$$p = P \left( t^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} p_s t^{2s-1} \right), \quad q = -Q \left( t^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} q_s t^{2s-1} \right), \quad r = R \left( t^{-1} + \sum_{s=1}^{\infty} r_s t^{2s-1} \right),$$

где 
$$P = \sqrt{\frac{CB}{(A-B)(A-C)}}, \quad Q = \sqrt{\frac{AC}{(B-C)(A-B)}}, \quad R = \sqrt{\frac{BA}{(A-C)(B-C)}}.$$

Факт наличия полюсов учитывается для построения решения уравнений динамики в общем случае.

Использование обобщённых координат  $q_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ , связанных с параметрами Эйлера-Родрига-Гамильтона соотношениями  $\lambda_i = q_i / \sqrt{\sum_{s=0}^3 q_s^2}$ ,  $\sum_{s=0}^3 q_s^2 = 1$ , совпадающих на движении с параметрами Эйлера – Родрига – Гамильтона, даёт уравнения динамики (в форме уравнений Гамильтона), правые части которых являются суммой мономов координат и импульсов третьей степени [2].

Первые члены решений в виде рядов  $\mathbf{q} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{Q}_s \frac{(t_0 + t)^s}{\sqrt{t_0 + t}}$ ,  $\mathbf{p} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{P}_s \frac{(t_0 + t)^s}{\sqrt{t_0 + t}}$ ,  $t \geq 0$  являются формальными решениями уравнений динамики. Остальные векторы определяется рекуррентным образом. Сдвиг  $t_0$  исключает особенность, обусловленную полюсом.

## Л и т е р а т у р а

1. *Розе Н.В.* Динамика твёрдого тела. Л.: Изд. Кубуч, 1932. 306 с.
2. *Khanukaev Y.I.* On the Equation of Dynamics of the Attracting Point Masses // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 48: 1990. С. 1-21.

## Analytical Solution of the Equations of Dynamics Heavy Solid Body with The Motionless Point

**Y.I. Khanukaev**

*Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Russia*

Analytical decisions are constructed. Degree of the first members of ranks is equal minus one second. Feature in zero is excluded by shift which is defined by entry conditions.

# К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В СРЕДЕ

**М.В. Шамолин**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия  
E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.com*

Рассматривается плоскопараллельное движение однородного твердого тела массы  $m$ , имеющего конусообразную переднюю часть, взаимодействующую с потоком среды в условиях, например, струйного или отрывного обтекания. Координата  $y_N$  точки  $N$  приложения силы воздействия среды определяется, для простоты, лишь одним параметром – углом атаки  $\alpha$ , измеряемым между вектором скорости точки  $D$  (вершины конуса) и осью симметрии  $Dx$ :  $y_N = R(\alpha)$ . Силы лобового и бокового сопротивления будем представлять в квадратичном виде по скорости точки  $D$ :  $S_x = -s(\alpha)v^2 e_x$ ,  $S_y = -b(\alpha)v^2 e_y$ ,  $|v_D| = v$ .

Таким образом, тройка функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  определяет воздействие среды на твердое тело в условиях квазистационарности [1, 2].

Динамическая часть уравнений движения переписывается в следующем виде ( $I$  – центральный момент инерции тела,  $\sigma = CD$ ,  $C$  – центр масс):

$$v^* \cos \alpha - \alpha^* \sin \alpha + \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 = -\frac{s(\alpha)}{m} v^2, \quad v^* \sin \alpha + \alpha^* \cos \alpha - \Omega v \cos \alpha + \sigma \Omega^2 = -\frac{b(\alpha)}{m} v^2, \quad (1)$$

$$I \Omega^* = -F(\alpha) s(\alpha) v^2 + \sigma b(\alpha) v^2 - h \Omega v,$$

где  $\Omega$  – величина угловой скорости тела,  $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$ , а коэффициент  $h > 0$  характеризует дополнительный момент, зависящий от угловой скорости [1, 2].

Здесь первые два уравнения получены из теоремы о движении центра масс, а третье – из теоремы об изменении кинетического момента в осях Кенига. Подобные системы, но без боковой силы ранее были исследованы в [1, 2]. Поскольку кинетическая энергия тела и обобщенные силы и моменты, действующие на тело, не зависят от положения тела на плоскости, позиционные координаты в системе являются циклическими. Это позволяет рассматривать систему динамических уравнений в качестве независимой.

Для определения вида классов функций  $R(\alpha)$ ,  $s(\alpha)$ ,  $b(\alpha)$  используется экспериментальная информация о свойствах струйного обтекания (см. также [1, 2]). Данные классы функций достаточно широки. Они заведомо включают допустимые конкретные функции, взятые для каждого мыслимого тела и для каждого мыслимого движения. Но, конечно, не каждой конкретной тройке динамических функций можно поставить в соответствие мыслимое твердое тело со своим движением. Поэтому исследование данной проблемы для достаточно широких классов динамических функций позволяет говорить об относительно полном рассмотрении задачи о движении тела в среде в рамках данных модельных предположений в условиях квазистационарности. Таким образом, для исследования обтекания конусообразного тела средой используются классы динамических систем, определенные с помощью тройки динамических функций, что значительно усложняет проведение глобального нелинейного анализа.

При определенных условиях динамическая система (1) допускает отделение независимой системы второго порядка. В работе получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов на фазовом цилиндре квазискоростей, отличающееся от ранее полученных [1, 2].

## Л и т е р а т у р а

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.
2. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. матем. 2008. Т. 14. №3. С. 3–237.

## On Problem of Conic Form Body Motion in a Medium

**M.V. Shamolin**

*Lomonosov Moscow State University, Russia*

In this work, we study the mathematical model of a medium interaction onto a rigid body with the part of exterior body surface as the cone. The complete system of body motion equations which consists of dynamic and kinematic parts, is presented. The dynamic part is formed by the independent third-order system. Under the certain conditions, we obtain the new multi-parametric family of phase patterns on the phase cylinder of quasivelocities. This family obtained is not as well-known earlier.

# НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ТЕЛЕЖКИ С МАЯТНИКАМИ

**Е.А. Шатров**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: egorshatoff@yandex.ru*

Одной из главных задач управления является задача о перемещении механической системы из одного фазового состояния в другое, причем только за счет одной управляющей силы при задании как времени, так и пути. В частности, если конечным должно быть состояние покоя, то говорят о задаче гашения колебаний. В данном докладе эта задача решается применительно к горизонтально перемещающейся тележке с заданным числом маятников. Искомой управляющей силой является горизонтальная сила, приложенная к тележке. Задается время перемещения тележки и длина пути. В начале и в конце пути скорости и ускорения всех точек системы по постановке задачи равны нулю. В [1] показывается, что условию отсутствия ускорений в эти моменты времени нельзя удовлетворить при построении решения на основе принципа максимума Понтрягина, удовлетворяется же оно при использовании обобщенного принципа Гаусса. Процедура построения управляющей силы на основе этого принципа непосредственно связана с переходом к главным координатам. Но чем больше число маятников, тем сложнее этот переход. Поэтому предлагается новый подход к рассматриваемой задаче, позволяющий избежать этого перехода. Первоначально ищется как функция времени то ускорение тележки, при котором она за заданное время переместится на заданное расстояние при отсутствии скоростей и ускорений у тележки и у маятников в начале и в конце пути. В этой новой задаче углы поворота маятников можно рассматривать как главные координаты, что и позволяет по разработанной в [1] процедуре на основе обобщенного принципа Гаусса определить искомое ускорение тележки. Затем по найденному движению тележки и маятников определяется искомая управляющая сила. Результаты численных расчетов для различных параметров системы, полученные по старому и новому подходу, сравниваются для случая одного, а затем двух маятников.

## Л и т е р а т у р а

1. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Неголономная механика. Теория и приложения. М.: Наука. Физматлит. 2009. 344 с.

## New Approach to the Solution of the Task on Clearing of Fluctuations of the Cart With Pendulums

**E.A. Shatrov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Horizontally moving cart with the set number of pendulums is considered. The operating force applied to the cart providing its movement for the set time for the set distance is defined. It is supposed that and at the end of the way of the cart of speed and acceleration at all points of system are equal in the beginning to zero. It is impossible to provide lack of accelerations in these timepoints at creation of the decision on the basis of the principle of a maximum of Pontryagin. Use of the generalized Gauss's principle allows to meet all conditions. Procedure of creation of the operating force on the basis of this principle is connected with transition to the main coordinates. The more the number of pendulums, the are more difficult this transition. Therefore the new approach to the considered task allowing to avoid this transition is offered. Originally on the basis of the generalized Gauss's principle that acceleration of the cart at which it for the set time will move on the set distance in the absence of speeds and accelerations at the cart and at pendulums at the beginning and the end of a way is defined as function of time. Then the required operating force is determined by the found movement of system. The results of numerical calculations for various parameters of system received on old and new approach are compared for a case of one, and then two pendulums.



# II

ДИНАМИКА ЕСТЕСТВЕННЫХ И ИСКУССТВЕННЫХ  
НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

---

**DYNAMICS OF NATURAL AND ARTIFICIAL  
CELESTIAL BODIES**

# ON A SATELLITE STABILIZATION IN THE KÖNIG FRAME

**A.Yu. Aleksandrov, K.A. Antipov, A.V. Platonov, A.A. Tikhonov**

*Saint Petersburg State University, Russia*

*E-mail: alex43102006@yandex.ru, antipov\_k@rambler.ru, al-platon1@yandex.ru, a.tikhonov@spbu.ru*

A satellite in a circular near-Earth orbit is considered. The satellite is equipped with an electrodynamic attitude control system based on the usage of Lorentz and magnetic torques. The perturbing impact of the gravitational torque is taken into account. The possibility of using the electrodynamic control system for the solution of practically important problem [1] of satellite attitude stabilization in the König coordinate system (coordinate system whose origin is in the satellite's mass center and the axes are in translational motion) is studied.

Electrodynamic method of a satellite attitude stabilization, based on capabilities both of Lorentz and magnetic torques proposed in [2] was modified and developed in [3--6]. In these studies, the principle of creating of restoring and damping components of control torques was suggested and the possibilities to optimize the attitude control in order to reduce energy consumption were analyzed.

In the present work, this method is applied to the problem of the satellite three-axis stabilization in the König frame. On the basis of the Lyapunov direct method, sufficient conditions for the asymptotic stability of the programmed satellite equilibrium position are obtained for the nonlinear statement of the problem, and the domain of the admissible values of the control parameters and satellite's orbit is found.

The results of a numerical simulation are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

The research was supported by the Saint Petersburg State University (project No. 9.38.674.2013), and by the Russian Foundation of Basic Research (grant Nos. 13-01-00347-a and 13-01-00376-a).

## References

1. *Rauschenbakh B.V., Ovchinnikov M.Yu., McKenna-Lawlor S.* Essential Spaceflight Dynamics and Magnetospherics. New York: Kluwer & Microcosm Publ., 2003. 397 p.
2. *Antipov K.A., Tikhonov A.A.* Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field // Automation and Remote Control. 2007. vol. 68. pp. 1333-1345.
3. *Tikhonov A.A., Spasic, D.T., Antipov, K.A., Sablina, M.V.* Optimizing the electrodynamical stabilization method for a man-made Earth satellite // Automation and Remote Control. 2011. vol. 72. pp. 1898-1905.
4. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.* Electrodynamic stabilization of Earth-orbiting satellites in equatorial orbits // Cosmic Research. 2012. vol. 50. pp. 313-318.
5. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.* Monoaxial electrodynamic stabilization of Earth satellite in the orbital coordinate system // Automation and Remote Control. 2013. vol. 74. pp. 1249-1256.
6. *Antipov K.A., Tikhonov A.A.* On satellite electrodynamic attitude stabilization // Aerospace Science and Technology. 2014. vol. 33. pp. 92-99.

# О ВРАЩЕНИИ САТУРНА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ МОМЕНТОВ СОЛНЦА И ЮПИТЕРА

**П.С. Красильников, Р.Н. Амелин**

*Московский авиационный институт, Россия  
E-mail: krasil06@rambler.ru, rus-amelin@mail.ru*

Рассматриваются вращения Сатурна относительно центра масс в рамках эллиптической ограниченной задачи трёх тел. Предполагается, что Сатурн является твердым телом, находящимся под действием притяжения Солнца и Юпитера, имея массу, малую по сравнению с массами притягивающих тел. Движения Сатурна и Юпитера считаются эллиптическими с эксцентриситетами  $e_c$  и  $e_j$  соответственно. Малым параметром задачи является среднее движение Юпитера  $n_j$ .

Получена, на основе исследований [1], осредненная функция Гамильтона для произвольных значений  $e_j, e_c$ , когда малым параметром является  $\varepsilon=n_j$ . Построена с помощью интегралов эволюционных уравнений качественная картина движения конца вектора кинетического момента  $\mathbf{I}_2$  Сатурна на единичной сфере.

Описаны основные эффекты влияния Юпитера на вращения Сатурна:  $\alpha$ ) эволюция постоянных параметров регулярной прецессии вектора кинетического момента  $\mathbf{I}_2$  (угла нутации и угловой скорости прецессии);  $\beta$ ) появление новых либрационных зон колебаний  $\mathbf{I}_2$  вблизи плоскости небесного экватора, параллельной плоскости орбиты Сатурна, что является следствием разрушения структурно неустойчивого континуума относительных равновесий  $\mathbf{I}_2$ , существующих при регулярной прецессии Сатурна под действием притяжения одного лишь Солнца;  $\gamma$ ) появление дополнительных неустойчивых равновесий вектора  $\mathbf{I}_2$  в точках северного и южного полюса небесной сферы и, как следствие, наличие гомоклинических траекторий, стремящихся при  $t \rightarrow \pm\infty$  к этим равновесиям;  $\delta$ ) существование периодических траекторий со сколь угодно большими периодами вблизи гомоклинической траектории. Показано, что эффекты  $\beta$ ),  $\gamma$ ),  $\delta$ ) обусловлены эксцентриситетом  $e_j$  орбиты Юпитера и практически не зависят от массы Юпитера (в рамках спутникова приближения).

## Л и т е р а т у р а

1. *Красильников П.С.* Быстрые нерезонансные вращения космического аппарата на условно-периодических орбитах в ограниченной задаче трех тел. *Космические исследования.* 1984. Т. 22. №2. С. 171-180.

## On the Rotation of Saturn Around the Center of Mass under the Action of Gravitational Moments of the Sun and Jupiter

**P.S. Krasilnikov, R.N. Amelin**

*Moscow Aviation Institute, Russia*

Discusses the rotation of Saturn around the center of mass in the framework of the elliptic restricted problem of three points. Assumed that the Saturn is a solid body under the effect of attraction of the Sun and Jupiter, with a mass that is negligible compared to the masses of the attracting points. Movements of Saturn and Jupiter are elliptical with small eccentricities  $e_c$  and  $e_j$ , respectively; little mean motion of Jupiter  $n_j$ .

The obtained averaged Hamiltonian for arbitrary values of  $e_j, e_c$ , when a small parameter is  $\varepsilon=n_j$ , the resulting integrals evolution equations, constructed a qualitative picture of the motion of the angular momentum of Saturn on the sphere, taking into account the smallness of the eccentricity of Jupiter.

## О МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗРУШЕНИЯ КРУПНЫХ БОЛИДОВ В АТМОСФЕРЕ

**Л.А. Егорова, В.В. Лохин**

*Научно-исследовательский институт механики МГУ, Москва, Россия,*

*E-mail: egorova@imec.msu.ru, valeriy.lokhin@yandex.ru*

Рассматривается вход в атмосферу Земли космического тела со сверхорбитальной скоростью. Большие аэродинамические нагрузки, действие сил инерции и тепловые потоки к телу приводят к поверхностному уносу массы и возможному механическому разрушению [1]. Движение образовавшегося в результате разрушения тела облака осколков представляет отдельную задачу. Из наблюдений известно, что зачастую полет космического тела завершается мощной конечной вспышкой [1]. Мы предлагаем один из возможных вариантов оценки энерговыделения на заключительной стадии разрушения тела, подтверждающую возможность наблюдаемого эффекта «тепловой взрыва» метеороида.

Мы предполагаем реализацию следующего сценария разрушения достаточно крупного тела. В процессе движения в атмосфере метеороид многократно дробится за счет аэродинамических сил инерции. Критерием начала дробления считаем достижение напряжениями внутри шара предела прочности материала [2]. На первой стадии прогрессивного дробления разрушение считаем связанным с неоднородностями в строении, таким образом, после первой стадии образуется облако достаточно однородных крупных фрагментов. На второй стадии из-за повышения скоростного напора эти однородные фрагменты продолжают разрушаться, но уже взрывоподобно, на еще более мелкие и мельчайшие осколки и частицы. Облако фрагментов продолжает движение в горячем излучающем газе ударного слоя. За счет экстремально высоких температур в ударном слое поверхность осколков значительно нагревается и за достаточно короткий промежуток времени все части метеороида расплавятся и испарятся. Такое явление выглядит для наблюдателя как «концевая вспышка». Полагая распределение осколков по размерам и массе типичным и известным из литературы, оцениваем интегральную кривую светимости. Даны оценки для известных болидов.

### **Л и т е р а т у р а**

1. *Попова О.П., Немчинов В.И.* Метеорные явления (болиды) в атмосфере Земли // Катастрофические воздействия космических тел. М. : ИКЦ «Академкнига», 2005. С. 92-117.
2. *Егорова Л.А.* Напряженно-деформированное состояние и разрушение метеороида при движении в атмосфере.

## **On the modeling of large fireball destruction in the atmosphere**

**L.A. Egorova, V.V. Lokhin**

*Institute of mechanics MSU, Moscow, Russia*

We consider the entry of a big cosmic body into the Earth's atmosphere with superorbital velocity. Large aerodynamic loads, the forces of inertia and heat flow to the body lead to surface ablation and possible mechanical destruction. Movement of the fragment group formed as a result of above destruction is a separate problem. From observations it is known that in many cases the flight-space body completes a powerful terminal flash. We offer one of the possible estimation of the energy in the final stage of destruction of the body that confirm opportunity of observed effect of "thermal explosion".

# СИНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ ОРБИТАЛЬНОГО МАНЕВРИРОВАНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Н.А. Зеленина

Южный Федеральный университет, Таганрог, Россия  
E-mail: nelly155@yandex.ru

Решение большинства задач управления движением искусственных спутников Земли (ИСЗ) невозможно без осуществления орбитального маневрирования. Наибольшее распространение в практике орбитального маневрирования получили импульсные маневры, предполагающие создание мгновенного вектора тяги с помощью маневровых двигателей в определенных точках орбиты движения ИСЗ. Импульсные маневры имеют ряд ограничений при их использовании, в частности: чувствительность к изменению потребной скорости перелета, зависимость оптимальности перелета от радиуса конечной орбиты и т.д. [1].

Целью работы является разработка эффективных алгоритмов автоматического управления движением ИСЗ, обеспечивающих осуществление компланарных и пространственных маневров и лишенных ограничений импульсного подхода. Поставленная цель достигается путем рассмотрения нелинейных математических моделей динамики орбитального полета и использования концептуальных подходов и методов синергетической теории управления [2-3]. При решении задач синтеза алгоритмов управления компланарным маневрированием в работе используется нелинейная модель ИСЗ в полярных координатах с двумя каналами управления. При пространственном маневрировании используется нелинейная модель ИСЗ в цилиндрических координатах с тремя каналами управления.

Результаты моделирования динамики ИСЗ с разработанными алгоритмами управления позволяют не учитывать ограничения импульсного подхода. Использование метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов позволило получить эффективные алгоритмы замкнутого управления, которые обеспечивают осуществление различных компланарных и некомпланарных орбитальных маневров. На рис.1 представлен результат моделирования компланарного маневра перевода ИСЗ с эллиптической орбиты с параметрами  $e = 0,87$ ;  $p = 6297,8$  км на круговую орбиту радиуса  $r = 36000$  км:



Рис. 1. Траектория движения ИСЗ в плоскости орбиты (исходная орбита показана более тонкой линией).

## Л и т е р а т у р а

1. Левантовский В.И. Механика космического полета в элементарном изложении. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. Колесникова А.А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
3. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 240 с.

## Synergetic Synthesis of Orbital Maneuvering for Artificial Earth Satellites

N.A. Zelenina

Southern Federal University, Taganrog, Russia

The decision of the majority of tasks, assigned to satellites, can't be performed without implementation of the orbital maneuvering. This article describes a synergistic approach to the problem of control synthesis for orbital maneuvering for artificial Earth satellites. In this paper the problem of coplanar and spatial maneuvers solved without taking into account the shortcomings of classical pulse approach.

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ В ЗАДАЧЕ СИТНИКОВА В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

**В.О. Калас, П.С. Красильников**

*Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет), Россия  
E-mail: kalasv@yandex.ru, krasil06@rambler.ru*

Исследуется устойчивость тривиального равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке. Для гамильтоновых уравнений задачи построено, с точностью до членов четвертого порядка малости, отображение фазового пространства на себя в момент времени  $t = 2\pi$ . На основе метода точечных отображений [1,2] показано, что устойчивость по первому приближению [3] сохраняется в полной системе уравнений для всех значений эксцентриситета из интервала  $[0,1)$ , если исключить из рассмотрения дискретную последовательность значений  $e$ , для которых след матрицы монодромии равен  $\pm 2$ .

Исследованы первое и второе значения эксцентриситета из указанной последовательности. Равновесие устойчиво для первого значения  $e$ . Второе значение эксцентриситета отвечает вырождению теорем устойчивости, поэтому требует привлечение членов порядка выше третьего. Остальные значения из дискретной последовательности значений эксцентриситета не изучены.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *А.П. Маркеев* Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем// Изв. РАН. МТТ. 2004. № 6. С. 3-12.
2. *А.П. Маркеев* О сохраняющих площадь отображениях и их применении в динамике систем с соударениями// Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 37-54.
3. *В.О. Калас, П.С. Красильников П.С.* Об устойчивости равновесия в задаче Ситникова// Космич. исследования. 2011. Т. 49. № 6. С. 551-554

## **On the Investigation of Stability of Equilibrium in Sitnikov Problem in Nonlinear Formulation**

**V.O. Kalas, P.S. Krasilnikov**

*Moscow Aviation Institute (State University of Aerospace Technologies), Russia*

In nonlinear approximation, the stability of the trivial equilibrium in Sitnikov problem is investigated. For Hamilton's equations of the problem, the mapping of the phase space into itself in the time  $t = 2\pi$  was constructed up to terms of fourth order. With the help of point mapping method [1, 2] for eccentricity from the interval  $[0,1)$ , it is shown that the stability in the first approximation [3] is Lyapunov stability excluding some sequence of eccentricities for which the trace of the monodromy matrix equals  $\pm 2$ .

First and second values of the eccentricity of sequence are investigated. The equilibrium is stable for the first eccentricity. Second eccentricity leads to the degeneration of stability theorems so it requires take into account terms of order higher than the third. Other values of eccentricity of sequence have not been studied.

# **НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ АНСАМБЛЯ ТЕХНОГЕННЫХ МИКРОЧАСТИЦ, МГНОВЕННО ИНЖЕКТИРУЕМЫХ В ОКОЛОЗЕМНОЕ КОСМИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ, ДВИЖУЩИМСЯ ПО ВЫТЯНУТОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ С НИЗКИМ ПЕРИГЕЕМ**

**Е.К. Колесников, С.В. Чернов**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: Kolesnikov\_evg@mail.ru, beam2000@mail.ru*

Разработана программа численного моделирования эволюции ансамбля из заданного числа не взаимодействующих между собой сферических техногенных микрочастиц определенного радиуса, мгновенно инжектируемых в ОКП точечным источником, совершающим орбитальное движение по заданной траектории. Начальные скорости частиц определяются в результате случайной выборки, производимой ЭВМ в соответствии с заданным начальным распределением инжектируемых частиц по скоростям, которое в системе отсчета инжектора предполагается изотропным и равномерным по величине скорости в заданном интервале. Текущее состояние ансамбля определяется на основе расчета положений образующих его частиц, которые находятся посредством численного решения уравнений движения одиночных частиц ансамбля, учитывающих воздействие на них: центрального гравитационного поля Земли и его возмущения, обусловленного полярным сжатием Земли; силы солнечного давления, силы сопротивления верхней атмосферы, а также электродинамических сил.

На основе результатов численных экспериментов показана принципиальная возможность формирования в окрестности Земли долгоживущих астрозольных облаков, образующихся из техногенных микрочастиц, мгновенно инжектируемых в ОКП точечным источником, совершающим орбитальное движение по вытянутой эллиптической орбите с низким перигеем.

## **Some Features of Dynamics of Ensemble of the Technogenic Microparticles Instantaneous Injected in a Near-Earth Space by the Point Source Moving on the Elongated Elliptic Orbit with a Low Perigee**

**E.K. Kolesnikov, S.V. Chernov**

*Saint Petersburg State University, Russia*

The computer program modeling the evolution of an ensemble of certain number of noninteracting spherical man-made microparticles is developed. In this case, we assumed that all particles have certain radius and are injected instantly by point source, which is moving on given trajectory in the NES. Particle initial velocities is defined by casual selection realized computer with correspond to given initial velocity distribution of injected particles. We suppose that injection is isotropic and injection velocities are uniformly distributed in given interval in the reference system of injector. The ensemble current state is determined by calculation of ensemble particles locations with the help of numerical solving of the single particle motion equations. These equations take into account that microparticle is influenced by the central gravitational field of the Earth and its perturbation caused by the polar compression of the Earth; force of the solar pressure; the upper atmosphere resistance force and electrodynamics forces.

There have been shown the principal possibility of formation of long-term astrosol clouds that is formed by man-made particles injected instantly in the NES by the point source which moves on oblong elliptic orbit with low perigee point near the Earth by the results of numerical experiments.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОИМПУЛЬСНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

**В.С. Королев**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: vokorol@bk.ru*

Теория оптимизации космических маневров [1] дополняется учетом воздействия многих физических факторов и ограничений [2], которые приводят к усложнению в постановках задач [3] и полученных уравнениях. Во многих реальных задачах в качестве начальных приближений эффективно применяются решения задач в упрощенных постановках, когда действие возмущений считают пренебрежимо малым, а активные участки полета при работе двигателя аппроксимируют мгновенным изменением вектора скорости космического аппарата, а затем используют методы последовательного уточнения. Критерии оптимальности для УКА могут быть разными, когда требуется обеспечить минимальный расход топлива или реализовать переход за наименьшее или заданное время;

Энергетически оптимальные траектории маневрирования космических аппаратов для обслуживания или инспектирования [4,5] могут потребовать больших промежутков времени ожидания наступления моментов, благоприятных для старта и встречи с другими объектами. Оптимальные траектории с учетом ограничений времени движения дают локально оптимальные относительно времени старта решения. Чем больше возможная отсрочка момента старта, тем лучше решение можно получить. При свободном выборе времени может быть реализовано абсолютно оптимальное решение задачи. Ограничения в задачах оптимизации часто играют решающую роль, а значения параметров находятся на границе допустимой области.

Время движения между двумя точками орбиты можно определить из уравнения Кеплера, а траекторию перехода при заданном времени можно определить по алгоритму Ламберта. Аппроксимация возмущений кусочно-постоянными функциями приводит задачу к последовательному сопряжению участков траекторий, полученных при выбранной параметризации промежутков движения и действующих импульсов. При необходимости обслуживания большого числа естественных или искусственных небесных тел траектория состыковывается из кусочков орбит пассивного движения и активных участков маневрирования. В точках сопряжения конечные данные переходят в начальные для нового участка орбиты. Значения на соседних участках отличаются импульсным изменением вектора скорости, величину и направление которого считаем управлением. Сумма модулей импульсов определяет затраты по энергетике, которые нужно минимизировать. Сумма всех промежутков времени ожидания и движения по орбитам перехода должна удовлетворять заданным ограничениям.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Новоселов В.С.* Аналитическая теория оптимизации в гравитационных полях. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. 317 с.
2. *Коваленко А.Н., Королев В.С.* Задача оптимизации траекторий для перехвата и отклонения опасных для Земли астероидов с учетом ограничений на время или импульс // Вопросы механики и процессов управления. СПб: Изд-во СПбГУ, 2003. С. 242-247.
3. *Королев В.С.* Оптимизация и вычисление траекторий методом возмущенных конических сечений // Вопросы механики и процессов управления. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. С. 67-72.
4. *Королев В.С.* Задачи оптимального инспектирования астероидов космическим аппаратом // Избранные труды международной научной конференции по механике «Шестые Поляховские чтения». СПб. 2012. С. 123-126.
5. *Королев В.С.* Оптимальные траектории перехода космических аппаратов между заданными орбитами различного типа // Технические науки – от теории к практике. № 3 (28), Новосибирск: Изд. «СибАК», 2014. С. 62-70.

## **Simulate Multi-Impulse Spaceship Trajectory with Presence Restriction**

**V.S. Korolev**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Simulate multi-impulse spaceship trajectory with presence restriction are investigated. The differential equations systems are under discussion for mathematical models in celestial mechanics. Optimum trajectories for service or investigation many subject are in the discussion.

# О НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗОНАНСАХ В КОЛЕБАНИЯХ ЗАРЯЖЕННОГО ИСЗ

**Е.А. Косяков, А.А. Тихонов**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: 42\_@mail.ru, atikhonov@spbu.ru*

В докладе рассматриваются колебания ИСЗ относительно его центра масс в окрестности устойчивого положения равновесия, обусловленного воздействием гравитационного момента. Предполагается, что ИСЗ обладает электростатическим зарядом, взаимодействующим с магнитным полем Земли. Возникает необходимость учета возмущающего влияния момента сил Лоренца на колебания ИСЗ. При этом большой интерес представляет изучение возможных резонансных эффектов [1]. Исследование проводится на базе развитой в работе [2] методики изучения нелинейных резонансных колебаний ИСЗ в условиях сложного силового воздействия. Разработанный в [2] подход к математическому моделированию либрационного движения ИСЗ и исследованию его нелинейных колебаний позволяет учитывать воздействие возмущающего момента общего вида в классе неавтономных нелинейных кубических функций относительно малых величин углов ориентации ИСЗ и их производных по времени.

На базе полученных в [2] дифференциальных уравнений возмущенных колебаний гравитационно-ориентированного ИСЗ исследованы резонансные колебания спутника под влиянием гравитационных возмущений и возмущений, вызванных моментом лоренцевых сил. При этом обнаружены резонансы электромагнитного происхождения, проведена их классификация и построены соответствующие резонансные кривые на плоскости инерционных параметров ИСЗ. В соответствии с методикой, развитой в [3], с помощью компьютерного моделирования проанализирована зависимость амплитуд резонансных колебаний ИСЗ от инерционных параметров. С использованием метода усреднения выполнено аналитическое исследование колебаний ИСЗ как в нерезонансной ситуации, так и в условиях выявленных резонансов путем построения систем первых интегралов с последующим интегрированием дифференциальных уравнений и интерпретацией решений на амплитудно-фазовых плоскостях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 13-01-00347-а и № 13-01-00376-а.

## Л и т е р а т у р а

1. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд. Моск. ун-та, 1975. 308 с.
2. *Kosjakov E.A., Tikhonov A.A.* Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.006 .
3. *Kosjakov E.A., Murzinov I.E., Tikhonov A.A.* On analytical investigation and computer modeling of spacecraft nonlinear resonance oscillations // Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA), 2014 International Conference on, June 30 - July 04, Saint-Petersburg, p.74, Print ISBN: 978-1-4799-5315-8, DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893287, Publisher: IEEE.

## On Nonlinear Resonances in Oscillations of Charged Satellite

**E.A. Kosjakov, A.A. Tikhonov**

*St.Petersburg State University, Russia*

The paper deals with a satellite performing small oscillations (librational motion) relative to its center of mass in the neighborhood of stable equilibrium due to the influence of gravitational torque. The satellite possesses electrostatic charge interacting with the Earth's magnetic field. The disturbing influence of Lorentz torque upon a satellite librational motion is investigated. A new notation for the differential equations of satellite disturbed motion is introduced with the inclusion of the third infinitesimal terms. The analytical analysis of satellite nonlinear oscillations is based on a perturbation technique combined with averaging technique. Both resonance and non-resonance cases are considered.

# О СТАБИЛИЗАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ОРБИТАЛЬНОЙ СТАНЦИИ В ЗАЛУННОЙ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКЕ ЛИБРАЦИИ

А.Л. Куницын<sup>1</sup>, А.Т. Турешбаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Россия

<sup>2</sup>Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата, Казахстан

E-mail: akunits@yandex.ru, aturesh@mail.ru

Предлагается способ стабилизации относительного равновесия орбитальной станции в окрестности залунной коллинеарной точки либрации системы Земля — Луна при помощи малого постоянного по модулю дополнительного ускорения, создаваемого реактивным двигателем, жестко связанным с корпусом станции, которая предполагается твердым телом с постоянным эллипсоидом инерции. За уравнения движения центра масс станции берутся классические уравнения движения круговой задачи трех тел для системы Земля — Луна, в правые части которых добавляются проекции указанного реактивного ускорения. Для описания вращательного движения станции используются динамические и кинематические уравнения Эйлера. Показано, что приведенная система уравнений поступательно-вращательного движения станции имеет семейство положений относительного равновесия станции, в которых ее центр масс постоянно находится в новой коллинеарной точке либрации, при малом ускорении близкой к классической залунной точке, а сама станция находится в покое относительно вращающейся вместе с Луной системы координат. Далее проводится исследование устойчивости найденных положений относительного равновесия орбитальной станции по уравнениям возмущенного движения в первом приближении. Характеристическое уравнение оказывается бикубическим, если учитывать лишь возмущения в плоскости невозмущенного движения станции. При занулении реактивного ускорения оно распадается на биквадратное и билинейное. Показывается, что при небольшом смещении (вследствие работы реактивного двигателя) центра масс станции относительно классической залунной точки корни, как первого, так и второго уравнения будут чисто мнимыми и, следовательно, положение относительного равновесия станции будет устойчиво в первом приближении. Утверждается, что при малых величинах реактивного ускорения этот вывод будет справедлив и для полного бикубического характеристического уравнения, поскольку его коэффициенты являются непрерывными функциями указанного ускорения.

## Литература

1. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. ВЦ АН СССР. М. 1967.
2. Krasilnikov P.S., Kunitsyn A.L. Stabilization of collinear libration points in restricted circular three-body problem // Sel. Mech. № 15, 1977.
3. Jumabaeva A.A., Kunitsyn A.L., Tuyakbaev A.A. On the stabilization of collinear libration points in the Earth-Moon system // Journal of Appl. Math. and Mech. 1999. V. 6, № 2, p.189-196.

## Stabilization of Orbital Station Relative Equilibrium in the Afterlunar Collinear Libration Point

A.L. Kunitsyn<sup>1</sup>, A.T. Tureshbaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia

<sup>2</sup>Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kazakhstan

The problem of the stabilization of orbital station relative equilibrium in the afterlunar collinear libration point with the help of a small in module reaction acceleration constantly tied with the station's body is considered. It is shown that under small displacement of the station center of mass relative to afterlunar collinear libration point in the station parameter space it appears the region in which station relative equilibrium in its translation-rotation motion will be stable in the first approximation.

## О ПОСЛЕДСТВИЯХ РЕЗОНАНСНЫХ ВОЗВРАТОВ АСТЕРОИДОВ, СБЛИЖАЮЩИХСЯ С ЗЕМЛЕЙ

Л.Л. Соколов, Г.А. Кутеева

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: lsok@astro.spbul.ru, gkut@rambler.ru*

Обсуждаются возможные соударения астероидов с Землей, связанные с резонансными возвратами. Рассматривается список более 100 соударений астероида Апофис в XXI веке, полученный на кафедре небесной механики СПбГУ [1], включающий относительные положения и размеры щелей, ведущих к соударениям. Несмотря на уточнение орбиты в 2013 году, Апофис остается опасным астероидом. Основные характеристики ведущих к соударениям щелей устойчивы относительно малых изменений модели движения. Из-за резонансных возвратов относительные положения щелей образуют сложную структуру, аналогичную структуре фрактала. Эту структуру необходимо учитывать при проектировании мероприятий по предотвращению соударений. Обсуждаются также касающиеся Апофиса результаты, полученные в НАСА. Они находятся в хорошем согласии с представленными результатами. Связанные с резонансными возвратами особенности траектории Апофиса имеют место и для других опасных астероидов. Очень важно тщательно исследовать эти особенности.

### Л и т е р а т у р а

5. Sokolov L.L., Borisova T.P., Vasiliev A.A., Petrov N.A. Properties of Collision Trajectories of Asteroids with the Earth // Solar System Research. 2013.V. 47. №5. P. 408-413.

## On the Consequences of Resonant Returns of Near-Earth Asteroids

L.L. Sokolov, G.A. Kuteeva

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Possible collisions of asteroids with the Earth, associated with resonant returns, are considered. The list of more than 100 collisions of asteroid Apophis in XXI century, derived in the Chair of Celestial Mechanics SpbSU [1] is discussed, including relative positions and sizes of gaps, leads to collisions. In spite of orbit refinement in 2013, Apophis will continue a hazardous asteroid. Main characteristics of gaps, leads to collisions, are stable under small change of the model of motion. Due to resonant returns, relative positions of gaps forms complicated structure, similar to a fractal structure. This structure must be taken into account in the design of collisions eliminating. The results, derived NASA, concerning asteroid Apophis, are discussed as well. There are in good agreement with our results. Connected with resonant returns peculiarities of Apophis trajectory holds true for other hazardous asteroids. It is very important to investigate this peculiarities carefully.

## МЕЖОРБИТАЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В ОКРЕСТНОСТЬ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ

А.С. Шмыров, Г.П. Малявкин

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*  
*E-mail: ashmyrov@yandex.ru, malgepav@yandex.com*

При межорбитальном переходе в окрестность коллинеарной точки либрации основным требованием является обеспечение достаточно длительного времени пребывания в этой окрестности после отработки двигателей. Это условие можно формализовать с помощью специальной функции фазовых переменных, называемой «функцией опасности».

В работе в рамках приближённой модели, основанной на принципе сфер действия и теории импульсных перелётов, рассматривается переход космического тела с круговой гелиоцентрической орбиты в окрестность коллинеарной точки либрации  $L_1$  системы Земля – Солнце ограниченной круговой задачи трёх тел. При этом, переход производится при несколько ослабленных граничных условиях. А именно, в конечной точке траектории требуется не точное попадание в  $L_1$ , а выполнение условия равенства нулю функции опасности.

Численное интегрирование уравнений управляемого движения [1], из близкого к  $L_1$  начального положения, соответствующего равенству нулю функции опасности, показывает, что при этом тело (управляемый объект) остаётся в окрестности коллинеарной точки либрации достаточно большое время.

Такое ослабление краевых условий позволяет уменьшить энергетическую характеристику перелёта – характеристическую скорость – на величину порядка нескольких процентов, что может оказаться важным для задач транспортировки тел большой массы (например, астероидов), так как изменение скорости таких тел даже на небольшую величину связано со значительными энергетическими затратами.

Также рассматривается стабилизация движения тела в окрестности  $L_1$  управляющим воздействием, построенным при помощи функции опасности [2]. Показано что малое по величине управление обеспечивает длительное пребывание тела в окрестности коллинеарной точки либрации.

### Л и т е р а т у р а

1. Шмыров В.А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1$  // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 193–199.
2. Шмыров А.С., Шмыров В.А. Синтез оптимального управления орбитальным движением в окрестности коллинеарной точки либрации // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2012. Вып. 4. С. 139–146.

## Inter-Orbital Transfer to the Neighborhood of a Collinear Libration Point

A.S. Shmyrov, G.P. Maliavkin

*Saint-Petersburg State University, Russia*

A transfer of a space body from its initial heliocentric orbit to the neighborhood of the collinear libration point  $L_1$  is examined. It is shown that boundary conditions for the destination point can be loosened with the use of the notion of the so called “danger function”. Such loosening can decrease energy demands by several percent, while the body will stay close to the libration point for a sizeable period of time.

Further stabilization of the body’s motion is held with the control designed with the use of the danger function. Such control can make the body stay within the neighborhood of the collinear libration point for a long period of time.

# SOLAR RADIATION PRESSURE INFLUENCE IN MOTION OF ASTEROIDS, INCLUDING NEAR- EARTH OBJECTS

N.A. Petrov<sup>1</sup>, A.A. Martysheva<sup>2</sup>, E.N. Polyakhova<sup>1</sup>, K.I. Os'kina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*St.Petersburg State University, Russia*

<sup>2</sup>*Pulkovo Astronomical Observatory, St.Petersburg, Russia*

*E-mail: petrov@astro.spbu.ru, alex.mart13@gmail.com, pol@astro.spbu.ru*

The orbital evolution of several groups of relatively small asteroids (of about several hundreds meters in size) is investigated by numerical integration, with solar radiation pressure effects taken into account. Basic equations are written in the frame of three-body problem (the Sun-planet-asteroid) together with the Solar System planetary perturbations. Numerical integration was carried out to model objects with divers physical properties and orbital parameters and the initial configuration of bodies. The three-body system was selected for the purposes of this problem (the Sun - Jupiter - asteroid). The system splits into two independent models: 1. Restricted planar circular three-body problem (the Sun - Jupiter - asteroid (point-like)), only the gravity affects on it. 2. Photogravitational restricted planar circular three-body problem (the Sun - Jupiter - asteroid (extended body)), where the asteroid is considered as a spherical body having a finite radius, a certain given density and optical coefficient; the gravity and radiation pressure affect on it. Comparison of these two models allows one to calculate the deviation of asteroids location relative to each other, caused by the radiation pressure influence. In addition, the model including the Earth as a fifth body (the Sun - Jupiter - asteroid - asteroid - the Earth) reveals the influence of the Earth on the asteroid motion, which is important in connection with the asteroid-comet hazard. Bodies motion is defined in the heliocentric rectangular coordinate system. Jupiter motion is taken circular. The initial orbits of asteroids are elliptical in general. The initial values of the perihelion longitude and the mean anomaly for both asteroids are equal to zero [1,2]. Three resonance regions with Jupiter (2:1, 3:2, 1:1) and one region with the Earth (1:1) are considered. Initial conditions for integration were chosen to correspond to real relationships in asteroidal belts [3]. It was discovered that solar radiation pressure effects increase significantly with orbital eccentricity for a given asteroid orbit, no matter how strong all other perturbing actions are. Maximal variations of orbital elements occur near the above-mentioned resonance regions with planets. For example, the derived estimates show that the total variation of the distance between an asteroid's non-perturbed orbit and the orbit as perturbed by solar radiation pressure force is as high as  $10^3$  km over 100 years for Jupiter and  $(1-4) \cdot 10^3$  km for the Earth (where solar radiation is more intensive). In terms of the actual asteroid hazard for the Earth [4], the estimated time until a hazardous close approach (of about the Earth one radius) is 10-10000 years when solar radiation pressure is taken into account.

Support: Grant 6.0.162.2010 of Leading Scientific Schools of RF.

## References

1. *Radzievsky V.V.* The photogravitational celestial mechanic. N. Novgorod, publisher Nikolaev Yu.A., 2003, 196 p. (in Russian).
2. *Polyakhova E.N., Shmyrov A.S.* The physical model of the solar radiation pressure on a sphere and a plane // St. Petersburg, Vestnik of St.Petersburg University, Series 1, Issue 2, Number 8. 1994, p. 87-104. (in Russian) .
3. *Petrov N.A., Orlov S.A.* The investigation of the motion properties in the 2:1 resonance zone in the restricted three-body problem by means of the TRIO program // Proceedings of the All-Russian Astronomy Conference, St. Petersburg, August 6-12, 2010, St. Petersburg, Institute of Chemistry SPbU, p. 142. (in Russian).
4. Perturbations that should be considered in the orbit improvement and the motion prediction. Chapter 7, subsection 7.3, p. 195 in the book of Shustov B.M., Rykhlova L.V. (eds.) The asteroid-comet hazard: yesterday, today, tomorrow. Moscow, FIZMATLIT, 2010, 385 p. (in Russian).

# ON EQUILIBRIA OF A SPACE STATION TETHERED TO AN OBLATE ASTEROID

**A.V. Rodnikov**

*Bauman Moscow State Technical University, Russia  
E-mail: avrodnikov@yandex.ru*

To realize some space missions one can place a space station near a small planet. To except running away, one can tether the station to the asteroid surface. Estimating technical difficulties, one can present this problem as composition of three components.

The first component includes geometrical and dynamical characteristics of the asteroid. In this paper we assume the small planet is a rigid body that is oblate and is close to dynamically symmetric. This is a reason to replace gravitational potential of the asteroid with potential of two conjugate complex masses being on the imaginary distance. (This idea had been realized for the first time by V.G. Demin in 1959 for the Earth gravitational potential [1]). Evidently, the made assumptions imply rotation of the asteroid is close to a regular precession. Note that in this case the station motion equations are equations of the Generalized Restricted Circular Problem of Three Bodies (GRCP3B). (GRCP3B had been suggested by V.V. Beletsky in 2005 [2]).

The second component is the method of tethering. In this paper we assume the station coasts along a tether with ends placed at the asteroid poles, more precisely, at tops of the towers constructed on the poles. (Here poles are common points of the asteroid surface and of the axis of dynamical symmetry.) Such tether is called “the leier”.

The third component is the mission goals. In this paper we find the station equilibria on the leier. (Note that in general case the station moves w.r.t. the asteroid surface even if it is immovable w.r.t. the leier.) We establish that these equilibria form some curves in two planes. The first plane passes axes of precession and of dynamical symmetry, the second plane crosses the asteroid mass center orthogonally to the precession axis. In particular, the found curves can be infinite, endless or have ends in the libration points (LP) of GRCP3B. (Here LP is relative equilibrium of a free (non-tethered) particle w.r.t. axes of precession and of dynamical symmetry [3,4].) Also we deduce stability conditions for the found equilibria if motion along the leier is forbidden.

## References

1. *Demin V.G.* Dvizhenie iskusstvennogo sputnika v netsentral'nom pole tyagoteniya (Motion of an artificial satellite in non-central gravitational field). Moscow and Izhevsk: Regular and Chaotic dynamics, 2010, 420 p.
2. *Beletsky V.V.* Generalized restricted circular three-body problem as a model for dynamics of binary asteroids. // *Cosmic Research*. 2007. V. 45. No 5. p. 408–416.
3. *Rodnikov A.V.* Coplanar libration points of the generalized restricted circular problem of three bodies for conjugate complex masses of attracting centers // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013. V. 9. No 4, p. 697–710 (Russian).
4. *Rodnikov A.V.* Triangular libration points of the generalized restricted circular problem of three bodies for conjugate complex masses of attracting centers // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014. V. 10. No 2. p. 213–222 (Russian).

# О КОСМИЧЕСКИХ ПЫЛЕВЫХ ОБЛАКАХ КОРДЫЛЕВСКОГО

**Т.В. Сальникова, С.Я. Степанов**

*МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*  
*ВЦ им. А.А.Дородницына РАН, Москва, Россия*  
*E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com*

В соответствии с критерием устойчивости, треугольные точки либрации системы Земля - Луна устойчивы по Ляпунову. В 1961 году польский астроном К.Кордылевский опубликовал фотографии пылевых облаков в окрестности треугольной точки либрации  $L_5$  [1,2]. Более 50 лет со времени первого наблюдения обсуждается даже сам факт существования этих облаков. Ввиду неизбежных возмущений - таких, как влияние Солнца, наличие диссипативных сил, разрушающих гироскопическую устойчивость, и многих других, треугольные точки либрации, очевидно, будут неустойчивы в возмущенной задаче. Существование в возмущенной задаче устойчивых периодических решений в окрестности треугольных точек либрации классической задачи обсуждается в работах [3,4] и других (см. обзор [5]).

В данной работе рассматривается задача о движении четырех тел (Солнце, Земля, Луна и пылевая частичка) в следующей постановке: центр масс системы Земля-Луна движется вокруг Солнца по круговой орбите, Земля и Луна вращаются как твердое тело вокруг своего центра масс в той же плоскости и в том же направлении вращения. Движение пылевой частички рассматривается на вращающейся плоскости с началом в центре масс системы Земля-Луна и осью абсцисс, направленной вдоль линии, соединяющей центры масс Земли и Луны. В рамках такой модели показывается существование устойчивых периодических решений в окрестности треугольных точек либрации. Это доказывает существование четырех облаков космической пыли, каждые два из которых перемещаются вдоль периодической траектории, охватывающей соответствующую точку либрации. Также обсуждаются оптимальные условия для обнаружения этих пылевых облаков, которые зависят от фазы Луны и места наблюдения на Земле.

## Л и т е р а т у р а

1. *K.Kordylewski*. Photographische Untersuchungen des Librationspunktes im System Erde-Mond // Acta Astronomica, 1961, V. 11. No 3.
2. *J.Wesley Simpson*. Dust cloud moons of the earth // Physics Today. 1967. V. 20. No 2, p.39.
3. *Kamel A.A.* Perturbation theory based on Lie transforms and its applications to the stability of motion near Sun-perturbed Earth-Moon triangular libration points // Nasa, CR 1622, 1970.
4. *Schlechter H.B.* Three-dimensional nonlinear stability analysis of the Sun-perturbed Earth-Moon equilateral points // AIAA Journal, 1968. V. 6. No. 7.
5. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

## On the Kordylewski Cosmic Dust Clouds

**T.V. Salnikova, S.Ya. Stepanov**

*Lomonosov Moscow State University, Russia*  
*Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, Russia*

We discuss the existence of the clouds of interplanetary dust in the neighborhood of the triangular libration points of the Earth-Moon system. In 1961 polish astronomer K.Kordylewski took photos of the dust clouds in the neighborhood of the libration point  $L_5$ . In view of the unavoidable perturbations - such that the influence of the Sun, the dissipative forces, destroying the gyroscopic stability, and many others, the triangular libration points must be unstable. We show the possibility of existence of four dust clouds, moving in the vicinity of the stable periodical orbits, capturing these libration points, and investigate the best conditions to observe these clouds.

## О СИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ГИРОСТАТА НА СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

А.А. Тихонов<sup>1</sup>, В.Н. Тхай<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,

<sup>2</sup>Институт проблем управления им.В.А.Трапезникова РАН, Москва,  
Россия

E-mail: a.tikhonov@spbu.ru, tkhai@mail.ru

Рассматривается твердое тело--гиростат, движущееся по слабоэллиптической кеплеровой околоземной орбите в плоскости геомагнитного экватора. Предполагается, что тело снабжено маховиком, обладает электростатическим зарядом и собственным магнитным моментом. Изучается вращательное движение гиростата относительно его центра масс под действием лоренцева момента и момента магнитного взаимодействия.

В работе [1] показано, что в случае движения гиростата по круговой орбите и при определенных предположениях о наличии некоторой динамической и электромагнитной симметрии гиростата, решение задачи сводится к квадратурам путем построения четырех первых интегралов. Проведено исследование движения оси симметрии гиростата и дана его геометрическая интерпретация. Выполнен анализ симметричных периодических движений гиростата.

В данной работе задача рассматривается в более общей постановке. При сохранении основных предположений относительно свойств гиростата предполагается, что его орбита является слабоэллиптической. Установлена обратимость [2] системы дифференциальных уравнений вращательного движения гиростата с тремя неподвижными множествами. Проанализированы свойства симметричных периодических движений колебательного типа. Доказано отсутствие двояко симметричных решений. На базе подходов, развитых в работах [3,4,5], доказано, что при переходе от круговой орбиты к слабоэллиптической происходит бифуркация семейства симметричных колебаний круговой задачи и рождаются два изолированных симметричных колебания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 13-01-00347-а и № 13-01-00376-а.

### Л и т е р а т у р а

1. Тихонов А.А. Интегрируемый случай вращательного движения гиростата в гравитационном и магнитном полях Земли // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер.1, 2009, Вып. 2, С. 89-96.
2. Тхай В.Н. Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578-586.
3. Тхай В.Н. Вращательные движения механических систем // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 179-195.
4. Тхай В.Н. Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848-857.
5. Тхай В.Н. О характеристических показателях симметричного периодического движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Механика твердого тела (Донецк). 2004. Т. 34. С. 3-8.

## On Symmetrical Oscillations of Gyrostat in Weak Elliptic Orbit

A.A. Tikhonov<sup>1</sup>, V.N. Tkhai<sup>2</sup>

<sup>1</sup>St.Petersburg State University,

<sup>2</sup>V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

A gyrostat in weak elliptical Keplerian orbit lying in geomagnetic equatorial plane is considered. The gyrostat is supplied with flywheel and possesses electrostatic charge and intrinsic magnetic moment. The gyrostat attitude motion under the action of Lorentz and magnetic torques is under consideration. It was revealed that the differential system of gyrostat attitude motion is reversible with three stationary sets. The symmetrical periodic motions of oscillatory type are analyzed. A bifurcation in the set of gyrostat symmetrical oscillations and generation of two isolated symmetrical oscillations is discovered in transition from circular orbit to elliptical one.

# МЕТОДЫ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ОРБИТ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В ОКРЕСТНОСТИ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ

**М.Г. Широбоков, С.П. Трофимов**

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
E-mail: shmaxg@gmail.com, sertrofimov@yandex.ru*

В последнее время отмечается повышенный интерес к точкам либрации, так как они предоставляют удобную платформу для наблюдений за Солнцем и исследования Вселенной. Как известно, среди главных особенностей периодических орбит около коллинеарных точек либрации является их неустойчивость, которая требует точно определять параметры орбиты и регулярно корректировать ее [1,2]. Таким образом, перед проектировщиками миссий к коллинеарным точкам либрации встает задача поддержания движения космического аппарата (КА) в условиях сильно нелинейной, неустойчивой динамики.

Цель доклада – дать систематическое представление о классических и современных направлениях исследований по проблеме поддержания орбит вокруг коллинеарных точек либрации. Все существующие методы можно условно разделить на несколько классов с похожими идеями и подходами. Например, один из подходов основывается на теории динамических систем и, соответственно, включает в себя расчет, использование и задание собственных векторов и значений переходной матрицы. Таким образом, для построения управления делается попытка воспользоваться особенностями динамики задачи трех тел и с помощью управления уменьшить сдвиг вдоль неустойчивого многообразия в фазовом пространстве. Другой подход состоит в оптимизации весовой функции, в которую входит как характеристическая скорость на выполнение маневров, так и отклонения положения и скорости КА от номинальных значений в выбранные моменты времени. Альтернативные классификации методов могут быть основаны на дискретности или непрерывности управления, учете или неучете нестационарности переходной матрицы и т.п. Помимо работ по поддержанию орбит одиночных КА в докладе также будут упомянуты исследования, посвященные поддержанию относительных конфигураций группировок КА.

## Л и т е р а т у р а

1. *Koon W.S. [et al.]. Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design. Marsden Books, 2011.*
2. *Renault C.A., Scheeres D.J. Statistical Analysis of Control Maneuvers in Unstable Orbital Environments // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2003. V. 26. № 5. P. 758–769.*

## An Overview of Stationkeeping Methods for Collinear Libration Point Orbits

**M.G. Shirobokov, S.P. Trofimov**

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Nowadays, there is a growing interest in missions to collinear libration points and associated periodic orbits since they provide a useful platform for investigation of both the solar system and the universe. One of the important features related to (quasi)periodic trajectories around collinear libration points is high instability of motion, which requires the application of stationkeeping techniques.

The purpose of this survey is to give in a systematic way an overview of classical and modern stationkeeping methods for collinear libration point orbits. Existing methods can be categorized by an approach to developing stationkeeping techniques. For example, according to one approach, the orbital controller is designed from a dynamical systems perspective and involves the eigenstructure computation and assignment for the corresponding state transition matrix. Another approach computes correction maneuvers by minimizing a weighted cost function that is defined in terms of delta-v as well as position and velocity deviations from a nominal orbit at specified times. Alternative classifications can be done based on the control type (continuous or discrete) or model used (linear time-invariant or linear time-varying), etc. In this survey, single spacecraft stationkeeping methods are mainly considered, though some works on formation keeping are mentioned too.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ФОТОГРАВИТАЦИОННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ С ДВУМЯ ИЗЛУЧАЮЩИМИ МАССАМИ

А.Т. Турешбаев

*Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата, Казахстан  
E-mail: aturesh@mail.ru*

Впервые нелинейный анализ устойчивости треугольных точек либрации фотогравитационной ограниченной круговой задачи трех тел с двумя излучающими массами был проведен в [1,2] для некоторых частных значений параметров (коэффициентов редукции и масс основных тел) системы. В настоящей работе проводится полное исследование устойчивости указанных точек в строгой нелинейной постановке, позволяющее сделать общие выводы о поведении системы в целом. Полагая, что в системе отсутствуют резонансы 3-го и 4-го порядков, и применяя преобразования Биркгофа, ограничиваясь разложением до четвертого порядка включительно, удается получить функцию Гамильтона для плоской задачи. Получив нормализованный гамильтониан плоской задачи при резонансах 3-го и 4-го порядков, а также используя результаты [3], устанавливаем, что при резонансах 3-го порядка исследуемые точки всегда неустойчивы. На некоторых участках кривых, отвечающих резонансам 4-го порядка, доказана устойчивость по Ляпунову. Таким образом, вопрос об устойчивости треугольных точек либрации в плоской фотогравитационной задаче решен полностью. Исследована устойчивость треугольных точек либрации в пространственной задаче. Установлено, что при отсутствии в системе резонансов 3-го и 4-го порядков треугольные точки либрации устойчивы для большинства начальных (в смысле меры Лебега) условий. Неустойчивость, обнаруженная в плоской задаче, сохраняется и в пространственной задаче. Показано, что в области устойчивости линейной системы для значений произвольной массы, отвечающих неравенствам  $0,0079625269... > \mu > 0$  и  $0,5 > \mu > 0,3860630212...$ , условия теоремы Арнольда–Мозера выполняются всюду. В пространственной задаче треугольные точки либрации формально устойчивы для почти всех значений параметров системы из области устойчивости в линейном приближении, кроме значений параметров, отвечающих исследованным резонансам. Построены области устойчивости треугольных точек либрации в конфигурационном пространстве и в пространстве параметров системы для произвольных значений массы с построением резонансных кривых и множества точек, отвечающих условиям теоремы Арнольда–Мозера.

## Л и т е р а т у р а

1. *Пережогин А.А., Турешбаев А.Т.* Об устойчивости треугольных точек либрации в фотогравитационной задаче трёх тел // *Астрон. журн.* 1989. Т.66. С.859-865.
2. *Kumar V., Choudhry R. K.* *Celest. Mech.* 1988. V. 41. No 1-4. P. 61-173.
3. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312 с.

## Stability of Triangular Libration Points of the Photogravitational Restricted Circular Three Body Problem with Two Radiating Masses

A.T. Tureshbaev

*Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kazakhstan*

Considered the photogravitational restricted circular three body problem with two radiating masses. Conducted a complete non-linear investigation for stability of triangular libration points, and we constructed stability areas in the configuration space and in the parameters space. For these points in the stability area in the first approximation (except for points corresponding to resonances of the 3<sup>rd</sup> and 4<sup>th</sup> orders) there are almost everywhere stability and formal stability for majority (Lebesgue measure) of initial conditions. Found that in the stability area of the linear system for any mass from intervals  $0,0079625269... > \mu > 0$  and  $0,5 > \mu > 0,3860630212...$  the Arnold-Moser theorem conditions always hold. The plane stability problem is completely solved.

# HIGHLY PRECISE PARAMETRICAL EQUATION FOR THE TRAJECTORY OF A POINT MASS PROJECTILE IN AIR UNDER HEAD-, TAIL- OR SIDE WIND CONDITIONS

**V.V. Chistyakov**

*Baltic State Technical University "Voenmekh", Sankt-Petersburg, Russia,  
E-mail: chistiakov\_v\_v@rambler.ru*

Precise trajectory equation is deduced through dual-projective variables for projectile motion in medium with quadratic in speed drag  $R=amgV^2$  and under wind affection.

These variables are as follows: the slope  $b=tg\theta$  with the  $\theta$  being an inclination angle and the value of intercept  $a(b)$  of the tangent with slope  $b$ . The differential equation defining the relative trajectory with the angle of throwing  $\theta_0$  and initial velocity  $V_0$  is following

$$a'''_{bbb} = 2\alpha g (\alpha''_{bb})^2 \sqrt{1+b^2}, a(b_0) = \frac{da(b_0)}{db} = 0, \frac{d^2a(b_0)}{db^2} = \frac{V_0^2 \cos^2 \theta_0}{g} = \frac{V_0^2}{g(1+b_0^2)} \quad (1).$$

The reverse Legendre transforms gives coordinates' and time parametric formulas [ref.]

$$x(b) \approx -R_a \left( b - b_0 + \beta_0 (b^2 - b_0^2) + \frac{4\beta_0^2}{3} (b^3 - b_0^3) + \frac{(\beta_0 + 24\beta_0^3)}{12} (b^4 - b_0^4) + \frac{(4\beta_0^2 + 48\beta_0^4)}{15} (b^5 - b_0^5) \right)$$

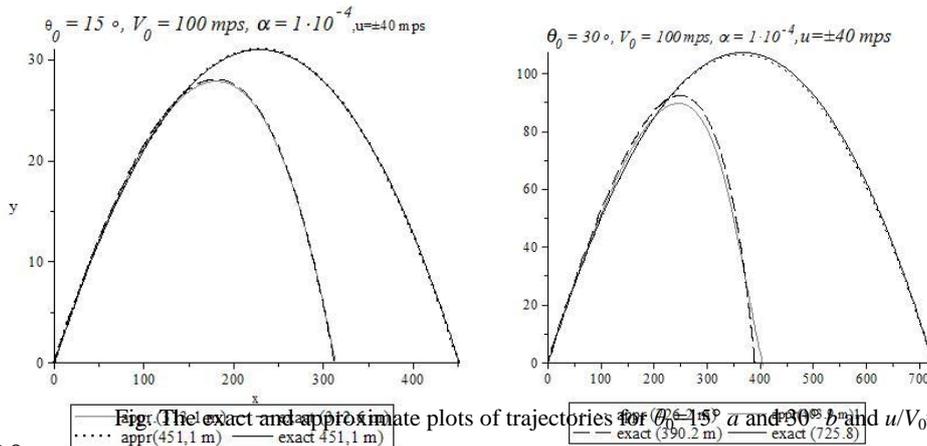
$$y(b) \approx -\frac{R_a}{2} \left( b^2 - b_0^2 + \frac{4\beta_0}{3} (b^3 - b_0^3) + 2\beta_0^2 (b^4 - b_0^4) + \frac{2(\beta_0 + 24\beta_0^3)}{15} (b^5 - b_0^5) + \frac{2(2\beta_0^2 + 24\beta_0^4)}{9} (b^6 - b_0^6) \right)$$

$$t(b) \approx \sqrt{\frac{R_a}{g}} \left( b_0 - b + \frac{\beta_0}{2} \cdot (b_0^2 - b^2) + \frac{\beta_0^2}{2} \cdot (b_0^3 - b^3) + \frac{(\beta_0 + 24\beta_0^3)}{24} (b^4 - b_0^4) + \frac{(4\beta_0^2 - 5\beta_0^4)}{30} (b^5 - b_0^5) \right) \quad (2)-(4).$$

The parameters  $b_0$ ,  $R_a$  and  $\beta_0$  are correspondingly an initial slope, a top radius of curvature and the ratio of top-to-the-limit kinetic energy when the projectile is falling from infinite height but with constant  $\alpha$  and  $g$ .

For tail- or head wind the trajectory equation is received by simple recalculating the parameters above and the transformation  $x=x'+ut$  where  $u$  is a wind speed and  $x'(2)$ — the horizontal coordinate in the frame connected with wind.

Using (2)—(4) gives high precision of about 0.2 % (see the values in brackets) for flight characteristics at starting angles up to  $\theta_0=15^\circ$  or even  $30^\circ$  for tail wind only (fig).



## Reference

Chistyakov V.V. On one resolvent method for integrating the low angle trajectories of a heavy point projectile motion under quadratic air resistance // Computer Research and Modelling, 2011. V . 3. No 3, pp. 265— 277 (in Russian).

# МАНЕВРИРОВАНИЕ В ОКОЛОЗЕМНОМ КОСМИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ

**Д.В. Шиманчук, А.С. Шмыров**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: shymanchuk@mail.ru, ashmyrov@yandex.ru*

Использование окрестности коллинеарной точки либрации (L1 или L2) системы Солнце–Земля уже давно имеет практическое значение в связи с проектами, реализуемыми NASA и ESA.

Движение космического аппарата рассматривается во вращающейся системе координат в рамках задачи Хилла круговой ограниченной задачи трех тел [1].

Известно, что коллинеарная точка либрации является неустойчивой [1, 2], но неустойчивость точки либрации может быть использована как положительный фактор при маневрировании космического аппарата в околоземном космическом пространстве [3-5], например, при решении проблемы кометно-астероидной опасности с целью мониторинга космических объектов, опасно сближающихся с Землей. При этом и возникает задача возвращения в окрестность L1 или L2. Возвращение в окрестность точки либрации реализуется с помощью управляющего воздействия. Предлагается методика построения алгоритмов управления орбитальным движением космического аппарата, которая основана на свойствах специально введенной функции от фазовых переменных – «функции опасности». Описывается алгоритм построения траектории возвращения. Приводятся результаты численного моделирования.

## Л и т е р а т у р а

1. *Шмыров В.А.* Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L1 // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 193-199.
2. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312 с.
3. *Шиманчук Д. В.* Моделирование орбитального управляемого движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации L1 // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2010. Вып. 3. С. 86-92.
4. *Шиманчук Д.В., Шмыров А.С.* Построение траектории возвращения в окрестность коллинеарной точки либрации системы Солнце–Земля // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика, процессы управления. 2013. Вып. 2. С. 76-85.
5. *Shmyrov A., Shmyrov V., Shymanchuk D.* Prospects for the use of space robots in the neighbourhood of the libration points // Applied Mathematical Sciences, 2014. V. 8. No 50. P. 2465-2471.

## Maneuvering in Near-Earth Space with the Use of the Collinear Libration Points

**D.V. Shymanchuk, A.S. Shmyrov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The use of the neighborhood of the collinear libration point (L1 or L2) of the Sun–Earth system has long been of practical importance in connection with projects implemented by NASA and ESA.

A spacecraft motion is considered in a rotating frame within the Hill's problem of the circular restricted three-body problem [1].

It is known that collinear libration points are unstable [1, 2] but the instability of libration points can be used as a positive factor when maneuvering a spacecraft in the near-Earth space [3-5], for example, while solving comet and asteroid impact hazards to monitor space objects that are dangerously approaching the Earth. Here, the problem of returning to the neighborhood of L1 or L2 arises. Returning to the neighborhood of a libration point is achieved through a control action. We offer a methodology for constructing control algorithms for the orbital motion of a spacecraft. This methodology is based on the properties of a specially introduced function of phase variables – the “menace function”. An algorithm for constructing a return trajectory is described. Numerical simulation results are given.

# THE APPROXIMATION OF CONTROLLABILITY AREA IN THE PROBLEM OF CONTROLLABLE MOVEMENT IN A NEIGHBORHOOD OF COLLINEAR LIBRATION POINT

**A.S. Shmyrov, V.A. Shmyrov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

*E-mail: ashmyrov@yandex.ru, vasilyshmyrov@yandex.ru, v.a.shmyrov@spbu.ru*

In this research we consider the controllable orbital motion of a spacecraft in a neighborhood of the collinear libration point L1 of the Earth-Sun system. Libration point L1 is unstable and that makes it necessary to apply a control action. We use a special approximation of the equations of the circular restricted three-body problem, the so-called Hill's equations as a mathematical model. Usually, in such studies have investigated the motion of a spacecraft near the basic halo orbit on which the spacecraft arrived from initial orbit. In this research we consider the problem of local motion in a neighborhood of L1, in which the spacecraft is not necessarily at a given halo orbit. In the first stage, within the framework of the linearized Hill's problem, laws of control were built to compensate instability. At the same time control accelerations are directed along the Earth-Sun line. Then, the constructed control laws are investigated within the framework of a more adequate model of the motion - circular three-body problem.

For the special family of control laws, which provided Lyapunov stability for the orbital motion in a neighborhood of the collinear libration point L1 we built approximation of controllability area with help of hamiltonian form of controllable system and we have presented examples of such areas.

The results of the numerical modeling show the effectiveness of the proposed control laws.

## Reference

1. *Shmyrov A., Shmyrov V.* Controllable orbital motion in a neighborhood of collinear libration point // Applied Mathematical Sciences. 2014. V. 8. No 10. P. 487-492.
2. *Shmyrov A.S., Shmyrov V.A.* Synthesis of an optimal control of orbital movement in a neighborhood of a collinear libration point // Bulletin of St.-Petersburg University. Series.1. 2012. Release.4. P. 139-146.



# III

ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА

---

**MECHANICS OF FLUIDS AND GASES**

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФFUЗИИ ВИНТОВОГО ВИХРЯ МАЛОГО ДИАМЕТРА В МАЛОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

П.А. Куйбин, М.В. Агафонцева

ФГБУН Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия  
E-mail: kuibin@itp.nsc.ru, m.agafontseva@gmail.com

Винтовые структуры, образующиеся в аппаратах с закруткой потока, оказывают влияние на эффективность работы таких устройств. В настоящее время литературе крайне мало освещен вопрос исследования винтовых вихрей. В монографии [1] предлагается модель винтового вихря с равномерным распределением завихренности в ядре, но с помощью этой модели нельзя адекватно описать структуру вихря. В работе [2] решалась задача о стационарном винтовом вихре малого ядра в невязкой жидкости. Автором была введена неортогональная система координат, в которой задача сводилась к двумерной. Однако, скорость движения вихря была записана в лишь виде квадратур, вычисление которых затруднительно. В настоящей работе предполагается рассматривать задачу диффузии винтового вихря малого диаметра в нестационарной вязкой постановке. Целью работы является описание структуры вихря и определение его частот, а так же определение влияния диффузии вихря на пульсационные характеристики потока.

Уравнения динамики винтового вихря были записаны в неортогональной системе координат [2], что позволило свести задачу к двумерной. Затем для решения этих уравнений был применен метод двухмасштабного разложения по аналогии с [3]. Искомые функции предполагалось находить в виде ряда.

Решение нулевого порядка для диффузии вихря – решение Ламба-Озеена будет иметь вид:

$$f_{\text{tan}}(\sigma, t) = (\Gamma / 4\pi vt) \cdot e^{-\sigma^2 / 4vt}.$$

Само движение винтового вихря направлено по бинормали к винтовой линии; в результате вихрь и вращается и движется поступательно. Вклад в бинормальную скорость, обусловленный конечным размером вихревого ядра и неравномерностью распределения завихренности в ядре приведен в [1]:

$$U_b^{\text{imp}} = (\Gamma k / 4\pi) \left[ \ln(l / \varepsilon) - 0.5 + 4 \left( \pi^2 / \Gamma^2 \right) \int_0^\varepsilon (v^2 + w^2) \sigma d\sigma \right].$$

Что касается влияния диффузии на пульсации давления, индуцируемых винтовым вихрем на стенке сосной цилиндрической трубы, то здесь необходимо учитывать два эффекта. Со временем размер вихревого ядра растет и, как следствие, уменьшается перепад давления между максимальным и минимальным значением по сечению трубы; уменьшается и амплитуда пульсаций давления. В то же время радиус вихря  $a$  увеличивается, т.е. вихрь движется все ближе к стенке, что вызывает рост пульсаций.

Таким образом, в работе получены первые результаты по диффузии тонкого винтового вихря при высоких числах Рейнольдса. В дальнейшем планируется получить члены более высоких порядков для завихренности, функции тока, а так же скорости распространения винтового вихря в зависимости от времени. Также планируется рассмотреть другой предельный случай – случай малых чисел Рейнольдса.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-29-00093)

## Л и т е р а т у р а

1. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Наука, Институт теплофизики, 2003. 504 с.
2. Adebisi A. On the existence of steady helical vortex tubes of small cross-section // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1979. V. 34. Iss. 2. P. 157-177.
3. Березовский А.А., Капланский Ф.Б. Диффузия вихревого кольца // Механика жидкости и газа. 1987. Т. 22. №. 6. С. 832-837.

## Investigation of Diffusion of the Helical Vortex of Small Diameter in Low-Viscosity Liquid

P.A. Kuibin, M.V. Agafontseva

Kutateladze Institute of Thermophysics, Novosibirsk, Russia

Investigation of helical vortices has a significant interest both from fundamental and practical points of view. This paper presents a first attempt at studying the diffusion and dynamics of a viscous helical vortex.

# ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ УДЕЛЬНОГО ТЕПЛОСОДЕРЖАНИЯ В ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ РАЗЛИЧНОГО ТИПА

**В.Н. Усков, М.В.Алексеева**

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия.  
E-mail: mary.alekseeva@mail.ru

Изучение экстремальных свойств ударно-волновых процессов является актуальной научной проблемой. Как известно, ударные волны возникают в газе при движении тела в сверхзвуковом потоке или при натекании сверхзвукового потока на преграду. А значит, тесно связаны с работой самолётов, ракет, и других технических объектов, и с природными явлениями, подобными взрывам. Здесь часто бывает необходимо уметь управлять газодинамическими параметрами течений, рассчитывать начальные данные, необходимые для получения нужного результата. Одним из важных параметров является теплосодержание  $H_0$ .

В настоящей работе исследуется изменение теплосодержания на основе формулы для расчёта удельного полного теплосодержания через интенсивность  $J$ :

$$H_0 = 1 + \frac{2(1-\varepsilon)}{\mu} \Phi_D(J)(I + \chi M),$$

в которой параметрами являются число Маха исходного потока  $M$ , показатель направления волны  $\chi$  и величина  $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$ ,  $\gamma$  - показатель адиабаты, а  $\Phi_D(J) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}} \frac{J-1}{\sqrt{J+\varepsilon}}$  - безразмерная скоростная функция.

Важным результатом является обнаружение немонотонности изменения теплосодержания в дрейфующих волнах. Это проиллюстрировано на рис.1.

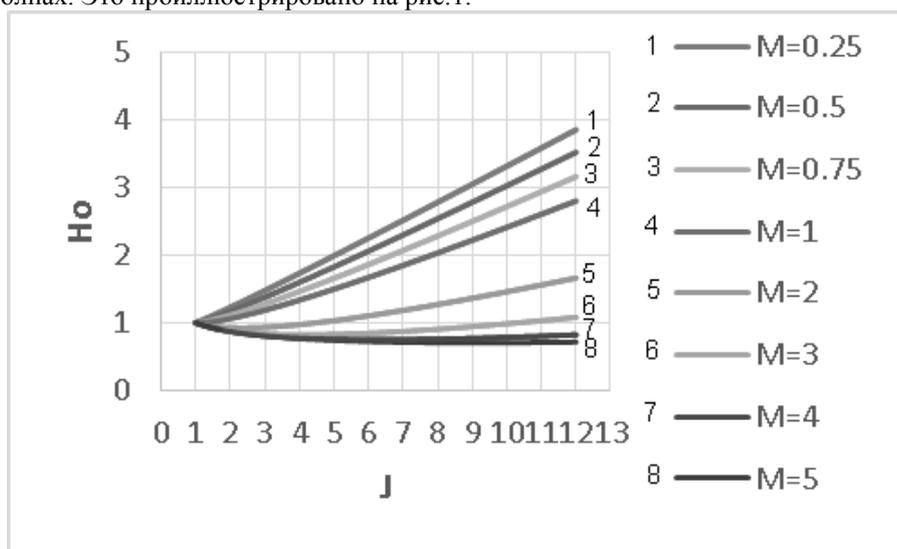


Рис.1. Удельное теплосодержание при  $\chi = -1$ ,  $\gamma = 1,4$ .

Также были получены экстремальные значения полного теплосодержания за ударной волной.

## Литература

1. Усков В.Н. Бегущие одномерные волны: Учебное пособие. СПб.: Из-во БГТУ «Военмех», 2006. 485 с.

## On Enthalpy Variation in Wave Process

**V.N. Uskov, M.V.Alekseeva**

Saint-Petersburg State University, Russia

Enthalpy variation in different wave processes is studied. Non-monotonous character of this process is found. The enthalpy dependence on wave intensity for different Mach numbers is illustrated in Fig.1.

# ОБЪЕМНАЯ ВЯЗКОСТЬ В НЕРАВНОВЕСНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

**Б.С. Байков, Е.В. Кустова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия.*

*E-mail: bogdan555556@gmail.com, elena\_kustova@mail.ru*

Задача о нахождении коэффициента объемной вязкости важна для исследования и поиска новых способов воздействия на процессы ламинарно-турбулентного перехода и генерации турбулентности. Непосредственно с явлением объемной вязкости связан способ воздействия на сжимаемый газ, основанный на эффекте дополнительной диссипации энергии, возникающем при релаксации внутренних степеней свободы молекул газа [1]. Влияние коэффициента объемной вязкости на число Рейнольдса, продемонстрированное в работе А.Нерушева [2], порождает перспективы использования этого явления для подавления турбулентности. Также коэффициент объемной вязкости влияет на распространение звуковых волн в среде, в частности, на коэффициент поглощения звука. Такое воздействие вызывает определенный интерес среди специалистов в области акустики.

В данной работе методами молекулярно-кинетической теории было получено выражение для коэффициента объемной вязкости. В ходе работы были использованы интегральные уравнения, полученные в работе Е.В. Кустовой и Е.А. Нагнибеда [3]. При помощи разложений искомым функций по полиномам Сонина и Вальдмана-Трубенбахера была получена и решена система для однозначного определения коэффициента объемной вязкости.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, тема НИР 6.37.163.2014.

## Л и т е р а т у р а

1. Дж. Гирифельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд. Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во Ин. лит., 1961. 929 с.
2. Nerushev A., Novopashin S. Rotational relaxation and transition to turbulence // Phys. Lett.1997. Vol. A232. P. 243–245
3. Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб.:Изд.С.-Петербург.ун-та. 2003.272 с.

## The Coefficient of Bulk Viscosity in Non-Equilibrium Flows

**B.S. Baykov, E.V. Kustova**

*Saint-Petersburg state university, Russia*

The work deals with integral equations for the distribution function obtained by the kinetic theory methods. Expanding the unknown functions into the series in Sonine and Waldmann-Trübenbacher polynomials we obtain and solve the system uniquely determining the coefficient of bulk viscosity.

# СНИЖЕНИЕ ШУМА БЛОЧНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ С ПОМОЩЬЮ ВПРЫСКА ВОДЫ

В.Л. Бакулев

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,  
E-mail: vlbakulev@gmail.com

В работе экспериментально исследуются особенности акустического поля блочной сверхзвуковой струи и влияние впрыска воды в слой смешения струи на интенсивность акустического излучения. Экспериментальная установка состоит из пятисолового твердотопливного двигателя, закрепленного в горизонтальном положении, и кольцевого коллектора, который обеспечивает впрыск воды в слой смешения струи (рис.1).



Рис. 1. Экспериментальная установка

В результате было установлено, что процесс догорания топлива способен провоцировать дискретный тон большой амплитуды. Проведенный вейвлет-анализ показал зависимость частоты этого дискретного тона от давления внутри камеры сгорания, а теория Пауэлла помогла установить приближенную зависимость между этими параметрами. Установлено, что впрыск воды под углом  $60^\circ$  относительно оси струи полностью устраняет этот дискретный тон, обрывая резонансную петлю автоколебаний, описанную Пауэллом. Впрыск воды параллельно оси струи не способен полностью убрать дискретный тон. При впрыске воды под углом  $60^\circ$  снижение шума струи без догорания топлива оказалось более значительным, чем при впрыске  $0^\circ$  за счет более интенсивного снижения пульсаций давления мелкомасштабных турбулентных вихрей.

## Л и т е р а т у р а

1. Гольдштейн М.Е. Аэроакустика. М.: Машиностроение, 1981.
2. Антонов А.Н., Куццов В.М., Комаров В.В. Пульсации давления при струйных и отрывных течениях. М. Машиностроение, 1990.
3. Sankaran, S., Ignatius, J.K., Ramkumar, R., Satyanarayana, T.N.V., Chakravarthy, S.R., Panchapakesan, N.R. Suppression of High Mach Number Rocket Jet Noise by Water Injection // Journal of Spacecraft and Rocket, V. 46, No 6, November-December, 2009.
4. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.

## Suppression of Supersonic Block Jets Noise by Water Injection

V.L. Bakulev

Saint Petersburg State University, Russia

The present work experimentally investigates an acoustic field of a supersonic block jet and suppression of the sound level by water injection. The jet is produced by a solid rocket motor. Water jets are injected to the combined jet along its perimeter at an angle  $0^\circ$  and  $60^\circ$ . It was determined that injection angle of  $60^\circ$  has greater effectiveness to reduce sound levels.

# ADDED MASSES SOME AXISYMMETRIC BODIES, ARISING IN THE THEORY OF LOCAL INTERACTION

**O.V. Barinova**

*St. Petersburg State University, Russia  
E-mail: ya.yaolbb@yandex.ru*

The problem of unsteady motion of a body in a fluid is currently solved only for the case when the fluid is ideal and incompressible, using the concept of "added masses" [1]. However, for more than a half centuries in the spatial case, we know only one analytic representation of added masses - for ellipsoids. The report proposes a procedure for constructing exact solutions by finding in elliptic coordinates by separation of variables in a potential flow around a convex body of revolution [2], borrowed from the theory of local interaction [3] (see. Fig. The body of revolution). A similar method for constructing exact solutions used in paper [4]. In contrast to [2] and [4], the report generator body shape is given in parametric form.

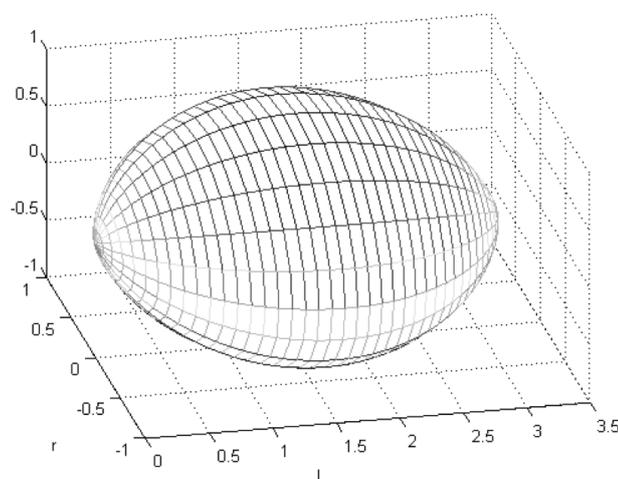


Fig. The body of revolution

## References

1. *Loitsyanskii L.G.* Fluid Mechanics, M.: Science, 1970, 840 p. (in Russian).
2. *Kaplan C.* Potential flow about elongated bodies of revolution <http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/1936/naca-report-516.pdf>.
3. *Miroshin R.N., Khalidov I.A.* Local methods in continuum mechanics. St. Petersburg: Univ St. Petersburg State University, 2002. 304 p. (in Russian).
4. *Nadymov E.N.* Algorithm for calculating the added mass approximation of axially symmetric bodies // Aerodynamics, Collection of articles/Ed. R.N. Miroshin SPb.: Publishing <<VVM>>, 2013. P. 83-93. (in Russian).

# РАСЧЕТ СЕЧЕНИЙ РЕАКЦИИ ДИССОЦИАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Д.К. Баялина, Е.В. Кустова

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: podarok2222@yandex.ru, elena\_kustova@mail.ru

Задача о нахождении сечения столкновения по известным поуровневым коэффициентам скорости реакции важна для исследования неравновесных течений. Сечения столкновений используются при расчете поправок первого порядка к коэффициентам скорости неравновесных реакций, расчете релаксационного давления, расчете течений методом прямого численного моделирования. Данная задача уже рассматривалась М.А.Рыдалевской [1,2] и итальянскими учеными из университета Бари [3]. В работе группы профессора Капителли [3] обратное преобразование Лапласа получено методом минимизации квадрата разницы между эталонными коэффициентами скорости и коэффициентами, полученными параметризацией тестового сечения. Интеграл численно оценивался методом трапеций. В работах Рыдалевской [1,2] сечения столкновений находились по известной зависимости скорости реакций для однотемпературного приближения, а также были вычислены сечения вращательных переходов молекул параводорода. В данной работе мы будем рассматривать задачу на примере реакции диссоциации молекулы азота  $N_2$  при столкновении с атомом азота N.

Существуют точные траекторные расчеты коэффициентов скорости диссоциации, которые дают значения коэффициентов скорости реакции для каждого колебательного уровня как функции температуры  $K_i(T)$ . Мы будем пользоваться результатами расчетов [4]. Метод нахождения сечения с помощью известных поуровневых коэффициентов скорости диссоциации азота уже рассматривался Д.В. Макаркиным [5]. Для получения формул для  $K_i(T)$  Д.В.Макаркин использует интерполяцию полиномами. Полученные им формулы для сечений дают хорошую точность при расчете коэффициентов скорости диссоциации. Недостатком модели [5] является то, что сечения могут становиться отрицательными в некотором диапазоне энергий, что неверно с физической точки зрения.

В ходе работы была найдена другая аппроксимация, обеспечивающая неотрицательную величину сечений во всем диапазоне. Путём обратного преобразования Лапласа из выражения для коэффициента скорости диссоциации были найдены сечения реакции и построены графики сечений для разных уровней.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, тема НИР 6.37.163.2014.

## Л и т е р а т у р а

1. М.А. Рыдалевская, Об определении сечений столкновений по известным скоростям химических реакций // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1 Математика, механика, астрономия. 1967. Вып. 4 (№1), с. 119-123.
2. М.А. Рыдалевская, А.В. Калмыков, Получение сечения вращательных переходов молекул параводорода из экспериментальных данных по поглощению звука // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 1979. Вып. 4 (№19), с. 70-75.
3. P. Minelli, F. Esposito, D. Bruno, M. Capitelli, S. Longo. Extracting Cross Sections from Rate Coefficients: Application to Molecular Gas Dissociation // Journ. Thermophys. Heat Transfer, 2011, V. 25, №3, p. 374-381.
4. F. Esposito, I. Armenise, M. Capitelli. N-N2 state to state vibrational-relaxation and dissociation rates based on quasiclassical calculations // Chemical Physics. 2006. V. 331. P. 1-8.
5. Е.В.Кустова, Д.В.Макаркин. Определение сечений реакции диссоциации по поуровневым коэффициентам скорости реакции // Вестник СПбГУ. Сер.1. 2012. Вып. 4. С. 100-105.

## Calculation of Dissociation Cross-Sections Using Inverse Laplace Transformation

D.K. Bayalina, E.V. Kustova

Saint-Petersburg state university, Russia

In this paper we derive the collision cross section for the dissociation reaction of nitrogen molecule  $N_2$  in a collision with atom N. We use known state-to-state rate coefficients and apply the inverse Laplace transformation. A suitable approximation is found providing non-negative values of the cross sections over the entire energy range.

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ДИСПЕРСНЫХ СРЕДАХ, ВКЛЮЧАЯ НАНОЖИДКОСТИ

**В.Я. Рудяк, А.А. Белкин**

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет  
(Сибстрин), Россия*

*E-mail: valery.rudyak@mail.ru, a\_belkin@ngs.ru*

В докладе представлена развитая авторами статистическая теория процессов переноса в дисперсных и нанодисперсных системах, а также ее основные приложения. Актуальность работы обусловлена прежде всего интенсивным развитием микроэлектромеханических систем и нанотехнологий, в которых активно применяются наножидкости и микротечения. Уникальные свойства наножидкостей позволяют использовать их в теплоэнергетике, медицине, биологии, других областях. Применение устройств, содержащих микроканалы и микропоры, в первую очередь связано с их высокой эффективностью в системах теплоотвода и теплопередачи. Вместе с тем практически отсутствует аппарат, позволяющий адекватно описывать процессы переноса в наножидкостях и жидкостях в стесненных условиях. Целью данной работы является построение такого аппарата методами неравновесной статистической механики.

Для описания свойств переноса дисперсная среда рассматривается как многокомпонентная система, каждый компонент которой характеризуется собственными температурой и скоростью. Динамика такой системы определяется уравнением Лиувилля [1,2]. Вводя микроскопические плотности молекул, импульса и энергии и действуя на них оператором Лиувилля, удается получить уравнения многожидкостной гидродинамики системы. Для их замыкания на основе предложенного в [3] проекционного метода строится неравновесный статистический ансамбль. Получены флуктуационно-диссипационные теоремы для коэффициентов переноса и межфазных сил. На основе этих теорем с использованием параметров потенциалов реальных веществ определены значения коэффициентов переноса [4,5].

В рамках построенной теории удастся адекватно описать и процессы переноса, происходящие во флюиде в стесненных условиях [6]. В этом случае установлено, что коэффициенты переноса флюида в стесненных условиях не просто не совпадают с объемными значениями, они не определяются лишь параметрами флюида. Вязкость и теплопроводность флюида в стесненных условиях являются свойствами всей системы «флюид – поверхность».

Работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда (соглашение № 14-19-00312).

## **Л и т е р а т у р а**

1. Рудяк В.Я., Белкин А.А. Уравнения многожидкостной гидродинамики // Мат. моделирование. 1996. Т. 18. №6. С. 33-37.
2. Рудяк В.Я., Белкин А.А. Уравнения многожидкостной гидродинамики для гетерогенных систем с вращательными степенями свободы // СибЖИМ. 2002. Т. 5. №1(9). С. 145-156.
3. Рудяк В.Я. Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Наука, 1987.
4. Рудяк В.Я., Белкин А.А., Егоров В.В. Об эффективной вязкости наносuspензий // ЖТФ. 2009. Т. 79. С. 18-25.
5. Rudyak V.Ya., Krasnolutskii S.L., Ivanov D.A. Molecular Dynamics Simulation of Nanoparticle Diffusion in Dense Fluids // Microfluidics and Nanofluidics. 2011. Vol. 11. P. 501-506.
6. Рудяк В.Я., Белкин А.А. О вязкости флюида в стесненных условиях // Доклады Академии наук. 2014 (принято в печать).

## **Statistical Mechanics of Transport Processes in Dispersed Systems, Including Nanofluids**

**V.Ya. Rudyak, A.A. Belkin**

*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, Russia*

The problem of adequate description of transport processes of nanofluids fluids in confined conditions is solved using methods of nonequilibrium statistical mechanics. The system is regarded as a two-fluid medium, in which each phase has a particular velocity and temperature. The fluctuation-dissipation theorem for the transport coefficients and interfacial forces are obtained. On the basis of these theorems using the parameters of the potentials of real materials, the values of the transport coefficients are calculated by the molecular dynamics method.

# ДИНАМИКА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТОКСИЧНЫХ ВЕЩЕСТВ НА ПОВЕРХНОСТИ И В ТОЛЩЕ ВОДЫ

А.Н. Бестужева<sup>1</sup>, А.Л. Смирнов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: bes\_allya@inbox.ru, a\_l\_smirnov@mail.ru

Рассматривается двумерная задача о распространении диффундирующего вещества на водной поверхности. Такая модель может быть использована, например, для изучения времени жизни «пятна» токсичных веществ на поверхности воды. Для изотропной среды математическая модель представляет собой краевую задачу для уравнения диффузии, аналитическое решение которой может быть получено с помощью метода Фурье с последующим разложением произвольной функции по функциям Бесселя. В работе построенное аналитическое решение сравнивается с численными решениями краевой задачи, полученными в пакетах Mathematica и MatLab. Исследована зависимость размера «пятна» загрязнения от времени, а также влияние геометрических и физических параметров на величину радиуса «пятна».

Также рассматривается пространственная задача о распространении токсичных веществ, попавших на плоское дно. Определена область, где концентрации токсичных веществ выше предельно допустимой и исследована динамика этой области.

При решении прикладных задач важно рассматривать акватории с включением линии берега. В работе построено численное решение этой задачи.

## Л и т е р а т у р а

1. Озмидов Р.В. Диффузия примесей в океане. Л., Гидрометеиздат, 1986.
2. Астраханцев Г.П., Менишуткин В.В., Петрова Н.А., Руховец Л.А. Моделирование экосистем больших стратифицированных озер. СПб., Наука, 2003, 363 с.

## Propagation Dynamics of Toxic Pollutants on the Water Surface and in Water

A.N. Bestuzheva<sup>1</sup>, A.L. Smirnov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>St. Petersburg State Transport University, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup>St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

Firstly, the 2D problem of propagation of diffusing pollutant on the water surface is analyzed. Such a model may be used, for example, to study the lifetime of a toxic pollutant spot on the water surface. For an isotropic medium the mathematical model consists of the boundary value problem for the diffusion equation, the analytical solution of which may be obtained by means of the Fourier method with consequent expansion of the arbitrary function in Bessel functions. The analytical solution is compared with numerical solutions of the boundary value problem obtained with Mathematica and MathCad software packages. The dependence on time of the pollution spot size is studied and the effect of geometrical and physical parameters on the pollution spot radius is discussed.

The 3D problem of toxic pollutant propagation set on a flat bottom is also examined. The size of the domain where the concentration of the toxic pollutant is higher than the maximum permissible concentration is studied as well as the dynamics of this domain.

In applied problems it is important to consider a water surface with the shore line included. In this work this problem is solved numerically.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕДЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Д.Е. Бобылев

*Криворожский национальный университет, г. Кривой Рог, Украина  
E-mail: bob\_d@i.ua*

В работе рассматривается установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре в приближении ползущего движения. В этом случае основным безразмерным критерием является величина, равная отношению числа Рейнольдса к числу Фруда и характеризующая соотношение вязких и гравитационных сил в потоке жидкости.

Таким образом, в рассматриваемой задаче актуальными вопросами являются построение устойчивых вычислительных методик расчета режимов течения, позволяющих также определять необходимые кинематические и динамические характеристики внутри области течения.

Для решения плоских задач гидродинамики течений со свободной поверхностью можно использовать различные конечно-разностные методы. При рассмотрении течений в областях сложной геометрии, с большими деформациями свободной границы, при наличии нескольких, значительно различающихся характерных размеров, возникают вычислительные трудности, связанные с построением конечно-разностных сеток, которые, кроме того, должны адаптироваться к изменениям свободной поверхности. В связи с этим актуальность приобретают поиски подходов, позволяющих упростить и унифицировать алгоритмическую процедуру численного решения. Одним из путей преодоления этих трудностей является переход к системе граничных интегральных уравнений, эквивалентной исходной системе дифференциальных уравнений. В этом направлении большие успехи достигнуты в работе [1], опираясь на которые далее строится в общем виде не прямой вариант метода граничных элементов для задачи о плоском течении вязкой жидкости со свободной поверхностью.

Большое внимание уделяется построению вычислительных процедур, включающих численную реализацию гранично-интегральных уравнений, в том числе особенностям построения процедуры в каждой конкретной задаче. К задачам настоящего исследования также относится разработка эффективных численных алгоритмов решения поставленных задач на основе метода граничных элементов.

В работе:

- разработаны устойчивые вычислительные методики расчета плоских и осесимметричных течений несжимаемой жидкости со свободной поверхностью на основе непрямого метода граничных элементов;
- моделируются течения высоковязкой жидкости в частично заполненном вращающемся горизонтальном цилиндре, проведены параметрические исследования процесса;
- сформулирована и реализована математическая постановка, позволяющая в рамках модели ползущего движения исследовать двумерное течение со свободной поверхностью внутри вращающегося горизонтального цилиндра; разработана универсальная вычислительная методика на основе метода граничных элементов, использование которой позволило выявить установившиеся режимы течения высоковязкой жидкости внутри вращающегося горизонтального цилиндра; получены в широком диапазоне изменения определяющие параметры распределения кинематических и динамических характеристик внутри рассматриваемой области; исследована эволюцию свободной границы.

## Л и т е р а т у р а

1. Якутенок В.А. Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // Математическое моделирование. 1992. Т. 4. №10. С. 62-70.

## Numerical Simulation of Free-surface Creeping Flow with Boundary Element Method

D. Bobylev

*Kryvyi Rig National University, c. Kryvyi Rig, Ukraine*

This paper deals with application of the indirect boundary element method for numerical simulation of two-dimensional, viscous, incompressible, free-surface flow with low Reynolds number. For this class of problems the main correlations of indirect BEM are obtained and results of its application for numerical simulation of partly liquid-filled, rotating, horizontal cylinder are represented.

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ГИПЕРЗВУКОВОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО КРЫЛА

В.И. Богатко<sup>1</sup>, Г.А. Колтон<sup>2</sup>, Е.А. Потехина<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,

<sup>2</sup> Национальный минерально-сырьевой университет "Горный", Санкт-Петербург, Россия

E-mail: eap225@gmail.com

Приближенное аналитическое решение задачи определения параметров течения газа за фронтом сильной головной ударной волны может быть построено в рамках метода "тонкого ударного слоя"[1]. В большинстве задач газодинамики с интенсивными ударными волнами в полученной для поправок первого приближения системе уравнений два уравнения могут быть решены независимо от остальных, и при этом одно из них записывается в дивергентном виде. Введение новой функции (аналога функции тока) позволяет получить одно нелинейное уравнение второго порядка в частных производных, и, в итоге, свести решение задачи к решению интегро-дифференциальной системы уравнений для определения двух произвольных функций и формы фронта головной ударной волны. В задаче пространственного гиперзвукового обтекания тонкого крыла для решения такой системы уравнений был предложен полуобратный метод, при котором вместо уравнения поверхности обтекаемого крыла задавался вид одной из произвольных функции [2, 3]. Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению пространственной задачи обтекания тонкого крыла, движущегося с большой сверхзвуковой скоростью. Головная ударная волна считается присоединенной к передней кромке крыла хотя бы в одной точке. В работе рассмотрены некоторые частные решения вышеуказанной интегро-дифференциальной системы уравнений.

## Л и т е р а т у р а

1. Черный Г.Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
2. Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А. Пространственное обтекание тонкого крыла гиперзвуковым потоком газа // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1978. Вып. 2. No 7. С. 158-160.
3. Богатко В.И., Гриб А.А., Колтон Г.А. Второе приближение в теории тонкого крыла конечного размаха, обтекаемого гиперзвуковым потоком газа // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астрон. 1979. Вып. 1. No 1. С. 87-95.

## About an Approach to the Solution of Problem of a Three-Dimensional Hypersonic Flow Past a Thin Wing

V.I. Bogatko<sup>1</sup>, G.A. Kolton<sup>2</sup>, E.A. Potekhina<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup> Saint-Petersburg State University,

<sup>2</sup> National mineral-resources University "Mining", Saint-Petersburg, Russia

An approximate analytical solution for the gas flow behind the front of a strong bow shock wave can be constructed by the "thin shock layer method"[1]. Two equations from the system of equations for the first-order corrections can be solved independently of the others in most gas dynamics problems concerning intensive shock waves. One of these equations is written in a divergent form. The introduction of a new function (an analogue of the flow function) allows to obtain a single nonlinear partial equation of the second order and allows us to reduce the solution of the problem to the solution of an integro-differential system of equations to determine the two arbitrary functions and the bow shock wave front form. The semi-inverse method for the solution of this system was proposed in the three-dimensional problem of a hypersonic flow past the thin wing. A form of one of the arbitrary functions was specified instead of the wing surface equation [2,3]. The present work is devoted to further study of the three-dimensional flow problem past thin wings moving at high supersonic speed. The bow shock wave is considered to be attached to the wing's leading edge at least at one point. In this paper some particular solutions of the aforementioned system are discussed.

## Reference

1. Chernyi G.G. Gas Flows with a high supersonic Velocity. M.: Fizmatgiz, 1959. 220 p.
2. Bogatko V.I., Grib A.A., Kolton G.A. Three dimensional hypersonic gas Flow past the thin Wing // Leningr. Univ. Bulletin. Ser. 1. 1978. Iss. 2. No 7. P. 158-160.
3. Bogatko V.I., Grib A.A., Kolton G.A. The second Approximation in the Theory of thin Wing of finite Span, the streamlined hypersonic gas Flow // Leningr. Univ. Bulletin. Ser. 1. 1979. Iss. 1. № 1. P. 87-95.

# МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ МЕТОДА ПРЯМОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Е.А. Бондарь<sup>1,2</sup>, А.Н. Молчанова<sup>1,2</sup>, А.В. Кашковский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, Новосибирск, Россия

E-mail: shumakova@itam.nsc.ru, sasa@itam.nsc.ru, bond@itam.nsc.ru

Одной из актуальных задач численного моделирования высотной аэротермодинамики космических аппаратов (КА) является учет химических процессов на поверхности аппарата. В высокотемпературном вязком ударном слое у поверхности КА протекают реакции диссоциации молекул набегающего потока на атомы и более простые молекулы, в результате которых происходит поглощение тепла. Однако, поверхность КА является катализатором для обратных реакций рекомбинации, которые протекают с выделением тепла, что может в разы увеличить тепловой поток на поверхность аппарата. Отметим, что поверхностные химические процессы изучены гораздо хуже, чем газофазные, и степень неопределенности, связанная с моделированием этих процессов, существенно выше. В то время как для методов континуальной газовой динамики был предложен ряд моделей поверхностных химических реакций, моделирование каталитических реакций в методе прямого статистического моделирования (ПСМ) практически не проводилось.

Данная работа посвящена разработке молекулярных моделей гетерогенных химических реакций, учитывающих различные процессы на поверхности, для метода ПСМ и исследованию влияния этих процессов на аэротермодинамику затупленных тел в высокоэнтальпийных разреженных течениях на основе метода ПСМ. Был предложен подход к созданию молекулярных моделей химических процессов на поверхности на основе детальных макроскопических моделей. Этот подход был применен к макроскопической модели гетерогенных химических процессов на диоксиде кремния ( $\text{SiO}_2$ ) в диссоциированном воздухе, которая учитывает адсорбцию, десорбцию, реакции рекомбинации Или-Ридила и Ленгмюра-Хиншельвуда. В модели заданы коэффициенты скоростей данных процессов в виде аррениусовских зависимостей, из которых выводятся микроскопические параметры модели для метода ПСМ: полученные вероятности адсорбции и рекомбинации Или-Ридила зависят от нормальной составляющей скорости падающей частицы, а реакции рекомбинации Ленгмюра-Хиншельвуда моделируются с использованием схемы мажорантной частоты, обобщенной на поверхностные процессы. Предложенный подход может быть использован для построения моделей химических реакций на поверхности в методе ПСМ на основе различных макроскопических моделей поверхностной рекомбинации.

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Договор № 14.Z50.31.0019).

## Surface Chemistry Model for the Direct Simulation Monte Carlo Method

Ye.A. Bondar<sup>1,2</sup>, A.N. Molchanova<sup>1,2</sup>, A.V. Kashkovsky<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Novosibirsk State University, Russia

<sup>2</sup>Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia

One of the important problems of numerical simulation of high-altitude aerothermodynamics of space vehicles is the allowance for chemical reactions on the vehicle surface, which can severalfold increase the heat flux to the vehicle. This work is aimed at developing molecular surface chemistry models for Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) computations which take into account various surface processes and investigating surface catalicity effects on aerothermodynamics of blunted bodies in high-enthalpy flows. An approach to construction of DSMC surface chemistry models based on detailed macroscopic models was proposed. The approach was applied to a macroscopic model of surface processes on a silicon-dioxide-based material for dissociated air mixture which includes adsorption, desorption, Eley-Rideal and Langmuir-Hinshelwood recombination. All the microscopic model parameters (probability of adsorption and the Eley-Rideal recombination, frequency of desorption and the Langmuir-Hinshelwood recombination) were obtained from the corresponding reaction rate coefficients which are defined in the form of the Arrhenius dependences. The resulting probabilities of adsorption and the Eley-Rideal recombination are functions of incident particle velocity, and the Langmuir-Hinshelwood recombinations are modeled by applying Majorant Frequency Method generalized to surface processes. Other detailed DSMC surface chemistry models can be constructed in a similar manner.

This work was supported by the Russian Government (contract No. 14.Z50.31.0019).

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОВЫХ ТЕЧЕНИЙ С УЧЕТОМ ТЕРМОХИМИЧЕСКОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ В ANSYS FLUENT

Г.В. Шоев<sup>1,2</sup>, Е.А. Бондарь<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, Новосибирск, Россия*

<sup>2</sup>*Новосибирский государственный университет, Россия*

*E-mail: shoev@itam.nsc.ru, bond@itam.nsc.ru*

Течения за сильными ударными волнами, например, около возвращаемого космического аппарата, сильно отличаются от течений совершенного газа. В подобных течениях возбуждаются колебательные степени свободы молекул, происходит диссоциация и ионизация. На поверхности стенки происходят химические реакции, а газ при высоких температурах начинает испускать и поглощать излучение. Такие эффекты реального газа приводят к значительным изменениям структуры течения. Несмотря на большое количество экспериментов в аэродинамических трубах и летных испытаний, вышеперечисленные эффекты реального газа являются недостаточно изученными, например, для эффективной оптимизации и проектирования возвращаемых аппаратов. Наиболее привлекательной и доступной альтернативой дорогостоящим наземным и летным экспериментам является численное моделирование. Целью настоящей работы является разработка и верификация эффективного численного инструментария для моделирования течений с термохимической неравновесностью на основе континуального подхода.

В данной работе разрабатывается модуль (Fluent-neq) для Ansys Fluent, который применяется для численного моделирования высокоскоростных течений с термохимической неравновесностью в околоконтинуальном и континуальном режимах. Уравнение сохранения колебательной энергии добавляется к системе уравнений Навье–Стокса (сохранения массы, импульса и поступательной энергии). Предполагается, что поступательная и вращательная моды находятся в равновесии, поэтому учитываются только две температуры: поступательная и колебательная. Для описания колебательной релаксации используется модель Ландау–Теллера. В разрабатываемом модуле учитывается конечная скорость протекания химических реакций. Начальные эффекты разреженности учитываются с помощью граничных условий скольжения и скачка температуры. Разрабатываемый модуль полностью совместим с основным решателем Fluent для двумерных, осесимметричных и трехмерных задач, и его можно использовать в однопроцессорных или параллельных расчетах.

Разрабатываемый модуль был успешно применен для решения нескольких тестовых задач: колебательная релаксация азота, обтекание плоской затупленной пластины гиперзвуковым потоком азота, течение смеси  $N_2-N$  с учетом реакций диссоциации около клина. Полученные численные результаты согласуются с результатами других программных комплексов. Разрабатываемый модуль может быть использован для дальнейших численных исследований. Более детальное обсуждение реализации разработанного модуля и полученных результатов будет представлено в полном тексте доклада.

## Numerical Simulation of Flows with Thermochemical Non-Equilibrium using Ansys Fluent

G.V. Shoev<sup>1,2</sup>, Y.A. Bondar<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*Novosibirsk State University, Russia*

Flows behind strong shock waves, for example, near re-entry vehicles, differ significantly from flows of perfect gas. Vibrational degrees of freedom become excited in such flows, dissociation and ionization take place. Chemical reactions occur on a surface of a wall. Also radiation heat transfer becomes important. These real gas effects cause substantial changes in the flow structure. Despite there are many experimental studies, our understanding of the real gas effects is not enough, for example, for effective design of re-entry vehicles. The most attractive alternative to expensive experimental study is numerical simulation. The basic goal of this work is development and verification of numerical tool based on continuum approach for simulation of flows with thermo-chemical non-equilibrium.

The Fluent-neq code for Ansys Fluent is being developed in this study for numerical simulation of flows with thermochemical non-equilibrium. In this work, we solved following flow problems: vibrational relaxation of nitrogen, hypersonic nitrogen flow around blunted plate, flow of  $N_2-N$  mixture around wedge with reactions of dissociations. It has been shown that code being developed can be used for further numerical studies. Implementation of the developed code and results obtained will be discussed in detail in the full paper.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ИОНИЗОВАННЫХ ВЫСОКОЭНТАЛЬПИЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ ПРЯМОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МОНТЕ-КАРЛО

Е.А. Бондарь<sup>1,2</sup>, П.В. Ващенко<sup>1,2</sup>, А.В. Кашковский<sup>1,2</sup>, А.А. Шевырин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, Новосибирск, Россия  
Email: bond@itam.nsc.ru, shevr@itam.nsc.ru

Физико-химические процессы, протекающие за головной ударной волной около космического аппарата, входящего в атмосферу Земли, включают энергообмен между поступательными и внутренними степенями свободы молекул и химические реакции, протекающие в условиях сильной термической неравновесности. Основным численным методом для исследований таких высокоэнтальпийных течений в переходном режиме, когда число Кнудсена больше 0.01, является метод прямого статистического моделирования Монте-Карло (ПСМ). С точки зрения развития методов высотной аэротермодинамики наиболее актуальной задачей в настоящий момент является разработка и валидация столкновительных моделей неравновесных физико-химических процессов, которые могут быть использованы в расчетах методом ПСМ.

Целью настоящей работы является развитие таких моделей для случая входа космического аппарата в атмосферу со скоростями, превышающими первую космическую. Одной из особенностей таких течений является существенная роль процессов ионизации. Основное внимание в работе уделяется моделированию ионизации и плазмы, окружающей космический аппарат, в рамках метода ПСМ. Моделирование электронов методом ПСМ сильно снижает вычислительную эффективность метода из-за очень большой частоты столкновений электронов. Показано, что если плазма нейтральная, функция распределения энергии электронов близка к равновесному распределению, а скорость обмена энергией для электронного компонента смеси мала, то можно предложить численно эффективную модель для описания электронов в рамках метода ПСМ. Эффективность новой модели достигается реализацией e-e, e-V обмена, а также реакций диссоциативной рекомбинации ( $AB^+ + e \rightarrow A + B$ ) и ионизации электронным ударом ( $A + e \rightarrow A^+ + 2e$ ) как отделенного от столкновительной процедуры метода ПСМ процесса.

Новая модель была реализована в вычислительном комплексе SMILE++, верифицирована для условий изотермического резервуара и использована в численном моделировании высокоэнтальпийных течений около спускаемых космических аппаратов. Полученные результаты сравнивались с результатами летных экспериментов плотности электронов с помощью интерферометров, расположенных вдоль боковой поверхности аппарата. Результаты сравнения показали отличное соответствие численных результатов, полученных с помощью новой модели ионизованного газа, и результатов измерений.

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете при поддержке гранта Правительства РФ (Договор № 14.Z50.31.0019).

## Л и т е р а т у р а

1. W. L. Grantham. NASA TN D-6062 (1970).
2. G. Bird. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford Press, 1994.
3. Ye. Bondar, A. Shevyrin, M. Ivanov, A. Kashkovsky. DSMC Modeling of High-Temperature Chemical Reactions in Air // 42nd AIAA Thermophysics Conference, AIAA-2011-3128.

## A Study of Ionized High-Enthalpy Flows by the Direct Simulation Monte Carlo Method

Ye.A. Bondar<sup>1,2</sup>, P.V. Vashchenkov<sup>1,2</sup>, A.V. Kashkovsky<sup>1,2</sup>, A.A. Shevyrin<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Novosibirsk State University, Russia

<sup>2</sup>Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia

A new model of plasma environment of re-entry space vehicles for Direct Simulation Monte Carlo (DSMC) method was developed and implemented. Good accuracy and high computational efficiency of the new model was demonstrated. Simulations of the ionized flows near space capsules were performed and good agreement with experimental data was obtained.

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ИДЕАЛЬНО КАТАЛИТИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ДВУМЕРНЫХ И ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

**И.Г. Брыкина**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия*

*E-mail: shantii@mail.ru*

Исследуется гиперзвуковое обтекание затупленных тел при больших и умеренных числах Рейнольдса  $Re$ . Разработанным методом последовательных приближений [1], обобщенным на пространственные течения, получены простые приближенные аналитические решения уравнений тонкого вязкого ударного слоя для теплового потока, отнесенного к его значению в точке торможения, при  $Re \geq 20$  (число  $Re$  вычисляется по температуре торможения набегающего потока). Такие решения получены в задачах обтекания осесимметричных тел, затупленных крыльев большого удлинения под углами скольжения и атаки, плоскости симметрии и боковой поверхности трехмерных тел. Полученные выражения для относительного теплового потока не зависят от числа  $Re$ , они зависят только от геометрии тела, температуры поверхности, числа Прандтля и угла скольжения (для крыльев), а для холодной стенки – только от геометрических параметров. Эти решения хорошо согласуются с численным решением уравнений тонкого вязкого ударного слоя в широком диапазоне определяющих параметров.

Получены имеющие более широкую область применимости, чем модель тонкого вязкого ударного слоя, выражения для относительного теплового потока, зависящие от геометрии тела и давления (которое можно брать из решения задачи невязкого обтекания или из аппроксимационных формул), хорошо согласующиеся с численным решением уравнений Навье–Стокса.

На основании сравнений аналитического решения с численными решениями уравнений тонкого вязкого ударного слоя для многокомпонентного химически реагирующего газа вдоль планирующей траектории спуска корабля *Space Shuttle* на высотах от 90 до 50 км показано, что распределение относительного теплового потока на идеально каталитической поверхности затупленных тел в двумерных и трехмерных гиперзвуковых течениях слабо зависит от характера протекания химических реакций в ударном слое, включая замороженные, химически неравновесные и околоравновесные режимы течения, и хорошо описывается полученными формулами, зависящими только от геометрии тела. Задача определения абсолютного теплового потока на поверхности пространственных тел сведена к задаче определения теплового потока в точке торможения осесимметричного тела, например, сферы, для которого в литературе имеются различные аппроксимационные формулы. Таким образом, полученные аналитические решения позволяют рассчитывать тепловой поток к идеально каталитической поверхности пространственных затупленных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком химически реагирующего газа, в широком диапазоне чисел Рейнольдса,

## **Л и т е р а т у р а**

1. Брыкина И.Г. Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // ЖВММФ. 1978. Т. 18. № 1. С. 154-166.

## **Analytical Prediction of Heat Transfer on Fully Catalytic Surface in 2D and 3D Hypersonic Flows**

**I.G. Brykina**

*Institute of mechanics of Lomonosov Moscow State University, Russia*

The simple analytical solutions for heat flux normalized to the value at a stagnation point are obtained at moderate and high Reynolds number for hypersonic flows over axisymmetric bodies, long swept blunt wings, plane of symmetry and lateral surface of 3D bodies. These formulas make possible to predict heat transfer on the fully catalytic surface of blunt bodies in 2D and 3D chemically reacting gas flows.

# ОБ УРАВНЕНИЯХ ГИДРОДИНАМИКИ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

**В.А. Бубнов**

*Московский городской педагогический университет, Россия*

*E-mail: vladimbubnov@yandex.ru*

Второй закон Ньютона применительно к частице жидкости массой  $m$ , двигающейся со скоростью  $\vec{V}$ , можно представить так:

$$c m \frac{d\vec{V}}{dt} + c \vec{V} \frac{dm}{dt} = \sum \vec{F}, \quad (1)$$

где  $c$  - коэффициент пропорциональности, а член справа в (1) представляет сумму всех действующих сил. Изменение массы частицы выразим через изменение плотности  $\rho$  и объема  $V = dx dy dz$ :

$$\frac{dm}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt}. \quad (2)$$

Далее используем общеизвестную связь скорости объемного расширения частицы жидкости с дивергенцией скорости  $\vec{V}$  и напишем:

$$\rho \frac{dV}{dt} = -\rho V_0 \cdot \text{div} \vec{V}; \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div} \vec{V}. \quad (3)$$

Теперь все члены в (1) отнесем к единице объема, из сил выделим массовую силу  $\vec{K}$  и поверхностную  $\vec{P}$ , которую в свою очередь вычисляем по гипотезе Стокса, после чего получаем новую форму уравнений гидродинамики:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (1 - \beta) \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} - \beta \rho \vec{V} \text{div} \vec{V} =$$
$$= \vec{K} - \nabla \cdot p + (\lambda + \mu) \nabla \cdot (\text{div} \vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V}. \quad (4)$$

В этих уравнениях время нормировано на величину константы  $c$ , а через переменность плотности учтено изменение массы частицы жидкости. Кроме того, в (4) наряду с общеизвестными коэффициентами  $\lambda$  и  $\mu$  появился новый параметр  $\beta$ , учитывающий по определенной формуле изменение первоначального объема  $V_0$  и константы  $c$  из (1). Из несколько других представлений уравнение (4) получено автором ранее [1].

## Л и т е р а т у р а

1. *Bubnov V.A. On Generalized Hydrodynamic Equations Used In Heat Transfer Theory // In. J. Heat Mass Transfer. 1973. V.16. pp.109-119.*

## The New Form of Hydrodynamic Equations with Variable Density Is Represented

**V.A. Bubnov**

*The State Educational Government-Financed Institution of Higher Professional Education of the City of Moscow «Moscow City Teacher Training University», Russia*

This paper presents the derivation of the equations of hydrodynamics from the second law of motion of a material point under the condition that the mass of a fluid particle AC.

# РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ ПО ГЛУБИНЕ ДОБЫВАЮЩЕЙ СКВАЖИНЫ ДЛЯ ПРОГРАММНО-АППАРАТНОГО КОМПЛЕКСА МОРСКОЙ ЛЕДОСТОЙКОЙ ПЛАТФОРМЫ "ПРИРАЗЛОМНАЯ"

**Р.И. Смирнов, О.В. Бутурлимов**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: sri7@mail.ru, oleg.buturlimov@mail.ru*

Для эффективного обучения и переподготовки кадров необходимы полномасштабные тренажеры с физическими устройствами управления, максимально приближенными к реальным системам управления. Одним из таких и является тренажерный комплекс компании ЗАО "Транзас" морской ледостойкой стационарной платформы (МЛСП) «Приразломная», предназначенной для добычи нефтяных запасов, подготовки нефти для транспортировки, хранения нефти в танках кессона и периодической отгрузки ее на танкеры.

Основное назначение созданного нами совместно с ЗАО "Транзас" тренажера - обеспечить подготовку морского персонала в соответствии с резолюцией ИМО А.891(21) .

В докладе изложен метод расчета параметров газожидкостной смеси на основе гомогенной модели течения в подъемно-эксплуатационной трубе, в котором за основу взят метод расчета распределения давления Поэтмана-Карпентера для газожидкостного восходящего потока в трубах круглых сечениях, расширенный В.А. Сахаровым для высоковязких сред. Метод дополнен нами расчетом динамической вязкости как функции от температуры, предложенный И.И. Дунюшкиным, и корреляционным методом расчета плотности газожидкостной смеси в подъемнике при однократном разгазировании.

Предложенный нами метод расчета распределения давления, плотности, вязкости и температуры внедрен в термодинамическую модель тренажерного комплекса, построенную на основе схемы систем платформы и реагирующую на изменение эксплуатационных и внешних параметров во всем диапазоне режимов работы. Пересчет параметров осуществляется как в ускоренном, так и в режиме реального времени. Моделируется поведение всех объектов гидравлической сети эквивалентно их техническим аналогам. Кривые распределения мгновенно отображают изменения в системе, будь то состояние задвижек, режимов работы насоса или параметров пласта.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Мищенко И.Т., Сахаров В.А.* Сборник задач по технологии и технике в нефтяной добыче: Учеб. пособие для вузов. М.: Недра, 1995. 272 с.
2. *Бойко В.С.* Разработка и эксплуатация нефтяных месторождений. М.: Недра, 1996. 426 с.
3. *Казунин Д.В.* Численное моделирование технологических процессов танкеров и терминалов: монография. Новосибирск: МГА имени адм. Ф.Ф. Ушакова, 2009. 268 с.

## **Calculation of Gas-Liquid Mixture Parameters Distribution over the Depth of the Production Well for the Hardware-Software Complex of the Offshore Ice-Resistant Platform "Prirazlomnaja"**

**R.I. Smirnov, O.V. Buturlimov**  
*Saint-Petersburg State University, Russia*

In the report a method for calculating the parameters of the gas-liquid mixture based on a homogeneous flow model in the production tubing is described. The method is based on the Poetman-Carpenter method for calculation of the pressure distribution in gas-liquid upward flows in circular tubes, extended by V.A. Sakharov for highly viscous fluids. We complement the method with temperature-dependent dynamic viscosity calculation proposed by

I.I. Duniushkin and with a correlational method for calculation of the gas-liquid mixture density in the lift with flash liberation.

# ПРЯМОЕ СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОНДЕНСАЦИИ В ГАЗОВОЙ ФАЗЕ

Н.Ю. Быков<sup>1</sup>, Ю.Е. Горбачев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия

<sup>2</sup>Coddan technologies LLC, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: nbykov2006@yandex.ru, yuriy.gorbachev@gmail.com

Метод прямого статистического моделирования (ПСМ) является основным методом расчета разреженных и околоконтинуальных течений с физико-химическими процессами в объеме. Одним из направлений развития метода является его адаптация для моделирования течений с процессами конденсации. Разработка методик расчета течений с учетом процессов образования и роста кластеров имеет важное прикладное значение для задач синтеза нанокластеров, вакуумных технологий и аэрокосмических приложений.

Методики ПСМ течений с процессами конденсации можно условно разделить на две группы: (1) базирующиеся на выводах классической теории нуклеации и ее модификаций [1,2] и (2) основанные на кинетическом подходе, рассматривающем всю цепочку кинетических процессов формирования, роста/распада кластеров, начиная с образования димеров [3,4]. В настоящей работе развиты оба подхода.

Особое внимание уделено моделированию процесса димеризации. Димеры из атомов образуются в ходе трехчастичных столкновений. Для молекулярных кластеров энергетически возможно образование димеров как в ходе парных, так и тройных столкновений. На примере конденсации водяного пара с использованием имеющихся данных о константах скоростей процессов и результатов молекулярно-динамических расчетов рассмотрено влияние обоих процессов на скорость образования димеров. Рассмотрены различные механизмы распада молекулярных димеров. С помощью методики, предложенной в [5], получены выражения для частот процесса мономолекулярного испарения кластеров произвольного размера для VHS-модели столкновений.

Проведено сравнение моделей с использованием подхода на базе модификации классической теории нуклеации и кинетического описания для случая роста кластеров в пространственно-однородном объеме пара мономеров, параметры которого поддерживаются постоянными. Обсуждаются отличия результатов, связанные с особенностями учета в рассматриваемых подходах процессов выделения/поглощения энергии связи в ходе реакций присоединения/испарения мономера к/из кластера.

## Л и т е р а т у р а

1. N.Yu. Bykov, Yu.E. Gorbachev. Application of DSMC method for Size-Corrected Theory of homogeneous nucleation // AIP Conference Proceedings. 2012. 1501. P. 1282-1289.
2. J. Zhong, M.I. Zeifman, S.F. Gimelshein, D.A. Levin. Direct Simulation Monte Carlo Modeling of Homogeneous Condensation in Supersonic Plumes // AIAA Journal. 2005. 43. N8. P.1784-1796
3. Н.Ю. Быков. Моделирование процесса конденсации при сферическом расширении водяного пара в вакуум // Теплофизика и аэромеханика. 2009. Т.16. N.2. С.189-199.
4. R. Jansen, I. Wysong, S. Gimelshein, M. Zeifman, U. Buck. Non-equilibrium Numerical Model of Homogeneous Condensation in Argon and Water Vapor Expansions // J. Chem. Phys. 2010. 132. 244105.
5. I.D. Boyd. Analysis of vibration-dissociation-recombination processes behind strong shock waves of nitrogen // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. 1992. 4. P. 178-185.

## Direct Simulation Monte Carlo of Condensation Process in Gas Phase

N.Y. Bykov<sup>1</sup>, Y.E. Gorbachev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State Polytechnical University, Russia

<sup>2</sup>Coddan Technologies LLC, St.-Petersburg, Russia

Condensation process within DSMC method is analyzed. Two approaches are considered: (a) based on the classical nucleation theory and (b) on the kinetic theory. Expressions for the probabilities of evaporation of monomers from cluster of arbitral size are proposed. Competition of dimerization via three- particle and two-particle collisions is studied. For polyatomic vapors both mechanisms are taken into account, while dimerization in monatomic gas via two-particle collisions is forbidden due to the energy conservation law. Calculation results based on the classical nucleation theory and kinetic approach are compared for water vapor for model conditions, where the monomers parameters are kept constant. Special attention is drawn to the description of the internal energy absorption/release in condensation/evaporation processes.

# НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ КОНДЕНСАЦИИ ПАРОВ ВОДЫ В ГИПЕРЗВУКОВОЙ УДАРНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

**А.А. Веревкин, А.В. Лобач, Ю.М. Циркунов**

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ», Санкт-Петербург, Россия  
E-Mail: lobachav@gmail.com*

В настоящее время в мире вопросам конденсации/испарения посвящена обширная литература. Несмотря на достигнутый в этой области прогресс в понимании явлений и созданные теории, разработка новых моделей процессов испарения и конденсации и их применение постоянно остается в фокусе внимания как физиков, так и инженеров. Особый интерес представляет начальная стадия процесса конденсации, когда в результате столкновений молекул происходит образование молекулярных кластеров, которые по мере роста превращаются в капли. Эта стадия не описывается методами классической термодинамики, здесь отсутствуют общепринятые теоретические подходы.

В данной работе рассматривается нестационарное течение при запуске сверхзвуковой ударной аэродинамической трубы и образование кластеров воды при расширении потока воздуха, содержащего небольшое количество паров  $H_2O$  в расширяющейся части сопла Лавала. Сначала рассчитывается нестационарное течение в трубе, начиная с момента раскрытия диафрагмы между камерами высокого и низкого давления. В качестве модели течения используются уравнения Эйлера, которые решаются численно методом Годунова. Затем рассматривается динамика пробной "жидкой" частицы и методом Монте-Карло моделируется процесс столкновений в этой частице молекул воды. На основе модели конденсации Иголкина рассчитывается рост молекулярных кластеров. Учитывается существование нескольких устойчивых связей между молекулами воды в кластере, которые соответствуют его различным состояниям.

Начальные температура и давление в камере высокого давления равны  $T=600K$  и  $p=25$  атм.

Учитывались только парные столкновения между молекулами и между кластерами и молекулами. Вероятность столкновений выбиралась по схеме мажорантной частоты. При моделировании столкновений рассматривались уравнения импульса и энергии для сталкивающихся частиц (которые считались твердыми сферами) и дополнительное соотношение для энергетических уровней, соответствующих потенциальным ямам кластеров разных размеров. Внутри пробной жидкой частицы была построена регулярная сетка, для которой выполнялось условие заполнения не менее 10-ти частиц в ячейке.

В результате расчетов была получена зависимость концентрации кластеров (от двумера до шестимера) от координаты вдоль траектории пробной жидкой частицы, выявлены наиболее энергонесущие частицы, скорость образования кластеров, изменение скорости частицы с её ростом. Одним из основных факторов, влияющих на процесс кластерообразования, является начальная массовая концентрация паров воды, значение которой варьировалось от 0.001% до 1%. Получены данные о влиянии концентрации на максимальный размер кластера (размер "капли"), на распределение кластеров по размерам в различные моменты времени, на распределение кластеров одного размера по длине сопла, на величину пути образования кластера критического размера, когда его можно рассматривать как каплю и применять к нему законы и соотношения классической термодинамики. Было найдено, что с ростом начальной концентрации паров воды в пробной жидкой частице увеличивается концентрация кластеров больших размеров. При начальной концентрации пара 0.001% в камере высокого давления концентрация кластеров различных размеров на срезе сопла составила: мономеров – 1%, тетрамеров – 35%, шестимеров – 27%, при начальной концентрации паров воды 0.025%: содержание мономеров составляло так же 1%, тетрамеров – 24%, шестимеров – 35%. Таким образом, с повышением концентрации достигаются насыщенные состояния кластеров различных размеров, численные значения которых связаны не только с начальными параметрами в камере высокого давления, но и со значениями энергетических уровней устойчивых состояний в потенциалах взаимодействия между рассматриваемыми частицами.

## Initial Phase Condensation of Water Vapor in a Hypersonic Shock Tunnel

**A.A. Veryovkin, A.V. Lobach, Yu.M. Tsirkunov**

*Baltic State Technical University, Saint Petersburg, Russia*

An unsteady flow in a supersonic shock tunnel and formation of water clusters in a de Laval nozzle is studied numerically. Distribution of clusters in size are obtained and discussed.

## **ДВИЖЕНИЕ И ГОРЕНИЕ ЧАСТИЦ НЕСФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ**

**К.Н. Волков, В.Н. Емельянов, И.В. Тетерина**

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: vlademelyanov@gmail.com*

Металлические добавки в виде высокодисперсного порошка (в основном, алюминия) входят в состав многих типов современных смесевых твердых топлив. Они призваны обеспечить достижение требуемого уровня энергетических характеристик и демпфирование неуправляемых акустических колебаний параметров рабочего тела в камерах сгорания. Следствием введения металла в рецептуру топлива является наличие конденсированной фазы в продуктах сгорания. Одной из особенностей горения смесевого твердого топлива с добавками алюминия является слияние (агломерация) расплавленных частиц металла и его оксида в поверхностном слое горящего топлива в капли, размер которых на порядок превышает размеры исходных частиц металла.

Источником образования частиц высокодисперсного оксида служит металл, не участвующий в агломерации, и металл агломератов. Сгорание неагломерирующего металла осуществляется в пределах поверхностного слоя горящего топлива, а металла агломератов – при движении несферических частиц-агломератов в потоке продуктов сгорания. Различие в источниках появления высокодисперсного оксида является причиной образования частиц, отличающихся по своим размерам. Для частиц-агломератов механизм образования окислов связан с гетерогенным окислением и последующим накоплением окиси на горячей поверхности исходного металла.

При горении смесевого твердого топлива входящие в их состав частицы металлов претерпевают ряд сложных физико-химических превращений, начиная от плавления и агломерации капель на горячей поверхности заряда и заканчивая испарением, горением, дроблением и химическим взаимодействием металла и оксида с образованием газообразных продуктов реакции и их выносом в газовую фазу. Физико-химические процессы протекают в течение короткого промежутка времени и накладываются друг на друга, что затрудняет построение полной и универсальной модели явления, позволяющей прогнозировать размеры формирующихся частиц.

В данной работе разрабатывается математическая модель и проводится численное моделирование движения и горения составных металл-оксидных агломератов (капли металла с присоединенными к ним частицами оксида) в потоке продуктов сгорания твердого топлива. Результаты численного моделирования сравниваются с данными физического эксперимента (размер агломератов, время горения).

## **Dynamics and Combustion Non-Spherical Particle in Non-Uniform Flow Field**

**K.N. Volkov, V.N. Emelyanov, I.V. Teterina**

*Baltic State Technical University "VOENMEKH", Saint-Petersburg, Russia*

The development of robust models of non-spherical particle dynamics and morphology is essential in the development of advanced propulsion systems. The study focuses on the numerical analysis of non-uniform flow field around moving non-spherical aluminium particle with oxide cap inside combustion chamber of SRM. The mathematical model of two-phase flow around a single particle with oxide cap has been developed and validated against experimental data. The model solves the continuity, momentum, energy and species continuity equations simultaneously to obtain the species and temperature profiles and the burn time. These equations allow calculating forces and angular moment acting on the particle. Geometry of the aluminium particle and its oxide cap changes as mass is removed from the aluminium particle and oxide cap mass increases during aluminium combustion. It has been assumed that the oxide deposits uniformly on the particle surface and migrates to the downstream side to coalesce into an oxide cap.

## УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В НЕРАВНОВЕСНЫХ ПОТОКАХ ЧАСТИЧНО ДИССОЦИИРОВАННОГО ГАЗА

**Ю.Н. Ворошилова, О.В. Панневиц, М.А. Рыдалевская**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*  
*E-mail: yulyavoroshilova@yandex.ru, ksushkin79@bk.ru, Rydalevska@rambler.ru*

При исследовании высокоскоростных и высокотемпературных потоков газа в ряде ситуаций отмечались некоторые аномалии в поведении газодинамических параметров. Как правило, эти явления были связаны с нарушением равновесия в распределениях молекул по химическим сортам и отдельным видам их внутренней энергии на фоне равновесных и слабо неравновесных распределений по поступательной энергии и другим видам внутренней энергии.

В докладе рассматриваются ударные волны в диссоциирующем двухатомном газе из гомоядерных молекул, возникающие в подобных неравновесных условиях. Для описания неравновесных распределений предлагается кинетическая модель, основанная на определении дополнительных аддитивных инвариантов молекулярных столкновений, формирующих неравновесные распределения.

Показано, что знание этих инвариантов позволяет получить замкнутое газодинамическое описание неравновесных потоков и вывести дополнительные условия динамической совместности для определения неравновесного состояния газа за ударной волной.

Для иллюстрации применения предлагаемой модели в докладе приводятся результаты исследования прямых скачков уплотнения, возникающих в потоках высокотемпературного азота на стадии завершения частичной колебательно-химической релаксации.

## **Shock Waves in Nonequilibrium Flows of Partially Dissociated Gas**

**O.V. Pannevitc, M.A. Rydalevskaya, Yu.N. Voroshilova**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The high speed flows of partially dissociated diatomic gas are considered. Under some conditions in such flows the disturbances of the equilibrium distributions over separate species of internal molecular energy are observed.

In our lecture for the description of these nonequilibrium distributions the kinetic model is proposed. This model is founded on the determination of additional invariants of the molecular collisions which form nonequilibrium distributions.

If these invariants are known, it allows to obtain the closed gas dynamic description of nonequilibrium flows and to deduce the additional consistency conditions for the determination of the gas state after shock wave.

For illustration the results of the direct shocks research in nonequilibrium flows of nitrogen on the stage of partial vibrational and chemical relaxation are adduced.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИЗМЫ В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

**В.Г. Габдылхакова, А.Н. Рябинин**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: gabd-venera@yandex.ru, ryabinin@spbu.ru*

В работе исследуются колебания призмы под действием воздушного потока. Призма удлинения  $\lambda = 10$ , имеющая квадратное поперечное сечение со стороной  $H = 6$  см, закреплена на упругой подвеске поперек потока в рабочей части дозвуковой аэродинамической трубы АТ-12. Подвеска позволяет совершать вращательные движения по дуге окружности, радиус которой в несколько раз превышает поперечный размер призмы. Ось вращения перпендикулярна вектору скорости набегающего потока (см. рис.). К одной из стальных пружин подвески присоединен полупроводниковый тензопреобразователь С-50, позволяющий измерять натяжение пружины. Сигнал с тензопреобразователя поступает на вход РС – осциллографа Velleman PCS500A, работающего в режиме самописца. В результате градуировки приборов найдена связь между амплитудой натяжения пружины и амплитудой колебаний цилиндра.

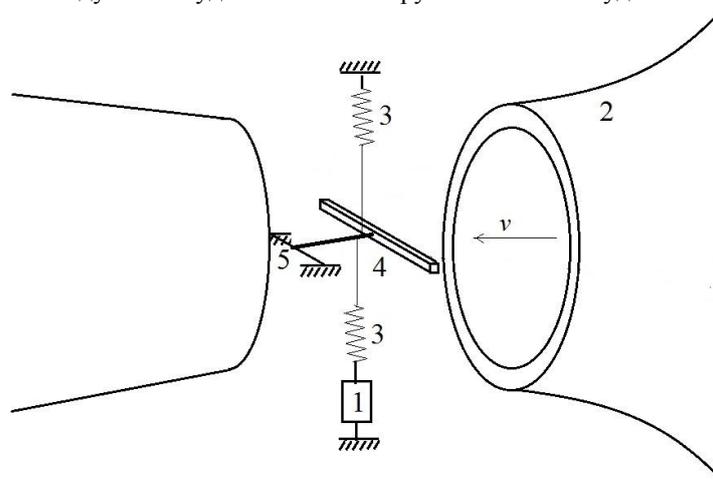


Рис. Схема эксперимента.

1 – тензопреобразователь, 2 – сопло, 3 – пружины, 4 – призма, 5 – ось вращения.

Получены зависимости амплитуды колебаний призмы от скорости набегающего потока. Колебания близки к поступательным колебаниям призмы, математическая модель которых предложена в работе [1]. Однако оказалось, что эта модель непригодна для описания исследуемых колебаний.

## Л и т е р а т у р а

1. Люсин В.Д., Рябинин А.Н. Исследование влияния удлинения призмы на ее аэродинамические характеристики и амплитуду колебаний при галопировании // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 2. С. 139-14.

## Experimental Study of Prism Rotational Oscillations in the Airflow

**V.G. Gabdykhakova, A.N. Ryabinin**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The oscillations of the prism in the airflow are studied. Prism has a square cross section, its elongation is equal 10. The prism is mounted on elastic holder across the flow in the working section of subsonic wind tunnel AT-12. The holder allows prism to move along a circular arc whose radius is several times greater than the transverse dimension of the prism. The axis of rotation is perpendicular to the velocity vector of the incident flow. The amplitude of prism oscillation is determined as a function of flow velocity.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ НЕСТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА РЕЙНОЛЬДСОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

А.В. Сентябов<sup>1,2,3</sup>, А.А. Гаврилов<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

<sup>3</sup>Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

E-mail: sentyabov\_a\_v@mail.ru, gavand@yandex.ru

Закрученные течения широко распространены в различных областях техники. В энергетических установках применяются такие их свойства, как интенсификация перемешивания, стабилизация пламени и пр. В то же время, в ряде случаев приходится бороться с крупномасштабными пульсациями, вызываемыми закрученными потоками. При высокой степени закрутки поток имеет сложную трёхмерную и нестационарную структуру: образуется тороидальная зона рециркуляции на оси течения, а на её границе формируется прецессирующий концентрированный вихрь. Расчёт подобных течений всё ещё представляет нетривиальную задачу и требует привлечения ресурсоёмких методов, таких как LES, DES, URANS и т.д.

Для исследования особенностей моделирования закрученных течений были подобраны два течения с сильной закруткой потока. Первая задача представляет собой внезапное расширение закрученного потока [1], в результате которого образуется тороидальная зона рециркуляции с прецессирующим вихревым жгутом. Вторая задача рассматривает холодное (изотермическое) течение в вихревой горелке с центральным телом [2].

Численная модель основана на расчёте нестационарных трёхмерных уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью квадратичной модели переноса Рейнольдсовых напряжений SSG [3]. Уравнения модели аппроксимируются на неструктурированной сетке из гексаэдральных ячеек по методу контрольного объёма. Решение нелинейной системы уравнений несжимаемой жидкости осуществляется с привлечением SIMPLE-подобной процедуры.

Численное моделирование показало формирование прецессирующего вихревого жгута в первом течении и сложной системы спиральных крупномасштабных вихрей – во втором. Сравнение стационарной и нестационарной версии модели переноса Рейнольдсовых напряжений показывает значительные преимущества последней в определении как средних, так и пульсационных полей течения. Прецессирующий вихревой жгут индуцирует значительные длинноволновые пульсации тангенциальной и радиальной компонент скорости, непосредственно разрешаемые нестационарной версией модели.

## Л и т е р а т у р а

1. Dellenback P.A., Metzger D.E., Neitzel G.P. Measurements in turbulent swirling flow through an abrupt expansion // AIAA J. 1988. V. 26. No. 6. P. 669- 681.
2. <http://sydney.edu.au/engineering/aeromech/thermofluids/swirl.htm>.
3. Speziale C.G., Sarkar S., Gatski T.B. Modelling the pressure-strain correction of turbulence: an invariant dynamical system approach // J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 245-272.

## Numerical Simulation of the Swirling Flows by Means of Unsteady Reynolds stress model

А.В. Sentyabov<sup>1,2,3</sup>, А.А. Gavrilov<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

<sup>3</sup>Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Two cases of swirling flow – flow past sudden expansion and isothermal swirling flow in a burner – were modeled using Unsteady Reynolds-Averaged Navier–Stokes approach. The large-scale deterministic motion is fully resolved in time and space, whereas the unresolved small scale motion is modelled by a full Reynolds Stress model. The simulations showed a vortex core precession past the sudden expansion and a vortex breakdown with forming large-scale spiral vortices in the burner. The unsteady model showed significant advantages in strong swirling flows calculations in comparison of steady Reynolds stress model. Apparently, simulation of large-scale vortices by means of the unsteady model is required for accurate strong swirl flow calculation.

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВИХРЕВОГО СЛЕДА И АЭРОДИНАМИКИ САМОЛЕТА В ВИХРЕВОМ СЛЕДЕ

А.М. Гайфуллин

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия  
E-mail: amgaif@mail.ru

Сходящая с самолета вихревая пелена образует вихревой след, который живет за летательным аппаратом с крылом большого удлинения достаточно длительное время: около одной-двух минут, за которые самолет успевает пролететь расстояние в несколько десятков километров (рис.1). Вихревой след эволюционирует в неоднородной турбулентной атмосфере. Интенсивность и время его жизни в основном зависят от двух факторов: от самолета-генератора следа и от состояния турбулентной атмосферы. Чем крупнее самолет, тем интенсивнее след за ним и тем больше время его жизни. Чем интенсивнее атмосферная турбулентность, тем быстрее затухает циркуляция следа и сокращается время его жизни.

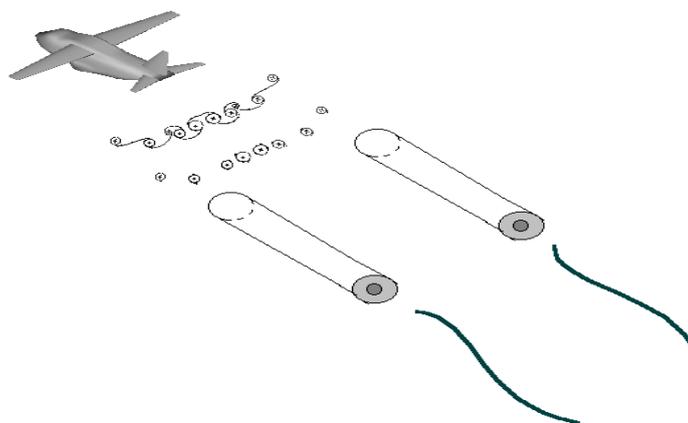


Рис. 1. Самолет и вихревой след за ним.

На характеристики вихревого следа влияет турбулентная диффузия поля скоростей и развитие неустойчивости к возмущениям различной частоты. Первое приводит к росту турбулентного ядра и падению максимальной окружной скорости по мере удаления от самолета, второе – к длинноволновой неустойчивости. Разрушение интенсивного вихревого следа происходит именно благодаря развитию длинноволновой неустойчивости. При достаточно большой интенсивности возмущений правый и левый вихрь в некоторых точках соприкасаются, образуя вихревые кольца.

Известно, что большинство стандартных моделей турбулентности дают завышенную диффузию завихренности в ядре вихря. В работе предложена модификация стандартной модели турбулентности для адекватного описания диффузии завихренности в ядре вихря. Для описания эволюции вихрей и определения времени жизни вихревого следа как на большой высоте, так и вблизи подстилающей поверхности, построены теории пространственной длинноволновой неустойчивости в идеальной жидкости и в турбулентной атмосфере. Результаты расчетов по созданным моделям и теориям показали хорошее соответствие с экспериментальными данными.

Исследуется поведение самолета, попавшего в вихревой след от впереди летящего самолета. Создана математическая модель аэродинамики такого самолета. Модель работает в режиме реального времени и предназначена для авиационных тренажеров и пилотажных стендов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-00247 и 13-08-00346).

## Mathematical Models of the Vortex Wake and of the Aircraft Aerodynamics in a Vortex Wake

A.M. Gaifullin

Central Aerohydrodynamic Institute named after professor N. E. Zhukovsky, Zhukovsky, Russia

The process of evolution of the vortex wake behind an aircraft in the turbulent atmosphere is considered. The model of behavior of an aircraft which has entered a vortex wake behind another aircraft is presented.

# УПРАВЛЕНИЕ РЕЖИМАМИ ОБТЕКАНИЯ В ГРАДИЕНТНОМ ПОТОКЕ НА ТВЕРДОЙ И ПОРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТЯХ

С.А. Гапонов, Н.М. Терехова

*Институт теоретической и прикладной механики им. Христиановича, Новосибирск, Россия*  
E-mail: terekh@itam.nsc.ru, gaponov@itam.nsc.ru.

Данная работа продолжает цикл исследований по численному моделированию управления режимами течения в пограничных слоях сжимаемого газа. Рассмотрено совместное влияние двух важных факторов, которые относительно просто могут быть реализованы на практике. Изучается эволюция возмущений разной природы (вихревых и акустических) на твердых и пористых поверхностях при наличии внешнего продольного градиента давления.

В теории исследования устойчивости течений с градиентом давления выполняются так же, как для продольного обтекания пластины. Для среднего течения используется класс подобных решений (скорость потенциального течения пропорциональна степени текущего продольного расстояния). Влияние градиента давления проявляется в распределении средних скоростей, при этом значительно меняются и температуры торможения на стенке.

Установлено, что при сверхзвуковых скоростях отрицательный градиент приводит к стабилизации, а положительный – к дестабилизации потока в области больших  $Re$ . Обнаружен интересный факт наличия реверса критического числа Рейнольдса для вихревых мод [1].

Влияние пористого покрытия на характеристики линейных возмущений достаточно хорошо изучены, в том числе авторами [2]. Те же исследования устойчивости были проделаны при обтекании с внешним градиентом. Подробно изучено влияние всех факторов пористости – радиуса пор, толщины покрытия и степени пористости. Показано, что пористые покрытия несколько сглаживают эффекты градиентности.

В рамках слабонелинейной теории устойчивости также рассматриваются взаимодействие возмущений при числах Маха  $M = 2$  и  $5.35$ . Отрицательный продольный градиент давления стабилизирует пограничные слои и замедляет переход, инициированный как вихревыми, так и акустическими возмущениями. Напротив, при положительном градиенте существует ускоренный рост всех возмущений, и можно ожидать наступления более раннего перехода.

При  $M = 2$  пористая поверхность уменьшает критические числа Рейнольдса, увеличивает линейные инкременты возмущений, что может привести к усиленному росту их на нелинейной стадии эволюции.

В то же время при  $M = 5.35$  такая поверхность эффективно замедляет линейный и нелинейный рост акустической моды при любых внешних градиентах давления. Причиной такого затухания нелинейности, по сравнению с твердой поверхностью, является то обстоятельство, что при гиперзвуковых числах Маха пористое покрытие поглощает акустические волны, что и приводит к их стабилизации и уменьшению линейных амплитуд. Исчезновение волны накачки, роль которой на непроницаемой поверхности играют плоские звуковые волны, приводит к затягиванию областей линейного роста возмущений и ламинарного режима в целом.

## Л и т е р а т у р а

1. Гапонов С.А., Терехова Н.М. Моделирование влияния внешнего градиента давления на устойчивость возмущений в пограничных слоях сжимаемого газа // Вестник НГУ. Сер. Физика. 2013. Т.8. No 4. С. 64-75.
2. Гапонов С. А., Терехова Н. М. Линейная эволюция и взаимодействие возмущений в пограничных слоях сжимаемого газа на непроницаемых и пористых поверхностях с теплообменом // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2011. No 3. С. 67-81.

## Management Flow Regimes in a Gradient Flow on Solid and Porous Surfaces

S.A.Gaponov, N.M. Terekhova

*Christianovich's Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia*

We consider the joint effect of two important factors that can be relatively easy to put into practice. The evolution of perturbations of different nature (vortex and acoustic) on solid and porous surfaces in the presence of external pressure gradient is studied.

# РАЗРАБОТКА СПОСОБОВ УМЕНЬШЕНИЯ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ

**А.С. Гузеев, В.В. Соколов, С.Ю. Соловьев**

*Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: s\_soloviev@ksrc.ru*

Современные мостовые сооружения являются протяженными конструкциями с относительно небольшими по высоте поперечными сечениями, что делает их подверженными аэроупругим колебаниям различных типов (вихревой резонанс, изгибно-крутильный флаттер, срывной флаттер, дивергенция, галопирование, бафтинг, параметрический резонанс).

В настоящее время при проектировании большепролетных мостов (с пролетом более 100 метров) конструкторские бюро заказывают проведение аэродинамических испытаний моделей мостов. В результате проведенных аэродинамических исследований в большинстве случаев обнаруживается тот или иной вид аэроупругих колебаний. На основе результатов испытаний выдаются рекомендации для уменьшения амплитуды колебаний: увеличение конструктивной жесткости моста, установка обтекателей, применение различных пассивных и активных демпферов.

Одним из наиболее эффективных способов уменьшения колебаний является применение пассивных аэродинамических гасителей. На рис. 1а представлена визуализация отрывных зон и вихревого следа за поперечным сечением моста. В следе за мостом видны интенсивные периодические вихри дорожки Кармана. При совпадении частоты срыва этих вихрей с собственной частотой конструкции возникает вихревой резонанс с недопустимо большими колебаниями моста. На рис. 1б представлена визуализация вихревого следа за поперечным сечением моста, снабженным аэродинамическими гасителями колебаний. Аэродинамические гасители перестраивают структуру следа, разрушают периодические вихри Кармана, устраняя возможность возникновения вихревого резонанса.

Разработанные в Крыловском центре пассивные аэродинамические гасители колебаний работают при всех скоростях и направлениях ветра, обладают малой массой, просты в изготовлении, монтаже и обслуживании, что является важным при принятии решения об их установке на натуральный мост.

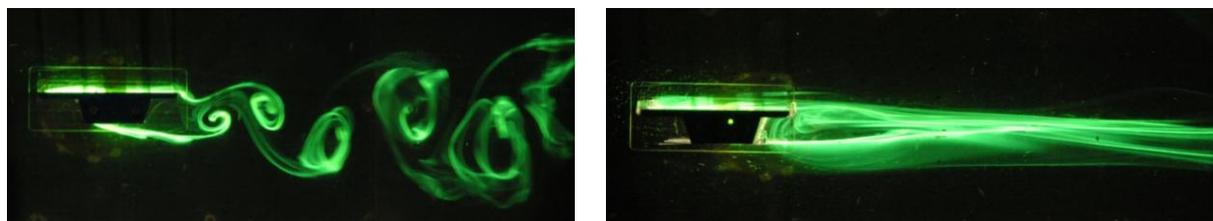


Рис. 1. а) Визуализация вихревого следа за пролетным строением моста (поток слева направо). б) Визуализация вихревого следа за пролетным строением моста, снабженным аэродинамическими гасителями колебаний

## **Development of Methods of Reducing the Fluctuations of Elements Aeroelastic Bridge Structures**

**A.S. Guzeev, V.V. Sokolov, S.U. Solovev**

*Krylov State Research Centre, Saint-Petersburg, Russia*

Modern bridge structures are extended structures that make them susceptible to aeroelastic vibrations of different types. At present in the design of large-span bridges (with a span of over 100 meters) design bureaus bought aerodynamic testing models of bridges. As a result of the aerodynamic research in most cases detected one or another type of aeroelastic vibrations.

One of the most effective ways to reduce vibrations is the use of passive aerodynamic dampers. Aerodynamic dampers change the structure of the flow, destroy periodic Karman vortices, eliminating the possibility of vortex excitation. Developed in Krylov center passive aerodynamic dampers work at all speeds and wind directions have low mass, easy to manufacture and installation. These parameters are most important in the decision to install dampers on full-scale bridge.

# ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ

Н.Ж.Джайчибеков, А.Б.Усенова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан

E-mail: jaich@mail.ru, ussenova\_a@bk.ru

В работе [1] при решении этой задачи считалось, что упорядоченно движущиеся  $s$ -частицы после столкновений переходят во множество хаотически движущихся  $t$ -частиц. В настоящей работе, когда в обоих множествах есть хаотическое движение, будем считать вероятным и переход  $t$ -частиц в множество  $s$ -частиц, как это сделано в [2] при решении задачи о структуре ударной волны. Здесь обозначено  $\beta$  – вероятность при столкновении  $s$ -частицы перейти во множество  $t$ -частиц, а вероятность  $t$ -частицы перейти в множество  $s$ -частиц, соответственно,  $1 - \beta$ . Интенсивность хаотического движения характеризовалась средним модулем скорости хаотического движения  $c_i = \sqrt{16p_i / (3\pi(\kappa - 1)\rho_i)}$ , где  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность  $i$ -го газа ( $i=s, t$ ),  $\kappa$  – показатель адиабаты.

В [2] принято предположение, что  $\beta$  пропорционально  $c_t^3$ , поскольку  $c_t^3$  есть некоторый объем в пространстве скоростей, характеризующий интенсивность хаотического движения частиц, а  $\beta$  есть вероятность столкнувшейся частицы оказаться после столкновения во множестве  $t$ . Аналогично  $1 - \beta$  пропорционально  $c_s^3$ , откуда следует  $\beta = \frac{c_t^3}{(c_t^3 + c_s^3)}$ . Интенсивность перехода массы частиц сорта  $s$  в сорт  $t$  после их столкновений определяется приближенно формулой

$$I = \frac{\pi d^2}{m} \rho_s \rho_t \sqrt{(u_s - u_t)^2 + c_s^2 + c_t^2},$$

где  $m$  – масса молекул,  $d$  – их диаметр.

Балансовые уравнения такой двухжидкостной модели, в каждой из компонент которой функция распределения считается максвелловской, в приближении невязкого и нетеплопроводного газа записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho_i \vec{V}_i) = (-1)^i [I\beta - I(1 - \beta)];$$

$$\rho_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial t} + \rho_i (\vec{V}_i \cdot \nabla) \vec{V}_i + \nabla p_i = (i-1)[I\beta - I(1 - \beta)](\vec{V}_s - \vec{V}_t);$$

$$\rho_i \frac{\partial E'_t}{\partial t} + \rho_i (\vec{V}_i \cdot \nabla) E'_t + p_t \text{div}(\vec{V}_t) = (i-1)[I\beta - I(1 - \beta)](E'_s - E'_t + \frac{V_s^2 - V_t^2}{2}).$$

Здесь индекс  $i$  принимает значения 1 и 2 для  $s$ -молекул и  $t$ -молекул соответственно. Давление компонент

$$p_i = (\kappa - 1)\rho_i E'_i \quad (i = s, t).$$

## Л и т е р а т у р а

1. Матвеев С.К., Джайчибеков Н.Ж. Расчет обтекания сферы разреженным газом при произвольном числе Кнудсена // Вестник Санкт-Петербургского университета. 1992. Сер.1. Вып.2 (№8). С. 77-81.
2. Matveev S.K., Jaichibekov N.Zh. Mathematical model of the gas flow in the shock front // Eurasian Mathematical Journal. V.4. No 3. P. 132-136, Astana, 2013.

## Rarefied Gas Flow Around Bodies

N.Zh. Jaichibekov, A.B. Usenova

The L.N.Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

We use the adjusted value of the intensity of mass transfer in collisions of particles of different varieties in the problem of flow around bodies of rarefied gas.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЗДУШНОЙ ВЗРЫВНОЙ ВОЛНЫ С ПРЕГРАДАМИ

В.Н. Емельянов<sup>1</sup>, А.Г. Карпенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Балтийский государственный технический университет, Санкт-Петербург, Россия*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: vlademelyanov@gmail.com, aspera.2003.ru@mail.ru*

На больших расстояниях от центра взрыва ударную волну можно рассматривать как прямую. Обычно при расчете взаимодействия с преградой задают перепад давления на ударной волне и скорость ее распространения.

Проблема расчета таких задач заключается в том, что необходимо рассчитывать все масштабы. Если преграда имеет характерный размер  $L$ , а радиус ударной волны  $R$ , то при рассмотрении взаимодействия на больших расстояниях от центра взрыва  $L \ll R$  необходимо рассчитывать течение во всей области. С другой стороны, для подробного описания взаимодействия возле преграды необходимо строить подробные сетки. Это существенно увеличивает время расчета или приходится использовать грубые сетки. Часто расчеты ведут не во всей области, а только возле преграды, а ударную волну моделируют плоской ударной волной с заданными параметрами. Плоскую ударную волну моделируют с помощью модели ударной трубы, где в начальный момент в некоторой области находится газ под давлением, после разрывается мембрана, которая отделяет эту область, и формируется ударная волна с заданными параметрами.

Существуют экспериментальные измерения перепада давления за фронтом воздушной ударной волны. Достаточный полный обзор приведен в [1]. В этой работе отмечается существенный разброс между данными разных авторов, а так же о существенной погрешности при измерениях перепада (до 10 процентов).

В работе [2] приводится решение системы одномерных уравнений движения газа, находятся распределение параметров после воздушной взрывной волны. В некоторой точке, в которой можно считать ударную волну прямой по отношению к преграде, производится измерение значения параметров во времени. Тем самым, получается распределение параметров во времени в этой точке. Затем эти распределения параметров во времени использованы как нестационарные граничные условия для расчета многомерных задач взаимодействия. Так как временные шаги в многомерном расчете могут не совпадать с шагами для одномерного расчета, на каждом шаге производится интерполяция данных.

В предлагаемой работе выполнено сравнение расчетов распространения ударной волны в двумерной постановке с заданием нестационарных граничных условий и одномерного расчета с этими же параметрами. Выполнен трехмерный расчет взаимодействия воздушной ударной волны с кубической преградой, расположенной под углом к фронту волны.

## Л и т е р а т у р а

1. Гельфант Б.Е., Сильников М.В. Фугасные эффекты взрывов. СПб.: ООО «Издательство «Полигон»».2002. 272 с.
2. Годунов С.К., Забродин А.В. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука.1976. 400 с.

## Modeling of the Air Blast Wave Interaction with Obstacles

V.N. Emelyanov<sup>1</sup>, A.G. Karpenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Baltic State Technical University, Saint Petersburg, Russia*

<sup>2</sup>*Saint Petersburg State University, Russia*

In this article the system of one-dimensional gas flow equations simulating the air blast wave was solved. Distribution of parameters in time was obtained. These distributions were used for definition of non-stationary boundary conditions in multidimensional calculations of the blast wave interaction with obstacles.

## МОДЕЛИ ТЕПЛООБМЕНА В МОРСКОМ ГАЗОПРОВОДЕ ПРИ ОЛЕДЕНЕНИИ

**Н.Н. Ермолаева, Г.И. Курбатова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: nermolaeva@spbu.ru, gi\_kurb@mail.ru*

Предложена математическая модель неустановившихся процессов теплообмена между потоком газа в морском газопроводе и окружающей средой, модель учитывает возможность оледенения внешней поверхности газопровода. Рассмотрены упрощенные варианты модели, позволяющие получить качественные и количественные оценки допустимости различных упрощений.

В работе представлена квазиодномерная нестационарная модель процессов в газе, транспортируемом по морскому газопроводу, имеющему многослойную боковую поверхность и эксплуатируемом в условиях, допускающих возможность оледенения. Эта модель является обобщением стационарной одномерной модели соответствующих процессов, исследованной в книге [1].

Проведенные исследования позволили получить ряд важных оценок, таких как, например, величины отклонений потоков тепла (на внешней и внутренней поверхностях газопровода) в стационарной и нестационарной моделях, максимальной величины толщины приращения слоя льда на заданном интервале времени.

### **Л и т е р а т у р а**

1. Курбатова Г.И., Попова Е.А., Филиппов Б.В. и др. Модели морских газопроводов. СПб: С.-Петерб. гос. ун-т. 2005. 156 с.
2. Ермолаева Н.Н., Курбатова Г.И. Анализ подходов к моделированию термодинамических процессов в газах при высоких давлениях // Вестн С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2013. Вып. 1. С. 35–45.
3. Мейрманов А. М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука. 1986. 240 с.

## **The Models of Heat Transfer in a Sea Gas-Pipeline at the Glaciation**

**N.N. Ermolaeva, G.I. Kurbatova**

*Saint Petersburg State University, Russia*

The article presents the mathematical model of non-stationary heat exchange processes between the gas flow in the sea gas-pipeline and the environment. The model takes into a possibility for consideration of pipeline glaciation. The simplified variants of the model are discussed. They provide insight into the qualitative and the quantitative assessments of the admissibility of different simplifications.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЕЕРНОЙ СТРУИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ РЕЗОНАТОРОМ

П.А. Ешаков, О.Н. Засухин, М.С. Яковчук

*Балтийский государственный технический университет, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: 1 pavel-eshakov@rambler.ru*

Создание мощных и экономичных газоструйных генераторов звука является в настоящее время актуальной задачей, поскольку эти генераторы находят широкое применение во многих технологических процессах металлургической, химической, металлообрабатывающей и других отраслях промышленности. В работе проводится численный расчет нестационарной газодинамики веерного течения от цилиндрического газоструйного генератора, принцип работы которого основан на работе свистка «Гавро». Исследуемая установка состоит из цилиндрического ресивера (3)(рис.1) со сжатым воздухом, в торце ресивера по контуру установлено тонкое кольцевое сопло (2), из которого происходит истечение веерной струи (5). Она натекает на кольцевой рассекающий клин (1), который разделяет струю на два потока: один поток затекает в резонатор (4), заполняя его полость; второй в окружающую среду. Возмущения от притока массы распространяются в резонаторе в виде волн сжатия. Отражаясь от стенок резонатора, волновые возмущения достигают его горла, вызывая отклонение потока от горла резонатора, тем самым, обеспечивая истечение некоторой массы воздуха из резонатора. Выброс массы из резонатора вызывает возмущения в виде волн разрежения, которые, распространяясь, и различными способами отражаясь от стенок резонатора, в итоге воздействуют на поток в горле резонатора, отклоняя его вновь в полость резонатора. Цикл повторяется, таким образом возникает автоколебательный процесс.

При вычислительном моделировании рассмотрена задача истечения веерной струи из кольцевого сопла и взаимодействие ее с резонатором. Исследование проводится в рамках вычислительного и физического эксперимента. В физическом эксперименте измерялись скоростные и амплитудно-частотные характеристики струи. Вычислительный эксперимент проводился в плоской и объемной постановках. Все расчеты получены в специализированном пакете для расчетов газодинамики, в частности, с использованием вихререзающих подходов LES и DES. Проведено сравнение результатов из полученных графиков и картин визуализации плоской осесимметричной задачи. На основе результатов расчетов проводится подробная (детальная) визуализация нестационарного течения.

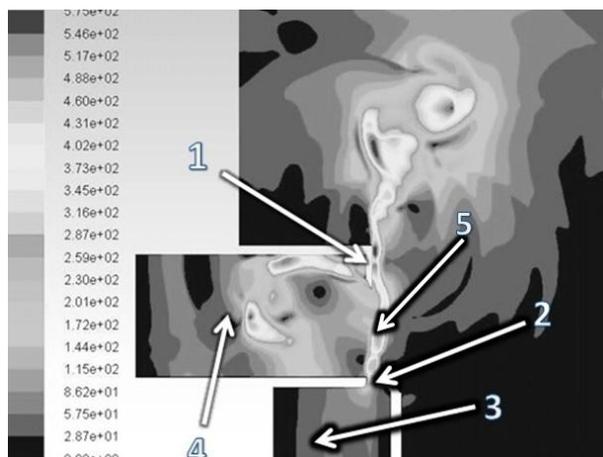


Рис.1. Визуализация поля скорости струи. 1-рассекающий клин, 2-сопловой блок, 3-ресивер, 4-резонатор, 5-веерная струя.

Построены графики зависимости давления от времени в определенных точках резонатора – в его донных областях и под клином. Полученные результаты представляют интерес для изучения проблем аэротермоакустической обработки металлов.

## Numerical Modeling of Self-Oscillatory Processes of a Radial Jet with the Cylindrical Resonator

P.A. Eshakov, O.N. Zasukhin, M.S. Yakovchuk

*Baltic State Technical University, Saint-Petersburg, Russia*

In this work, numerical simulation of unsteady gas dynamics of a radial jet from the cylindrical gas-jet generator based on the Gavreau whistle principle is carried out.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СМАЗКИ ПОДШИПНИКА ПОРШНЕВОГО ПАЛЬЦА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЕГО ПАРАМЕТРОВ

**О.Г. Завьялов**

*Челябинская государственная агроинженерная академия, Челябинский государственный университет, Россия  
E-mail: ZAVOG@yandex.ru*

Целью исследования является построение простой модели течения вязкой несжимаемой смазки для подшипника поршневого пальца двигателя внутреннего сгорания. Результатом работы служит программа расчетов по оптимизации параметров подшипника скольжения поршневого пальца двигателя внутреннего сгорания.

Приближенная математическая модель динамически нагруженных подшипников поршневого пальца ДВС строилась с учетом методики расчета статически нагруженных подшипников скольжения. Приближенная математическая модель описывает взаимосвязь выходных параметров подшипников поршневого пальца с эксплуатационными и конструктивными факторами [1]. В основу модели взята методика М.В. Коровчинского [2] по гидродинамическому расчёту статически нагруженных подшипников скольжения. Решение задачи оптимизации производилось на основе построенной модели с помощью разработанной автором программы в среде MATLAB. Оптимизация осуществлялась методом градиентного (наискорейшего) спуска [3]. На каждой итерации шаг находился из условия минимума функции независимой переменной. Перед началом работы с программой необходимо ввести заданные (не меняющиеся) параметры: давление подачи смазки, удельная теплоемкость масла, удельная масса масла, диаметр поршня. Затем указываются ограничения для следующих параметров: длины поршневой головки, диаметрального зазора подшипника, динамической вязкости масла, максимального гидродинамического давления, оценки динамической нагруженности подшипника в условиях полужидкостного и граничного трения, приращения температуры смазочного слоя, эксцентриситета, отношения длины поршневой головки к диаметру поршня [4]. Искомыми параметрами являются: длина поршневой головки, диаметральный зазор подшипника, динамическая вязкость масла. Ввод исходных данных и вывод результатов расчетов осуществляется с помощью удобного интерфейса. Программа расчетов является законченным продуктом и может быть использована при конструировании подшипников скольжения двигателей.

## Л и т е р а т у р а

1. Суркин В.И., Курчатов Б.В. Смазка тракторных двигателей (монография). Челябинск: Изд-во ЧГАА. 2009. 226 с.
2. Коровчинский М.В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. М.: Машгиз. 1959. 106 с.
3. Гриценко А.В., Плаксин А.М. Оптимизация процесса диагностирования автотракторной техники минимизацией затрат // Вестник ЧГАА. 2013. Том 63. С. 42 - 46.
4. Ниязов Х.М. Моделирование и оптимизация гидродинамических параметров подшипников поршневого пальца ДВС: Дис. ... канд. техн. наук: 05.04.02. Челябинск. 2013. 160 с.

## Lubrication Task Solution of the Internal Combustion Engine Piston Pin and Its Parameters' Optimization

**O.G. Zavyalov**

*Chelyabinsk Agricultural and Engineering Academy, Chelyabinsk State University, Russia*

The task of the investigation is to derive the model, the algorithm, the program and obtain the results of calculations for optimization of parameters of the bearing sliding of piston pin in the internal-combustion engine. An approximate mathematical model for dynamically loaded bearings of a piston pin in the internal-combustion engine was built up with the account for calculation methods of the statically loaded sliding bearings. The approximate mathematical model describes the dependence of output parameters of bearings of piston pin on the operational and structural factors. The model is based on the technique proposed by M.V. Korovchinskiy for hydrodynamic calculation of statically loaded sliding bearings. The solution of optimization task was performed with the help of the author's program in MATLAB environment. The optimization was produced by using the steepest descent method. At any iteration, a step was calculated under the condition of minimum of the function of the independent variable. The program for the calculation is an accomplished product and it can be used at the designing of the bearings of sliding engines.

## ЯВЛЕНИЕ ВЯЗКОГО ОТРЫВА В ОДИНОЧНОЙ ВОЛНЕ, НАТЕКАЮЩЕЙ НА ПРЕПЯТСТВИЕ

Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов, А.И. Храбрый

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия  
E-mail: [aero@phmf.spbstu.ru](mailto:aero@phmf.spbstu.ru)

Численно исследуются эффекты, обусловленные молекулярной и турбулентной вязкостью при нестационарном натекании потока воды в виде одиночной волны на препятствия различных форм. Полагается, что распространяющаяся вдоль гладкой стенки волна создается при модельном мгновенном разрушении дамбы (dam-break). Расчеты проведены с использованием авторского конечно-объемного программного кода [1], реализующего метод Volume-of-Fluid в сочетании с SIMPLEC алгоритмом для решения уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу и замкнутых по  $k-\omega$  SST модели турбулентности.

Особенностью выполненного исследования является использование расчетных сеток, призванных обеспечить как надежный расчет формы свободной поверхности, быстро меняющейся во времени, так и аккуратное разрешение пристенного поля скорости, включая вязкий подслой. Последнее позволяет воспроизводить явления вязкого придонного отрыва, обусловленные действием обратного продольного градиента давления при подъеме воды, натекающей или перетекающей через препятствие.

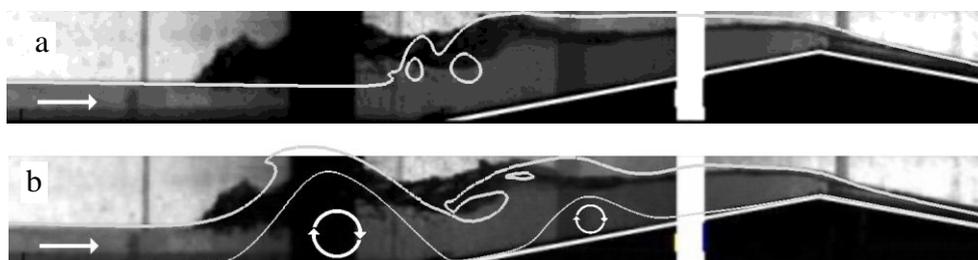


Рис. 1. Результаты расчетов для тестовой задачи [2], наложенные на экспериментальные фотографии: (а) мгновенная форма свободной поверхности (СП), рассчитанная с условиями скольжения на стенке, (б) форма СП и отрывные зоны по результатам расчетов с условиями прилипания на измельченной у стенки сетки.

В качестве одной из тестовых задач рассмотрено двумерное течение в экспериментально исследованной конфигурации [2], где вода с начальной (до «разрушения» дамбы) глубиной 111 мм после устранения удерживающей перегородки распространяется по сухой поверхности и натекает на треугольное препятствие (рис.2) высотой 65 мм. Получено кардинальное различие между результатами расчетов с наложением условий скольжения на стенке и с аккуратным разрешением пристенного слоя, контролируемого действием вязкости. Возникновение нестационарных зон вязкого придонного отрыва, с рециркулирующей в них жидкостью, существеннейшим образом влияют на форму свободной поверхности. Результаты расчетов для случая пропорционально увеличенных высот (на порядок и более) также указывают на весьма значительное, пусть и ослабленное, влияние эффектов вязкого придонного отрыва.

### Л и т е р а т у р а

1. Храбрый А.И., Зайцев Д.К., Смирнов Е.М. Численное моделирование течений со свободной поверхностью на основе метода VOF // Труды Крыловского государственного научного центра. 2013. Вып. 78 (362). С. 53-64.
2. Soares-Frazao S. Experiments of dam-break wave over a triangular bottom sill // Journal of Hydraulic Research. 2007. V. 45. Extra Issue. P. 19-26.

## Viscous Separation Phenomenon in a Single Wave Flowing over an Obstacle

D.K. Zaytsev, E.M. Smirnov, A.I. Khrabry

Saint-Petersburg State Polytechnic University, Russia

Using an in-house finite-volume Navier-Stokes solver, development of a single water wave forming after a model dam-break is simulated including interaction with obstacles. To take into account effects of near-wall friction and turbulent viscosity, the  $k-\omega$  SST turbulence model is used, and the computations are performed with grids clustered to the wall. As a result, occurrence of separation zones is predicted properly, and a good agreement with experimental observations for time-developing free surface is achieved.

# ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОДОКАПЕЛЬНЫХ СТРУЙ С ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫМИ ГАЗОВЫМИ СТРУЯМИ

**В.П.Зюзликов, Б.Е. Синильщиков, В.Б.Синильщиков**

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.Устинова,  
Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: vbsin@rambler.ru*

Впрыск водяных струй в высокотемпературный и высокоскоростной газовый поток используется в пусковых установках для запуска ракет космического назначения для уменьшения теплового и силового воздействия и для снижения уровней шума. При этом используются струйные и щелевые распылители относительно небольшого размера с давлением перед распылителем около 1 МПа. Как показали результаты видеосъемок, водяные струи практически сразу теряют сплошность, и к началу взаимодействия с газовым потоком представляют водокапельную струю с плотностью капельной фазы 300-800 кг/м<sup>3</sup> при диаметре капель 0,6-1 мм. Распылители могут устанавливаться как вне газовой струи, так и внутри (обычно в районе оси). Первоначально капли попадают, соответственно, в слой смешения струи, либо в вихревой след, образующийся ниже распылителя. Часть капель далее оказывается в сносящем высокотемпературном потоке. При этом они нагреваются и испаряются с постепенным уменьшением диаметра.

Численные расчеты, проведенные для условий, характерных для пусковых установок ракет космического назначения среднего и тяжелого класса ( $M_a=3,5-4$ ,  $D_a=1,2-1,5$  м), показывают, что капли, попадая в слой смешения, не распространяются вглубь газовой струи, достигая области скоростей, в которых числа Маха  $M \leq 1$ . Далее они быстро прогреваются и полностью испаряются на расстоянии 10-15 м ниже распылителя. Эти данные подтверждались результатами косвенных измерений. В условиях модельных экспериментов (1:5-1:10) путь испарения капель формально должен быть таким же, а глубина их проникновения - иметь порядок радиуса струи. Однако в этом случае на их распространение существенное влияние оказывает процесс дробления. Результаты измерений в модельных экспериментах свидетельствуют, что область заметного уменьшения температуры торможения газа (вследствие испарения капель) в модельной струе имеет приблизительно тот же относительный размер, что и в натуральных условиях. Были проведены расчеты, в которых при достижении критического числа Вебера ( $We_* = 12$ ) диаметр капель мгновенно уменьшался. Однако при этом оказалось, что область уменьшения температуры торможения газа в расчете меньше, чем полученная в модельном эксперименте. Было принято во внимание, что важной характеристикой процесса является характерное время процесса дробления  $t_* = \frac{d_s}{|\Delta u_s|} \sqrt{\frac{\rho_b}{\rho}}$  ( $d_s$  – ди-

аметр капель,  $\Delta u_s$  – их скорость относительно газовой фазы,  $\rho_b$  и  $\rho$  – истинные плотности воды и газовой фазы). В численных расчетах дробление рассматривается как непрерывный процесс постепенного уменьшения размера капель, который начинается при превышении числом Вебера критического значения. Расчеты, проведенные с использованием данной модели, позволили объяснить результаты исследований, проводимых на разных масштабах. В модельных условиях капли быстрее оказываются в области высокоскоростного течения и из-за большой относительной скорости быстро дробятся. Более мелкие капли быстрее тормозятся и быстрее испаряются. В натуральных условиях относительная скорость капель после их попадания в струю нарастает сравнительно медленно и капли разгоняются и испаряются, практически не дробясь. В результате области эффективной тепловой защиты при впрыске воды на установках разного масштаба имеют соизмеримые относительные размеры: эффект дробления капель способствует уменьшению масштабного фактора, несмотря на то, что данные процессы не моделируются.

Данная модель использовалась для исследования сравнительной эффективности различных вариантов водоподдачи при старте ракет космического назначения (как в полузаглубленных сооружениях, так и над поверхностью нулевой отметки). Был предложен новый вариант водоподдачи, основанный на совместном использовании внутрискрующей и наружной (в направлении оси струи) распыла. В данном варианте исключается образование на газоотражателе зон повышенного теплового воздействия.

## Interaction Between Droplet Water Jets And High Temperature Gas Jets

**V.P. Zyuzlikov, B.E. Sinilshchikov, V.B. Sinilshchikov**

*Baltic State technical University "VOENMEH" named after D.F.Ustinov, Saint-Petersburg, Russia*

The interaction between droplet water jets and high-temperature and high-velocity gas jets is considered. The model, regarding the droplet breakup in a gas jet as a continuous process and making it possible to match the numerical results with the experimental data of different scales, is proposed. The comparison of efficiency of different schemes of outflows when launching the space rockets is presented.

# NUMERICAL MODELING OF BUOYANCY-INDUCED FLOW THROUGH A SUBSEA TUBE BANK

N.G. Ivanov, V.V. Ris, N.A. Tschur

St.Petersburg State Polytechnic University, Russia  
E-mail: [aero@phmf.spbstu.ru](mailto:aero@phmf.spbstu.ru)

Heat exchangers involving plain tubes in crossflow are widely used in various industrial applications. Detailed studies have established relations between the heat transfer coefficient and the arrangement of tubes within the tube bank [1]. Most of the data available in the literature concern with the tube banks under forced convection conditions at relatively high Reynolds numbers, exceeding  $10^3$ . However, the buoyancy effects become significant or even dominant under low-flow-rate conditions. For some applications, in particular, for subsea gas compression with a requirement to reduce the temperature of natural gas produced [2], it could be reasonable to design a passive heat exchanger using the buoyancy effects. If heat exchanger design uses natural convection as the main mechanism of cooling, special attention should be paid on external heat transfer coefficient estimation. Reliable data for low-Reynolds-number regimes typical for buoyancy-dominated coolers could be obtained using advanced Computational Fluid Dynamics techniques.

The contribution deals with a buoyancy-induced flow through a sparse aligned tube bank of 12 rows (Fig. 1a, 1b). Three-dimensional unsteady convection through the tube bank is computed assuming the infinite number of tubes in the transverse direction. The tube walls are assumed to be at a uniform temperature. The buoyancy effects are described with the Boussinesq approximation. The computations have been performed for the Prandtl number of 7.0, the Grashof number of  $5 \times 10^5$ , and the Reynolds numbers in the range of  $10^2$ - $10^3$ . A finite-volume Navier-Stokes code of second order accuracy both in space and time was used. Computational grids consisting of 5-10 million cells were employed.

The goal of the study is to analyze formation of vertical flow due to draft effect in different conditions. Development of unsteady flow and temperature fields along the flow path as well as variations in the heat transfer coefficient from row to row have been predicted. It was found that draft flow produces strong ejection through side boundaries of a tube bank (Fig. 1c). Side flow results in non-uniformity of the draft velocity and, therefore, in significant heat transfer coefficient variation with vertical coordinate: heat transfer at the lower rows of the tube is very poor. The influence of the length of the tube-bank pipe straight sections on the negative water ejection has been investigated. It was shown that pronounced extension of the straight section does not reduce the ejection significantly: the water flow through side boundaries is intensive in the range of the straight section length considered. The impact of the horizontal side flow simulating sea-current effects has been studied. It was found that significant influence of sea-current flow on the integral heat transfer coefficient values is negative also. The horizontal flow destroys the draft flow, and heat output from the cooler is reduced. A possible way to increase heat output is to install bounding walls restricting side flow due either ejection or sea current. It produces a chimney effect resulting in significant draft flow acceleration. If side walls are installed, 3D chaotic flow structures start to form from the lowest straight section of the pipe (Fig. 1d), that leads to higher values of the integral heat transfer coefficient, especially at the lower rows of the tube bank. Integrally, bounding walls installation could produce a notable increase in the heat output from a passive buoyancy-dominated subsea cooler.

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 12-08-01208).

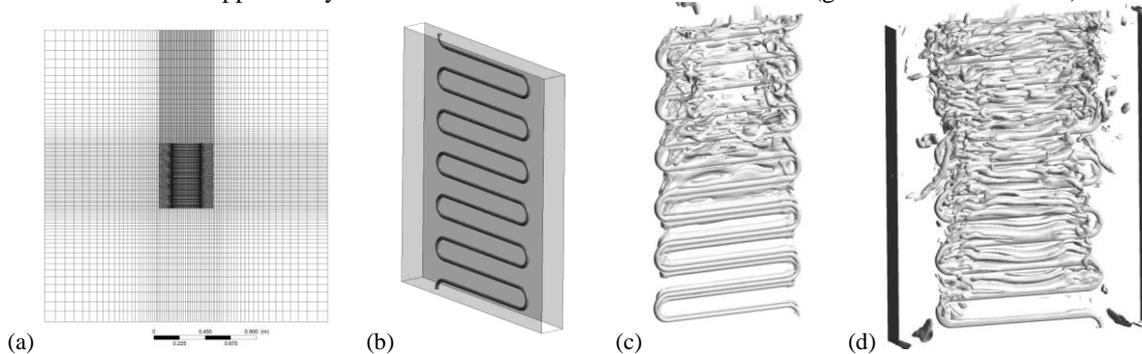


Fig. 1. Computational domain (a) together with the mesh at vertical mid-section and (b) near the tube; instantaneous Q-criterion isosurfaces for cases (c) without and (d) with side walls.

## References

1. Hewitt, G.F. Ed. Heat Exchanger Design Handbook Online, Begell House Publishers. Section 2.5 "Single-phase convective heat transfer". 2002. Retrieved October 15, 2014 from <http://hedh.begellhouse.com/>
2. Fantoft, R. Subsea gas compression - challenges and solutions // OTC paper № 17399, 2005. P.1-6.

# ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ НА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ СМЕСИ ГАЗОВ ЗА СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

**В.А. Истомин, Е.В. Кустова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*  
*E-mail: vladimir\_istomin@hotmail.com, kustova@math.spbu.ru*

В течение длительного времени при расчете тепловых потоков за гиперзвуковыми ударными волнами влияние электронного возбуждения не учитывалось. Из-за больших вычислительных сложностей, связанных с учетом электронных степеней свободы при расчете коэффициентов переноса, атомы обычно рассматривались как бесструктурные частицы. Данное предположение приводило к тому, что в выражениях для теплового потока и тензора напряжений не появлялись члены, связанные с внутренними степенями свободы, а именно коэффициенты теплопроводности внутренних степеней свободы и объемной вязкости. Отсутствие указанных коэффициентов переноса может приводить к значительным вычислительным погрешностям при расчете потоковых членов [1-3].

В настоящей работе построена теоретическая модель для изучения процессов переноса в пятикомпонентной смеси плазмы азота ( $N_2/N_2^+/N/N^+/e^-$ ). Данная работа является продолжением работы [4]. В рассмотрении включены молекулярные компоненты плазмы азота, а также электронное возбуждение не только электрически нейтральных, но и ионизованных частиц. Для нейтральных атомарного и молекулярного азота учитываются 170 и 5 электронных уровней, тогда как для ионизованных компонент – 625 и 7 соответственно. Данная модель применяется для вычисления коэффициентов переноса на каждом шаге численного моделирования в условиях, отвечающих гиперзвуковому вхождению в атмосферу Земли летательных аппаратов Hermes и Fire II [5]. Для данных условий характерны высокая скорость (7 и 11 км/с) и температура (24000 и 60000 К), что делает необходимым учет эффектов, связанных с возбуждением электронных степеней свободы. Предполагается, что за ударной волной течение установившееся и одномерное. Изучается влияние неравновесных химических реакций и электронного возбуждения на газокинетические параметры потока, тепловой и диффузионный потоки.

Проведенные в данной работе исследования могут применяться при изучении задач вхождения в атмосферу Земли, а также кинетики плазмы. В последующих работах планируется включить эффект излучения. Результаты данной работы могут быть полезны для определения параметров потока за сильными ударными волнами.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, тема НИР 6.37.163.2014, и РФФИ, гранты 12-09-00826 и 14-01-31037.

## Л и т е р а т у р а

1. *D. Bruno, A. Laricchiuta, M. Capitelli, C. Catalfamo // Phys. Plasmas. 14, 022303 (2007).*
2. *E.V. Kustova, L.A. Puzyreva // Physical Review E 80, 046407. 2009.*
3. *V.A Istomin and E.V. Kustova. Influence of Electronic Excitation on Transport Properties of Partially Ionized Atomic Gases // in: 28<sup>th</sup> International Symposium on Shock Waves, Springer-Verlag. 2012 V. 1. P. 119 – 124 .*
4. *V.A Istomin and E.V. Kustova. Electronic Excitation Modeling in Chemically Reacting Hypersonic Flows // in: 29<sup>th</sup> International Symposium on Shock Waves (2013). To appear. Springer-Verlag: Berlin, Heidelber. (Paper ISSW29-000064).*
5. *D.L. Cauchon. Radiative heating results from FIRE II flight experiment at a re-entry velocity of 11.4 km/s // NASA Technical Memorandum X-1402 (1967).*

## **Influence of Electronic Excitation on High-Temperature Gas Mixture Flows behind Strong Shock Wave**

**V.A. Istomin, E.V. Kustova**

*Saint Petersburg State University, Russia*

A theoretical model for a non-equilibrium flow of high-temperature gas mixtures containing electrons and electronically excited neutral and ionized atoms and molecules is developed using the modified Chapman-Enskog method. On the basis of the proposed model, the heat flux and diffusion for the one-dimensional steady-state flow behind the plane shock wave are calculated. We use data from the flight experiment of the Hermes and Fire II capsule at high re-entry speed ( $> 7$  and  $11$  km/s) and high temperature ( $> 24000$  and  $60\,000$  K) behind the shock wave. The influence of non-equilibrium reactions and electronic excitation on the flow parameters, convective heat transfer and diffusion is evaluated. The presented model can be applied in atmospheric entry problems and plasma studies.

# РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В УДАРНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ В ПОТОКЕ СМЕСИ КОЛЕБАТЕЛЬНО ВОЗБУЖДЕННЫХ ГАЗОВ

А.И. Решетова, С.В. Кириловский, Т.В. Поплавская

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, Новосибирск, Россия  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия  
E-mail: kirilov@itam.nsc.ru, popla@itam.nsc.ru, tsivan@ngs.ru

Генерируемые в вязком ударном слое возмущения, развиваясь вниз по потоку и усиливаясь, могут вызвать ламинарно-турбулентный переход. Процессы возбуждения и неравновесности колебательных степеней свободы молекул  $\text{CO}_2$  оказывают существенное воздействие как на среднее течение, так и на развитие возмущений в гиперзвуковых пограничных и ударных слоях. Однако в смеси с другими газами интенсивность релаксационных процессов  $\text{CO}_2$  и их влияние на характеристики течения может отличаться от процессов в чистом  $\text{CO}_2$ .

В данной работе проведено исследование развития возмущений в вязком ударном слое (ВУС) на пластине, обтекаемой гиперзвуковым потоком смесей воздуха и  $\text{CO}_2$  при температурах торможения  $T_0=2000-3000\text{K}$ , единичных числах Рейнольдса  $\text{Re}_l=8\div 11\times 10^5\text{m}^{-1}$  (см. таблица).

	Mix1 (44% $\text{CO}_2$ 56% Air)	Mix2 (77% $\text{CO}_2$ 23% Air)	$\text{CO}_2$	Mix (44% $\text{CO}_2$ 56% $\text{N}_2$ )
$P_0$ , бар	180	165	170	180
$T_0$ , K	2430	2138	2090	2430
$M_\infty$	8.365	7.17	6.29	8.44
$\text{Re}_l$ , $\text{m}^{-1}$	$10.23\cdot 10^5$	$10.78\cdot 10^5$	$9.16\cdot 10^5$	$12.9\cdot 10^5$

Экспериментальное исследование проводилось в импульсной высокосопловой аэродинамической трубе ИТ-302 ИТПМ СО РАН Цырюльниковым И.С. при параметрах  $P_0, T_0$  в форкамере трубы. Численное моделирование производилось с помощью пакета ANSYS Fluent на базе решения нестационарных двумерных уравнений Навье – Стокса с добавлением UDF модулей, создаваемых пользователем и позволяющих учитывать колебательную неравновесность молекул углекислого газа. Учет колебательной релаксации производился в рамках модели двухтемпературной аэрогазодинамики с использованием уравнения Ландау–Теллера. Т.к. воздух – это многокомпонентная смесь газов с 76% содержанием азота ( $\text{N}_2$ ), в численном моделировании рассматривались смеси углекислого газа с азотом и учитывалась не только колебательная релаксация молекул  $\text{CO}_2$  при взаимодействии их друг с другом, но и колебательная релаксация молекул  $\text{CO}_2$  при взаимодействии с молекулами  $\text{N}_2$ . Акустические возмущения вводились в расчетную область также с помощью созданных UDF по формулам плоской монохроматической звуковой волны. На рис.1 представлены степени роста возмущений (отношение амплитуд пульсаций давления в двух положениях:  $x_1=80\text{мм}$  и  $x_2=180\text{мм}$ ) на поверхности пластины, полученные в эксперименте и в численном моделировании при взаимодействии ударного слоя с акустическими волнами быстрой моды.

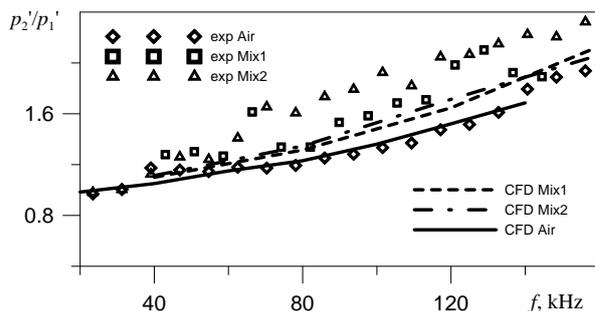


Рис.1. Степени роста пульсаций давления на поверхности пластины при воздействии быстрой акустической волны.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ (Договор № 14.Z50.31.0019) для поддержки исследований под руководством ведущих ученых.

## Evolution of Disturbances in a Shock Layer on a Flat Plate into a Vibrational Excited Flow Of Gase Mixtures

A.I. Reshetova, S.V. Kirilovskiy, T.V. Poplavskaya

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia  
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

A numerical and experimental investigation of the evolution of disturbances in a hypersonic viscous shock layer on a flat plate, which is excited by acoustic waves, was performed. The influence of vibrational degrees of freedom of  $\text{CO}_2$  molecules on the shock wave position and evolution of disturbances in the shock layer on a flat plate in the flow of mixture of air and carbon dioxide was studied.

# ВЛИЯНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ CO<sub>2</sub> НА РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В УДАРНОМ СЛОЕ НА ПЛАСТИНЕ

С.В. Кириловский, Т.В. Поплавская, И.С. Цырюльников

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, Новосибирск, Россия  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия  
E-mail: kirilov@itam.nsc.ru, popla@itam.nsc.ru, tsivan@ngs.ru*

Возбуждение и неравновесность колебательных степеней свободы молекул газов оказывают существенное воздействие на среднее течение и развитие возмущений в гиперзвуковых пограничных и ударных слоях. Углекислый газ – это газ с низкой температурой возбуждения колебательных степеней свободы (150К). В ИТПМ СО РАН в аэродинамической трубе ИТ-302 были проведены эксперименты по обтеканию пластины гиперзвуковым потоком CO<sub>2</sub> и смесей CO<sub>2</sub> с воздухом.

В данной работе проведено исследование развития возмущений в вязком ударном слое (ВУС) на пластине, обтекаемой гиперзвуковым потоком ( $M_\infty=6\div 10$ ) воздуха и CO<sub>2</sub> при температурах торможения 2000-3000К, единичных числах Рейнольдса  $8\div 11\times 10^5 m^{-1}$ . Вследствие возбуждения колебательных степеней свободы молекул теплоёмкость газа не постоянна и зависит от температуры (термически совершенный газ). Учет колебательной релаксации производился в рамках модели двухтемпературной аэрогазодинамики с использованием уравнения Ландау–Теллера, описывающих VT-энергообмен между колебательными и поступательно-вращательными степенями свободы молекул газа.

Численное моделирование производилось с помощью пакета ANSYS Fluent на базе решения нестационарных двумерных уравнений Навье–Стокса с добавлением UDF модулей, создаваемых пользователем и позволяющих учитывать колебательную неравновесность молекул углекислого газа.

На рис. 1 видно, что положение ударной волны в случае неравновесного течения CO<sub>2</sub> лучше совпадает с экспериментальными данными. На рис.2 представлены степени роста возмущений (отношение амплитуд пульсаций давления в двух положениях:  $x_1=80mm$  и  $x_2=180mm$ ) на поверхности пластины для CO<sub>2</sub>, полученные в эксперименте и в численном моделировании при взаимодействии ударного слоя с акустическими волнами быстрой моды.

Полученные в работе данные показали, что в рассматриваемом диапазоне параметров (условия экспериментов на ИТ-302) течение воздуха и CO<sub>2</sub> можно успешно моделировать в рамках модели термически совершенного газа и макроскопического уровня описания колебательной релаксации.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ (Договор № 14.Z50.31.0019) для поддержки исследований под руководством ведущих ученых.

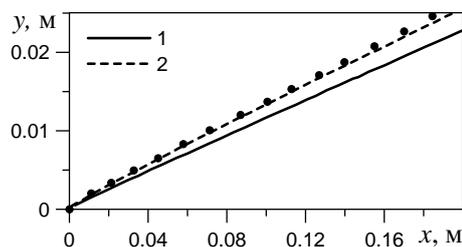


Рис.1. Экспериментальные (точки) и расчетные (линии) данные по положению ударной волны для течения углекислого газа:

1 – равновесное течение, 2 – неравновесное течение,  $\alpha=10.2^\circ$ .

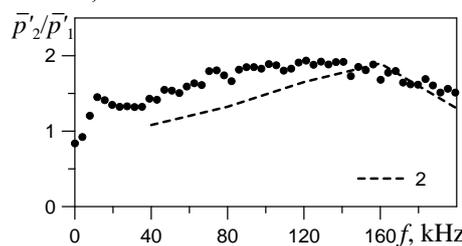


Рис.2. Степени роста пульсаций давления на поверхности пластины при воздействии быстрой акустической волны:  $M_\infty=6.29$ ,  $Re_1=9.16\times 10^5 m^{-1}$ ,  $T_0=2090K$ ,  $T_w=300K$ ,  $A=0.03$ ,  $\alpha=10.2^\circ$  (неравновесный случай).

## Influence of Vibrational Relaxation of Co<sub>2</sub> on the Evolution Of Disturbances in a Hypersonic Shock Layer on a Flat Plate

S.V. Kirilovskiy, T.V. Poplavskaya, I.S. Tsyryulnikov

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia  
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

A numerical simulation using Ansys Fluent software package and experimental investigation in the wind tunnel ИТ-302М ИТАМ SB RAS of the evolution of disturbances in a hypersonic viscous shock layer on a flat plate, which is excited by acoustic waves, was performed. The influence of vibrational degrees of freedom of gas molecules on the shock wave position and evolution of disturbances in the shock layer on a flat plate in the flow of air and carbon dioxide was studied.

# О МОДОВОМ СОСТАВЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ИМПУЛЬСНОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

С.В. Кириловский, Т.В. Поплавская, И.С. Цырюльников

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича, Новосибирск, Россия  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия  
E-mail: kirilov@itam.nsc.ru, popla@itam.nsc.ru, tsivan@ngs.ru

Знание структуры течения необходимо при исследовании устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях. Основным источником высокочастотных акустических возмущений в ядре потока сверхзвуковых аэродинамических труб является турбулентный пограничный слой, образующийся на стенках сопла. Турбулентные вихри пограничного слоя излучают медленные акустические волны, распространяющиеся под ненулевыми углами к оси соплового тракта. Другим источником возмущений в ядре потока импульсных аэродинамических труб могут быть быстрые акустические волны, распространяющиеся из форкамеры сопла вследствие кратковременного электрического разряда. В этом случае поле возмущений в ядре потока представляет собой суперпозицию быстрых и медленных волн, существенно различающихся по амплитуде и углам распространения.

Эксперименты по определению модового состава возмущений проводились в импульсной аэродинамической трубе ИТ-302 ИТПМ СО РАН с помощью высокоскоростной шпирен визуализации. Численное моделирование течения в сопловом тракте трубы проводилось с помощью пакета ANSYS Fluent на базе решения нестационарных двумерных уравнений Навье–Стокса с моделью турбулентности  $k-\omega$  SST.

Рассматривалось течение воздуха при следующих полном давлении  $P_0=200$  бар и температуре  $T_0=3000$ К в форкамере сопла. На рис.1 представлены спектральные разложения нормированных амплитуд пульсаций давления на двух участках вдоль оси соплового тракта на продольные компоненты волнового вектора. Из графиков видно, что на выходе из соплового тракта (линия 2), помимо пика, соответствующего быстрой акустической волне, распространяющейся вдоль оси соплового тракта, присутствует пик медленной акустической волны с меньшей амплитудой и углом распространения  $\theta = 60^\circ$  при  $f = 40$  кГц и  $\theta = 30^\circ$  при  $f = 80$  кГц. В то же время на участке 1 (линия 1) наблюдается один пик, соответствующий возмущению быстрой моды.

Результаты экспериментальных исследований также показали наличие быстрых акустических волн в ядре потока.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ (Договор № 14.Z50.31.0019) для поддержки исследований под руководством ведущих ученых.

## Spectral Distribution of Disturbances in Pulse Aerodynamic Tunnel

S.V. Kirilovskiy, T.V. Poplavskaya, I.S. Tsyryulnikov

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia  
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

A numerical and experimental study of the spectral distribution of disturbances in pulse aerodynamic tunnel was performed. It was found that disturbances in pulse aerodynamic tunnel are the superposition of slow and fast acoustic waves due to turbulent boundary layer on tunnel wall and electric discharge in pre-chamber.

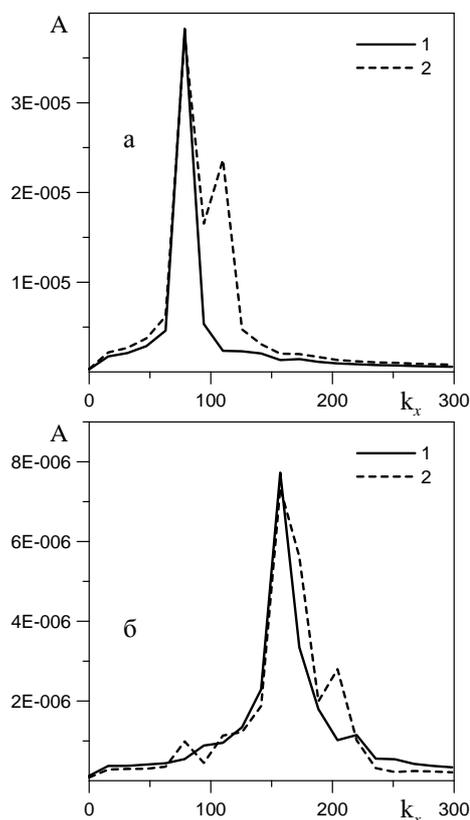


Рис.1. Спектральное разложение нормированных амплитуд пульсаций давления на двух участках вдоль оси соплового тракта на продольные компоненты волнового вектора: 1 –  $x = (1, 1.4)$  м, 2 –  $x = (1.4, 1.8)$  м, а –  $f = 40$  кГц, б –  $f = 80$  кГц.

# ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРОВ В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ

Н.А. Киселев, А.Н. Рябинин

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,  
E-mail: kislkn@mail.ru, a.ryabinin@spbu.ru

Вращательные колебания являются одной из основных форм движения грузов, подвешенных, например, под вертолетом, в воздушном потоке [1]. В настоящей работе исследовались вращательные колебания круговых цилиндров, длина которых в два раза превышала диаметр  $D = 0.14$  м. В экспериментах в дозвуковой аэродинамической трубе изменялось положение оси вращения цилиндра, средний угол атаки и скорость набегающего потока. Ось вращения перпендикулярна вектору скорости набегающего потока и проходит через плоскость, содержащую ось симметрии цилиндра. Цилиндр в потоке мог совершать вращательные колебания, частота которых близка к собственной частоте колебаний пружинной подвески. К одной из пружин подвески присоединен тензометрический преобразователь С-50. Сигнал с тензопреобразователя поступал на вход РС – осциллографа Velleman PCS500A, работающего в режиме самописца. Схема эксперимента подробно описана в [2]. Вычислялась амплитуда  $A$  вращательных колебаний цилиндра. Определены параметры математической модели, предложенной в работе [3]. Модель предсказывает, что величина  $A^2/4+\beta^2$  является линейной функцией  $1/v$ , где  $\beta$  – угол атаки цилиндра в равновесном положении,  $v$  – скорость потока. Оказалось, что изменение положения оси вращения ведет к существенному изменению амплитуды колебаний, однако зависимость  $A^2/4+\beta^2$  от  $1/v$  остается приблизительно линейной, что иллюстрирует рисунок.

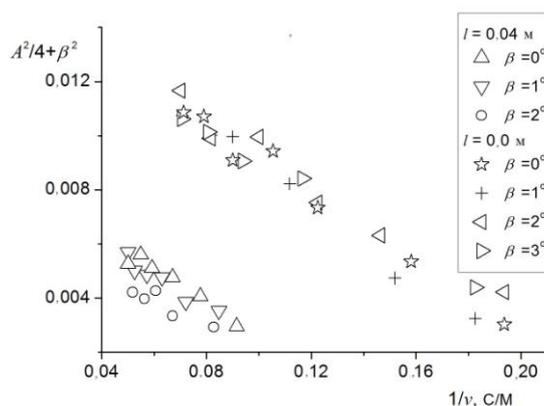


Рис. Зависимость  $A^2/4+\beta^2$  от  $1/v$  для двух положений оси вращения,  $l$  – расстояние от оси вращения до центра цилиндра.

## Л и т е р а т у р а

1. Рябинин А.Н., Тюрин Б.Ф. Поведение груза, подвешенного под вертолетом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, 1993. Вып. 1. С. 87-91.
2. Киселев Н.А., Рябинин А.Н. Исследование вращательных колебаний цилиндров в воздушном потоке // Естественные и математические науки в современном мире. Сб. ст. по материалам XV междунар. науч.-практ. конф. № 2 (15). Новосибирск: Изд. «СибАК». 2014. С. 83-87.
3. Луценко И.В., Рябинин А.Н. Экспериментальные исследования колебаний цилиндра в воздушном потоке // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 2. С. 120-123.

## Cylinder Rotational Oscillations in the Airflow

N.A. Kiselev, A.N. Ryabinin

Saint Petersburg State University, Russia

Rotational oscillations of circular cylinder in the airflow are studied experimentally for several axes of rotation. Amplitude of oscillations depends on the velocity of airflow and on the position of axis. The parameters of mathematical model are calculated.

# CONTINUAL MODEL OF NANOSTRUCTURES, CLUSTERS AND MASSIVE BODIES

V.M. Kuznetsov<sup>1</sup>, K.B. Tereshkina<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*D. Mendeleev University of Chemical Technology of Russia, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Semenov Institute of Chemical Physics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*E-mail: vadim.kuznetsov.37@mail.ru, ksenia.tereshkina@gmail.com*

The fractal model of the continuum medium used in this work [1, 2]. It generalizes well-known Debye model for heat capacity of solids with exponent of spatial dimensionality of the vibrational spectrum  $d_f = 1, 2, 3$  on the full range of integer and fractional values  $-\infty \leq d_f \leq \infty$ . In addition to the Debye temperature  $\theta_H = \hbar \cdot \omega_{\max} / k_B$  (here  $\hbar$  and  $k_B$  are Planck and Boltzmann constants correspondingly,  $\omega_{\max}$  is the maximal frequency of the vibrational spectrum) another temperature associated with the lower boundary of the spectrum  $\theta_N = \hbar \cdot \omega_{\min} / k_B$  was introduced in this model ( $\theta_N = 0$  K in the Debye model). Temperature  $\theta_N$  is essential in studies of the thermal properties of clusters and nanostructures. This work focuses on matters having a dimensionality of the vibrational spectra,  $d_f < 0$ . Matters with such dimensionalities of vibrational spectra were not known previously.

Furthermore, despite the small number of frequencies ( $N^* = 4$  for dimers of linear molecules, and  $N^* = 6$  for dimers of nonlinear molecules, for example), the condition of continuity of the spectrum at small  $d_f$  and low temperatures  $T \sim 1$  K is formally executed. This means that the temperature dependence of the heat capacity, calculated on the total contribution of relevant Einstein oscillators  $\omega_i$  is equal to the continuous model, they should match.

The calculations of intermolecular vibrational frequencies were performed using by FIREFLY program package [3] in Hartree-Fock method with 6-311++G(d,p), 6-311G(d,p), and 6-31G(d) basis sets.

Thus, the fractal model of continuum medium follows that the continuum representation of the state of the substance is possible not only when the number of its constituent atoms or molecules is large, but when it is insignificant, i.e. in nanostructures, clusters and even dimers, representing the smallest possible particle bound state in nature.

K.B. Tereshkina is grateful to the Russian Foundation for Basic Research and the Ministry of Education and Science of Russian Federation for partial support of this work.

## References

1. *Kuznetsov V.M., Khromov V.I.* On the existence of macro- and nanostructures with phonon spectra of low fractal dimensions // *Technical Physics Letters*. 2012. V. 38. No 3. P. 207-210.
2. *Kuznetsov V.M., Tereshkina K.B.* Heat capacity of materials with low and zero-dimensional vibrational spectra // *Vestnik MGOU. Series Physics-Mathematics*. 2014. No 2. P. 46-51.
3. *Granovsky A.A.* Firefly version 7.1.G <http://classic.chem.msu.ru/gran/firefly/index.html>

## ПОСТУПАТЕЛЬНО НЕРАВНОВЕСНЫЙ ПИРОЛИЗ ГАЗООБРАЗНЫХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ В УДАРНЫХ ВОЛНАХ

**М.М. Кузнецов, С.В. Матвеев, Л.В. Смотров**

*Московский областной государственный университет, Россия  
E-mail: kuznets-omn@yandex.ru*

Возможность получения материалов с заданными свойствами (нанотрубки, ультрадисперсные алмазы и т.д. [1]), по-прежнему, поддерживает интерес к исследованию высокотемпературного пиролиза газообразных соединений в ударных волнах. При этом одним из, теоретически до конца не выясненных вопросов, остается вопрос об удобных в эксперименте критериях учёта поступательной неравновесности внутри фронтов ударных волн.

Существенной является также оценка вклада в производство «строительного» материала образующегося при пиролизе внутри этих фронтов.

Полностью аналитический подход к решению этой проблемы в соответствующей модельной постановке был предложен ранее в работе [2]. В настоящей работе приведены аналитические оценки скорости поступательно–неравновесного пиролиза для ряда типичных материалов, исследованных ранее в экспериментах [3].

### **Л и т е р а т у р а**

1. Ч. Пул-мл., Ф. Оуэнс. Нанотехнологии. М.: Техносфера. 2010. 336 с.
2. Кузнецов М.М., Смотров Л.В. Аналитические свойства эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности // Вестник МГОУ. Серия Физика – Математика. 2013. № 3. С. 66-73.
3. T. Sommer, T. Kruse and P. Roth. C<sub>2</sub> Formation during High – Temperature. Pyrolysis of fullerene C<sub>60</sub> in Shock Wave // Journal of Physical Chemistry. 1995. V.99. No 36. P. 13509-13512.

## **Translational Nonequilibrium Pyrolysis of molecular gases in shock waves**

**M.M. Kuznetsov, S.V. Matveev, L.V. Smotrova**

*Moscow region state university, Russia*

The development of the possibilities of the analytical method of investigating the structure of shock wave front with the nonequilibrium chemical reaction is considered. The method is based on the ellipsoidal Maxwellian velocity distribution function for each component of the gas mixture.

The analytical results for translational nonequilibrium pyrolysis rates of gas species have been obtained.

# МОДЕЛИ ВИНТОВЫХ ВИХРЕЙ С ГЛАДКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЗАВИХРЕННОСТИ

П.А. Куйбин

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия  
E-mail: kuibin@itp.nsc.ru*

Вихри винтовой формы возникают в закрученных потоках вследствие неустойчивости, либо из-за несимметричных условий на входных или выходных границах. Обзор исследований по винтовым вихрям можно найти в монографии [1]. В работах [2, 3] была предложена модель винтового вихря с равномерным распределением завихренности в ядре. В рамках модели были выведены аналитические формулы, описывающие скорость движения вихря и распределения осредненных полей скорости, индуцированной вихрем.

Данная работа посвящена обобщению указанной модели на случай неравномерного распределения завихренности в ядре. Винтовой вихрь представляется в виде распределения винтовых вихревых линий с одинаковым шагом. При этом индуцированное поле скорости записывается в виде [1, 3]

$$\mathbf{u} = \int \omega_z \mathbf{F} dS_z.$$

Здесь вектором  $\mathbf{F}$  обозначена скорость, индуцированная бесконечно тонкой винтовой вихревой нитью единичной интенсивности,  $\omega_z$  – распределение  $z$ -компоненты завихренности (в модели используется цилиндрическая система координат  $\langle r, \varphi, z \rangle$  с осью  $z$ , направленной по оси винта). Интегрирование ведется по сечению вихревого ядра плоскостью  $z = \text{const}$ .

После дискретизации выведена формула

$$\mathbf{u} = \sum_i \int_{S_z^i} \Delta\omega_z^i \mathbf{F} dS_z^i.$$

Полагая, что величина  $\Delta\omega_z^i$  на  $i$ -том слое постоянна, находим, что для распределения осредненных радиальной, окружной и осевой компонент скорости справедливы выражения

$$\langle u_r \rangle \equiv 0, \quad \langle u_\varphi \rangle = \frac{\Phi(r)}{2\pi r}, \quad \langle u_z \rangle = u_0 - \frac{\Phi(r)}{2\pi l},$$
$$\Phi(r) = \sum_i \Delta\omega_z^i (S_z^i)^{-2} \int_{S_z^i} \begin{cases} 0, & r < r' \\ 1, & r \geq r' \end{cases} dS_z^i.$$

Рассматривая далее такую форму сечения слоев  $S_z^i$ , что в сечении, нормальном к винтовому ядру они выглядят кругами, приходим, что как и в случае с равномерным ядром [1, 3], интегралы вычисляются аналитически через площади пересечения кругов и эллипсов.

Таким образом, задача об осредненном поле скорости, индуцированном винтовым вихрем, обобщена на случай неравномерного распределения завихренности в вихревом ядре.

## Л и т е р а т у р а

1. *Алексеевко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований 2003. 504 с.
2. *Kuibin P.A., Okulov V.L.* Self-induced motion and asymptotic expansion of the velocity field in the vicinity of helical vortex filament // *Phys. Fluids*. 1998. V. 10. No 3. P. 607-614.
3. *Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L., Shtork S.I.* Helical vortices in swirl flow // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 382. P. 195–243.

## Models of Helical Vortices with Smooth Vorticity Distribution

P.A. Kuibin

*Kutateladze Institute of Thermophysics, Novosibirsk, Russia*

Models of helical vortices with smooth vorticity distribution in vortex cores are developed. Due to proper vorticity discretization the analytical formulae are derived for description of the averaged velocity components.

# ПОТОК ТЕПЛА ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПОУРОВНЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

О.В. Кунова, Е.В. Кустова, М.А. Мехоношина, Е.А. Нагнибеда

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: mekhonoshinam@gmail.com

В данной работе в рамках поуровневого приближения [1] исследуется влияние колебательной и химической кинетики на перенос тепла и скорость диффузии в релаксационной зоне за фронтом ударной волны, образующейся в сверхзвуковом потоке газа. Рассматриваются бинарные смеси  $N_2/N$  и  $O_2/O$  в условиях, типичных для входа космического аппарата в атмосферу Земли. Для описания одномерного стационарного течения газа за ударной волной в работе рассматривалась замкнутая система уравнений, состоящая из уравнений для заселенностей колебательных уровней молекул  $n_{ci}$ , числовых плотностей атомов  $n_{at,c}$ , скорости  $v$  и температуры  $T$ . Поток тепла находится из системы уравнений в первом приближении обобщенного метода Энского-Чепмена. Алгоритм расчета коэффициентов переноса в рамках кинетической теории требует решений систем линейных уравнений для всех колебательных состояний на каждом шаге численного решения. В настоящей работе мы используем упрощенный подход. Упрощенные выражения [2, 3] для теплового потока могут быть записаны как сумма вкладов различных процессов, а именно, перенос энергии за счет теплопроводности поступательных и вращательных степеней свободы, массовой диффузии, термодиффузии и диффузии за счет колебательной энергии.

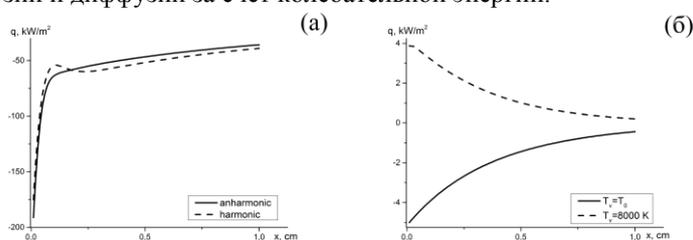


Рис. 1. Полный поток тепла  $N_2/N$  за ударной волной как функция от  $x$ . (а) –  $M_0=15$ , (б) –  $M_0=10$ .

В работе показано влияние колебательных распределений, реакций диссоциации и рекомбинации, а также различных начальных условий на поведение потока тепла за фронтом ударной волны. На рис. 1 представлено изменение общего теплового потока смеси  $N_2/N$  в релаксационной зоне за ударной волной при различных начальных условиях. Видно, что для  $M_0 = 15$  абсолютная величина общего теплового потока высока вблизи фронта ударной волны и уменьшается при удалении от фронта ( $x > 0,2$  см) вместе с производными макроскопических параметров. Для  $M_0 = 10$  абсолютное значение теплового потока значительно ниже вследствие малых градиентов газодинамических параметров в зоне релаксации. Следует отметить, что в случае начальной колебательной неравновесности набегающего потока знак общего теплового потока становится положительным.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, тема НИР 6.37.163.2014 и РФФИ, грант №12-08-00826.

## Л и т е р а т у р а

1. Nagnibeda E., Kustova E. Non-equilibrium Reacting Gas Flows. Kinetic Theory of Transport and Relaxation Processes. Springer, Berlin, 2009. 289 с.
2. Kustova E., Nagnibeda E. Transport properties of a reacting gas mixture with strong vibrational and chemical non-equilibrium // Chem. Phys. 1998. № 233. С. 57-75.
3. Kustova E. On the simplified state-to-state transport coefficients // Chem. Phys. 2001. № 270. С. 177-195.

## Heat Flux behind a Shock Wave in the State-to-State Approximation

O.V. Kunova, E.V. Kustova, M.A. Mekhonoshina, E.A. Nagnibeda

Saint-Petersburg State University, Russia

In this work the heat transfer in the relaxation zone behind a shock wave is studied on the basis of the state-to-state kinetic theory approach. We consider binary mixtures  $N_2/N$  and  $O_2/O$  under the conditions typical for re-entry to the Earth atmosphere. The results of calculations of total energy flux is presented for different initial conditions behind the shock wave.

# КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ И ХИМИЧЕСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ЗА УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ, ВОЗНИКАЮЩИМИ В НЕРАВНОВЕСНЫХ ПОТОКАХ СМЕСЕЙ ГАЗОВ

О.В. Кунова, Е.А. Нагнибеда

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: kunova.olga@gmail.com, e\_nagnibeda@mail.ru

Данная работа посвящена исследованию влияния колебательной неравновесности набегающего потока на структуру релаксационной зоны ударной волны. На основе поуровневого описания [1] численно исследованы течения бинарных смесей  $N_2/N$ ,  $O_2/O$  и пятикомпонентного воздуха  $N_2/O_2/NO/N/O$  за ударным фронтом при разных колебательных распределениях молекул невозмущенного потока.

Внутри ударного фронта процессы колебательного энергообмена и химические реакции предполагались «замороженными» с постоянными составом смеси и заселенностями колебательных уровней молекул. Считалось, что в набегающем потоке заселенности колебательных уровней молекул имеют вид максвелловского распределения с колебательной температурой  $T_{v0}$ .

Для описания различных режимов течения вводились два параметра:  $\beta = T_{v0}/T_0$ , характеризующий степень начальной неравновесности, и  $f(M_0, \gamma) = T_1/T_0$ , определяющий интенсивность ударной волны. Здесь  $T_0$  и  $T_1$  – температура смеси в набегающем потоке и непосредственно за ударной волной,  $M_0$  – число Маха в набегающем потоке,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Рассматривались следующие условия:

1.  $f > \beta = 1$ . В этом случае ударная волна возникает в равновесном газе, когда  $T_{v0} = T_0$ .
2.  $f > \beta > 1$ . Данное условие реализуется при относительно больших числах Маха и слабонеравновесном набегающем потоке.
3.  $\beta > f > 1$ . Это условие имеет место при значительной начальной колебательной неравновесности и небольших числах Маха.

Показано, что колебательное возбуждение молекул набегающего потока приводит к существенному изменению характера релаксации газа за ударной волной. В частности, в третьем случае наблюдается дезактивация сильно возбужденного газа за ударным фронтом в отличие от традиционной ситуации возбуждения колебаний молекул в релаксационной зоне. На рис. 1 представлена область изменения чисел Маха, при которых при заданной начальной неравновесности реализуется такой режим релаксации. Ранее эффекты, связанные с неравновесностью набегающего потока, обсуждались в [2]. В настоящей работе приведены численные оценки влияния колебательного возбуждения молекул перед ударным фронтом на заселенности колебательных уровней, химический состав, макропараметры и скорость установления равновесия в релаксационной зоне в рассмотренных смесях.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ НИР 6.38.73.2012.

## Л и т е р а т у р а

1. *Kunova O.V., Nagnibeda E.A.* State-to-state description of reacting air flows behind shock waves // *Chem. Phys.* 2014. Vol. 441. P. 66-76.
2. *Осинов А.И., Уваров А.В.* Кинетические и газодинамические процессы в неравновесной молекулярной физике // *Успехи физических наук.* 1992. Т. 162. №. 11. С. 1-42.

## Vibrational and Chemical Relaxation behind the Shock Waves Formed in Non-equilibrium Gas Mixtures Flows

O.V. Kunova, E.A. Nagnibeda

Saint Petersburg State University, Russia

In the present paper, non-equilibrium flows of the 5-component air mixture  $N_2/O_2/NO/N/O$  and binary mixtures  $N_2/N$  and  $O_2/O$  behind shock waves are studied taking into account the state-to-state vibrational and chemical kinetics. Peculiarities of macroscopic parameters and vibrational distributions behind a shock wave formed in an initially vibrationally excited mixture are studied.

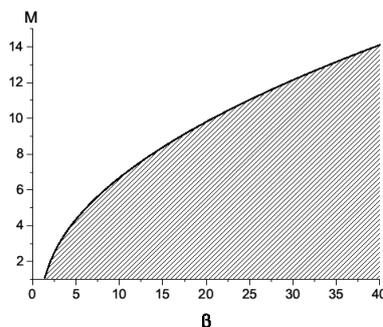


Рис. 1. Значения чисел Маха в зависимости от параметра  $\beta$ , характерные для сильнонеравновесного газа ( $T_{v0} > T_1 > T_0$ ).

# О ВЛИЯНИИ МНОГОКВАНТОВЫХ ОБМЕНОВ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ НА ПАРАМЕТРЫ ТЕЧЕНИЯ ЗА УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Л.Д. Мишин, Е.В. Кустова

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: leomichine@gmail.com, elena\_kustova@mail.ru*

Неравновесные течения разреженных газов активно исследуются в последнее время. Происходит это вследствие развития науки и техники, например, в области космонавтики и сверхзвуковой авиации, и необходимости моделирования поведения разреженных газов в сильно неравновесных условиях, при высоких температурах и скоростях. Одной из наиболее популярных моделей неравновесной кинетики и динамики газов является поуровневое приближение [1], эта модель подразумевает, что каждый колебательный уровень молекулы описывается как отдельный химический сорт. Вероятности различных химических реакций и обменов энергией при столкновениях молекул, находящихся в разных состояниях, описываются соответствующими поуровневыми коэффициентами скорости реакций.

Поведение коэффициентов скорости обменов колебательной энергией, а также коэффициентов скорости диссоциации рекомбинации определяет поведение газа в целом. Из-за большого числа энергетических уровней молекул газа приходится рассчитывать достаточно большое количество этих коэффициентов, что занимает много времени и ресурсов, поэтому часто учитывают лишь одно- или двухквантовые обмены колебательной энергией, а остальными пренебрегают. Целью данной работы является сравнение результатов расчета газодинамических параметров газа  $N_2$  за фронтом ударной волны с учетом различного количества многоквантовых переходов.

В работе с помощью метода Гира для решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений было численно исследовано влияние количества учитываемых многоквантовых VT-переходов на газодинамические параметры в релаксационной зоне за фронтом плоской ударной волны в разреженном газе  $N_2$ . Из проделанной работы можно сделать вывод о том, что количество коэффициентов, которыми можно пренебречь при расчетах, зависит от того, какие параметры газа рассматриваются. Так, для скорости и температуры достаточно рассмотрения первых 10 многоквантовых обменов, а для заселенностей колебательных уровней необходимо рассматривать все возможные многоквантовые переходы.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, тема НИР 6.37.163.2014.

## Л и т е р а т у р а

1. *Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2003. 272 с.

## On the Influence of Multi-Quantum Vibrational Transitions on Gas-Dynamic Parameters of Flows Behind Shock Waves

L.D. Mishin, E.V. Kustova

*Saint-Petersburg State University, Russia*

In this paper we discuss the influence of multi-quantum VT transitions on fluid dynamic parameters behind shock waves in the state-to-state approximation. The rate coefficients are studied for the ( $N_2$ , N) binary mixture. In our calculation we consider a specific number of probable VT energy transitions. Our objective is to find out when it is necessary to account for all multi-quantum transitions and when we can neglect a part of them in order to reduce computational costs.

# ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ МОЛЕКУЛ СО С УЧЕТОМ РЕЗОНАНСНЫХ VE ОБМЕНОВ

**А.И. Мишина, Е.В. Кустова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия.*

*E-mail: vedmaya@list.ru, elena\_kustova@mail.ru*

Изучение молекулы СО важно по многим причинам: СО является активной средой в газодинамических лазерах; составляет существенную часть атмосферы Марса; свойства этих молекул важны при решении ряда экологических задач, например, для уменьшения содержания угарного газа в выхлопных трубах автомобилей. Электронные уровни молекул СО могут влиять на плазмохимические процессы. Изучению колебательной релаксации в двухатомных газах посвящено большое количество работ (например: [1] (см. также библиографию в этой книге), [5], [6]). Однако наибольшее внимание в литературе уделяется компонентам воздуха N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, NO. Процессы обмена колебательной энергией в СО изучены довольно слабо; по этой теме можно указать лишь несколько работ [2], [3], [4].

В работе исследуется колебательная релаксация молекул газа СО с возбужденными электронными уровнями, находящихся в изолированной системе. Начальное колебательное состояние газа является сильно неравновесным. Примерами такого начального состояния могут быть колебательные состояния, выведенные из равновесия электрическим разрядом или накачкой энергии СО-лазером. При неравновесном колебательном состоянии возможна перенаселенность высших колебательных уровней, этот процесс может регулироваться VE обменами колебательной энергией между электронными термами. Для описания процесса колебательной релаксации можно использовать различные модели. Наиболее простой моделью является многотемпературное описание, основанное на распределении Больцмана для модели гармонических осцилляторов. Более строгое описание даётся на основании распределения Тринора. Но, наиболее точной и детальной моделью является поуровневое описание колебательной кинетики. Целью работы является построение модели релаксации молекул СО с учётом VV, VT и VE обменов в сильнонеравновесных условиях. Выбор модели, описывающей рассматриваемую задачу, был основан на анализе коэффициентов скорости VV, VT и VE процессов. Для нахождения коэффициентов скорости VV и VT обменов были использованы формулы модели Де Леона [3], полуэмпирической модели, относящейся только к молекулам СО. Коэффициент скорости VE обмена моделируется с помощью функции Гаусса от изменения энергии, его выражение можно найти в работе [4].

В ходе работы удалось выяснить, что построение многотемпературной модели для такой системы невозможно, поэтому в дальнейшем задача рассматривается в более детальном поуровневом приближении. Также в работе приводится пример, показывающий необходимость учёта VE обменов в данной задаче.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, тема НИР 6.37.163.2014.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Е.А. Нагнибеда, Е.В. Кустова.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб: Изд. С.-Петерб. ун-та. 2003. 272 с.
2. *A.Aliat.* Modélisation d'un écoulement hypersonique du CO en déséquilibre physico-chimique radiatif et derrière une onde de choc // PhD Thesis, Université de Provence (Aix-Marseille I) Département de Mécanique Energétique de l'École Polytechnique Universitaire de Marseille CNRS UMR 6595. 2002.
3. *R.DeLeon, J.W.Rich.* Vibrational Energy Exchange Rates in Carbon Monoxide // Chem.Phys. 1986. V. 107. No2. P. 283-292.
4. *A.Chiroux de Gavelle de Roany, C.Flamant, J.W.Rich et al.* Strong Vibrational Nonequilibrium in Supersonic Nozzle Flows // AIAA Journal. 1993. V. 31. No 1. P.119-128.
5. *Billing G.D., Fisher E.R.* VV- and VT-rate coefficients in N<sub>2</sub> by a quantum-classical model // Chem. Phys. 1979. V. 43. P. 395-401.
6. *Capitelli M., Armenise I., Gorse C.* State-to-state approach in the kinetics of air components under re-entry conditions // J. Thermophys. Heat Transfer. 1997. V. 11. No 4. P. 570-578.

## **Spatially Homogeneous Relaxation of CO Molecules with Resonant VE Transitions**

**A.I. Mishina, E.V. Kustova**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

In this paper we consider relaxation of CO molecules in an isolated system. Initially, the vibrational state of the gas is strongly non-equilibrium. We consider three electronic terms and account for VV exchanges of vibrational energy within each electronic term, VT transitions of vibrational energy into translational and VE exchange of vibrational energy between the electronic terms. Our objective is to study peculiarities of relaxation in this system.

# ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СЛАБО РАЗРЕЖЕННЫХ СМЕСЕЙ ХИМИЧЕСКИ НЕРЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВ В ПОУРОВНЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ

**Е.В. Кустова, П.С. Мостовых**

*Санкт–Петербургский государственный университет, Россия,  
E-mail: elena\_kustova@mail.ru, mostovykh@gmail.com*

В большинстве случаев, химически нереагирующие газовые смеси хорошо описываются многотемпературными моделями [1]. Существует, однако, круг явлений, описание которых возможно только при условии явного выделения колебательных и вращательных уровней энергии молекул. Одним из таких явлений является светоиндуцированная диффузия. Впервые существование этого явления было теоретически показано в [2], а применительно к светоиндуцированной диффузии, вызванной наличием поверхности, — в [3]. В работе [4] анонсировано первое экспериментальное наблюдение этого эффекта.

Для полноценного моделирования течений газовых смесей в условиях светоиндуцированной диффузии, вызванной наличием поверхности, необходимо ставить различные граничные условия на поверхности в зависимости от внутреннего энергетического состояния молекул. Такое условие проще всего поставить на микроуровне, используя для этого экспериментальные данные о потоках диффузии и градиентах концентрации (парциального давления), полученные в свободномолекулярных условиях. Для расчёта течений слабо разреженных смесей (числа Кнудсена в диапазоне от 0.001 до 0.25) необходимо сформулировать аналогичные граничные условия на макроскопическом уровне описания. В докладе рассмотрены различные методы, при помощи которых может быть произведён переход от граничных условий на микроскопическом уровне к макроскопическому. Проведено сопоставление полученных условий.

Для обоснованного выбора варианта перехода к граничным условиям на макроскопическом уровне должны быть привлечены экспериментальные данные и численные исследования течений слабо разреженной газовой смеси при различном выборе граничных условий.

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (проекты 6.50.1556.2013 и 6.37.163.2014).

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 336 с.
2. *Гельмуханов Ф.Х., Шалагин А.М.* Светоиндуцированная диффузия газов // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. Вып. 12. С. 773–776.
3. *Ghiner A.V., Stockmann M.I., Vaksman M.A.* Surface Light–Induced Drift of a Rarefied Gas // Physics Letters A. 1983. V. 96. No 2. P. 79–82.
4. *Hoogeveen R.W.M., Spreeuw R.J.C., Hermans L.J.F.* Observation of Surface Light–Induced Drift // Physical Review Letters. 1987. V. 59. No 4. P. 447–449.

## **Boundary Conditions for Slightly Rarerfied Chemically Nonreactive Gas Mixtures in an Energy–Distinguishing Approach**

**E.V. Kustova, P.S. Mostovykh**

*Saint–Petersburg State University, Russia*

In most cases, chemically non-reactive gas mixtures are well described by multi-temperature models [1]. There is, however, a range of phenomena, which can be described only if the vibrational and rotational energy levels of molecules are explicitly distinguished. One of these phenomena is light–induced drift. The existence of this phenomenon was theoretically shown in [2], and the light–induced drift due to the presence of the surface was predicted in [3]. In [4] the first experimental observation of this effect was announced.

In order to fully simulate the gas mixtures flows with light–induced drift due to the presence of the surface, it is necessary to set different boundary conditions on the surface, depending on the internal energy states of the molecules. The easiest way to formulate such conditions is doing it on a micro level, using the experimental data on the diffusion fluxes and the concentration (partial pressure) gradients, obtained in free–molecular conditions. For slightly rarefied gas mixtures (Kn numbers from 0.001 to 0.25) it is necessary to formulate similar boundary conditions at the macroscopic level. The report examines various ways for the transition from microscopic level boundary conditions to the macroscopic ones. The comparison of the obtained conditions is fulfilled.

In order to make a choice of one of the ways to obtain the boundary conditions at the macroscopic level, the experimental data and the numerical simulation of slightly rarefied gas mixtures with different choices of the boundary conditions should be consulted.

# СКОРОСТЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ В МНОГОТЕМПЕРАТУРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

**Е.В. Кустова, Г.П. Облапенко**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: elena\_kustova@mail.ru, kunstmord@kunstmord.com*

В работе при помощи обобщенного метода Энского–Чепмена рассматривается скорость колебательной релаксации в многотемпературных течениях разреженных газов как в невязком, так и в вязком приближениях. Ранее было показано [1, 2], что в вязких газах скорости медленных процессов не являются независимыми, а зависят и от дивергенции скорости потока. Однако влияние этих эффектов на скорость релаксации остается слабо изученным, и в практических приложениях зачастую используются сильно упрощенные модели.

Проведено численное моделирование скорости колебательной релаксации для течения чистого молекулярного азота с неравновесными одноквантовыми VT-переходами в невязком и вязком приближениях метода Энского-Чепмена для моделей гармонического и ангармонического осцилляторов.

Изучено влияние дивергенции скорости потока, величины колебательной неравновесности, температуры потока, учета ангармоничности колебаний и перекрестных эффектов на скорость колебательной релаксации. Проведено сравнение с широко используемой в вычислительной газодинамике формулой Ландау-Теллера, а также ее возможными обобщениями.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ, тема НИР 6.37.163.2014, и РФФИ, грант 12-08-00826.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2003. 272 с.
2. *Кустова Е.В., Облапенко Г.П.* Нормальные напряжения и скорости медленных процессов в многотемпературных потоках газов с химической и колебательной неравновесностью // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* 2013. Сер. 1. Вып. 2. С. 111-120.

## **Vibrational Relaxation Rates in Multi-Temperature Rarefied Gas Flows**

**E.V. Kustova, G.P. Oblapenko**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

In the present work vibrational relaxation in multi-temperature rarefied flows is studied with the use of the generalized Chapman-Enskog method both for inviscid and viscous flows.

Numerical modeling is carried out for a pure N<sub>2</sub> flow with non-equilibrium single-quantum VT transitions. The effects of velocity divergence, vibrational anharmonicity, flow temperature, the degree of vibrational non-equilibrium and cross-coupling between reactions on the relaxation rates are studied, and comparisons are made to the widely used Landau-Teller formula and its possible generalizations.

# О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ТРИНОРА-МАРРОНА ДЛЯ ПОУРОВНЕВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СКОРОСТИ ДИССОЦИАЦИИ

А.С. Савельев, Е.В. Кустова

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия.  
E-mail: aleksey.schumacher@gmail.com, elena\_kustova@mail.ru

Течения разреженных газов активно исследовались в конце 20 – начале 21 века. Именно задачи науки и техники, в частности, развитие лазерных технологий, исследования космического пространства, сверхзвуковые полеты служат основанием для изучения сильных отклонений от состояния равновесия. В этом случае становятся необходимыми сведения о коэффициентах скорости обменов внутренней энергией и химических реакций [1].

Коэффициенты скорости диссоциации являются одним из характерных объектов исследований. При слабых отклонениях от термического равновесия можно использовать закон Аррениуса, но он неприменим при сильном колебательном возбуждении. В таком случае часто используются лестничная модель диссоциации и модель Тринора-Маррона, предполагающая диссоциацию с любого уровня. Простота их описания привела к достаточно широкому применению в инженерных расчетах. Однако, расчеты по этим моделям имеют серьезный недостаток – в ряде условий точность вычислений недостаточно высока. Обусловлена эта проблема использованием фиксированных значений параметров. Значительно более точные данные получают методами молекулярной динамики, но их проведение требует больших вычислительных мощностей. Бурное развитие компьютерных технологий привело к заметному прогрессу в этой области [2,3]. Одним из самых существенных результатов последнего времени является создание открытой электронной базы данных коэффициентов физико-химических процессов для разных атмосфер, опубликованная специалистами группы Капители (Университет Бари, Италия) в конце 2013 года [4]. Тем не менее, коэффициенты скорости диссоциации для большого числа уровней все еще остаются недостаточно изученными.

В предыдущей работе [5] были получены пределы применимости модели Тринора-Маррона и даны рекомендации по использованию фиксированных значений параметров. Целью данной работы является построение семейства параметрических функций, зависящих от температуры и энергетического уровня, пригодных для использования в расчетах по модели Тринора-Маррона. Эти функции должны иметь достаточно простой вид и обеспечивать результаты вычислений, эквивалентные результатам траекторных расчетов в широком диапазоне температур (до 20000 К). Получение функциональных зависимостей должно способствовать увеличению точности расчетов течений с неравновесными физико-химическими процессами.

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ, тема НИР 6.37.163.2014

## Л и т е р а т у р а

1. Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2003. 272 с.
2. Esposito F., Capitelli M., Kustova E.V. *e.a.* Rate coefficients for the reaction  $N_2(i)+N=3N$ : A comparison of trajectory calculations and the Treanor\_Marrone model // Chem. Phys. Lett. 2000. V. 330. P. 207\_211.
3. Armenise I., Esposito F., Capitta G., Capitelli M. O-O2 state-to-state vibrational relaxation and dissociation rates based on quasiclassical calculations // Chemical Physics. 351 (2008) 91\_98.
4. Planetary Entry Integrated models. <http://phys4entrydb.ba.imip.cnr.it/Phys4EntryDB/>
5. Савельев А.С., Кустова Е.В. Пределы применимости модели Тринора-Маррона для поуровневых коэффициентов скорости диссоциации  $N_2$  и  $O_2$  // Вестник С.-Петербург. ун-та. 2015. Сер. 1. Вып. 1 (в печати).

## On the Choice of Parameters for the Treanor-Marrone Model of State-To-State Dissociation Rate Coefficients

A.S. Savelev, E.V. Kustova

Saint-Petersburg State University, Russia

In this paper we discuss the models for the state-to-state dissociation rate coefficients. The rate coefficients are studied for ( $N_2$ , N) and ( $O_2$ , O) binary mixtures. Two approaches for the calculation of dissociation rate coefficients are compared: the Treanor-Marrone model and trajectory calculations based on the methods of quantum chemistry. Our objective is to find a functional dependence of the parameter U of the Treanor-Marrone which provides the rate coefficients equivalent to those obtained by trajectory calculations.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ В БЛИЖНЕМ СЛЕДЕ ЗА САМОЛЕТОМ

**М.А. Лобанова, Ю.М. Циркунов**

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: lbnv.spb@gmail.com*

Как известно, самолет при полете оставляет за собой сильно возмущенную область – струйно-вихревой след – которая образуется при стекании и сворачивании вихревой пелены с крыльев и взаимодействии ее с выхлопными струями двигателей. Моделирование сложной вихревой структуры следа важно как для исследования воздействия авиации на окружающую среду на эшелоне и в зоне аэропортов, так и для оценки вихревой опасности во избежание авиакатастроф. Эта задача является особенно актуальной для аэропортов мегаполисов с интенсивным режимом взлетов и посадок.

В данной работе численно исследуется структура ближнего следа за летательным аппаратом типа самолета Боинг 737-300. В расчетах геометрическая конфигурация самолета включала фюзеляж, крылья с винглетами, вертикальный и горизонтальные стабилизаторы, гондолы двигателей, пилоны и обтекали. Использовались три модели течения: осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса с замыканием  $k-\omega$  SST-моделью турбулентности Ментера (RANS-подход), полные уравнения Навье–Стокса и уравнения Эйлера. Расчеты были выполнены в программном пакете ANSYS CFX и результаты сравнивались между собой.

Исследовано образование и развитие вихревой пелены и ее взаимодействие со струями двигателей. Дана оценка роли эффектов физической и турбулентной вязкости в описании формирования крупномасштабной вихревой структуры следа на примере сравнения картин линий тока вихревой пелены и струй, полей скоростей, компонент вектора завихренности. Представлены сравнение и анализ полей газодинамических параметров на блочной структурированной и неструктурированной сетках с числом ячеек порядка 20 миллионов. Это позволило выбрать тип сетки, распределение ячеек на поверхности самолета и в следе, обеспечивающие оптимальную точность расчетов при относительно небольшом количестве ячеек сетки.

Как часть общей задачи о моделировании струйно-вихревого следа рассматривается течение в спутной струе двухконтурного турбореактивного двигателя. Расчет проводился на трех блочных сетках с 1, 6, 10 миллионами ячеек. Было найдено, что сетки с 1 млн. ячеек достаточно для описания поля течения в струе с высокой точностью. Данные результаты были использованы при построении блочной сетки для всего самолета.

Течение в струйно-вихревом следе моделировалось как для полета на эшелоне, так и для взлетного режима авиалайнера с посадочной полосы. Получены картины крупномасштабной вихревой структуры следа.

Результаты данного исследования представляют важный этап в решении задачи моделирования конденсационного следа (контрейла), образующегося в результате конденсации паров воды в продуктах сгорания авиационного топлива и атмосфере. Конденсационные следы являются, как известно, причиной возникновения искусственной перистой облачности, влияющей на локальный тепловой баланс и характеристики приземного слоя атмосферы.

## **Modeling of the Large-Scale Vortex Structure in the Near Jet-Vortex Wake Behind an Aircraft**

**M.A. Lobanova, Yu.M. Tsirkunov**

*Baltic State Technical University, Saint Petersburg, Russia*

The paper describes the results of numerical simulation of the large-scale vortex structure in the near wake behind an aircraft of Boeing 737 type. Jet-vortex flow was investigated for cruise flight and for takeoff regime. Results on structured and unstructured grids with 20 million cells were compared and analyzed. RANS approach with  $k-\omega$  SST turbulence model, full Navier–Stokes equations and Euler equation were solved numerically. Modeling of a single bypass engine jet provided optimal grid settings for jet flow simulation with a high accuracy at a relatively small number of cells.

## **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГИПЕРЗВУКОВОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

**А.А. Шашкова, М.С. Нурмухамбетов, М.А. Лобанова, Ю.М. Циркунов**

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: lobachav@gmail.com*

В данной работе выполнено численное моделирование обтекания и расчет аэродинамических характеристик гиперзвукового летательного аппарата (ЛА), конфигурация которого включала коническую носовую часть, цилиндрический фюзеляж, горизонтальное заднее оперение и вертикальный стабилизатор. Варьировались число Маха ( $M_\infty = 6, 9, 12$ ), угол атаки аппарата (от 0 до 12 градусов), угол отклонения закрылков (от 0 до 21 градуса) и положение центра масс аппарата.

Исходные параметры невозмущенного набегающего потока соответствовали полету на высоте 40 км. Физико-химические процессы в ударном слое, как известно, относительно слабо влияют на распределение давления на поверхности аппарата, поэтому они не учитывались в расчетах. Течение газа описывалось осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса с использованием  $k-\omega$  SST модели турбулентности Ментера. Расчеты были выполнены в пакете ANSYS CFX. На предварительном этапе варьировались конфигурация расчетной области и количество ячеек сетки (от 500 тыс. до 34 млн.). Для систематических расчетов была подобрана оптимальная форма расчетной области, степень сгущения и количество ячеек сетки. Получены подробные картины течений и поля параметров в ударном слое для каждого режима полета. Построены графики зависимостей коэффициентов сопротивления, подъемной силы и аэродинамического момента ЛА (при разных расположениях центра масс ЛА). Найдены параметры, при которых аэродинамический момент будет обеспечивать стабилизацию ЛА в полете. Исследованы особенности течения около хвостовой области ЛА, где возникают сложные ударно-волновые структуры, отрывные зоны, влияющие на аэродинамические характеристики ЛА.

## **Numerical Investigation of Flow and Aerodynamic Characteristics of a Hypersonic Vehicle**

**A.A. Shashkova, M.S. Nurmukhambetov, M.A. Lobanova, Yu.M. Tsirkunov**

*Baltic State Technical University, Saint Petersburg, Russia*

Flow structure and aerodynamic properties of a hypersonic vehicle is simulated numerically at various flight Mach number, angle of attack, angle of the trailing-edge flap inclination, and position of the vehicle center of mass. The undisturbed flow parameters correspond to the flight height of 40 km.

# **ВЛИЯНИЕ УЧЕТА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА НА ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОДЕЛЕЙ ГРЕБНЫХ ВИНТОВ**

**А.Е. Таранов, М.П. Лобачев**

*Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: andrei\_taranov@mail.ru*

Несмотря на достаточно хорошее согласование между результатами численного моделирования и экспериментальными данными применительно к исследованию обтекания гребных винтов, доступность высокопроизводительной техники и прогресс в развитии численных методов позволяет заглянуть в этот процесс на более детальном уровне. Если для винтов натуральных размеров предположение о том, что лопасти винта целиком покрыты турбулентным пограничным слоем, справедливо, то в случае исследования гребных винтов модельных размеров можно допустить наличие на лопастях винта ламинарного участка. В предлагаемой работе рассматривается численное моделирование обтекания трех моделей гребных винтов (диаметром порядка 200-250 мм) различной формы и исследуется влияние учета эффекта ламинарно-турбулентного перехода на точность предсказания их гидродинамических характеристик. Для этого используется коммерческий продукт вычислительной гидродинамики Star-CCM+, в котором реализована одна из моделей ламинарно-турбулентного перехода, предложенная Ментером и Лэнгтри.

В качестве объектов исследования в работе рассматриваются три модели гребных винтов асимметричной формы, характерные для современных быстроходных надводных судов, и отличающиеся дисковым отношением. Экспериментальные данные для двух моделей гребных винтов получены в Крыловском государственном научном центре. В качестве третьей модели гребного винта взята международная тестовая модель РРТС, разработанная и исследованная в Потсдамском опытовом бассейне (Германия).

Задача решается в стационарной постановке со схемами второго порядка для дискретизации по пространству и времени. В качестве модели турбулентности использована  $k-\omega$  SST модель Ментера в сочетании с моделью ламинарно-турбулентного перехода Ментера-Лэнгтри. На входной границе задается скорость потока, степень турбулентности и отношение турбулентной вязкости, на выходной границе ставится условие свободного вытекания, на остальных внешних границах – условие проскальзывания.

Для всех трех рассмотренных моделей гребных винтов наблюдается снижение коэффициента трения на обеих сторонах лопастей винта в случае использования модели ламинарно-турбулентного перехода, что и отражается в изменении интегральных коэффициентов гидродинамических сил и моментов, действующих на модели гребных винтов. Картины распределения уровня турбулентной вязкости, приведенные для всех трех моделей гребных винтов, также свидетельствуют об изменении характера течения вблизи лопастей винтов и позволяют визуализировать ламинарные участки течения.

По результатам выполненного исследования делается вывод о необходимости использования модели ламинарно-турбулентного перехода Ментера-Лэнгтри, реализованной в пакете Star-CCM+, с заданием соответствующей экспериментальным условиям степени турбулентности потока при расчетах обтекания моделей гребных винтов.

## **Influence of the Laminar-Turbulent Transition on the Accuracy of the Propeller Characteristics Prediction**

**A.E. Taranov, M.P. Lobachev**

*Krylov State Research Centre, Saint-Petersburg, Russia*

In spite of definitely good agreement between experiments and CFD calculations concerning research and development of marine propellers, the recent progress in numerical methods and accessibility of high performance computers allow someone to look deeply into features of flow around the bodies and probably to reduce uncertainty of simulation. Presented work describes a numerical modeling of the flow around the models of marine propellers to study the influence of laminar-turbulent transition on the accuracy of performance curves prediction.

Three models of marine propellers with different shapes were meshed and simulated using Star-CCM+ code. Results of numerical simulation were compared with experimental data. Using of  $k-\omega$  SST turbulence model in conjunction with  $\gamma-Re\theta$  model of Menter-Langtry can provide significant improvements in accuracy of computed characteristics, compared with original  $k-\omega$  SST model.

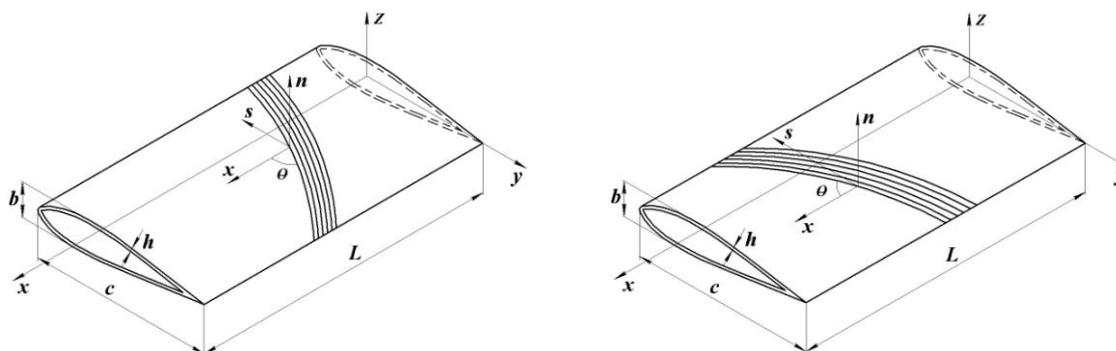
# КЛАССИЧЕСКИЙ ФЛАТТЕР АНИЗОТРОПНОГО КОМПОЗИТНОГО КРЫЛА

Я.М. Любомиров, Б.А. Ярцев

Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: yaroslav58@yandex.ru, boris\_yar@mail.ru

Показана возможность управления величинами собственных частот, критических скоростей флаттера и дивергенции крыла, работающего в набегающем потоке несжимаемого газа, за счет использования неклассических эффектов, возникающих в анизотропных структурах.

Построена математическая модель аэроупругого взаимодействия крыла с набегающим потоком газа, реализованная средствами программного комплекса ANSYS. Из решения аэродинамической задачи с использованием SST модели турбулентности в модуле Ansys Fluent находится распределение локальной подъемной силы по поверхности крыла. Полученные результаты передаются в модуль Ansys Mechanical для определения новой геометрии крыла, а также порождаемых ею полей деформаций и напряжений. Новая геометрия крыла передается обратно в модуль Ansys Fluent для решения аэродинамической задачи на следующем временном шаге и очередного уточнения деформированной формы крыла в модуле Ansys Mechanical. В процессе деформации крыла на каждом временном шаге в модуле Ansys Fluent вслед за деформацией поверхности крыла осуществляется деформация расчетной сетки в расчетной области обтекающего крыло газа. Моделирование структуры слоистого композита выполнялось в модуле ANSYS Composite PrePost.



Структура армирования  $[90^0/-\theta_2]_s$

Структура армирования  $[90^0/+\theta_2]_s$

Рис. 1. Схемы армирования анизотропного композитного крыла

Выполнены численные исследования влияния ориентации армирующих волокон на значения собственных частот, критических скоростей флаттера и дивергенции крыла из углепластика Ст-11043 / DION FR 9300 для двух структур армирования:  $[90^0/-\theta_2]_s$   $[90^0/+\theta_2]_s$  (рис. 1). Показано, что при увеличении скорости набегающего потока газа в крыле структуры  $[90^0/-\theta_2]_s$  неоднократно происходят трансформации динамической потери устойчивости (флаттера) в статическую потерю устойчивости (дивергенция) и обратно, а в крыле структуры  $[90^0/+\theta_2]_s$  возникает только флаттер.

Приведены результаты верификации математической модели аэроупругого взаимодействия композитного крыла с набегающим потоком газа, которая в соответствии со сложившейся практикой осуществлялась путем сопоставления расчетных и экспериментальных значений критических скоростей дивергенции и флаттера.

## Classical Flutter of the Anisotropic Composite Wing

Y.M. Lubomirov, B.A. Yartsev

Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

The natural vibrations and aeroelastic response of a carbon composite console rectangular wing in an incompressible gas flow are studied numerically. Satisfactory agreement between the calculated and experimental values of natural frequencies, critical flutter speeds for structures of various degrees of elastic orthotropic symmetry and monoclinic is demonstrated. It shows the influence of patterns of reinforcement on the connectedness of natural frequency and the emergence of the flutter of rectangular wing.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

С.Ю. Маламанов<sup>1</sup>, В.А. Павловский<sup>1</sup>, Д.П. Хитрых<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>ЗАО «КАДФЕМ Си-Ай-Эс», Москва, Россия

E-mail: [stevmal@mail.ru](mailto:stevmal@mail.ru)

Нелинейный характер уравнений магнитной гидродинамики (МГД) позволяет получать аналитические решения лишь в частных и довольно простых случаях. Поэтому, численное моделирование является весьма привлекательным инструментом исследования. Однако, на этом пути возникает сложность другого рода. Дело в том, что магнитогидродинамические процессы, как правило, крупномасштабны, а это приводит к значительным затратам времени счета и памяти при решении задачи. Рассмотрение вращающегося движения позволяет значительно уменьшить масштаб, сохраняя «физику» взаимодействия движущейся среды и электромагнитного поля.

В работе рассматривается проводящая жидкость, внутри которой выделен узкий канал в форме винтовой линии (рис.1).

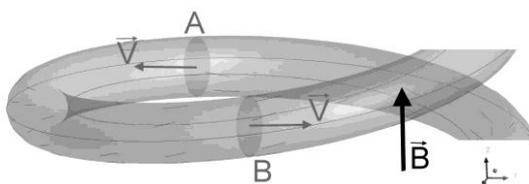


Рис.1 Схема течения

По каналу движется жидкость – имеет место своего рода трубка тока, к которой приложено внешнее магнитное поле. Решение осуществляется с помощью уравнений МГД, реализованных в программном комплексе ANSYS.

При движении проводящей среды в магнитном поле в ней индуцируется электрическое поле. На рисунке 2 а) и б) представлены графики изменения потенциала  $U$  этого поля и профили скорости  $V$  в двух диаметрально противоположных сечениях канала – сечениях А и В.

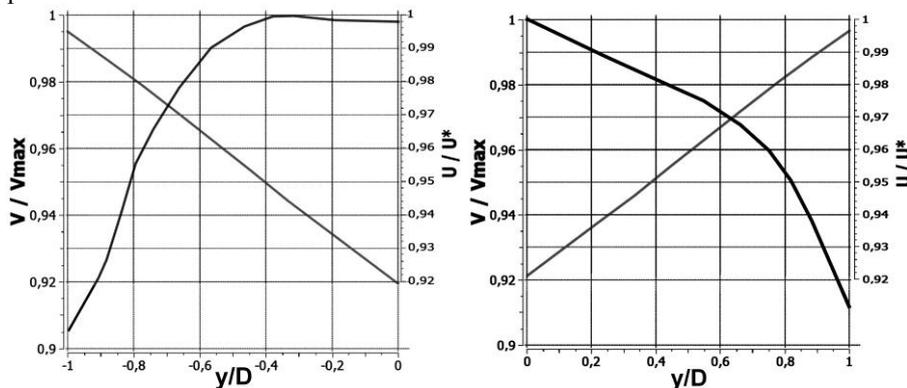


Рис. 2 Изменение потенциала и скорости поперек канала, где  $D$  – диаметр канала,  $V_{\max}$  – максимальная скорость в данном сечении,  $U^*$  – масштаб потенциала

Видно, что увеличение потенциала вблизи наружной стенки подтормаживает поток – характерное недозаполнение профиля скорости. Таким образом, наблюдается обоюдное влияние поля и движущейся проводящей среды.

## Simulation of Rotating Movement of Conducting Fluids

S.Y. Malamanov<sup>1</sup>, V.A. Pavlovskiy<sup>1</sup>, D.P. Khitrykh<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saint - Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>JSC "KADFEM ECI-Es", Moscow, Russia

In this work the conducting fluid inside a narrow channel which has the shape of helical line is considered. The mutual influence of the magnetic field and the motion of the medium simulates a rotating motion of a conducting fluid.

# СОВМЕЩЕНИЕ PIV И ГРАДИЕНТНОЙ ТЕПЛОМЕТРИИ В ИССЛЕДОВАНИИ ТЕПЛООБМЕНА И ГИДРОДИНАМИКИ

С.З. Сапожников<sup>1</sup>, В.Ю. Митяков<sup>1</sup>, А.В. Митяков<sup>1</sup>, Д.М. Маркович<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия

<sup>2</sup>Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: serg.sapozhnikov@mail.ru, andrey.mityakov@gmail.com

Предложен новый метод, основанный на совместном использовании PIV-диагностики (Particle Image Velocimetry) и градиентной теплотометрии. Одновременное использование измерительного комплекса ПОЛИС и градиентных датчиков теплового потока (ГДТП) позволяет отслеживать пульсации теплового потока при изменении скорости и турбулентности воздушного потока.

Изучение теплообмена и течения до сих пор выполнялось в ходе отдельных и достаточно сложных экспериментов. Если методика и аппаратура для исследования течений весьма разнообразны и широко апробированы, то исследования нестационарного теплообмена до последнего времени тормозились отсутствием датчиков теплового потока с необходимым быстродействием.

Появление в 90-х гг. прошлого века градиентных датчиков теплового потока [1] навело на мысль совместить исследование течения и теплообмена в одном опыте.

Действие ГДТП основано на поперечном эффекте Зеебека: при протекании теплового потока через пластину с анизотропией теплофизических и термоэлектрических свойств в направлении, нормальном вектору теплового потока, возникает термоЭДС, пропорциональная тепловому потоку. Постоянная времени всех исследованных до настоящего времени ГДТП имеет порядок  $10^{-9} \dots 10^{-8}$  с.

Экспериментальная установка включает в себя аэродинамическую трубу, модель объекта, измерительный комплекс ПОЛИС, ГДТП, светолучевой осциллограф, парогенератор и дымогенератор.

Аэродинамическая труба кафедры «Теоретические основы теплотехники» СПбПУ – открытого типа, с камерой Эйфеля. Для измерения полей скорости методом PIV стенки камеры выполнены из прозрачного материала.

Температура воздушного потока стабилизируется встроенным теплообменником и поддерживается на уровне 15...30 °С с точностью +/- 0,1 °С.

С помощью PIV-метода и градиентной теплотометрии удалось исследовать динамические тепловые характеристики и структуру воздушных вихрей, образующихся внутри нагретой лунки и вблизи нагреваемого цилиндра при его непоперечном обтекании. В результате одновременных измерений теплового потока и мгновенного поля скорости получена связь местной плотности теплового потока с полем скорости. Визуализация поля скорости показала сложную структуру вихревых образований в продольном сечении лунки и в кормовой зоне цилиндра.

Результаты опытов показали, что предложенный метод весьма перспективен в теплотехническом эксперименте для различных объектов.

## Л и т е р а т у р а

1. Сапожников С.З., Митяков В.Ю., Митяков А.В. Основы градиентной теплотометрии. СПб: Изд-во Политехн. ун-та. 2012. 203 с.

## Combination PIV Method and Gradient Heat Flux Measurement for Heat Transfer and Fluid Dynamics Research

S.Z. Sapozhnikov<sup>1</sup>, V.Y. Mityakov<sup>1</sup>, A.V. Mityakov<sup>1</sup>, D.M. Markovich<sup>2</sup>

<sup>1</sup>St.Petersburg State Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia,

<sup>2</sup>Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

All heat transfer processes from a solid body to a gas or a liquid are connected with flow characteristics in the vicinity of the streamlined body surface. As far as plenty of flow properties are changing rapidly, it is important to know both heat transfer and flow properties in a certain location and at a certain time. We present a new method of the simultaneous velocity field measurement and heat flux measurement. The velocity field was obtained by the particle image velocimetry (PIV) and the local heat flux – by the gradient heat flux sensor (GHFS).

# **ИССЛЕДОВАНИЕ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ В МЕЖЛОПАТОЧНЫХ КАНАЛАХ КОМПРЕССОРА ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ ВЕРТОЛЕТА НА РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ПОЛЕТА**

**О.В. Маракуева, Ю.М. Циркунов**

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ», Санкт-Петербург, Россия*

Авиационные газотурбинные двигатели могут работать на различных режимах: взлет, набор скорости и высоты, крейсерский полет. Они должны иметь максимальную эффективность при крейсерском полете и приемлемые параметры в условиях взлета и полета на других режимах. Частичное регулирование параметров компрессора двигателя в ряде случаев осуществляется путем изменения углов установки лопаток направляющих венцов первых нескольких ступеней, что влияет на структуру и свойства течения в межлопаточных каналах.

В данной работе численно исследуется влияние изменения углов установки направляющих и скорости вращения рабочих лопаток на вихревую структуру течения в венцах компрессора на примере вертолетного газотурбинного двигателя ТВ3-117, а также определяются степень сжатия и КПД. Задача рассматривается в стационарной трехмерной постановке. Численное моделирование основано на решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса с использованием  $k$ -epsilon модели турбулентности. Углы установки лопаток и скорость вращения роторных венцов соответствуют крейсерскому полету и режимам работы двигателя на взлете и при других скоростях полета. Расчеты были выполнены в пакете Fine/Turbo 9.1-2 версии.

## **Investigation of Flow Structure in Blade Channels of a Helicopter Gas Turbine Compressor at Different Flight Conditions**

**O.V. Marakueva, Yu.M. Tsirkunov**

*Baltic State Technical University, Saint Petersburg, Russia*

Aircraft gas turbine engines can operate in different modes. The workable compressor parameters at different flight condition are achieved by variation of vane stagger angles in several first rows. In the present study, the effect of variation of a stagger angle and a rotational speed on a flow vortex structure in a compressor flow is investigated by an example of the helicopter gas turbine engine.

# СТАЦИОНАРНОЕ СТРАТИФИЦИРОВАННОЕ ТЕЧЕНИЕ ДВУХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В НАКЛОННОЙ ТРУБЕ

**С.К. Матвеев, Д.Г. Сидоров**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*  
*E-mail: smat@rambler.ru, sidorov.d.g@yandex.ru*

Численно решаются описывающие течение уравнения

$$\frac{dp}{dz} + \rho_1 g \sin \alpha = \mu_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad \frac{dp}{dz} + \rho_2 g \sin \alpha = \mu_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

с граничными условиями прилипания на стенках и непрерывности осевой скорости  $w(x,y)$  и напряжения трения на поверхности раздела жидкостей ( $y=h$ ). Здесь  $p(z)$  – давление на поверхности раздела,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\alpha$  – угол наклона оси трубы к горизонту,  $\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$  – плотности и вязкости жидкостей.

По результатам расчетов определяются средние по сечению скорости обеих жидкостей и напряжения трения, осредненные по смоченному каждой жидкостью периметру и поверхности раздела. Эти данные могут быть использованы для приближенного расчета нестационарного течения двух жидкостей в трубе переменного сечения в предположении квазистационарности и квазиодномерности.

## Stationary Stratified Flow of Two Incompressible Fluids in an Inclined Pipe

**S.K. Matveev, D.G. Sidorov**

*Saint Petersburg State University, Russia*  
*E-mail: smat@rambler.ru, sidorov.d.g@yandex.ru*

The equations of fluid motion with the boundary conditions of zero slip steam on the walls, of continuity of the axial velocity and frictional stress at the interface between fluids are solved numerically. The cross-sectional velocity in both fluids and average frictional stresses are determined by results of calculations. These data can be used for approximate calculation of the unsteady flow of two fluids in a pipe with variable cross-section under the assumptions that the flow is quasi-stationary and quasi-one-dimensional.

# НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА В ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

**Р.Н. Мирошин, Е.С. Орлова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: miroshin-roman1938@yandex.ru, orlova\_kate\_s@mail.ru*

Теория локального взаимодействия используется для быстрых приближенных расчетов сил и моментов в сопротивляющейся среде [1]. Наиболее известной моделью, применяемой в этой теории, является формула Ньютона. В докладе с помощью обобщенного неравенства Левина-Стечкина [2] выведено неравенство, позволяющее аналитически оценить лобовое сопротивление осесимметричных выпуклых тел. Кроме формулы Ньютона [3], эффективность полученного неравенства проверяется еще на трех известных моделях взаимодействия среды с телом [4], которые для конуса приводят к точным аналитическим представлениям для лобового сопротивления (в рамках теории локального взаимодействия). Эти модели суть: зеркально-диффузная модель и ленинградская двухпараметрическая модель для разреженного газа и двухпараметрическая модель высокоскоростного внедрения ударника в грунты и металлы. Оценка лобового сопротивления других выпуклых тел осуществляется по методу касательных конусов, справедливому в рассматриваемой приближенной теории [1].

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Мирошин Р.Н., Халидов И.А.* Локальные методы в механике сплошных сред. СПб: Изд-во СПбГУ. 2002. 304 с.
2. *Мирошин Р.Н.* Оценка интеграла от произведения двух вещественных функций посредством неравенств типа Левина-Стечкина // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2014. Вып. 3. С. 28-35.
3. *Мирошин Р.Н.* Использование обобщенного неравенства Левина-Стечкина в теории локального взаимодействия // Вестник Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. 3. С. 126-130.
4. *Мирошин Р.Н.* Метод моментов в аэродинамике. СПб: Изд-во «ВВМ». 2012. 141 с.

## **Inequalities for the Drag of a Convex Body in the Theory of Local Interaction**

**R.N. Miroshin, E.S. Orlova**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The theory of local interaction is used for the fast approximate calculations of forces and moments in a resisting medium [1]. The most well-known model used in this theory is Newton's formula. The report by the generalized Levin-Stechkin inequality [2] inequality is derived, allowing to analytically evaluate the drag of axially symmetric convex bodies. In addition to Newton's formula [3], the effectiveness of the resulting inequality is verified on three well-known models of the interaction of the environment with the body [4], which for the cone lead to exact analytical representations for the drag (in the framework of the theory of local interaction). These models are: specular-diffuse model and the two-parameter model for the Leningrad rarefied gas and a two-parameter model of the high-speed implementation of the hammer into the ground and metals. Evaluation of drag other convex bodies is carried out by the method of tangent cones, which holds in the approximation theory [1].

## **References**

1. *Miroshin R.N., Halidov I.A.* Local methods in continuum mechanics. SPb: Publishing SPbSU. 2002. 304 p.
2. *Miroshin R.N.* Estimate of the integral of the product of two real functions by type inequalities Levin-Stechkin // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 10. 2014. Issue 3. P. 28-35.
3. *Miroshin R.N.* Using a generalized Levin-Stechkin inequality in the theory of local interaction // Vestnik of St. Petersburg University. Ser. 1. 2013. Issue 3. P. 126-130.
4. *Miroshin R.N.* The method of moments in aerodynamics. SPb: Publishing "VVM". 2012. 141 p.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОБЖИГА КАРБОНАТНЫХ МАТЕРИАЛОВ В ШАХТНЫХ ПЕЧАХ С ГАЗОВЫМ ОТОПЛЕНИЕМ

А.А. Моисеев<sup>1</sup>, А.В. Савин<sup>2</sup>

Концерн «Струйные технологии», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: <sup>1</sup>terminalmashine@gmail.com, <sup>2</sup>izooandrey@gmail.com

Отрасль производства извести – консервативная отрасль, которую вряд ли можно отнести к «высоким технологиям». Возможно, отчасти поэтому печи поточно-противоточного регенеративного (ППР) типа за последние 50 лет, заняв практически монопольное положение в секторе высокопроизводительных печей для высококачественной извести, не претерпели практически никаких изменений.

Концерн «Струйные технологии» предлагает новую концепцию шахтного обжига – рециркуляционную эжекторную печь, которая не имеет недостатков, характерных для доминирующих на сегодняшний день печей ППР. Для разработки печей нового типа и доказательства их необходимости и эффективности в данной работе разрабатывается инструмент математического моделирования.

Для применения в составе модели обжига карбонатных материалов в шахтных печах, имея в виду, что теплофизические и газодинамические процессы в объеме шахты имеют трехмерную и нестационарную природу, необходима простая и эффективная базовая модель обжига одиночной гранулы, играющая роль своеобразного «уравнения состояния» при описании движения всего массива гранул в шахте. Разработана и обоснована путем сравнения с результатами лабораторных измерений [1] редуцированная модель сферически-симметричного обжига гранулы известняка.

Разработана одномерная модель тепловых и газодинамических процессов, происходящих в пористой среде при наличии химических превращений. Математическая модель строится из предположения, что время установления газодинамического поля и время протекания химических реакций намного меньше характерного времени распространения тепла в твердой пористой среде. Поэтому используется следующий подход: для твердого тела решается задача нестационарной теплопроводности, а для газовой фазы стационарная задача распределения полей скорости и температуры. Модель включает в себя уравнения неразрывности и энергии, а также для описания химического равновесия совместно с уравнением энергии решаются уравнения элементного баланса, детального равновесия и уравнение для закона Дальтона. Для расчета газодинамических полей принимается допущение о постоянстве давления в пористых средах с большой проницаемостью. Для описания процессов теплообмена используется подход для фильтрационного горения [2].

В многомерной модели давление непостоянно и управляется законом Дарси. Численная схема полностью неявная. Записанные уравнения в виде разреженных матриц для решения требуют больших вычислительных затрат. Один из путей решения данной проблемы – параллельные вычисления.

Результаты моделирования разных типов печей показали, что эжекторная печь обладает низким удельным расходом топлива (на тонну продукта), сравнимым с самыми экономичными печами ППР. Также в будущем доработанная модель (с использованием параллельных вычислений) может использоваться для «умного» обжига: предсказания процессов внутри печи (при изменении настроек) в реальном времени.

## Л и т е р а т у р а

1. Голубев В.О. Диссертация «Оптимизация режима работы и конструкции шахтной печи известкового производства черной металлургии», Санкт-Петербург, 2007 г.
2. Добрего К.В., Жданок С.А. Физика фильтрационного горения газов. Минск. 2002.

## Modeling of Physical and Chemical Processes in a Shaft Lime Kiln with Gas Fuel

A.A. Moiseev, A.V. Savin

Concern Jet technologies, Saint-Petersburg, Russia

The Jet Technologies Concern offers a new concept of shaft lime kiln with ejector and recirculation zone. To prove its effectiveness and necessity, Jet Technologies developed a mathematical modeling tool. This tool can be used for any type of Kiln.

# СОВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ НЕРАВНОВЕСНОЙ КИНЕТИКИ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОТОКАХ ВОЗДУХА. ПРОБЛЕМЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

**Е.А. Нагнибеда**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: e\_nagnibeda@mail.ru*

Решение современных задач физической газодинамики требует изучения сильнонеравновесных течений, в которых кинетические процессы протекают в газодинамическом временном масштабе. Такие условия создаются, в частности, за сильными ударными волнами, возникающими в гиперзвуковых потоках около космических аппаратов при их входе в атмосферы планет, при быстром расширении газа в соплах, в экспериментальных установках. Для описания таких течений необходимо совместное решение уравнений кинетики и газодинамики. Наиболее строгим является подход кинетической теории, учитывающий детальную поуровневую кинетику в потоках газов [1]. Этот подход использован в ряде работ при численном моделировании течений многокомпонентного воздуха за ударными волнами [2], в соплах [3], у поверхностей обтекаемых тел [4]. При практическом применении этого подхода возникают трудности из-за сложности большого числа уравнений кинетики и недостатка данных о сечении неупругих процессов, особенно при химически активных столкновениях. В настоящее время проявляется заметный интерес к созданию более простых моделей, пригодных для практического использования (см., например [5, 6]). При этом необходимо рассмотрение важной проблемы – оценки влияния модели кинетики на газодинамику и, соответственно, условий применимости различных упрощений. В докладе эта проблема обсуждается при сравнении результатов, полученных при моделировании ударно нагретого воздуха на основе поуровневого описания, с учетом квазистационарных распределений, разных моделей молекул, скоростей реакций, при равновесных и неравновесных распределениях молекул набегающего потока [2, 6].

Работа выполнена при поддержке СПбГУ НИР 6.38.73.2012.

## Л и т е р а т у р а

1. *Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В.* Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб: Изд-во СПбГУ. 2003. 270 с.
2. *Kunova O.V., Nagnibeda E.A.* State-to-state description of reacting air flows behind shock waves // *Chem. Phys.* 2014. Vol. 441. P. 66-76.
3. *Colonna G., Tuttafesta M., Capitelli M., Giordano D.* Non-Arrhenius NO formation rate in one-dimensional nozzle air flow // *J. Thermophys. Heat Transfer.* 1999. Vol. 13. № 3. P. 372-375.
4. *Josyula E., Kustova E., Vedula P., Burt J.M.* Influence of state-to-state transport coefficients on surface heat transfer in hypersonic flows // In: 52nd Aerospace Sciences Meeting, AIAA paper 2014-0864, January 2014.
5. *Colonna G., Armenise I., Bruno D., Capitelli M.* Reduction of state-to-state kinetics to macroscopic models in hypersonic flows // *J. Thermophys. Heat Transfer.* 2006. Vol. 20. No 3. P. 477-486.
6. *Kunova O.V., Nagnibeda E.A., Sharafutdinov I.Z.* Vibrational-chemical coupling in air flows behind shock waves // *Proceedings of the 21st International Shock Interaction Symposium.* 2014. P. 179-184.

## Current Problems of Non-equilibrium Kinetics in High-Temperature Air Flows. Problems and Results

**E.A. Nagnibeda**

*Saint Petersburg State University, Russia*

Non-equilibrium reacting air flows are considered on the basis of state-to-state and simplified description of kinetic processes. The accuracy of reduced models is discussed comparing the results obtained for shock heated air flows in the frame of accurate and simplified kinetic theory approaches. The influence of vibrational distributions and free stream conditions on gas flow parameters is demonstrated.

# О РАСЧЕТЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС С ПОМОЩЬЮ ПРИБЛИЖЕНИЯ КАПЛЕВИДНЫМИ ТЕЛАМИ

Е.Н. Надымов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: johnnypmpu@bk.ru

Проблема нестационарного движения тела (подводных и воздушных аппаратов) в настоящее время теоретически решается только для идеальной и несжимаемой жидкости с помощью понятия присоединенных масс (ПМ). Простые аналитические формулы для их определения в двумерном случае известны у простейших контуров, а в пространственном – у эллипсоидов. Для произвольных тел используют различные приближенные методы и эксперимент. Проведение последнего связано с большими затратами, в первую очередь временными и ресурсными. В связи с этим различные приближенные подходы и численное моделирование получили широкое распространение в последнее время. Они являются реальной альтернативой испытанию моделей в натуральную величину, так как позволяют в короткие сроки просчитать большое число различных конфигураций моделируемых объектов.

В работе рассматривается класс каплевидных осесимметричных тел вращения (рис. 1), полученных в теории локального взаимодействия [1]. Данные тела могут быть использованы для расчетов ПМ объектов с более сложной геометрией. При этом за счет большого количества параметров, входящих в уравнения образующих, можно добиться наибольшего геометрического соответствия между исходным телом и приближающим.

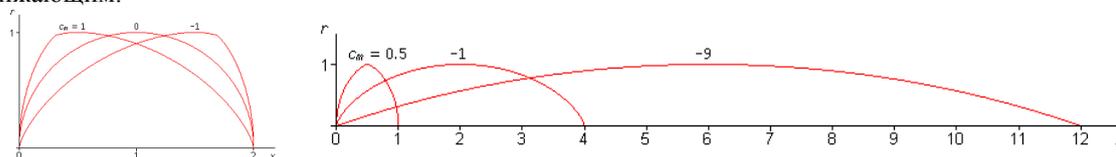


Рис. 1. Графики образующих каплевидных тел.

В работе представляется метод эквивалентного каплевидного тела, а также программный комплекс для вычисления ПМ с помощью приближения каплевидными. Приводятся результаты расчета ряда тел (рис. 2), выполненные с использованием данного пакета для нескольких наборов вычисляемых коэффициентов. Полученные результаты сопоставляются с расчетами, выполненными по методу эквивалентного эллипсоида, методу плоских сечений и экспериментальными данными.

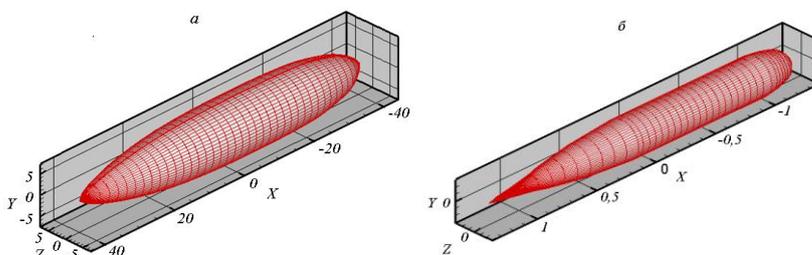


Рис. 2. Корпус жесткого дирижабля (а) и корпус модели подводного аппарата (б).

## Л и т е р а т у р а

1. Мирошин Р.Н., Халидов И.А. Локальные методы в механике сплошных сред. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2002.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.-Л.: ГИТТЛ. 1947.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука. 1970.
4. Kaplan С. Potential flow about elongated bodies of revolution. NASA Rep. 1935.
5. Короткин А.И. Присоединенные массы судостроительных конструкций. СПб: Мор вест. 2007.

## Calculation of Added Masses with Approximation of Drop-Shaped Bodies

E.N. Nadymov

Saint-Petersburg State University, Russia

Main approaches to determination of added masses with approximation of drop-shaped bodies are discussed. The software presented allows to calculate coefficients of such systems. Numerical calculation results are compared with the method of equivalent ellipsoid, strip method and results of experiments.

# **ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ГРУНТОВЫХ ВОД**

**М.А.Нарбут**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: m.narbut@spbu.ru*

Математическая теория фильтрации, начало которой было положено работами французских инженеров А.Дарси и Ж.Дюпюи, получила глубокое развитие в трудах Л.С.Лейбензона, Н.Н.Павловского, П.Я.Полубариновой-Кочиной, В.Н.Щелкачева, других отечественных и зарубежных ученых. В докладе акцентируется внимание на жизни и деятельности В.Н.Щелкачева, которого с Н.Н.Поляховым связывали тесные дружеские отношения. Одним из первых В.Н.Щелкачев стал рассматривать нестационарные задачи теории фильтрации. Фильтрационные течения подземных грунтовых вод вызывают сопряженные электрические поля, характеристики которых могут быть измерены на земной поверхности. В докладе обсуждается математическая постановка прямых и обратных задач электромеханической теории фильтрации. Рассматриваются аналитические решения простейших одномерных задач. Решения плоских и осесимметричных задач построены методом интегральных преобразований. Приводятся примеры численного решения задач в пакете MATLAB. Работа выполнена при поддержке гранта СПбГУ 6.37.171.2014.

## **Electrokinetic Polarization in the Theory of Ground Water Filtration**

**M.A.Narbut**

*Sankt-Petersburg State University, Russia*

Direct and inverse problems of electromechanical theory of groundwater filtration in porous media are considered.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ ВДУВЕ ЧЕРЕЗ ЩЕЛЕВОЕ СОПЛО ВБЛИЗИ ПЕРЕДНЕЙ ТОЧКИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

М.С. Нурмухамбетов, Ю.М. Циркунов

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: nurmuhambetov\_ma@mail.ru*

Задача активной тепловой защиты головной части летательного аппарата является одной из актуальных и приоритетных задач гиперзвуковой аэродинамики. Несмотря на значительный прогресс в области вычислительной гидромеханики, адекватное моделирование распределения теплового потока вдоль поверхности затупленного тела при различных способах охлаждения остается одной из трудных и пока нерешенных задач.

В данной работе выполнено численное моделирование течения и распределения теплового потока вдоль контура сферического затупления при тангенциальном вдуве охлаждающего воздуха через щель, образованную специальным выступом в передней части тела [1]. Изучена структура сложного течения, возникающего при взаимодействии вдуваемой сверхзвуковой щелевой струи с течением в дозвуковой части ударного слоя. Производился также расчет течения в щелевом сопле, в том числе в дозвуковой его части.

Исходные параметры набегающего потока и геометрическая конфигурация щели были приняты такими же, как в экспериментах, выполненных на ударной аэродинамической трубе УТ-1М ЦАГИ [1]. Число Маха набегающего потока было взято равным  $M_\infty = 6,04$ . Температура адиабатического торможения потока была равна 710 К. Число Маха во вдуваемой струе было равно  $M_a = 2,86$ , температура торможения охлаждающего газа во вдуваемой струе равна 286 К. При таких условиях не происходит диссоциации компонент воздуха и практически не возбуждаются внутренние степени свободы молекул, что позволило считать газ совершенным с постоянными удельными теплоемкостями. Безразмерный массовый расход охлаждающего газа (отношение расхода газа в струе к расходу невозмущенного набегающего потока через поперечное сечение тела) варьировался в пределах от 0 (нет вдува) до 0.12. Число Рейнольдса, вычисленное по параметрам набегающего потока и радиусу затупления, равно  $Re_\infty = 0,76 \cdot 10^6$ , что соответствует турбулентному режиму течения в ударном слое.

Течение моделировалось на основе уравнений Рейнольдса с использованием  $k-\omega$  SST модели турбулентности Ментера. При расчетах использовался программный комплекс ANSYS. Сетка в расчетной области была сильно сгущена к поверхности тела, чтобы разрешить тонкую структуру течения в пристеночной области.

Результаты расчетов сравнивались с экспериментальными данными по распределению теплового потока вдоль контура тела.

Авторы выражают благодарность Э.Б.Василевскому за поддержку работы и обсуждение результатов.

## Л и т е р а т у р а

1. *Vasilevskiy E.B., Ezhov I.V., Novikov A.V. Tangential Gas Injection Into a Supersonic Stream // 14<sup>th</sup> International Heat Transfer Conference, Volume 2, Paper No. IHTC14-22922. 2010. P. 701–710. doi: 10.1115/IHTC14-22922.*

## Computational Simulation of Flow and Heat Transfer in the Shock Layer of a Blunt Body with Tangential Gas Injection through a Slot Nozzle Near the Stagnation Point

M.S. Nurmukhambetov, Y.M. Tsirkunov

*Baltic State Technical University, Saint-Petersburg, Russia*

Active heat protection is considered. The cooling gas (air) is injected through slot nozzle near the stagnation point of a blunt body. The results of calculations are compared with experimental data on the distribution of heat flow along the contour of the body.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ БЛИЖНЕГО СЛЕДА ЗА САМОЛЕТОМ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКИХ УГЛАХ АТАКИ

**М.С. Нурмухамбетов, Ю.М. Циркунов**

*Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: nurmuhambetov\_ma@mail.ru*

Численное моделирование стало неотъемлемой частью проектирования авиационной техники. Определение оптимальных обводов самолетов с интегральной компоновкой довольно трудоёмко и требует множество экспериментов. Это обусловлено тем, что в интегральных компоновках аэродинамика всех элементов взаимосвязана, и общая картина обтекания складывается из множества факторов. Расчет аэродинамических характеристик с помощью современных методик позволяет подтвердить состоятельность тех или иных конструкторских решений и идей на начальном этапе проектирования и уменьшить затраты на эксперимент. В то же время в редких случаях визуализация вихревых структур в эксперименте не имеет достаточного разрешения, в отличие от расчета.

В данной работе произведен расчет обтекания самолета типа истребителя F-16 при закритическом угле атаки ( $\alpha=25^\circ$ ). Этот летательный аппарат выполнен с использованием интегральной компоновки. В расчетах были приняты следующие параметры набегающего потока: скорость 140 м/с, температура 300 К, давление 1 ата. Число Рейнольдса, вычисленное по параметрам набегающего потока и размаху крыла, равно  $Re_\infty = 9.7 \cdot 10^7$ , что соответствует турбулентному режиму течения.

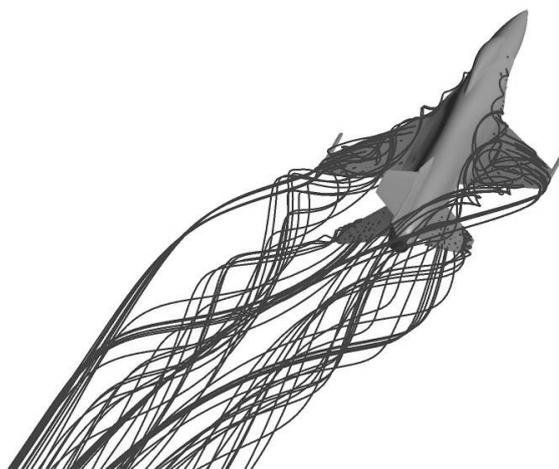


Рис 1. Картина линий тока около самолета и в следе

Течение моделировалось на основе уравнений Рейнольдса с использованием  $k-\omega$  SST модели турбулентности Ментера. В расчетах использовался программный комплекс ANSYS CFX. В расчетной области была построена тетраэдральная неструктурированная сгущенная к поверхности самолета сетка.

Подробно изучена структура сложного течения, возникающего при обтекании самолета и последующем взаимодействии вихрей, сходящихся с наплыва, крыла и заднего горизонтального оперения (см. рис.). Описаны области отрыва, возникновение и развитие циркуляционных зон, взаимодействие струи с вихревой пеленой. Построены поля завихренности в ближнем следе.

## **Numerical Simulation of Large-Scale Vortex Structure of the Near Wake for the Aircraft at Supercritical Angles of Attack**

**M.S. Nurmukhambetov, Y.M. Tsirkunov**

*Baltic State Technical University, Saint-Petersburg, Russia*

The numerical simulation of flow around the F-16 aircraft at supercritical angle of attack is considered. Particular attention is paid to the formation of vortex structures at near wake. Separation region, emergence and development of circulation zones, interaction of the jet and vortex structures are analyzed.

# ПАРНОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ – ПРИЧИНА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ЧЛЕНОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ В ВЫВОДЕ ЭЙЛЕРА УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

**В.М. Овсянников**

*Московский государственный машиностроительный университет, Россия  
E-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru*

Математическое выражение принципа сохранения массы или объема для несжимаемой жидкости и площади для плоского двухмерного течения требует, чтобы деформация растяжения вдоль одной оси сопровождалась бы деформацией сжатия в перпендикулярном к этой оси направлении. При этом возникает малый прямоугольник (см. рис.1), отражающий парность деформаций, величина которого пропорциональна произведению скоростей деформаций в направлении каждой из двух осей и квадрату времени деформаций. Уравнение неразрывности, помимо дивергенции вектора скорости, будет содержать также член второго порядка по времени с произведением двух скоростей деформаций

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + (t-t_0)(\partial u/\partial x)(\partial v/\partial y) = 0.$$

Это вычислил Эйлер [1] в 1752 году. Для течения сжимаемого газа аналогичное уравнение было получено в 2006 году [2]. С его использованием методом акустической аналогии Лайтхилла (1952, 1954 гг.) было выведено неоднородное волновое уравнение, правая неоднородная часть которого содержит произведение пары скоростей деформации растяжения и сжатия, генерирующее звук в потоке газа или периодические синусоидальные волны давления. Возникает вопрос: почему в выводе уравнения неразрывности, проводящемся с использованием формулы Гаусса-Остроградского, не возникает членов высокого порядка по времени? Ответ состоит в том, что для вывода используется форма формулы Гаусса-Остроградского с направляющими косинусами (5) из раздела 651 третьего тома Курса дифференциального и интегрального исчисления [3]

$$\iiint (\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z) dx dy dz = \iint (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS.$$

Введение в точную формулу (4)

$$\iiint (\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z) dx dy dz = \iint P dy dz + Q dx dz + R dx dy$$

направляющих косинусов приводит к учету только одной деформации в нормальном к границе контрольной фигуры направлении и пренебрежению движением в касательном к границе направлении. Это использование «гипотезы прилипания», известной в теории пограничного слоя. Учет только одной деформации из пары деформаций приводит к выпадению из уравнения неразрывности члена второго порядка малости по времени деформации и ликвидации описания явления генерации потоком сжимаемого газа звука и периодических волн давления.

На приближенность результата использования формулы Гаусса-Остроградского с направляющими косинусами для вывода уравнения неразрывности указывает также существование двух нормалей в окрестности угловых точек контрольной фигуры.

## Л и т е р а т у р а

1. Euler L. Principia motus fluidorum. Pars prior // Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. Т. 6 (1756-1757). Р. 271-311 – Opera Omnia. Ser. II. V. 13. Р. 1-369.
2. Овсянников В.М. Конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. М.: Издательство «Спутник плюс». 2014. 250 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматгиз. 1960. 656 с.

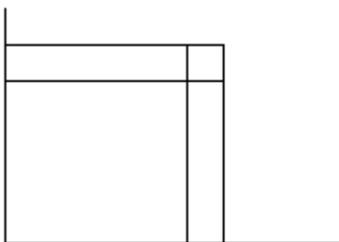


Рис. 1. Деформация контрольной фигуры

## The Pair of the Deformations Is the Reason of Occurrence of Terms of the High Order on the Time in Euler's Conclusion of the Equation of Continuity

**V.M.Ovsyannikov**

*Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Russia*

The account of simultaneous deformations of compression and stretching in perpendicular directions gives terms of the second order smallnesses on the time in Euler's conclusion of the equation of continuity. The neglect deformation in a tangential direction to boundary in Gauss-Ostrogradsky's formula with directing cosines results in loss of terms of the high order smallnesses on the time.

# ОБРАЗОВАНИЕ РЕГМАГЛИПТОВ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТЕОРИТА, ВХОДЯЩЕГО В АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ

**В.М. Овсянников**

*Московский государственный машиностроительный университет, Россия  
E-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru*

В монографии [1] были проведены расчеты разрушения метеоритов Пршибрам и Лост Сити, траектории которых были установлены фотографированием. Вычисления позволили согласовать между собой методику расчета радиационных тепловых потоков [2], величину эффективной энтальпии разрушения [3] и натурные результаты измерения величины уноса.

Однако результаты исследования нельзя считать полными. При входе в атмосферу метеоритов помимо гладкого эквидистантного разрушения нагревшейся до температуры плавления и испарения поверхности образуются характерные для них лунки с размером около 0.1 от среднего диаметра метеорита. Это регмаглипты. Теория абляции поверхности метеорита, проводящая расчет скорости плавления, испарения и химических реакций, дает монотонное изменение толщины слоя разрушения по боковой поверхности. Поэтому возникновение регулярной луночной структуры не укладывается в рамки ламинарного обтекания. Модель возникновения регмаглиптов может быть построена с использованием уравнения неразрывности, содержащего члены второго порядка малости по времени [4]. Неоднородное волновое уравнение, выведенное с учетом членов второго порядка малости, дает образование периодических синусоидальных волн давления, интенсифицирующих химические реакции разрушения поверхности именно в местах максимумов и минимумов якобиана поля скорости.

Расчет плоского обтекания кругового цилиндра дал 12 центров волнообразования (см. рис. 1) по угловой координате  $\alpha$  с интенсивностью колебаний, пропорциональной  $(\frac{1}{2})[1 + \cos(12\alpha)]$ . Характерный диаметр лунок регмаглиптов составляет в этом случае 0.13 от диаметра метеорита, что согласуется с натурными данными астрономов.

## Л и т е р а т у р а

1. Овсянников В.М. Учет селективности поглощения излучения в гиперзвуковом потоке газа. М.: Наука, 1983. 153 с.
2. Овсянников В.М. Таблицы эффективных сечений для вычисления радиационного теплового потока // В сб.: Проблемы аксиоматики в гидрогазодинамике. Москва. 2002. № 10. С. 211-230.
3. Овсянников В.М. Расчеты разрушения метеоритов Лост Сити, Грант, Пршибрам при входе в атмосферу Земли // Астрономический вестник. 1976. Т. 10. № 3. С. 151-157.
4. Овсянников В.М. Конечно-разностное уравнение неразрывности Леонарда Эйлера. М.: Издательство «Спутник плюс». 2014. 250 с.

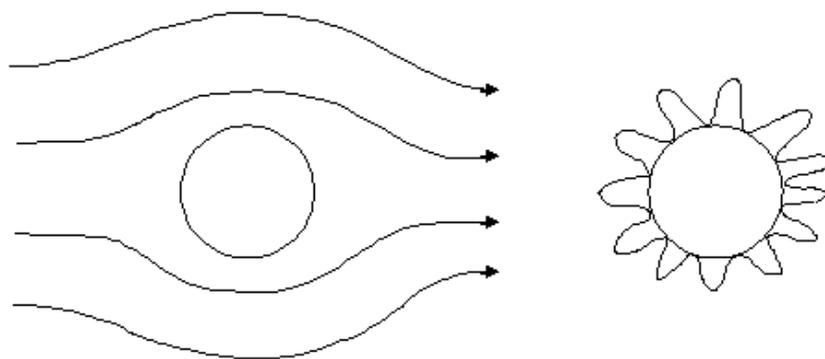


Рис. 1 Распределение интенсивности генерации волн давления по окружности обтекаемого цилиндра  $(\frac{1}{2})[1 + \cos(12\alpha)]$  при потенциальном его обтекании

## Formation of the Regagliptes on the Surface of the Meteorite, which Enters in the Atmosphere of the Earth

**V.M. Ovsyannikov**

*Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Russia*

The equation of continuity with terms of the high order on time reduces in an inhomogeneous wave equation which reduces in generation of waves of pressure upon surfaces of a meteorite. These waves increase intensity of chemical responses and reduce in origin of the regmagliptes.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВАКУУМНЫХ СТРУЙ

О.К. Овчинникова, В.А. Сергушова

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: ook127@yandex.ru

Истечение струи газа в вакуум представляет не только самостоятельный интерес как предельный случай недорасширенной струи ( $n=\infty$ ), но и с точки зрения определения параметров в изэнтропическом ядре струи при истечении в среду с конечным, но достаточно низким давлением. Для точного вычисления значений газодинамических параметров в свободно расширяющейся среде целесообразно использовать метод характеристик [1]. Для решения инженерных задач, как правило, используются приближенные модели, которые в различной степени соответствуют численным и физическим экспериментам [2].

Аппроксимация решения, полученного методом характеристик, показывает, что дальнее поле струи можно моделировать источником с полюсом в центре сопла [2]. В полярной системе координат распределение плотности газа в дальнем поле осесимметричной сверхзвуковой струи имеет вид:

$$\frac{\rho(r, \theta)}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{2} \left(1 + \frac{k}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 * \frac{k}{\gamma} - \gamma^{-1}\right) \left(\frac{r}{r_a}\right)^{-2} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_1} \cdot \left[1 - m_{z1} \left(1 - \frac{2 + \beta_*}{2 + \beta_1} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\beta_* - \beta_1}\right)\right]$$

Здесь  $k = \gamma(\gamma - 1)M_a^2$ ,  $\theta$  – угол между радиус-вектором рассматриваемой точки струи и её осью, коэффициенты  $\beta$  и  $m_{z1}$  зависят от коэффициентов тяги, конусности сопла, расхода и скорости истечения.

Для осевого распределения чисел Маха можно использовать соотношение

$$\frac{M(x)}{M_a} = \sqrt{\frac{2\gamma}{k} \left( \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} k_*^{-1/\gamma-1} (\gamma k_* - 1) \left(\frac{r_a}{x}\right)^2 \right)^{1-\gamma} - 1 \right)}, \text{ где } k_* = 1 + \frac{k}{2\gamma}.$$

Граница сплошности в приосевой зоне свободно расширяющейся струи определяется характеристиками свободного пробега молекул и плотностью газа перед соплом:

$$\frac{r}{r_a} = \left(\frac{2r_a}{l_0} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\pi\gamma}}\right)^{\frac{1}{N-1}} \left(\frac{k\rho_a}{2\rho_0} (\cos(\theta))^k\right)^{0.5}, \text{ где } l_0, \rho_0 - \text{длина свободного пробега и плотность газа перед соплом, } N = 2(1 - \omega)(\gamma - 2), \omega - \text{показатель степени в зависимости вязкости от температуры.}$$

### Л и т е р а т у р а

1. Авдуевский В.С., Аиратов Э.Я., Иванов А.В. и др. Сверхзвуковые неизобарические струи газа. М.: Машиностроение. 1985.
2. Шувалов В.А., Левкович В.А., Кочубей Г.С. Приближенные модели истечения сверхзвуковой струи газа в вакуум // Прикладная механика и теоретическая физика. 2001. Т. 42. № 2.

## Simulation of Vacuum Jets

O.K. Ovchinnikova, V.A. Sergushova

Baltic State Technical University «VOENMEH», Saint-Petersburg, Russia

Methods for calculating the parameters in freely expanding jets are described. Approximate models are used for engineering evaluation of density and Mach number.

# ПРИМЕНЕНИЕ $f$ -МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВНУТРЕННИХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛАХ И ТРУБАХ С ШЕРОХОВАТЫМИ СТЕНКАМИ

**В.А. Павловский, А.Л. Чистов**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: v.a.pavlovsky@gmail.com, chistovalexey@gmail.com*

Рассматривается турбулентное течение несжимаемой вязкой жидкости в круглой цилиндрической трубе.

Решение поставленной задачи построено на основе феноменологической  $f$ -модели турбулентности.

Сформулированы граничные условия обтекания шероховатой поверхности: на основе опытных данных Никурадзе [3] определена эмпирическая зависимость функции  $f$  на шероховатой поверхности ( $\eta=0$ ) от числа Рейнольдса  $h_+$ , вычисленного по высоте бугорков шероховатости.

$$f|_{\eta=0} = f_0(h_+)$$

Результаты расчетов сравниваются с экспериментальными данными

## Л и т е р а т у р а

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа. 2003. 840 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712с.
3. Nikuradze J. Stromungsgesetze in rauchen Rohren // Forsh. Arb. Ing. – Wes. 1933. No 391.
4. Чистов А. Л. Единая ламинарно-турбулентная дифференциальная модель для течений вязкой несжимаемой жидкости // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2008. Вып.4. С.103-106.
5. Павловский В. А., Чистов А. Л. Расчет плоского напорного течения Куэтта при произвольных числах Рейнольдса // Проблемы экономии топливно-энергетических ресурсов на промпредприятиях и ТЭС: Межвуз. сб. науч. трудов. ГОУВПО СПбГТУ РП. 2009. С. 5-12.

## Turbulence $f$ -model Use for Rough Wall Channels and Pipes Internal Flows Research

**V.A. Pavlovsky, A.L. Chistov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Round cylindrical pipe turbulence flow of Incompressible viscous liquid is considered.

Assigned problem solution based on Phenomenological turbulent  $f$ -model. Flow past rough surface boundary conditions based on Nikuradze experimental data are formulated.

Computation results and experimental evidence are compared.

## ВОЗДЕЙСТВИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН НА РЕОЛОГИЮ ДНА

С.И. Перегудин<sup>1</sup>, С.Е. Холодова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>СПбНИУ ИТМО, Россия

E-mail: peregudinsi@yandex.ru, kholodovase@yandex.ru

В естественных природных водоемах достаточно редки случаи, когда дно акватории твердо, непроницаемо и недеформируемо. Как правило, дно реки или моря представляет собой смесь, компонентами которой являются песок, ил, глина или гравий. В результате воздействия потока жидкости поверхность дна принимает волнообразную форму. Такого рода песчаные волны можно наблюдать на отмелях рек после схода воды. Подобные, только гораздо более высокие, волны образуются в пустыне в виде дюн и барханов.

Первые экспериментальные исследования песчаных волн были произведены Диконом [1]. Им была установлена приближенная зависимость между скоростью потока и скоростью движения гребня песчаных волн. В его опытах хорошо оформленные песчаные волны начинали появляться при скорости потока 0.46 м/с. При достижении предельной скорости 0.88 м/с песчаные волны размывались, исчезали и песок переносился во взвешенном состоянии.

Первое теоретическое исследование песчаных волн принадлежит Ф.Экснеру (1920 г.), который, исходя из своей приближенной теории, а также из проведенных им экспериментов в лотке с водным потоком и в аэродинамической трубе, дал, в основном, правильное описание механической стороны явления. Более того, для плоского случая им было выведено уравнение, связывающее расход  $Q(x, y)$  донного вещества с формой поверхности раздела  $\eta(x, y)$  жидкого и донного слоев. Этот расход характеризуется реологией грунта.

Концептуальному подходу присущи строгость и общность, однако он обладает тем недостатком, что может разрешить только ограниченный круг проблем. Преимуществом феноменологического подхода является его высокая прагматическая нацеленность на решение инженерных задач, феноменологические модели способствуют обоснованию и мотивировке концептуальных моделей.

Для преодоления сложностей, связанных с описанием реологических характеристик того или иного грунта, Ф. Экснер принимает гипотезу о линейной зависимости расхода от скорости жидкости  $u_b$  вблизи дна, т.е.  $Q = \kappa u_b$ . Из допущения постоянства расхода в водном слое следует равенство горизонтальных компонент донной и водной скоростей. М.А.Великанов обобщает гипотезу Экснера, полагая произвольную зависимость расхода  $Q(x, y)$  от донной скорости, т.е.  $Q(x, y) = (Q(u_b))$ . Ф.И. Франкль рассмотрел задачу о плоском движении песчаных волн с более полным учетом гидродинамики водного слоя, предполагая движение невозмущенного потока потенциальным с постоянной скоростью, а сами возмущения – малыми величинами. В работах Ю.З. Алешкова рассмотрен общий случай – непотенциальное движение слоя неоднородной жидкости над сыпучей средой.

В данном исследовании рассматривается трехмерная задача о распространении длинных волн над дном, состоящим из сыпучего вещества. Построенная математическая модель реализована аналитически, в результате чего определены все основные гидродинамические характеристики исследуемого динамического процесса. Полученные выражения для основных гидродинамических характеристик позволяют их дальнейшую графическую реализацию или вычислительный эксперимент.

### Л и т е р а т у р а

1. Холодова С.Е., Перегудин С.И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2009. 455 с.

## Impact of Long Waves on the Bottom Rheology

S.I. Peregudin<sup>1</sup>, S.E. Kholodova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saint Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Saint Petersburg ITMO University, Russia

In this research the three-dimensional task about distribution of long waves over the bottom consisting of loose substance is considered. The constructed mathematical model is realized analytically therefore all main hydrodynamic characteristics of the studied dynamic process are defined.

# ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТОВ ДИФФУЗИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КРУПНО-МАСШТАБНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ

С.И. Перегудин<sup>1</sup>, С.Е. Холодова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>СПбНИУ ИТМО, Россия

E-mail: peregudinsi@yandex.ru, kholodovase@yandex.ru

Рассматриваются крупномасштабные нелинейные колебания электропроводной идеальной жидкости переменной глубины с учетом магнитной, архимедовой, кориолисовой силы диффузии магнитного поля [1]. Для поставленной пространственной задачи допустимо предположение о линейном распределении гидромагнитного давления с глубиной. Соответствующая краевая задача для горизонтальных компонент скорости и магнитного поля и функции, описывающей нижнюю подвижную поверхность слоя, является нелинейной. С использованием анализа масштабов квазигеострофических движений производится вывод основных уравнений. Предполагая, что числа Россби, являющиеся мерой отношения локального и адвективного ускорений к ускорению Кориолиса, одного порядка, задача сводится к решению системы трех нелинейных уравнений для гидромагнитного давления и для двух функций, описывающих магнитное поле. Для бесконечно протяженной по горизонтали электропроводной вращающейся жидкости в предположении примерного постоянства наклона поверхности, ограничивающей слой сверху, на расстоянии порядка длины волны получено точное решение системы соответствующих нелинейных уравнений и дисперсионное соотношение. В действительной форме представлены основные характеристики движения.

Представленные исследования могут быть использованы в астрофизике и геофизике, в частности, при изучении процессов, происходящих в жидком ядре Земли и недрах звезд. Построенные решения реализуют наиболее простую модель жидкого ядра Земли в виде бесконечного в горизонтальном направлении слоя жидкости с учетом топографии мантии и твердого ядра Земли. Проведенные исследования могут быть также полезны при рассмотрении процесса самовозбуждения магнитогидродинамического динамо в относительно больших массах жидкого металла и технических устройствах, например, в технологических процессах, использующих напорные камеры реактора на быстрых нейтронах, домы, реакторы для производства титана и другие. Особую важность представляет использование сильных магнитных полей в решении проблем термоядерного синтеза и физики плазмы, физики твердого тела и ядерной физики, где сильные поля являются важными, а порой, и единственными инструментами исследований. Магнитные измерения позволяют однозначно диагностировать различные ситуации в работе реактора, в том числе, нарушения в работе насосов.

Системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающие рассматриваемые здесь физические явления, нелинейны, неавтономны и большой размерности. Только для частных случаев систем возможно построение аналитических и, в частности, точных решений. В общем случае исходная система аппроксимируется более простой системой, удовлетворительно описывающей свойства решений исходной системы.

В настоящем исследовании производится попытка построения аналитических, и в частности, точных решений задачи о квазигеострофическом движении электропроводной вращающейся жидкости, моделирующей волновые движения в жидком ядре Земли, ограниченном поверхностями мантии и твердого ядра Земли.

## Л и т е р а т у р а

1. Холодова С.Е., Перегудин С.И. Моделирование и анализ течений и волн в жидких и сыпучих средах. СПб: Изд-во СПбГУ. 2009. 455 с.

## Influence of the Magnetic Field Diffusion on the Large and Large-Scale Wave Movements

S.I. Peregudin<sup>1</sup>, S.E. Kholodova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saint Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Saint Petersburg ITMO University, Russia

The work presents an attempt of derivation of analytical, and in particular, exact solutions of a problem on the quasigeostrophic movement of electro-conducting rotating liquid which simulates wave movements in the liquid Earth kernel limited by surfaces of a mantle and a solid Earth kernel.

# КВАЗИОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Д.С. Пыхов, В.А. Цибаров

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: Pykhovdima@gmail.com Tstbarov@mail.ru*

К классу неньютоновских относится значительное число сред, встречающихся в природе и практической деятельности человека. К ним можно отнести и разреженный газ Барнетта [1]. Такое приближение возникает как решение задачи гемодинамики по методу оптимизации [2,3]. При рассмотрении квазиодномерных течений (в частности, в элементарной теории сопла Лавалья) в разных уравнениях решаемой системы, как правило, используются величины, имеющие различный смысл. Возникает вопрос о справедливости такого перехода. Поэтому в настоящей работе выписывается общая система уравнений гидроаэродинамики неньютоновской жидкости, усредненная по сечению канала, и условия возможности перехода к традиционной системе. Иллюстративный материал приводится применительно к изотермической несжимаемой вязкой жидкости Оствальда и газу Барнетта. Поведение вязкости степенной жидкости в канале переменного сечения исследуется на примере глинистого раствора с массовым содержанием глины 33%. Приводятся локально равновесные корреляционные функции.

## Л и т е р а т у р а

1. *Burnett D.* The distribution of molecular velocities and the mean motion in non-uniform gas // *Proc. Lond. Math. Soc.* 1935. V. 40. P. 382–435.
2. *Цибаров В.А.* Концепция современного естествознания. СПб: Изд-во “ВВМ”. 2012. 185 с.
3. *Цибаров В.А., Юдинцева Д.А.* Метод оптимизации в гемодинамике // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 2.* 2012. С. 131–138.

## Quasi-one-dimensional Flows of Non-Newton Fluids

D.S. Pykhov, V.A. Tsibarov

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The system of equations for non-Newton fluid flows is deduced in the quasi-one-dimensional approximation. For the illustration the solutions of this system for the viscous incompressible Ostwald fluid and the Burnett gas are considered.

# ДВЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЕРХЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ СО СТЕНКОЙ.

А.А. Райнес

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: raines@mail.ru*

Проблемы динамики разреженного газа базируются на решении полного кинетического уравнения Больцмана. Основная трудность решения кинетического уравнения Больцмана заключается в вычислении интеграла столкновений. В настоящей работе интеграл столкновений Больцмана вычисляется с помощью проекционного метода первоначально рассмотренного для простого газа [1] и обобщённого в [2] для бинарной смеси газов и для случая цилиндрической симметрии в импульсном пространстве. Консервативность метода обеспечивается без ограничения на допустимые значения переменных интегрирования (для всевозможных столкновений) путём специального проецирования значений подинтегрального выражения, вычисленного в неузловых точках, в ближайшие к ним узлы скоростной (или импульсной) сетки. Интерес представляет апробация данного метода на решении стационарных и нестационарных задач бинарной смеси разреженного газа. Нестационарная задача о натекании разреженного газа на стенку с зеркальным и диффузным отражением удобна тем, что для неё имеется известное газодинамическое решение, позволяющее проверить работу алгоритма и его точность. С другой стороны, данная задача представляет физический интерес, так как позволяют рассчитывать структуру ударной волны, проследить формирование этой структуры, а также образование пристеночного кнудсеновского слоя. Из работ, посвящённых сходной задаче, можно отметить ранние исследования для однокомпонентного газа [3,4]. В [3] применяется консервативная разностная схема для решения кинетических уравнений методом расщепления, в [4] – с схема второго порядка точности по  $\Delta t$  на основе модельного уравнения Крука. Для сравнения с [4] была решена задача отражения ударной волны от стенки. Решения, полученные автором в данной работе, обнаруживают физические эффекты, качественно согласующиеся с [3,4]. Все вычисления были проведены на ноутбуке Sony VAIO, процессор Intel(R)Core(TM)2CPU, 1.66GHz, 100 GB RAM.

## Л и т е р а т у р а

1. Tcheremissine F.G. Conservative evaluation of Boltzmann collision integral in discrete ordinate approximation // *Comp. Math. Appl.* 1998. V. 35. P. 215-221.
2. Raines A.A. Study of a shock wave structure in a gas mixture on the basis of the Boltzmann equation // *Eur. J. B. Fluids.* 2002. V. 21. P. 599-610.
3. Аристов А.А., Черемисин Ф.Г. Консервативная разностная схема дискретных ординат для решения кинетических уравнений методом расщепления. Прямое численное моделирование течений газа. М.: ВЦ АН СССР. 1978. С. 164-171.
4. Кудиш И.В., Рыков В.А. Отражение ударной волны от стенки // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1973. Т.13. № 5. С. 1288-1297.

## Two Problems about Interaction of the Supersonic Gas Mixture with a Wall

A.A. Rajnes

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Numerical solution of the non-steady problems of supersonic inflow of a binary mixture of a rarefied gas on a normally posed wall with mirror and diffusive reflection laws and reflection of a shock wave from the wall are studied on the basis of the kinetic Boltzmann equation for the models of hard sphere molecules. For the evaluation of collision integrals we apply the projection method, developed by Tcheremissine for a single gas, generalized by the author for a binary gas mixture and the case of cylindrical symmetry. We discovered the effects of the inflow of gas to cool wall and appearance of the wall Knudsen layer. Some of the results are illustrated by

# **ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ИОНИЗАЦИИ НА СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОДНОАТОМНЫХ ГАЗАХ**

**М. С. Романова, М.А. Рыдалевская**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: mariarom1990@mail.ru, rydalevska@rambler.ru*

Рассматриваются пространственно-однородные ионизованные газы, состоящие из нейтральных атомов, ионов с зарядом от 1 до некоторого  $k \geq 1$  и свободных электронов. Для определения равновесного состояния таких газов используются функции распределения, максимизирующие энтропию системы в условиях сохранения полной энергии, числа ионов с зарядом  $+k$  и электронов (имеются в виду как связанные, так и свободные ионы и электроны). Такой подход позволяет упростить определение равновесного состава [1] и получить для описания локально равновесных течений замкнутые системы уравнений, включающие наряду с уравнением движения три скалярных уравнения для определения макропараметров, соответствующих плотностям сохраняющихся величин. На основе этих уравнений выводится формула для скорости распространения малых возмущений в безвихревом потоке ионизованного газа. Эта формула позволяет проанализировать влияние термической ионизации на скорость распространения малых возмущений, которая обычно ассоциируется со скоростью звука в покоящемся газе. Для иллюстрации результатов проведенных исследований в докладе приводится равновесный состав смесей, полученных путем термической ионизации одноатомного азота при разных температурах и начальных плотностях, и значения скорости распространения малых возмущений в этих смесях.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Рыдалевская М.А., Романова М.С.* Определение равновесного состава ионизованных одноатомных газов // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2013. Вып. № 4. С. 108-116.

## **Influence of Thermal Ionization on Small Perturbations Velocity in Monatomic Gas**

**M.S. Romanova, M.A. Rydalevskaya**

*Saint-Petersburg University, Russia*

The gas mixtures of neutral atoms, the ions with a charge from 1 to some  $k \geq 1$  and the electrons are considered. In these mixtures the small perturbation velocity is studied. For this velocity which, as a rule, associated with the sound velocity the formula is deduced. This formula allows investigate the influence of thermal ionization on the small perturbation velocity in monatomic gases. The values of sound velocity in the ionized nitrogen at the various temperatures and initial densities are adduced for illustration of this formula application.

# **ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В НАНОЖИДКОСТЯХ. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ, ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ**

**В.Я. Рудяк**

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Россия  
E-mail: valery.rudyak@mail.ru*

Наножидкости – новый тип двухфазных флюидов, состоящих из несущей жидкости (газа) и дисперсных наночастиц, то есть частиц с характерными размерами от 1 до 100 нм. Интерес к ним, родившийся два десятилетия тому назад, непрерывно продолжает расти. Это, во-первых, связано с рядом их необычных свойств, из-за чего они, как правило, не описываются классическими теориями. Второе, чем обусловлен большой интерес к наножидкостям, – возможное их практическое применение. Наножидкости уже с успехом используются или планируется их применение в био-, МЭМС- и нанотехнологиях различного назначения, для охлаждения различных устройств, при создании новых систем транспортировки и производства тепловой энергии, новых лекарственных и косметических препаратов, систем распознавания загрязнений различного типа, очистки воздуха и воды, новых смазочных материалов, для доставки лекарственных препаратов и т.п. Для успешного применения необходимо не просто знать свойства наножидкостей (в частности, свойства переноса), но уметь их контролировать и ими управлять. Возможно ли это? И если возможно, то, что необходимо для осуществления такого проекта? Ответу на эти вопросы и посвящен настоящий доклад.

Анализируются все известные экспериментальные и теоретические данные, связанные с изучением наножидкостей. Основное внимание уделяется последним результатам, полученным автором и его группами (НГАСУ, ИТ СО РАН, СФУ). Рассматриваются как экспериментальные данные, так и данные молекулярно-динамического (МД) моделирования. В частности, систематически обсуждается: (i) экспериментальные данные и результаты МД моделирования реологии наножидкости и их вязкости; (ii) экспериментальные данные и результаты МД моделирования коэффициентов теплоотдачи и теплопроводности наножидкостей; (iii) данные МД моделирования уравнения состояния наножидкостей; (iv) механизмы процессов переноса в наножидкостях. Заключительная часть доклада посвящена молекулярно-кинетическому объяснению неклассических свойств переноса наножидкостей.

Работа выполнена при частичном финансировании проекта РНФ (соглашение № 14-19-00312).

## **Transport processes in Nanofluids. Current State, Problems and Perspectives**

**V.Ya. Rudyak**

*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Russia*

Nanofluids are a new class of dispersed fluids consist on the base fluid and dispersed nanoparticles. The nanofluids research has both fundamental and application motivation. On the one hand the thermophysical and transport properties of nanofluids are not described as a rule by classical theories. On the other hand the nanofluids may be utilized in several applications, for example, engine cooling, engine transmission oil, cooling electronics, refrigeration, drilling, lubrications, thermal storage, solar water heating, and so forth. The review of the last results of the study of nanofluids transport properties obtained by the author and his groups was presented. The experimental and molecular dynamics simulation data were considered. In particular, it is discussed (i) data of molecular dynamics simulation of viscosity and thermal conductivity coefficients of nanofluids; (ii) experimental data of the measurement of the viscosity and heat transfer coefficients; (iii) data of the molecular dynamics simulation of the state equation of nanofluid; (iv) rheology of the nanofluids; (v) mechanisms of transport processes of nanoparticles in gases and liquids.

# РАСЧЕТ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ КРЫЛЬЕВ С КРУТКОЙ

А.Н. Рябинин

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: a.ryabinin@spbu.ru

В работе исследуется обтекание сегмента несимметричного крыла J-78, концы которого обтекаются при разных углах атаки. Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса проводится с помощью пакета Ansys CFX - 13 методом конечных объемов [1]. Выбрана модель турбулентности k- $\omega$  SST. Разработан алгоритм построения расчетной сетки, имеющей вблизи крыла вытянутые вдоль крыла элементы, подобный предложенному в работе [2]. Изучены особенности течения при числе Маха набегающего потока  $M_\infty = 0.84$  в диапазоне средних углов атаки  $-1.05^\circ < \alpha < -0.65^\circ$ , соответствующих слиянию и расщеплению сверхзвуковых зон над верхней поверхностью крыла. Удлинение сегмента изменялось в пределах от 2 до 6, угол крутки варьировался от  $0.72^\circ$  до  $7.2^\circ$ .

При малых углах крутки и небольшом удлинении сегмента крыла нет одновременного существования на верхней поверхности крыла одной и двух сверхзвуковых зон. Слияние зон при увеличении среднего угла атаки или расщепление при уменьшении угла атаки происходит по всей длине сегмента, несмотря на то, что локальные углы атаки на концах сегмента соответствуют разным режимам обтекания, установленным для плоских течений [3]. Слияние и расщепление зон сопровождается скачкообразным изменением подъемной силы. Увеличение удлинения сегмента крыла и (или) увеличение угла крутки приводит к появлению переходной области средних углов атаки, в которой существуют режимы с совместным существованием одной и двух сверхзвуковых зон на верхней поверхности крыла. В этой области изменение подъемной силы происходит непрерывно.



Рис. Очертания сверхзвуковых зон около сегмента крыла. Удлинение 3. Угол крутки  $3.6^\circ$ . Угол атаки  $-0.84^\circ$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-08-00288). Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра "Вычислительный центр СПбГУ" (<http://cc.spbu.ru>).

## Л и т е р а т у р а

1. ANSYS CFX-Solver Modeling Guide. Release 13.0. Canonsburg: ANSYS, Inc. 2010. 604 p.
2. Богатырев В. В. Алгоритм построения экструзивных объемных сеток около крыла самолета // Ученые записки ЦАГИ. 2012. Т. 43. № 1. С. 71-79.
3. Kuzmin A. Non-unique transonic flows over airfoils // Computers and Fluids. 2012. V. 63. P. 1-8.

## Calculation of Transonic Flow past the Twisted Wings

A.N. Ryabinin

Saint-Peterdurg State University, Russia

The spatial flow around an asymmetric wing segment J-78 with a twist is studied. Solutions of Reynolds-averaged Navier-Stokes equations are obtained with Ansys CFX - 13 finite volume solver. A three-dimensional mesh with elongated along the wing span elements near the wing is used. The features of the flow are studied in the certain range of average angle of attack. This range corresponds to coalescence and splitting of the supersonic regions above the upper surface of the wing.

# УПРАВЛЕНИЕ СВОБОДНО-ВИСЯЩИМИ ЦИРКУЛЯЦИОННЫМИ ЗОНАМИ В СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЯХ МАЛОЙ НЕРАСЧЕТНОСТИ

А.В. Савин<sup>1</sup>, Е.И. Соколов<sup>2</sup>, П.Г. Смирнов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ЗАО «Концерн «Струйные технологии», Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет, Россия

E-mail: izooandrey@inbox.ru

В последние годы сверхзвуковые газовые струи стали объектом исследования как газодинамический феномен, не связанный с ракетными двигателями. Так, в работе [1] отмечается, что при взаимодействии сверхзвукового сдвигового слоя с диском Маха (ДМ) осесимметричной струи, истекающей в неограниченное пространство, при наличии возмущений определенного вида ДМ может претерпеть существенное изменение формы, сопровождающееся образованием в дозвуковой области за ним циркуляционной зоны (ЦЗ). Роль генератора сдвигового слоя может играть центральное тело (ЦТ) с плоским донным срезом [2]. При этом может сформироваться как присоединенная к донному срезу (рис. 1), так и свободновисящая развитая ЦЗ.

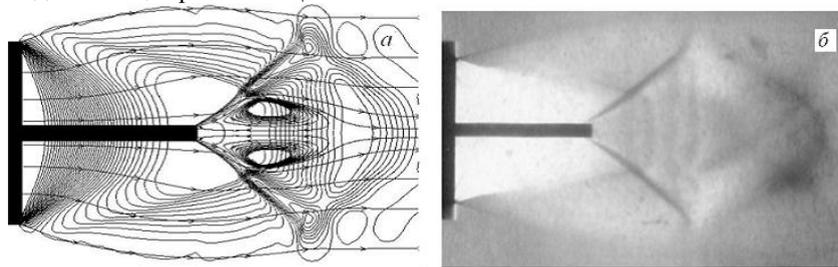


Рис. 1. Картина течения в струе, истекающей из сопла с центральным телом ( $n=2.6$ ): а — изобары и линии тока, численное моделирование; б — шлирен-теневая фотография, физический эксперимент (см. рис. 5, [2])

В настоящей работе методом вычислительного эксперимента исследуется образование и возможности управления стационарными осесимметричными свободно-висящими циркуляционными зонами в сверхзвуковых недорасширенных струях малой нерасчетности ( $n < 4$ ), сформированными за счет изменения профиля сверхзвуковой части сопла. Сформулированы физические представления о механизмах формирования свободно-висящих циркуляционных зон. Приведены новые критерии подобия, определяющие их возникновение.

## Л и т е р а т у р а

1. Глотов Г.Ф. Локальные дозвуковые зоны в сверхзвуковых струйных течениях // Изв. РАН. МЖГ. 1998. №1. С. 143-150.
2. А.В. Савин, Е.И. Соколов, Н.Б. Федосенко. Циркуляционные зоны в сверхзвуковой недорасширенной струе, истекающей из сопла с цилиндрическим центральным телом конечной длины // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 1. С. 41-48.

## Control of Floppy Circulation Zone Inside Low-Pressure Supersonic Jets

A.V. Savin<sup>1</sup>, E.I. Sokolov<sup>2</sup>, P.G. Smirnov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>ZAO "Jet Technologies", Saint Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Saint Petersburg polytechnic university, Russia

Appearance and control of stationary axisymmetric floppy circulation zones located inside first cell of low-pressure ( $n < 4$ ) supersonic jet behind Mach shock is investigated numerically. The zones are generated by a specially designed profile of a supersonic nozzle. Appearance of a floppy circulation zone without such devices like central body or additional small nozzle penetrated inside the jet has been shown. Influence of reduced pressure ( $n$  – ratio of exit pressure to ambient pressure) on the zone structure is investigated. A physical model of a floppy circulation zone, corresponding similarity criteria and numerical results are figured out in the paper.

# ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ

В.Н.Старков

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: vlad.stark@yandex.ru

Математическое моделирование динамики пузырьковых систем особенно важно в таких дорогостоящих проектах, как производство материалов в условиях невесомости. Ранее в [1,2] были предложены уравнения и исследована устойчивость для сферических слоев вязкой и максвелловской жидкостей.

Как следует из уравнений статики, при отсутствии силы тяжести и контакта с твердой поверхностью жидкий объем имеет форму шара. Пусть её радиус  $R_l$ . После помещения точно в центр этого жидкого шара газового пузыря образуется сферический слой. В начальный момент времени слой имеет радиусы  $a_0$  и  $R_0 > a_0$ .

Под действием давления газа и сил поверхностного натяжения жидкости граница газового пузыря перемещается, вызывая тем самым движение жидкости. Будем считать, что система в процессе раздувания сохраняет сферическую симметрию и слой жидкости, имеющий постоянную температуру, в любой момент времени  $t$  будет заключён между радиусами  $a(t)$  и  $R(t)$ , которые связаны условием постоянства объёма жидкости:  $a^3 + R_l^3 = R^3$ .

Используя решение уравнения неразрывности  $u(r, t) = \frac{c(t)}{r^2}$ , после интегрирования уравнения движения по  $r$  от  $a$  до  $R$  с использованием граничных условий получаем:

$$\rho \left[ a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 \left( 1 - \frac{a}{R} \right) - \frac{\dot{a}^2}{2} \left( 1 - \frac{a^4}{R^4} \right) \right] + \frac{2s}{a} \left( 1 + \frac{a}{R} \right) = p_g + 3 \int_a^R \frac{\sigma}{r} dr.$$

Изменение давления в газе  $p_g$  описывается формулой  $p_g = p_{g0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4$ .

Рассмотрим степенную жидкость, подчиняющуюся реологическому закону состояния Оствальда-

Вейля  $\sigma_{ik} = 2K_n \left| 2e_{ml}e_{lm} \right|^{\frac{n-1}{2}} e_{ik}$ , где  $i, k, l, m = 1, 2, 3$ ,  $K_n$  – консистентность жидкости, чаще всего равная единице,  $n$  – показатель неньютоновости.

Выберем при расчете для псевдопластических жидкостей  $n = 0.5$ , для дилатантных –  $n = 1.5$ . В этом

случае тензор напряжений  $\sigma_{rr} = -(2)^{n+1} (3)^{\frac{n-1}{2}} K_n r^{-3n} a^{2n} \dot{a} \left| \dot{a} \right|^{n-1}$ .

Были рассчитаны изменения радиуса газового пузыря во времени и соответствующие фазовые портреты для различных значений показателя неньютоновости.

## Литература

1. Пилат Е.В., Старков В.Н. Исследование динамики жидкого сферического слоя // Труды 36 межвузовской конференции аспирантов и студентов "Процессы управления и устойчивость"/Под ред. Н.В.Смирнова, В.Н.Старкова. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2005. С. 181-185.
2. Старков В.Н., Пилат Е.В. Исследование радиальных колебаний сферического слоя максвелловской жидкости // Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. СПб: Изд-во «ВВМ». 2006. 702 с.

## Equations of Dynamics for an Ostwald Fluid Spherical Layer

V.N. Starkov

Saint-Petersburg State University, Russia

The paper deals with derivation of nonlinear equations for the dynamics of a spherical layer of a fluid with rheology described by the Ostwald law. The time variation of the gas bubble inner radius in the spherical layer is numerically calculated. The phase-portraits of the dynamical system are simulated. They vary for different non-Newtonian factors.

# ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ И ГИДРОФИЗИКИ

Ю.Г. Степанов

*Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург, Россия*

*E-mail: StepYG@yandex.ru*

Теоретические исследования динамики сплошной среды позволили обосновать механизм возникновения крутящих моментов и моментных напряжений при динамической деформации сдвига в сплошной среде и получить для крутящих моментов соответствующие математические выражения [1-4], что позволило более обоснованно использовать в гидромеханике основные уравнения модели сплошной среды с моментными напряжениями [5].

Теоретический анализ деформационного движения сплошной среды, выполненный на основе работ Умова, Планка, Лауэ, показал, что в процессе сдвигового течения вязкой жидкости в ней возникают моментные напряжения, обусловленные действующими в жидкости различными потоками энергии - импульса, и что причиной потери устойчивости сдвигового течения вязкой жидкости следует признать нарушение баланса моментных напряжений, возникающих при динамической деформации сдвига сплошной среды.

Использование модели сплошной среды с моментными напряжениями позволило с новых позиций подойти к определению критериев ламинарно-турбулентного перехода в сдвиговых течениях однородной и неоднородной жидкости, а также к определению критериев разрушения внутренних волн и механизмов формирования слоистых структур в стратифицированной по плотности морской среде.

## Л и т е р а т у р а

1. *Степанов Ю.Г.* Возникновение моментных напряжений при динамической деформации сплошной среды и механизм разрушения внутренних волн // Труды Международной конференции по судостроению. СПб: Изд-во ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 1994. Секция F. С. 359-366.
2. *Степанов Ю.Г.* Об устойчивости сдвиговых течений жидкости и критериях перехода к турбулентной форме течения. Труды II Международной конференции по судостроению - ISC'98. СПб: Изд-во ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. 1998. Секция E. Т. 1. С. 316-323.
3. *Stepanov Yu.G.* On the internal wave breaking criteria in stratified ocean // Proceedings of Third International Shipbuilding Conference – ISC'2002. 2002. St.Petersburg, Russia. Section E. P. 143-150.
4. *Степанов Ю.Г.* О механизмах формирования слоистых структур в распределениях гидрофизических полей в стратифицированной морской среде. // Труды X Всероссийской конференции «ПРИКЛАДНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ГИДРОАКУСТИКИ И ГИДРОФИЗИКИ». СПб: Наука. 2010. С. 266-269.
5. *Николаевский В.Н.* Асимметричная механика континуумов и осредненное описание турбулентных течений // ДАН СССР. 1969. Т. 184. № 6. С. 1304-1307.

## Some Features of Application of the Continuous Medium with Couple-Stresses Model in Hydrodynamics and Hydrophysics

Yu.G. Stepanov

*Krylov State Research Centre, Saint-Petersburg, Russia*

The theoretical analysis of a deformation movement of continua, carried out on the basis of works by N. Umov, M. Planck, M. Laue, has shown that the couple-stresses are generated in the shear flow of viscous fluid due to the different energy-momentum fluxes acting within the fluid flow and that the reason for instability of shear flows of a liquid and the transition from laminar to turbulent flow is the loss of balance of torque and couple-stresses, which arises due to dynamically induced shear deformation of continua.

Consideration of the couple-stresses action in the shear flows of viscous fluid gives a new point of view in studying hydrodynamics and hydrophysics problems.

# ЭВОЛЮЦИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ И КОНТРОЛИРУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

**Н.М. Терехова**

*Институт теоретической и прикладной механики им. Христиановича, Новосибирск, Россия  
E-mail: terekh@itam.nsc.ru*

В рамках слабонелинейного приближения классической теории возмущений моделируется область нелинейной эволюции возмущений в сверхзвуковом пограничном слое при числе Маха  $M=2$ .

Рассмотрены возмущения двух типов – искусственные (или контролируемые) и естественные. В целом их состав и амплитудно-частотные характеристики отличаются значительно. В экспериментах в аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН контролируемые возмущения вводятся в пограничный слой с помощью искрового источника. При этом в спектре выделяются две несущие частоты 10 и 20 кГц, а сами возмущения представляют собой так называемые «волновые поезда», в которых присутствуют и двумерные и трехмерные компоненты достаточно широкого спектра по трансверсальным волновым числам. Нелинейная динамика их зависит от соотношения начальных интенсивностей возмущений на выделенных несущих частотах. В зависимости от значения начальных амплитуд эволюция «волновых поездов» может происходить по-разному.

В работе рассмотрена продольная динамика компонент в рамках изучения группового триплета, составленного из синхронизированных простых триплетов. Рассмотрен групповой триплет из 29 простых. В работе моделируются особенности динамики двумерных и трехмерных компонент.

Динамика развития естественных возмущений обладает рядом особенностей. В целом передача энергии от наиболее энергонесущих компонент может происходить не только в область субгармонических, но и в область высоких частот (обертонов). Тогда более реально построить каскадный процесс, в котором будет задействовано максимальное число синхронизированных частот. Такой каскадный процесс был реализован для 5, 7, 11 и 20 спектральных частот [1].

В целом такое модельное рассмотрение позволяет оценить нелинейное двухчастотное взаимодействие, проходящее между двумерными и трехмерными компонентами, связанными условиями трехволнового резонанса. В случае естественных возмущений, когда взаимодействуют многочастотные составляющие, можно попытаться выявить наиболее интенсивно взаимодействующие трехмерные компоненты разных частот.

## Л и т е р а т у р а

1. *Terekhova N.M.* Features of the development of natural and controlled disturbances into the weakly nonlinear region for supersonic boundary layers at  $M = 2$  // 17th International Conference on the Methods of Aerophysical Research (ICMAR'2014) (Russia, Novosibirsk, 30 Jun. - 6 Jul., 2014): Abstracts. Pt.I. Novosibirsk. 2014. P. 202-203.

## Evolution by Natural and Controlled Disturbances in Supersonic Boundary Layer

**N.M. Terekhova**

*Christianovich's Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Novosibirsk, Russia*

This work is an attempt to describe the area of nonlinear evolution of disturbances in supersonic boundary layer at Mach number  $M = 2$ . The disturbances chosen two types - artificial or controlled and natural. In general their composition and the amplitude-frequency characteristics differ significantly.

The group triplet (29 simple triplets) are examined for the controlled disturbances. We modeled features of the dynamics of two-dimensional and three-dimensional components. For the natural disturbances then build more realistic cascade process which is involved in the maximum number of synchronized frequencies. This cascade process has been implemented for 5, 7, 11 and 20 spectral frequencies.

# КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТОКСА В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

**С.А.Чивилихин**

*Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия  
sergey.chivilikhin@gmail.com*

Деформация изолированного объема вязкой жидкости под действием внешних сил в случае малых чисел Рейнольдса может быть описана с помощью квазистационарных уравнений Стокса [1]. Эти уравнения применимы, если суммарная внешняя сила и суммарный момент внешних сил равны нулю [2]. В настоящей работе показано, что эти условия являются излишне ограничительными.

Например, для капли высоковязкой жидкости, падающей в однородном гравитационном поле в безвоздушном пространстве, суммарная сила, приложенная к капле, равна не нулю, а весу капли. Следовательно, мы не можем использовать квазистационарное приближение Стокса для описания эволюции формы капли под действием капиллярных сил, используя лабораторную систему отсчета. Однако в неинерциальной системе отсчета, связанной с центром масс капли, суммарная сила, приложенная к капле, равна нулю. В такой системе отсчета можно использовать уравнения Стокса для описания гидродинамики капли.

В общем случае, если суммарная сила и суммарный момент сил, приложенных к изолированному объему, отличны от нуля, мы можем исключить их, используя специальную неинерциальную систему отсчета. В каждый момент времени сопоставим рассматриваемому изолированному объему жидкости некое твердое тело, имеющее ту же форму и плотность, что и жидкая капля. Приложим к этому твердому телу ту же суммарную силу и тот же суммарный момент сил, которые приложены к капле [3]. Такое тело в каждый момент времени будет двигаться с некоторым линейным и угловым ускорением. Однако в неинерциальной системе отсчета, связанной с рассматриваемым телом, это тело неподвижно. Следовательно, суммарная сила и суммарный момент сил, приложенных к телу, равны нулю. Это связано с действием дополнительных сил, действующих на тело в неинерциальной системе отсчета. Рассматривая каплю в описанной неинерциальной системе отсчета, видим, что в этой системе отсчета суммарная сила и суммарный момент сил, приложенных к капле, равны нулю. Это позволяет использовать квазистационарное приближение Стокса для описания гидродинамики капли.

В качестве примера описанный подход применен к описанию движения и деформации двумерного изолированного объема вязкой жидкости в силовом поле [4].

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
2. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
3. *Chivilikhin S., Amosov A.* Planar Stokes flows with free boundary // In book "Hydrodynamics - Advanced Topics". Book edited by: Dr. Harry Edmar Schulz, André Luiz. P.77-92. Intech. 2011.
4. *Чивилихин С.А.* Плоское капиллярное течение вязкой жидкости с многосвязной границей в приближении Стокса // МЖГ. 1992. №1. С. 117-122.

## **The Stokes Equations in the Non-Inertial System of Reference**

**S.A. Chivilikhin**

*ITMO University, St. Petersburg, Russia*

If the total force and the total moment of force applied to the isolated volume of viscose liquid are not equal to zero we can eliminate them using a non-inertial reference system. In this system connected with a rigid-body which moves due to the same force and moment of force, we can use the Stokes approximation.

# ДВУХТЕМПЕРАТУРНЫЕ СКОРОСТИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ В УДАРНО НАГРЕТОМ ВОЗДУХЕ

И.З. Шарафутдинов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: shiaz@yandex.ru

В докладе представлены результаты исследования двухтемпературных коэффициентов скорости обменных химических реакций в высокотемпературном пятикомпонентном воздухе ( $N_2, O_2, NO, N, O$ ). Знание этих коэффициентов необходимо для решения уравнений колебательной и химической кинетики на основе многотемпературного описания, при котором в число макропараметров потока, кроме температуры газа, входят температуры внутренних степеней свободы молекул [1]. Такому подходу в настоящее время уделяется большое внимание. В данной работе изучены коэффициенты двух реакций образования окиси азота  $N_2 + O \leftrightarrow NO + N$ ,  $O_2 + N \leftrightarrow NO + O$ , зависящие от двух температур – температуры газа и температуры, характеризующей колебательную энергию молекул азота или кислорода, входящих в реакцию.

Показано влияние колебательной неравновесности молекул азота и кислорода на коэффициенты скорости соответствующей обменной реакции на основе сравнения полученных двухтемпературных коэффициентов с одготемпературными, описывающими реакцию в термически равновесном газе. Проведено сравнение двухтемпературных коэффициентов, найденных при использовании разных моделей рассматриваемых реакций, зависящих от колебательных уровней реагентов [2]. Проанализирована роль выбора поуровневой модели при вычислении двухтемпературных коэффициентов. Даны оценки влияния ангармоничности колебаний молекул  $N_2$  и  $O_2$  на двухтемпературные коэффициенты скорости реакций обмена. Полученные результаты использованы в расчетах трехтемпературной колебательной и химической кинетики в потоках ударно нагретого воздуха при разных условиях в набегающем потоке.

Работа выполнена при поддержке СПбГУ НИР N 6.38.73.2012.

## Л и т е р а т у р а

1. Нагнибеда Е.А., Кустова Е.В. Кинетическая теория процессов переноса и релаксации в потоках неравновесных реагирующих газов. СПб:Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2003.
2. Физико-химические процессы в газовой динамике (Под редакцией Черного Г.Г. и Лосева С.А.). М.: Науч. мир. 2002. Т. 2. 368 с.

## Two-Temperature Rate Coefficients of Chemical Reaction in Shock Heated Air

I. Z. Sharafutdinov

Saint-Petersburg State University, Russia

Two-temperature rate coefficients for exchange reactions of  $NO$  formation in non-equilibrium air mixture ( $N_2, O_2, NO, N, O$ ) are studied. Different models for state-dependent reaction rates are used for calculation of two-temperature coefficients. The influence of vibrational non-equilibrium state on reaction rates as well as effects of anharmonicity of molecular vibrations for  $N_2$  and  $O_2$  molecules are estimated. The results are used for numerical modeling of three-temperature air flows behind shock waves.

# СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ В ПОТОКАХ УГЛЕКИСЛОГО ГАЗА

**С.Г. Шумков**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,  
E-mail: m06ssg@gmail.ru*

Настоящий доклад посвящен исследованию релаксационной структуры ударных волн в углекислом газе. Предполагается, что молекулы углекислого газа наряду с поступательными обладают вращательными и колебательными степенями свободы. Для описания колебательных степеней свободы в рассматриваемом диапазоне температур используется модель гармонического осциллятора. Ударная волна рассматривается как узкий переходный слой между двумя состояниями полного термодинамического равновесия.

В газе с внутренними степенями свободы молекулярные столкновения происходят с разной частотой. Так, например, столкновения, при которых изменяются лишь поступательная и вращательная энергия молекул, происходят значительно чаще столкновений, при которых меняются уровни их колебательной энергии, а столкновения, при которых изменяются уровни колебательной энергии сталкивающихся молекул, но сохраняется суммарное значение колебательной энергии каждой моды, значительно чаще колебательных обменов, при которых происходят обмены между разными колебательными модами.

Разделение молекулярных столкновений на группы позволяет разделить процесс релаксации на разные стадии, каждой из которых можно сопоставить время релаксации, которое определяется средним временем между соответствующими столкновениями. Это позволяет разделить ударную волну на релаксационные зоны разной толщины. Каждая из зон соответствует определенной стадии релаксации.

На границе каждой из зон выписываются обобщенные условия динамической совместности. Они представляют собой системы алгебраических уравнений. Решая эти системы уравнений, можно определить параметры газа на границах релаксационных зон.

В качестве иллюстрации в докладе исследуется релаксационная структура косых скачков уплотнения. Исследуется влияние газодинамических параметров в набегающем потоке и наклона скачка уплотнения на параметры за скачком.

## **Shock Waves in Flows of Carbon Dioxide**

**S.G. Shumkov**

*Saint Petersburg State University, Russia*

This study is devoted to investigation of shock waves relaxation structure in carbon dioxide. It is supposed that molecules of CO<sub>2</sub> along with translational degrees of freedom can possess rotational and vibrational degrees of freedom. For the description of vibrational degrees of freedom at temperature range under study the model of harmonious oscillator is used.

In gas with internal degrees of freedom molecules collide at different rates. For example, collisions resulting in variation of only translational and vibrational energies of molecules occur more often than those resulting in the vibrational energy variation, and collisions for which molecular vibrational energy levels are changed, but accumulative value of each mode vibrational energy is conserved, occur more often than vibrational exchanges between different vibrational modes.

Splitting molecular collisions into groups allows specifying different stages of relaxation process, each of them could be characterized by a relaxation time defined as a mean time between corresponding collisions. This allows splitting a shock wave in relaxation zones of different width. Each zone is associated to a certain relaxation stage.

Generalized dynamic compatibility conditions at the boundary of each zone are derived. Solving these systems one can find gas parameters at the relaxation zones boundaries.

For illustration, we study the relaxation structure of oblique shock waves. Influence of gas dynamics parameters in incident flow and oblique shock with different slopes on parameters behind the shock is studied.

# IV

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

**MECHANICS OF SOLIDS**

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КРУЧЕНИЯ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ ИЗ РАЗУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

**Е.А. Бахарева, В.В. Стружанов**

*Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Россия  
E-mail: bahareva.e.a@mail.ru, stru@imach.uran.ru*

В классической механике деформированного твердого тела, как правило, не учитываются эффекты, связанные с переходом материала в закритическую стадию деформирования. Состояние предразрушения материала характеризуется существенным повреждением материала микродефектами и падением его несущей способности. С феноменологической точки зрения закритическую стадию определяет падающий участок полной диаграммы деформирования [1, 2], получаемой в результате решения обратной некорректной задачи, а именно уравнения Вольтерры I рода, к которому приводят уравнения статического равновесия. При учете закритической стадии деформирования материала возникает необходимость в установлении существования и единственности решения нелинейных краевых задач для определения НДС тел с разупрочняющимися элементами, а также в создании эффективных численных методов расчета параметров всех равновесий и методик исследования устойчивости равновесий. Решить сложившуюся проблему возможно, применяя специальные математические методы, нетрадиционные для механики сплошных сред, такие как методы математической теории катастроф и теории особенностей дифференцируемых отображений.

Рассмотрена задача о кручении стержня круглого поперечного сечения, изготовленного из материала, диаграмма деформирования которого при чистом сдвиге обладает падающей ветвью. Установлено, что при включении в рассмотрение эффекта разупрочнения функция потенциальной энергии системы терпит катастрофу типа складки. Проведено исследование устойчивости процесса деформирования, основанное на методе специальной математической теории катастроф. В соответствии с методом скачкообразный переход от устойчивого к неустойчивому равновесию происходит в вырожденных критических точках, отвечающих вырождению матрицы Гессе.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 13-08-00186.

## Литература

1. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материалов в элементах конструкций. Екатеринбург: УрО РАН. 1995. 190 с.
2. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1. 2004. 265 с.

## The Method of Stability Analysis of Circular Rods Torsion from Softening Material

**E.A. Bakhareva, V.V. Struzhanov**

*Institute of Engineering Science of the Ural Branch of RAS, Yekaterinburg, Russia*

Effects associated with the transition of the material in the postcritical phase of deformation are not considered in traditional mechanics of solid. A material predestruction state is described significant damage of material by microdefects. Therefore carrying capacity decreases. The postcritical phase of deformation is defined by falling region of complete stress-strain diagram. This diagram is obtained as a result of inverse incorrect problem solution. Namely static equilibrium equations are converted to Volterra equations, which are appeared incorrect problem. It's necessary to establish the existence and uniqueness of nonlinear boundary value problems solution taking into account supercritical phase of material. These problems are associated with the definition of body stress-strain state with softening elements. It's important to create efficient numerical algorithms for computation of all equilibrium parameters and methods of equilibriums stability analysis. This problem can be solved using special mathematical methods of nontraditional continuum mechanics such as the modern catastrophe theory and the theory of singularities of differentiable mappings.

The problem about the rod torsion of circular cross-section is considered. Rod material is described by stress-strain diagram with falling region obtained in pure shear. It's established that potential energy function has a fold-type catastrophe taking into account the effect of material softening. The stability analysis of the deformation process is conducted using special mathematical catastrophe theory.

# СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

**Е.Б. Воронкова, С.М. Бауэр**

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
E-mail: e.voronkova@spbu.ru, s\_bauer@mail.ru*

Решается задача о колебаниях трансверсально-изотропных круглых и кольцевых пластин. Классическая теория пластин Кирхгоффа-Лява учитывает только свойства пластины в срединной поверхности, поэтому частоты, получающиеся для изотропных и трансверсально-изотропных пластин по классической теории, одинаковы. Однако известно [1], что учет деформаций сдвига в направлении толщины оболочки может вносить значительные изменения в расчеты, выполненные по классической теории. Величина этих поправок тем больше, чем больше отношение  $E_i/G_{i3}$ . Здесь  $E_i$  – модули упругости в тангенциальном направлении,  $G_{i3}$  – модуль сдвига в направлении толщины пластины. Таким образом, для анизотропных пластин, модули упругости которых могут сильно отличаться по величине, необходимо проводить расчеты по так называемым неклассическим теориям, позволяющим учитывать распределение напряжений и перемещений, возникающих в пластине, по ее толщине. Ряд таких теорий обсуждается в работах [2-4].

В данной работе собственные частоты неоднородных трансверсально-изотропных круглых и кольцевых пластин определяются по классической теории, теории Тимошенко-Рейсснера, теории, предложенной Amabili [4], теории оболочек средней толщины Палия [5], учитывающей изменение толщины пластины, а также уточненной итерационной теории Родионовой-Титаева-Черныха [6]. Аналитические результаты сравниваются с результатами, полученными методом конечных элементов в пакете Comsol Multiphysics (v. 4.4).

Расчеты показывают, что и неоднородность, и анизотропия оказывают существенное влияние на величину собственных частот. Различие тангенциальных и нормальных модулей упругости оказывает большее влияние на частоты высших порядков. Неоднородность пластины больше влияет на низшие частоты.

## Л и т е р а т у р а

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1967. 226 с.
2. Altenbuch H. Theories for laminated and sandwich plates. An overview. Mech Compos Mater **34**, 1998, p. 333-349
3. Reddy J.N., Wang C.M. An overview of the relationships between of the classical and shear deformation plate theories // Composites Science and Technology. 2000. V. 60. P. 2327–2335.
4. Amabili M. Nonlinear vibrations of laminated circular cylindrical shells: Comparison of different shell theories // Composite Structures. 2011. V. 94. P. 207-220.
5. Палий О.М. Вариант прикладной теории толстых оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2014. № 2. С. 87-97.
6. Родионова В.А., Титаев В.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 1996. 280 с.

## Free Vibration of Nonhomogeneous Transversaly isotropic Circular Plates

**E.B. Voronkova, S.M. Bauer**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Free vibration analysis of circular nonhomogeneous plates using the nonclassical shells theories is made. Some refined 2D plate theories for anisotropic plates of moderate thickness are used. In these theories deformations, rotation and bending of the fibers and their elongations in the direction of the thickness of the plate are taken into account. Numerical results determined by the presented theories are compared with the FEM results A three-dimensional mathematical model is numerically analyzed by the FEM code.

# ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО И СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЕВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

С.М. Бауэр<sup>1</sup>, В.И. Ершов<sup>2</sup>, А.Л. Смирнов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Тутаевский филиал ФГБОУ ВПО "Рыбинский государственный авиационный технический университет им. П.А. Соловьева", Россия

E-mail: s\_bauer@mail.ru, evi-52@mail.ru, a\_l\_smirnov@mail.ru

Рассматривается трехмерная задача о деформации трансверсально-изотропных сферического и цилиндрического слоев, находящихся под действием нормального внутреннего и внешнего давлений. Такая модель может быть использована, например, для описания изменения напряженно-деформированного состояния внешней оболочки глаза при введении внутриглазных инъекций или при исследовании деформации кровеносных сосудов. Для изотропных слоев эти задачи, известны как задачи Ламе. Для трансверсально-изотропного слоя аналитическое решение было получено в [1,2], однако формулы, описывающие деформации, оказались довольно громоздкими, и для анализа влияния параметров слоя на напряженно-деформированное состояние слоя удобнее использовать асимптотическое решение задачи. Авторами были получены асимптотические формулы, описывающие поведение мягкого слоя, то есть такого, у которого жесткость в поперечном направлении много меньше, чем в касательной плоскости. В работе проводится сравнение точных и асимптотических решений и исследуется влияние геометрических и физических параметров на величину относительного изменения толщины слоя. Из асимптотических формул следует, что при деформации слоя под действием нормального давления, относительная толщина слоя меняется тем больше, чем меньше толщина слоя.

Известно, что при глаукоме, глазном заболевании, которое сопровождается, как правило, повышенным уровнем внутриглазного давления, наблюдается уменьшение толщины склеры. Этот факт согласуется с результатами математического моделирования. Зная относительное изменение толщины при увеличении внутреннего давления, можно оценить отношение радиального и тангенциального модулей упругости цилиндрического или сферического слоя.

## Л и т е р а т у р а

1. Бауэр С.М., Замураев Л.А., Котляр К.Е. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики. 2006. №2. С. 43-49.
2. Бауэр С.М., Воронкова Е.Б. Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев под действием нормального давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 86-93.

## Deformations of Spherical and Cylindrical Layers under Normal Pressure

S.M. Bauer<sup>1</sup>, V.I. Ershov<sup>2</sup>, A.L. Smirnov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Tutaev branch of "Rybinsk State Aerotechnical University named after P.A. Soloviev", Russia

The deformation of the orthotropic spherical and cylindrical layers under normal pressure applied on the outer and inner surfaces is analyzed. For the layer, which is much softer in the transverse direction than in the tangential plane, the singularly perturbed boundary value problem is solved. In the zeroth approximation the asymptotic formula for the change of the relative layer thickness under normal pressure is obtained. Also the effect of Poisson ratio and the layer thickness on the deformation is studied. The asymptotic results well agree with the exact solution. The developed formulas are used in analysis of the scleral shell under intraocular pressure and may also be used in solution of the inverse problem, i.e. in evaluation of elastic moduli of the human eye shells.

# **ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВАРИАНТОВ МАРТЕНСИТА НА ОБРАТИМУЮ И НЕОБРАТИМУЮ ДЕФОРМАЦИЮ В СПЛАВАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ**

**Ф.С. Беляев**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: belyaev\_fs@mail.ru*

В последнее время сплавы с памятью формы находят все большее применение в технике и медицине. В связи с этим возникает необходимость в надежных средствах расчета функциональных свойств рабочих элементов из этих материалов. Для описания обратимой и необратимой деформации хорошо зарекомендовали себя микроструктурные модели. Для нахождения обратимой деформации необходимо описать процессы, связанные с прямым и обратным мартенситными превращениями. При охлаждении мартенсит в каждом зерне образуется в нескольких вариантах, отличающихся направлениями кристаллографических осей. Многочисленные наблюдения показывают, что эти варианты образуют согласованные пары.

Разработана микроструктурная модель, учитывающая взаимное влияние вариантов мартенсита. В рамках этой модели удалось описать рост мартенсита в виде согласованных пар, что позволило более точно описать деформацию при фазовых превращениях. Модель имеет параметр, определяющий силу влияния вариантов друг на друга. В предельном случае, когда этот параметр равен нулю, модель описывает независимый рост вариантов мартенсита. Изучено влияние силы взаимодействия вариантов на обратимую и необратимую деформацию. При увеличении силы взаимодействия обратимая деформация (память формы) уменьшается. Это связано с тем, что с увеличением силы взаимодействия увеличивается объемная доля вариантов, согласованных с наиболее благоприятными вариантами, доля которых соответственно снижается, что уменьшает общую деформацию. Необратимая деформация увеличивается с ростом силы взаимодействия, так как увеличивается число вариантов, аккомодация которых создает пластическую деформацию.

Разработанная модель дает широкие возможности для точного описания обратимой и необратимой деформации сплавов с памятью формы при однократных и многократных термосиловых воздействиях.

## **Influence of Martensite Variants Interaction on Reversible and Irreversible Deformation in Shape Memory Alloys**

**F.S. Belyaev**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

At present shape memory alloys are increasingly used in engineering and medicine. In this connection there arises a need in reliable tools for calculating the functional properties of working elements made of these materials. Microstructural models have proved to be a good tool for the description of reversible and irreversible deformation. For calculating the reversible deformation, one has to describe the processes associated with the forward and reverse martensitic transformation. On cooling martensite in each grain originates in several variants differing in the directions of the crystallographic axes. Numerous observations show that these variants form corresponding pairs.

A microstructural model of shape memory alloys, which accounts for the interaction of martensite variants has been developed. It can describe the growth of corresponding variant pairs of martensite allowing more accurate description of the deformation during phase transformations. The model has a parameter that determines the influence of variants on each other. When this parameter is zero, the model describes the independent growth of martensite variants. The influence of variants interaction strength on the reversible and irreversible deformation was studied. When the interaction force increases the reversible deformation (shape memory) decreases. This is due to the fact that an increase of the interaction force also increases the volume fraction of variants corresponding to the most favorable ones, whose fraction in turn decreases leading to reducing of the total strain. The irreversible deformation increases with the interaction force, because the number of variants causing plastic deformation during accommodation also grows.

The developed model provides good opportunities for accurate description of the reversible and irreversible deformation of shape memory alloys under one or repeated cycles of thermomechanical loading.

# РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНОГО ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ НА СФЕРИЧЕСКИЙ СОСУД ИЗ РАЗУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

**К. В. Бердников, В. В. Стружанов**

*Институт машиноведения Уральское отделение РАН, Екатеринбург, Россия  
E-mail: kir.berdnikov@mail.ru, stru@imach.uran.ru*

Одной из особенностей неупругого поведения материалов является закритическая стадия деформирования, которая характеризуется падением напряжений при прогрессирующих деформациях. Интерес исследователей к изучению этой стадии деформирования обусловлен необходимостью использования деформационных резервов материалов и повышения несущей способности конструкций. Однако при включении в рассмотрение стадии деформационного разупрочнения формулируемые краевые задачи уже не удовлетворяют требованиям единственности решения, что влечет за собой определенные математические трудности при расчетах. Особый интерес представляют собой континуальные механические системы, которые часто являются моделями реальных объектов.

В качестве континуальной системы рассматривается толстостенный сферический сосуд. Полагается, что деформирование осуществляется под действием равномерного внешнего давления либо при задании перемещений точкам внешней сферы. В качестве модели материала используется модель Генки с разупрочнением в случае неположительной объемной деформации [1]. С использованием вариационного принципа Лагранжа выводятся уравнения равновесия и граничные условия для рассматриваемой задачи, которые дополняются соотношениями Коши для деформаций и физическими соотношениями для напряжений.

Для расчета предельного давления предлагается итерационная процедура, формализованная в форме метода простой итерации. Получены условия сходимости (расходимости) предлагаемого метода, а также установлена его механическая интерпретация для рассматриваемой задачи.

Из анализа второй вариации функции полной механической энергии получен критерий устойчивости процесса деформирования. Показано, что потеря устойчивости процесса деформирования совпадает с расходимостью метода простой итерации для расчета предельного давления.

Приведены примеры расчета предельного давления на сферический сосуд из разупрочняющегося материала в случае мягкого и жесткого нагружений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-08-00186).

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Стружанов В. В., Бердников К. В.* Об определяющих соотношениях среды Генки для разупрочняющегося материала при диагональном тензоре деформаций // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. Т.3. № 28. С. 72–80.

## **Calculation of External Pressure Limit to Spherical Vessel From Softening Material**

**K.V. Berdnikov, V.V. Struzhanov**

*Institute of Theoretical Engineering science of the Ural branch of RAS, Yekaterinburg, Russia*

Thick-walled spherical vessel is considered. It is believed that the material has effect of strain softening and properties of material are described by Hencky environment with softening at non-positivity of volume deformation. Method for calculation external pressure limit is proposed. This method is presented as fixed point iteration method. Convergence and mechanical interpretation of proposed method are investigated. Criterion of stability of deformation process is obtained. Established that this criterion coincide with criterion of convergence of fixed point iteration method for calculation limit external pressure. Examples of calculation of external pressure limit to spherical vessel from softening material with a help of proposed method are presented.

# СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА ЛОПАТОК ГТД ИЗ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ И ИХ ПАСПОРТИЗАЦИЯ

Л.Б. Гецов<sup>1</sup>, А.С. Семенов<sup>2</sup>, С.Г. Семенов<sup>2</sup>, Б.Е. Мельников<sup>2</sup>, В.А. Бессчетнов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>НПО Центральный котлотурбинный институт, Санкт-Петербург, Россия

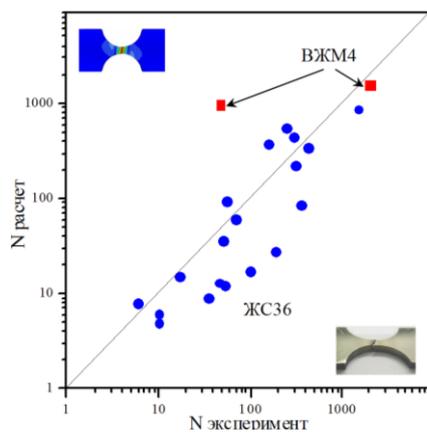
<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный политехнический институт, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup>ОАО Авиадвигатель, Пермь, Россия

E-mail: <sup>1</sup>guetsov@yahoo.com, <sup>2</sup>semenov.artem@googlemail.com

В современных газовых турбинах широко используются жаропрочные монокристаллические сплавы при изготовлении рабочих и направляющих лопаток. Однако преимущества этих высоколегированных, и в то же время высокопластичных анизотропных материалов, недостаточно полно используются в практике проектирования лопаток как из-за отсутствия соответствующих адекватных моделей деформирования и разрушения материалов, так и недостаточного объема экспериментальных данных по свойствам этих материалов при различных температурах и кристаллографических ориентациях. В докладе рассматриваются модели неупругого деформирования, критерии зарождения и распространения трещин усталости, ползучести и термической усталости при статическом и термоциклическом нагружении монокристаллических сплавов, позволяющие производить адекватные расчеты напряженно-деформированного состояния, прочности и живучести лопаток газотурбинных двигателей. Проводится верификация этих моделей по данным испытаний ряда монокристаллических сплавов (ЖС32, ЖС36, ВЖМ4). Проведенное сравнение зависимостей пределов текучести для критериев Шмида и Хилла с экспериментальными данными [1] при одноосном растяжении для различных углов отклонения нагрузки от направления [001] в плоскости (100) показало преимущества микромеханических моделей с использованием критерия Шмида, а расчеты статической прочности охлаждаемой рабочей лопатки двигателя проиллюстрировали преимущества применения предлагаемой модели при расчетах реальных конструкций.

Разработана модификация деформационного критерия термоусталостного разрушения [2], ранее предложенного для поликристаллических материалов. Показана корректность его использования для монокристаллических сплавов (см. рис.).



Разработаны численные методы решения задач определения кинетики роста трещин различной природы в лопатках ГТД.

Предложен перечень экспериментов, обеспечивающих возможности расчетного определения прочности и коэффициентов запаса лопаток из монокристаллических сплавов.

## Л и т е р а т у р а

1. Семенов А.С. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности монокристаллов на основе микромеханической модели. Научно-технические Ведомости СПбГПУ. 2014, №2 (194), с. 15-29.
2. Гецов Л.Б. Материалы и прочности деталей газовых турбин, в двух книгах, 2010-2011. Рыбинск: Изд-во Газотурбинные технологии.

## Modern Methods Of Service Life Computation For Single Crystal Blades Of Gtu And Material Certification

L.B. Getsov<sup>1</sup>, A.S. Semenov<sup>2</sup>, S.G. Semenov<sup>2</sup>, B.E. Melnikov<sup>2</sup>, V.A. Besschetnov<sup>3</sup>

<sup>1</sup>The Polzunov Central Boiler and Turbine Institut, St.Petersburg, Russia

<sup>2</sup> Saint Petersburg state polytechnical university, St.Petersburg, Russia

<sup>3</sup>OJSC Aviadvigatel, Perm, Russia

The models of inelastic deformation, the criteria for initiation and propagation of fatigue, creep and thermal fatigue cracks for single-crystal superalloys under static and thermal cyclic loading are proposed for adequate computations of the stress-strain state, strength and durability of gas turbine engine blades.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСТЕННОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ, ВНЕДРЕННОЙ В УПРУГУЮ СРЕДУ, НА ОСНОВЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Г.И. Михасев, М.Г. Ботогова, Е.С. Филончик

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

E-mail: mikhasev@bsu.by

Рассматривается задача о потере устойчивости многостенной углеродной нанотрубки (МУНТ) средней длины, внедренной в упругую неоднородную среду, под действием осевых сил и внешнего давления. МУНТ моделируется механической системой, состоящей из  $N$  концентрически вложенных ортотропных цилиндрических оболочек.

Пусть  $R_n, h_n (n = \overline{1, N})$  – радиус и эффективная толщина  $n$ -ой трубки. Считаем, что МУНТ лежит в упругой винклеровской среде (в общем случае неоднородной) с коэффициентом постели  $\kappa(x, \varphi)$ , где  $x, \varphi$  – осевая и окружная координаты на поверхности МУНТ. Взаимное влияние стенок МУНТ с номерами  $j-1, j$  учтем посредством введения сил Ван-дер-Ваальса  $c_j$ . Следуя работе [1], далее считаем, что каждый слой, составляющий многостенную нанотрубку, может быть представлен упругой ортотропной цилиндрической оболочкой. Пусть  $T_{n,i}^0, S_n^0 (i = 1, 2)$  – мембранные усилия в срединной поверхности  $n$ -ой трубки, вызванные действием внешних сил и реакцией внешней среды.

В качестве исходной системы принимается система, состоящая из  $3N$  дифференциальных уравнений типа Флюгге, выведенных в [2]:

$$L_{j,i}(u_{j,s}) + \mathfrak{I}_j N_{j,i}(u_{j,s}) = 0, \quad L_{j,3}(u_{j,s}) + \mathfrak{I}_j [N_{j,3}(u_{j,s}) - p_{j(j+1)} + \delta_j p_{(j-1)j}] = 0, \quad (1)$$

где  $j = \overline{1, N}$ ;  $i = 1, 2$ ;  $s = 1, 2, 3$ ;  $u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}$  – перемещения атомов МУНТ  $n$ -ой стенки в осевом, окружном и нормальном направлениях, соответственно,  $\delta_j = R_{j-1}/R_j$ ;  $p_{(j-1)j} = c_j (u_{j,3} - u_{j-1,3})$ ;  $p_{01} = 0$ ;  $p_{N(N+1)} = -\kappa(x, \varphi)u_{N,3}$ ,  $\mathfrak{I}_j$  – дифференциальные операторы Эрингена [2], а дифференциальные операторы  $L_{j,s}, N_{j,3}$  вводятся по формулам, приведенным в [2]. Здесь  $N_{j,3}$  – операторы, зависящие от усилий  $T_{n,i}^0, S_n^0$ . Считаем, что нагружение МУНТ является однопараметрическим, так что все  $T_{n,i}^0, S_n^0$  зависят от одного параметра нагружения  $\lambda$ . На краях трубки рассматриваются условия шарнирного опирания.

Задача заключается в определении наименьшего положительного  $\lambda$ , при котором система (1) с соответствующими граничными условиями имеет нетривиальное решение. В качестве примера рассмотрены потери устойчивости одностенной и двустенной трубок при внешнем давлении и осевом сжатии. Изучено влияние параметра нелокальности в законе физического состояния Эрингена, а также коэффициента постели упругой среды на параметр критической нагрузки при различных схемах нагружения.

## Л и т е р а т у р а

1. Peng J., Wu J., Hwang K.C., Song J., Huang Y. Can a single-wall carbon nanotube be modeled as a thin shell // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2008. V. 56. P. 2213-2224.
2. Михасев Г.И., Шейко А.Н. Исследование влияния начальных напряжений на собственные частоты колебаний многостенной углеродной нанотрубки, основанное на нелокальной теории оболочек // Механика машин, механизмов и материалов. 2013. № 4. С. 60-64.

## Modeling of Buckling of Multi-walled Carbon Nanotube Embedded in Elastic Medium on the Base of Non-local Theory of Orthotropic Shells

G.I. Mikhasev, M.G. Botogova, E.S. Filonchik

Belarusian State University, Minsk, Belarus,

Buckling of multi-walled carbon nanotubes (MCNT) embedded in an elastic medium under an external pressure and axial load is studied. MCNT is presented by a system of nested orthotropic cylindrical shells. The effect of the surrounding elastic medium are considered using the Winkler-type spring constants. The constitutive equations are formulated by considering the small-scale effects. The Flügge type shell equations for every wall are used as the governing ones.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ВЗРЫВНЫХ ВОЛН НА ПОДЗЕМНЫЙ НЕФТЕПРОВОД

**Е.Л. Булдаков**

*Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: e.buldakov@inbox.ru*

Составлена двумерная математическая модель процесса взаимодействия продольной сейсмозрывной волны с заглубленным в скальный грунт нефтепроводом. Изменение состояния упругого массива определяется системой уравнений, объединяющей в себе уравнения движения сплошной среды и продифференцированный по времени закон Гука [1]. Исходя из основных положений теории тонких оболочек, напряженное состояние трубопровода описывается известными уравнениями В.В.Новожилова в рамках плоской деформации с учетом продифференцированного закона Гука [2]. Движение жидкости внутри трубопровода описывается линеаризованными уравнениями Эйлера и неразрывности с учетом сжимаемости [3]. На контакте массива и трубопровода рассмотрены краевые условия типа проскальзывание и жесткое защемление, на контакте трубопровода и жидкости выполняется равенство значений радиальных компонент векторов скоростей. Для прямого интегрирования исходных систем уравнений выбран метод конечных разностей, алгоритм решения реализован на языке Fortran [4]. В результате численного моделирования воздействия сейсмической волны на массив горной породы, содержащий нефтепровод, получены значения напряжений, возникающих в стенке трубопровода, а так же скорости её смещения.

## **Л и т е р а т у р а**

1. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. М.: Наука. 1977. 440 с.
2. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
3. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1978. 296 с.
4. Brian D. Hahn, Edward Arnold. Fortran 90 for Scientists and Engineers. University of Cape Town. 1994. 286 с.

# **Mathematical Modeling of the Impacts of Blast Waves on the Underground Oil Pipeline**

**E.L. Buldakov**

*Mining university, Saint-Petersburg, Russia  
E-mail: e.buldakov@inbox.ru*

Author compiled a two-dimensional mathematical model of the interaction of seismic waves with an oil pipeline, which is located in rocky ground. Changing the state of an elastic solid is determined by a system of equations that combines the equations of motion of a continuous medium and Hooke's law. The basic propositions of the V.V. Novozhilov's theory of thin shells determine the stress state of the pipe. The movement of the fluid inside the pipe is described by linearized Euler's equations. At the contact of ground and the pipeline considered boundary conditions such as slippage or rigid clamping, at the contact of the pipeline and liquid the radial component of the velocity vectors are equal. As a result of numerical simulations of seismic wave exposure to rock ground which is containing oil pipeline, we obtained values of stresses in the pipe wall, as well as the speed of its movement.

## **R e f e r e n c e s**

1. Godunov S.K., Ryaben'kii V.S. Raznostnie skhemi (Difference schemes). Moscow: Nauka. 1977. 440 p.
2. Novozhylov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovsky E.I. Lineynaya teoriya tonkikh obolochek (Linear theory of thin shells). Leningrad: Politekhnik. 1991. 656 p.
3. Wallander S.V. Lekcii po gidroaeromekhanike (Lectures on hydromechanics). Leningrad: Publishing House of Leningrad. University Press. 1978. 296 p.
4. Brian D. Hahn, Edward Arnold. Fortran 90 for Scientists and Engineers. University of Cape Town. 1994. 286 p.

## РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИИ ПОРИСТОГО СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

**А.Е. Волков, М.Е. Евард, Е.Н. Япарова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: a.volkov@spbu.ru, m.evard@spbu.ru, erunyauve@mail.ru*

Предложена модель, позволяющая рассчитывать деформацию образца из пористого сплава с памятью формы (СПФ). Для того чтобы избежать решения сложной краевой задачи, расчет выполняли с использованием упрощающих предположений, обычно применяемых в сопротивлении материалов.

Анализ микрофотографий продольного и поперечного сечений пористого образца из СПФ TiNi, полученного методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза [1], позволил аппроксимировать основной структурный элемент, несущий нагрузку, перемычку, кривой балкой, изогнутая ось которой представляет собой дугу окружности  $R$ , опирающуюся на центральный угол  $\phi$ , а поперечное сечение – прямоугольник. Предполагалось, что функциональное поведение элемента как целого определяется поведением его наиболее напряженного участка. Статистический анализ геометрических размеров пор и перемычек показал, что можно указать два характерных типа балок, отличающихся значениями  $R$  и  $\phi$ , причем отношение поперечного размера каждой балки к соответствующему радиусу не превышает 0.2. Поэтому математический объект представлял собой две жестко соединенные между собой балки малой кривизны, нагруженные силой, действующей вдоль хорды, соединяющей концы балок. Получены соотношения, связывающие приложенную силу с максимальным напряжением и деформацию с перемещением концов балки. Для расчета деформации СПФ при произвольном режиме изменения напряжений и температур использовали микроструктурную модель [2].

Выполнено моделирование функциональных свойств пористого сплава типа TiNi. Показано, что результаты моделирования находятся в хорошем соответствии с данными прямых наблюдений [3].

### **Л и т е р а т у р а**

1. *Li B.Y., Rong L.J., Li Y.Y., Gjunter V.E.* Synthesis of porous Ni-Ti shape-memory alloys by self-propagating high-temperature synthesis: reaction mechanism and anisotropy in pore structure // *Acta materialia*. 2000. V. 48. P. 3895-3904.
2. *Volkov A.E., Casciati F.* Simulation of dislocation and transformation plasticity in shape memory alloy polycrystals // *Shape memory alloys. Advances in modelling and applications* / Ed. by F.Auricchio, L.Faravelli, G.Magonette and V.Torra. Barcelona. 2001. P. 88-104.
3. *Беляев С.П., Ресина Н.Н., Грачева А.Г., Воронков А.В.* Механическое поведение пористого сплава Ti-45.0 ат.% Ni при сжатии // *Материалы международной конференции «Сплавы с эффектом памяти формы: свойства, технологии, перспективы»*, Витебск, Беларусь, 26-30 мая 2014. 2014. С. 125-127.

## **Calculation of Deformation of Porous Shape Memory Alloy**

**A.E. Volkov, M.E. Evard, E.N. Iaparova**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

A model has been proposed to calculate deformation of a porous shape memory alloy (SMA) sample. The based structural element under consideration was a small curvature beam. The mechanical characterization of the beam was made by the classical methods of strength of materials. The microstructural model was used for calculation of functional behavior of SMA. Modeling of functional behavior of porous SMA has been performed.

## **РАСЧЕТ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНКЕ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ В РАМКАХ МИКРОСТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ**

**А.Е. Волков, Д.А. Рупасов**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: a.volkov@spbu.ru, danrupasov@gmail.com*

Решена задача о чистом изгибе пластины из сплава с памятью формы, находящемся в псевдоупругом состоянии. Определяющие уравнения задавались в рамках микроструктурной модели [1], учитывающей различие в поведении сплава при растяжении и сжатии. Найдены поля напряжений и неупругих деформаций, а также положение нейтральной линии при нагружении пластины изгибающим моментом и при разгрузке.

Работа выполнена при поддержке Гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-4294.2014.1

### **Л и т е р а т у р а**

1. Волков А.Е. Микроструктурное моделирование деформации сплавов при повторяющихся мартенситных превращениях // Изв. АН. Физ. серия. 2002. Т. 66. С. 1290-1297.

## **The Calculation of the Stress Field in the Bend of the Plate Shape Memory Alloy under the Microstructural Model**

**A.E. Volkov, D.A. Rupasov**

*Saint-Petersburg State University, Russia  
E-mail: a.volkov@spbu.ru, danrupasov@gmail.com*

The task about the clear bend of a plate from an alloy with shape memory which is in a pseudo-elastic stage is solved. Indicial equations were set within the microstructural model [1] considering distinction in behavior of an alloy at stretching and compression. Fields of tension and inelastic deformations, and also position of the neutral line are found at a plate loading a moment of deflection and when unloading.

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЫЗЫВАЕМЫХ ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ПОТОКА ЖИДКОСТИ**

**Н.В. Наумова, Д.Н. Иванов, Б.А. Ершов, Т.В. Волошинова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: n.v.naumova@spbu.ru, d.n.ivanov@spbu.ru*

Исследована задача о колебаниях тонкой упругой цилиндрической оболочки под влиянием внутреннего нормального давления, действующего со стороны потока жидкости. Получены приближенные выражения для компонентов перемещений в общем виде. Построены графики функций прогиба оболочки и тангенциального перемещения в зависимости от времени. Приведено сравнение аналитических и численных результатов.

Полученные аналитические формулы позволяют рассчитать и оценить величину деформаций оболочки. Численные результаты, проведенные методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS WORKBENCH 13, дополняют аналитические результаты и позволяют увидеть в анимационном режиме весь процесс колебаний.

### **Л и т е р а т у р а**

1. Кантор Б.Я., Кунделев А.Ю., Мисюра Е. Ю. Биомеханика гиперупругих тел вращения. Харьков. 2006. 191 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.Е. Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М. 1963.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Т. 4. М. 1988.
4. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М. 1979.
5. Филиппов С.Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб. 1999.
6. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат. 1960. 131 с.

## **Mathematical Modelling of Cylindrical Shell Vibrations under Internal Pressure of Fluid Flow**

**N.V. Naumova, D.N. Ivanov, B.A. Ershov, T.V. Voloshinova**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Axisymmetric vibrations of thin elastic cylindrical shell under the internal pressure of fluid flow are analyzed. Analytical formulas for calculating of components of normal and tangential deflections of the shell middle surface are obtained. The solutions are presented in the form of graphs.

# ОБРАЗОВАНИЕ ДЕФЕКТОВ ПОВЕРХНОСТИ НАНОРАЗМЕРНЫХ ПЛЕНОЧНЫХ ПОКРЫТИЙ В РЕЗУЛЬТАТЕ ДЕЙСТВИЯ ДИФфуЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

М.А. Греков, С.А. Костырко

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,  
E-mail: sergey.kostyrko@gmail.com, magrekov@mail.ru*

Использование пленочных покрытий является одной из основных стратегий при решении многочисленных инженерных задач: пленочные структуры позволяют повысить стойкость к окислению и диффузии, температуру плавления и микротвердость основного материала. Интерес к таким покрытиям также стимулируется бурно развивающимися исследованиями в области композиционных материалов. Хорошо известно, что повышение твердости пленки можно достичь за счет уменьшения ее толщины. В первую очередь, это связано с влиянием на свойства покрытия как свободной, так и межфазной поверхности. Однако, наличие поверхностных дефектов в тонкопленочных структурах, в частности, искривление свободной поверхности, не только ухудшает функциональные свойства приборов, но и порождает локальный рост напряжений. При достаточно больших напряжениях несоответствия, а также при действии внешней нагрузки это может привести к зарождению трещин и дислокаций, развитию процесса отслоения. Для предотвращения образования подобного рода повреждений в ходе производства и эксплуатации приборов на основе тонкопленочных покрытий необходимо четкое понимание механизмов, к ним приводящих.

Феномен волнообразования на поверхности твердого тела был отмечен многочисленными экспериментальными и теоретическими исследованиями, в которых описаны различные конфигурации рельефа. Наряду со слабой волнистостью исследовано образование острых выступов и впадин, а в некоторых случаях пленка распадалась на островки. Однако, во всех этих работах не учитывался тот факт, что физико-механические свойства приповерхностных слоев существенно отличаются от аналогичных свойств в глубине тела. Стоит отметить, что на макроуровне это различие практически не отражается на свойствах и поведении всего тела в целом, но в случае наноразмерных структур наблюдается заметное влияние поверхностных напряжений на физические свойства материала. Таким образом, целью данной работы является изучение влияния механики приповерхностных слоев на процесс образования наноструктурных дефектов на поверхности тонкопленочных покрытий.

Считается, что рост наномасштабных дефектов поверхности твердого тела в первую очередь связан с феноменом неустойчивости её формы. Основной движущей силой такой нестабильности является стремление системы к минимизации упругой и поверхностной энергии, что в силу пониженной устойчивости поверхностных атомных слоев приводит к диффундированию атомов вдоль поверхности. Для нахождения полной энергии системы в представленной работе используются определяющие соотношения поверхностной и объемной теории упругости. При этом разработан метод определения напряженного состояния пленочного покрытия при слабом искривлении свободной поверхности, который позволяет определять зависимость концентрации напряжений не только от локальной кривизны рельефа, но и от длины волны возмущения (так называемый масштабный эффект). На основе полученного метода с использованием уравнений термодинамики построено и проанализировано эволюционное уравнение возмущения поверхностного слоя, учитывающее влияние поверхностного напряжения как на свободной, так и на межфазной поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00260).

## Surface Defect Formation in Nanosized Film Coatings Due to Diffusion Processes

M.A. Grekov, S.A. Kostyrko

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The aim of this study is to solve the problem of formation of nanosized structures on the surface of heteroepitaxial thin film system due to surface diffusion by considering the effects of both surface and interface stresses. Elastic stress field caused by surface undulation is defined by using the constitutive equations of linear elasticity for the bulk and surface phases.

# ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВА TiNi ПОСЛЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО НАГРУЖЕНИЯ

А.И. Разов, В.И. Григорьева

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: razov@smel.math.spbu.ru, vika-grigoreva@mail.ru

Материалы, обладающие эффектом памяти формы (ЭПФ), известны достаточно давно, но прогресс в технологиях обработки, металлургии и появляющиеся новые задачи приводят к тому, что и сейчас эти новые материалы с нехарактерными для металлов свойствами интенсивно исследуются в фундаментальном и прикладном аспектах. Исследование функциональных свойств и механического поведения сплавов при высокоскоростных воздействиях является актуальным и практически значимым.

Целью настоящей работы являлось установление закономерности поведения функциональных свойств никелида титана после деформирования его растяжением при различных температурах.

В качестве объекта исследований использовали сплав TiNi эквиатомного состава. Длина рабочей части цилиндрических образцов 10 мм, диаметр 5 мм. Образцы деформировали растяжением со скоростью около  $10^{-3} \text{ с}^{-1}$  при различных температурах от 20 до 300°C. Квазистатическое нагружение осуществляли на испытательной машине Lloyd 30K Plus. Высокоскоростное нагружение производили на установке, реализующей метод Кольского для разрезных стержней Гопкинсона. Остаточная деформация после нагружения составляла 10-25%. После деформирования образцы термоциклировали со скоростью  $\approx 2 \text{ К/мин}$  в специальной установке для дилатометрических исследований.

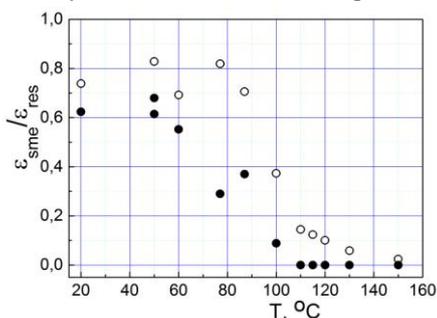


Рис.1. Зависимость отношения величины эффекта памяти формы к остаточной предварительной деформации  $\epsilon_{res}$  от температуры, при которой проводили нагружение.  $\circ$  – квазистатическое нагружение,  $\bullet$  – высокоскоростное нагружение.

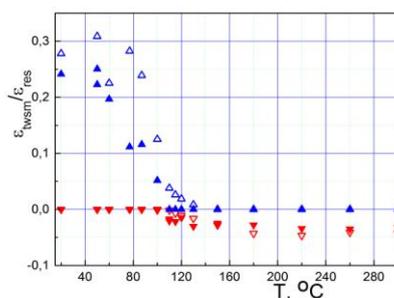


Рис.2. Зависимость отношения эффекта обратимой памяти формы (ОПФ)  $\epsilon_{twsm}$  к остаточной предварительной деформации  $\epsilon_{res}$  от температуры, при которой проводили нагружение.  $\Delta$ ,  $\nabla$  – квазистатическое нагружение,  $\blacktriangle$ ,  $\blacktriangledown$  – высокоскоростное нагружение.  $\Delta$ ,  $\blacktriangle$  – ОПФ мартенситного типа,  $\nabla$ ,  $\blacktriangledown$  – ОПФ аустенитного типа.

Однократная память формы при указанных остаточных деформациях всегда оказывалась совершеннее после квазистатического нагружения, чем после высокоскоростного (рис.1). Аналогичное поведение демонстрировала и обратимая память формы – и в случае мартенситного типа, и в случае аустенитного типа значения обратимой памяти формы после высокоскоростного нагружения были ниже, чем после квазистатического (рис.2). Правда, различие между обратимой памятью формы аустенитного типа после высокоскоростного и квазистатического растяжения было незначительным.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при остаточных деформациях свыше 10% однократный и обратимый эффекты памяти формы не могут быть улучшены повышением скорости предварительного деформирования растяжением.

## Thermomechanical properties of TiNi-alloy after high strain rate loading

V.I. Grigorieva, A.I. Razov

Saint-Petersburg State University, Russia

This paper presents the state-of-the-art in the investigations of TiNi-shape memory alloys behavior at high strain rate loading. Thermomechanical response at various temperatures and strain rates is observed. Use of materials with shape memory effect in the technique currently receives a new impetus by the discovery of new alloys, a considerable progress in the production of semifinished products and technologies in their processing.

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРИТЕРИЕВ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА

**А.А. Груздков, А.А. Чеврычкина**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: Anastasiia.Che@gmail.com, gruzdkov@mail.ru*

В работе рассматривается проблема, которая возникает при рассмотрении прочностных характеристик материала с точки зрения модели сплошных сред. В инженерной практике считаются независимыми различные прочностные характеристики материала: прочность на растяжение, сдвиг, изгиб, сжатие, кручение и другие. Классическая линейная теория упругости в качестве основной модели использует модель сплошного однородного изотропного тела. Модель сплошных сред предполагает существование единственной характеристики материала. В инженерной практике это также вызывает определенную проблему: определение и выбор характеристик материала в каждой новой схеме нагружения.

Выход из данной ситуации возможен при использовании нелокальных критериев разрушения. Физическое состояние материала при неоднородном напряженном состоянии можно описать двумя характеристиками материала: прочностью материала  $\sigma_c$  (максимальное значение напряжений при осевом растяжении) и характерным размером материала  $d$  в нелокальном критерии, который учитывает особенности напряжения.

В результате анализа применения ряда нелокальных критериев к трем схемам нагружения: растяжение стержня, изгиб балки, растяжение пластины с разрезом, можно прийти к следующим заключениям. Прогноз критерия средних напряжений находится в лучшем соответствии с экспериментальными данными, чем критерия минимального напряжения. Можно полагать, что характерный размер в критерии средних напряжений  $d$  является постоянной характеристикой материала. Значение размера  $d$  не зависит от модельных испытаний. Для определения характерного размера можно использовать испытания изгиба балки или другое испытание с неоднородным распределением напряжений. При известном значении характерного размера в критерии, но неизвестной задаче, которая решалась при вычислении, нельзя вычислить значение характерного размера в другом критерии.

## Application of Nonlocal Fracture Criteria for Strength Characteristics

**A.A. Gruzdkov, A.A. Chevrychkina**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Problems of engineering practice and continuum mechanics are considered. The following problems are connected with a variety of strength characteristics of material. In continuum mechanics the existence of singular material's characteristic is supposed. The problem is consisted in a choice of a critical characteristic in complex cases in engineering practice. The problem's solution is possible with application of non-local fracture criteria.

# НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ

Ю. М. Даль

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*  
*E-mail: ymdahl@yandex.ru*

Найдены точные аналитические решения ряда краевых задач о плоскости с конечной и бесконечной системой периодических разрезов на вещественной оси. Берега разрезов предполагаются загруженными произвольными сосредоточенными силами  $2R$  (рис. 1а), которые представляются в виде суммы четырех составляющих (рис. 1b-e). Нагрузки на бесконечности считаются отсутствующими.

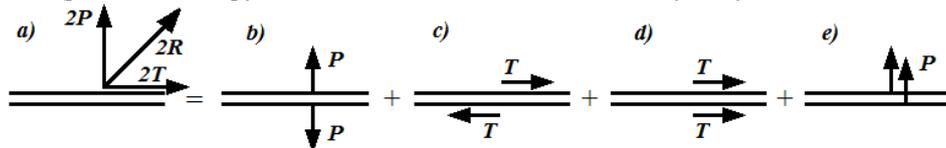


Рис.1. Общая задача а и частные задачи b–e

Согласно Г.В.Колосову, компоненты напряжения  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  в плоскости определяются формулами  $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]$ ,  $\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[-2iy\Phi'(z) + \Psi_2(z)]$ . Здесь первое равенство – интеграл уравнения неразрывности, а второе – интеграл комплексного уравнения равновесия;  $\Psi_2(z)$  – регулярная функция, связанная со своим классическим аналогом  $\Psi(z)$  соотношением  $\Psi_2(z) = \Psi(z) + z\Phi'(z)$ .

Если вещественная ось является осью симметрии внешних усилий (на рис.1 частные задачи b и d), то  $\overline{\Phi(z)} = \Phi(\bar{z})$ ,  $\overline{\Psi_2(z)} = \Psi_2(\bar{z})$ . Когда внешние нагрузки антисимметричны по отношению оси x (задачи c и e), тогда  $\overline{\Phi(z)} = -\Phi(\bar{z})$ ,  $\overline{\Psi_2(z)} = -\Psi_2(\bar{z})$ .

В задачах типа b краевые условия на конечном числе разрезов  $a_k b_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) приняты в виде:  $\sigma_{xy}^\pm(x) = 0$ ,  $\sigma_{yy}^\pm(x) = \sum_{k=1}^n (-P_k)\delta(x - \xi_k)$ , где верхними индексами  $^+$  и  $^-$  обозначен соответственно верхний и нижний берег разреза;  $P_k$  – величина силы, приложенной на разрезе  $a_k b_k$  в точке  $\xi_k$ ;  $\delta(x - \xi_k)$  – дельта-функция Дирака. В терминах функций  $\Phi(z)$  и  $\Psi_2(z)$  решение этой задачи таково:

$$\Psi_2(z) = 0, \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\prod_{k=1}^n (z - a_k)(z - b_k)}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{P_k}{\xi_k - z} \sqrt{\prod_{k=1}^n (\xi_k - a_k)(\xi_k - b_k)} \right).$$

Если  $n \rightarrow \infty$ , то периодическое решение задачи b существует при условиях, что длины разрезов, равно как величины всех сил и точки их приложения на разрезах, одинаковы, причем сами разрезы равноудалены друг от друга. В этом случае

$$\Psi_2(z) = 0, \quad \Phi(z) = \frac{P}{2l} \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi a}{l} - \sin^2 \frac{\pi \xi}{l}}}{\operatorname{tg} \frac{\pi(z - \xi)}{l} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{l} - \sin^2 \frac{\pi a}{l}}},$$

где  $2a$  – длина разрезов;  $l$  – расстояние между центрами смежных разрезов;  $\xi$  – координата точки приложения силы  $P$  на разрезе (начало координат помещено посередине «основного» разреза). Соответствующие решения получены также в задачах c, d, e.

## Some Basic Problems About Elastic Plane With Cuts

Yu.M. Dahl

*Saint-Petersburg State University, Russia*

It was find the exactly solutions of the border problems for elastic plane with finite and infinite number of cuts on the material axis.

# НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЕ НА МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ

Т.О. Доманская, В.М. Мальков

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: tanyath57@gmail.com, vmmalkov@apmath.spbu.ru

Рассматривается плоская задача нелинейной теории упругости для двухкомпонентной плоскости при действии сосредоточенной силы на межфазной линии. Механические свойства описываются моделью полулинейного материала. Использование этой модели позволило применить теорию комплексных функций и получить общее аналитическое решение краевой задачи. Исходя из этого решения, построена асимптотика условных и истинных напряжений Коши и перемещений в окрестности точки приложения силы.

Закон упругости полулинейного материала [1] имеет вид

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= (\lambda + 2\mu)(g_{11} + ig_{21}) + \lambda(g_{22} - ig_{12}) + ke^{i\omega}, \\ s_{22} - is_{21} &= (\lambda + 2\mu)(g_{22} - ig_{12}) + \lambda(g_{11} + ig_{21}) + ke^{i\omega}, \\ s_{33} &= \lambda[(g_{11} + g_{22}) \cos \omega + (g_{21} - g_{12}) \sin \omega] + k + 2\mu\lambda_3. \end{aligned}$$

Угол  $\omega$  характеризует поворот элемента среды [2],  $k = \lambda(\lambda_3 - 3) - 2\mu$ .

Пусть в начале координат на линии раздела приложена внешняя сосредоточенная сила с компонентами  $F_1$  и  $F_2$ , обозначим  $F = F_1 + iF_2$ . Предполагается, что на бесконечности напряжения и поворот отсутствуют. Условия на линии раздела двух полуплоскостей имеет вид

$$\begin{aligned} [s_{22} - is_{21}]^+ - [s_{22} - is_{21}]^- &= -iF\delta(t), \\ [g_{11} + ig_{21}]^+ - [g_{11} + ig_{21}]^- &= 0. \end{aligned}$$

Асимптотические разложения условных напряжений в окрестности этой точки

$$\begin{aligned} s_{11} + is_{12} &= -\mu_2 \left[ \frac{c_2}{1+c_2} \frac{1}{z} + \frac{1}{1+c_1} \frac{1}{\bar{z}} \right] F_0 - \frac{2\mu_2 c_2}{1+c_2} (-1 + \alpha - \beta) + O(z^2), \quad z \in S_2, \\ s_{22} - is_{21} &= -\mu_2 \left[ \frac{c_2}{1+c_2} \frac{1}{z} - \frac{1}{1+c_1} \frac{1}{\bar{z}} \right] F_0 - \frac{2\mu_2 c_2}{1+c_2} (-1 + \alpha + \beta) + O(z^2), \quad z \in S_2. \end{aligned}$$

Асимптотические разложения для нижней полуплоскости получим циклической перестановкой индексов  $1 \leftrightarrow 2$  в правых частях этих равенств.

Показано, что все условные напряжения имеют особенность типа  $1/r$  при  $r \rightarrow 0$ .

Истинные напряжения Коши в окрестности точки приложения силы в случае плоской деформации и плоского напряженного состояния при  $r \rightarrow 0$  не имеют особенности в окрестности точки приложения силы, кроме того, в случае плоского напряженного состояния напряжения обращаются в ноль в этой точке. Перемещения имеют логарифмическую особенность вида  $\ln r$ .

## Л и т е р а т у р а

1. Мальков В.М., Малькова Ю.В. Плоские задачи упругости для полулинейного материала // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 3. С. 93-106.
2. Мальков В.М. Введение в нелинейную упругость. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2010. 276 с.

## The Nonlinear Problem of Concentrated Force at the Interface of Two Half-Planes

T.O. Domanskaia, V.M. Mal'kov

Saint-Petersburg State University, Russia

Considered plane problems of nonlinear elasticity for bi-material plane under the action of a concentrated force on the interface. Mechanical properties of half-planes are described by the model of half-linear material. Application of model harmonious material has apply to use the methods of theory complex functions and to receive exact analytical solutions of problems, including the concentrated force on interface of materials of a bi-material plane. The asymptotics of the stresses and displacements have been constructed in a point of application of force from the exact solutions.

# УСТОЙЧИВОСТЬ СОПРЯЖЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ НАХОДЯЩИХСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРУЗА С ПЛОСКИМ ОСНОВАНИЕМ.

А.М. Ермаков<sup>1</sup>, Т.В. Усачева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Россия

E-mail: ermakovamsi@gmail.com, usa444eva@mail.ru

Решается задача о напряжённо-деформированном состоянии и потере устойчивости сопряженных анизотропных сферических сегментов переменной толщины, находящихся под действием внутреннего нормального давления и груза с плоским основанием. Первый сферический сегмент АВ (рис. 1) упруго заделан на линии сопряжения со вторым ВС. Второй сегмент ВС жестко закреплен по краю С. Груз прикладывается к вершине А, а его основание параллельно основанию сегмента.

В основу решения этой задачи положена теория анизотропных оболочек средней толщины Паляя–Спира[1], позволяющая учесть влияние поперечного сдвига и изменение толщины. Для моделирования больших деформаций используется метод последовательных нагружений [1,2], который реализуется двумя разными способами: с использованием линеаризованных нелинейных уравнений равновесия [1,3] и минимизацией упругого потенциала оболочки на каждом шаге нагружения [4,5]. Эти пути решения задачи дают разные подходы к определению критической нагрузки. Расчеты проводились в программе, написанной в пакете Mathematica 8.0. Проведено сравнение радиусов области контакта с грузом для различных значений его веса. Задачи о напряженно-деформированном состоянии близких к мягким оболочек под действием груза с плоским основанием важны для анализа данных, связанных с измерением внутриглазного давления в офтальмологии [6,7].

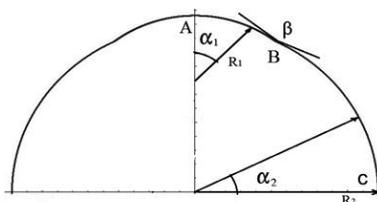


Рис. 1 Сопряженные сферические сегменты.

## Л и т е р а т у р а

1. Палий О.М. Вариант прикладной теории толстых оболочек // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2014. № 2.
2. Феодосьев В.И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых тел // Прикладная математика и механика. Т. XXVII. 1963. С. 265–274.
3. Лавендел Э.Э. Расчет резино-технических изделий. М.: Машиностроение. 1997. С. 146–154.
4. Карпов В.В., Баранова Д.А., Беркашиев Т.Р. Программный комплекс исследования устойчивости оболочки. СПб.: Изд-во СПбГАСУ. 2009. С. 16-20.
5. Москаленко Л.П. Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру // Вестник гражданских инженеров. 2011. №4(29). С. 161-164.
6. Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2000. 92 с.
7. Аветисов С.Э., Бубнова И.А., Антонов А.А. Исследование влияния биомеханических свойств роговицы на показатели тонометрии // Бюллетень СО РАМН. 2009. № 4. С. 30-33.

## Buckling of the Conjugated Spherical Segments under the Load with a Flat Base

А.М. Ermakov<sup>1</sup>, T.V. Usacheva<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Saint-Petersburg State Marine Technical University, Russia

The problem of the buckling of the conjugated anisotropic spherical segments under the influence of the internal pressure and the load with a flat base is studied. The solution of this problem is based on the theory of the shell of moderate thickness by Paly-Spiro. This theory takes into account the effect of the cross section shear and change of the shell thickness. For modeling such large deformations the method of consequent loading is used. This problem is important for analyzing the data related to measuring a very important in ophthalmology characteristic of intraocular pressure.

# НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ РОЛИКАМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

**М.В. Забиякин**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: Zabyakin.makar@gmail.com*

Исследованы малые свободные колебания замкнутой вращающейся цилиндрической оболочки. Оболочка подкреплена по образующим жесткими цилиндрическими роликами, что усложняет задачу нахождения низших частот колебаний. Колебания подкреплённой роликами оболочки бесконечной длины рассматривались в работах [1-3]. В данной работе для оболочки конечной длины используются предположения полубезмоментной теории оболочек. Решение ищется в виде ряда Фурье по окружной координате. Края оболочки либо шарнирно оперты, либо один из краев заделан, а другой свободен. Разработан алгоритм аналитического определения частот и форм колебаний.

Проводится сравнение результатов полубезмоментной теории с точным решением для шарнирно опертой оболочки конечной длины [4] и результатами расчетов методом конечных элементов. Определена область параметров, в которой применение полубезмоментной теории дает малую погрешность. Установлено, что при достаточно большом числе членов ряда Фурье полубезмоментную теорию можно использовать для оценки первых двух-трех частот.

Полученные результаты могут быть использованы при расчетах и проектировании центробежных обогатительных конусов [5].

## Л и т е р а т у р а

1. *Товстик П.Е., Филиппов С.Б., Шмойлова Е.А.* Нелинейная деформация вращающейся на роликах вязко-упругой цилиндрической оболочки // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2005. Т. 1. № 4. С. 98-109.
2. *Филиппов С.Б.* Частоты и формы колебаний вращающейся на роликах бесконечной цилиндрической оболочки // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2006. Т. 1. № 2. С. 138-145.
3. *Боярская М.Л., Филиппов С.Б.* Малые свободные колебания вращающейся на роликах бесконечной цилиндрической оболочки // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2011. Т. 1. №1. С. 21-26.
4. *Боярская М.Л.* Частоты и формы колебаний вращающейся на роликах цилиндрической оболочки // Труды Семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2010-2011. С. 71-80.
5. *Краснов А.А.* Динамика центробежного обогатительного конуса с принудительно деформируемой эластичной стенкой // Обогащение руд. 2001. № 3. С. 34-38.

## Low-Frequency Vibrations of Cylindrical Shell Stiffened by Rollers

**M.V. Zabyakin**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Small free vibrations of a rotating closed cylindrical shell of the finite length stiffened by rigid cylindrical rollers are considered. Assumptions of semi-membrane shell theory are used. Vibrations modes in the circumferential direction are represented as Fourier series. Analytical results are compared with results of numerical calculations. It is shown that at sufficiently large values of Fourier series the semi-membrane theory can be used for the evaluation of the first two-three frequencies.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО СЛАБО ЗАКРЕПЛЕННЫМ КРИВОЛИНЕЙНЫМ КРАЕМ

**А.В. Зелинская, П.Е. Товстик**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: anna\_zelinskaya@inbox.com*

В данной работе найдены критическая нагрузка и форма потери устойчивости круговой трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Предполагается, что криволинейный край оболочки слабо закреплен или свободен. При этом возможно появление формы потери устойчивости, локализованной вблизи этого края, с одновременным снижением критической нагрузки. Ранее эта задача была решена исходя из двухмерной модели Кирхгофа–Лява (КЛ). Здесь предполагается, что жесткость на поперечный сдвиг мала, и для решения используется модель Тимошенко–Рейсснера (ТР).

Безразмерная критическая нагрузка  $\lambda(q, g)$  зависит от двух основных безразмерных параметров – параметра волнообразования в окружном направлении  $q$  и параметра поперечного сдвига  $g$ . При волнообразовании внутри оболочки имеет место осесимметричная потеря устойчивости ( $q=0$ ). При  $g=0$  имеем классическое значение нагрузки  $\lambda=1$ , полученное исходя из модели КЛ. С ростом  $g$  (или с уменьшением жесткости на поперечный сдвиг) нагрузка убывает по линейному закону ( $\lambda=1-0.5g$ ) вплоть до значения  $g \approx 1$ . При  $g \geq 1$  материал теряет устойчивость.

Если край оболочки свободен или слабо закреплен, возможна потеря устойчивости по форме, локализованной вблизи этого края. По модели ТР деформация краевого элемента описывается 5-ю обобщенными координатами, поэтому рассмотрены  $2^5=32$  возможных варианта граничных условий в зависимости от того, закреплены или свободны эти координаты. В 16 вариантах возможна локализованная вблизи края потеря устойчивости и исследовано поведение функций  $\lambda(q, g)$ .

Исследована роль пятого граничного условия в модели ТР, которое отсутствует в модели КЛ. Установлено, что если выполнено граничное условие  $H=0$ , то при  $g \rightarrow 0$  результаты по модели ТР переходят в аналогичные результаты модели КЛ. Если задано закрепление  $\varphi_2=0$ , то модель ТР при  $g \rightarrow 0$  дает новые по сравнению с моделью КЛ результаты.

## Л и т е р а т у р а

1. *Tovstik P.E.* On forms of local buckling of thin elastic shells // *Trans CSME*. 1991. V. 15. No 3. P. 199-211.
2. *Товстик П.Е.* Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы М.: Наука. Физматлит. 1995.
3. *Товстик П.Е.* Об асимптотическом характере приближенных моделей балок, пластин и оболочек // *Вестник С.-Петербург. ун-та*. 2007. № 3. С. 49-54.
4. *Tovstik P.E., Tovstik T.P.* On the 2D models of plates and shells including the transversal shear // *ZAMM*. 2007. V. 87. № 2.
5. *Товстик П.Е.* Устойчивость трансверсально изотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии // *Изв. РАН. Механика твёрдого тела*. 2009. Т. 44. № 4. С. 552-564.

## Buckling under Axial Compression of a Transversely Isotropic Cylindrical Shell with the Weakly Supported Curvilinear Edge

**A.V.Zelinskaya, P.E.Tovstik**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The critical load and the buckling mode for a transversely isotropic cylindrical shell under axial compression are found. It is assumed that the curvilinear edge of the shell is weakly supported or free. Under these conditions the buckling mode may be localized near the edge that leads to decrease of the critical load. Previously, this problem was solved using the 2D Kirchhoff–Love model. Here it is assumed that the transversal shear stiffness is small and the Timoshenko–Reissner model is used for analysis.

# ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОБОБЩЁННОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Б.А. Зимин, В.Е. Свентицкая, Ю.В. Судьенков

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: bazimin@mail.ru, vsvent@yandex.ru, sudenkov@land.ru

Динамические теории термоупругости, характеризующиеся конечной скоростью распространения теплового сигнала известны как обобщённые динамические теории термоупругости [1].

Рассматривается двухпараметрическая модель теплопроводности, предложенная в [2], в которой закон Фурье обобщается:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{q} = -\lambda \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla T \quad (1)$$

где  $\tau_q, \tau_T$  – времена релаксации теплового потока и градиента температуры соответственно,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\mathbf{q}$  – поток тепла,  $T$  – температура.

Используя закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и (1), строим обобщённую динамическую систему с временами релаксации  $\tau_q, \tau_T$ . Решение такой системы ищем в виде

$$\begin{aligned} U &= \tilde{U} \exp(-i\omega t + ikz) \\ T &= \tilde{T} \exp(-i\omega t + ikz) \end{aligned} \quad (2)$$

Дисперсионный анализ позволяет выделить две квазинезависимые подсистемы – упругую и тепловую. Дается их описание в терминах дисперсионных функций. Дисперсионная функция такой системы является комплексной, что свидетельствует о наличии диссипации.

## Л и т е р а т у р а

1. Жю Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований. 2006. 528 с.
2. Tzou D.Y. Experimental support for the lagging behavior in heat propagation // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 1995. V. 9. No 4. P. 686-693.

## Dispersion Analysis of Two-Phase Generalized Model of Dynamic Thermoelasticity

B.A. Zimin, Y.V. Sudenkov, V.E. Sventitskaya

Saint-Petersburg State University, Russia

Two quasi-independent subsystems are allocated in the system of equations of the generalized dynamic thermoelasticity. There are elastic and thermal subsystems. The authors give an analysis of systems in terms of the dispersion functions. Dispersion function of such a system is complex, suggesting the existence of dissipation.

# ЭНЕРГИЯ ДИССИПАЦИИ И ПРОЦЕСС ГЕНЕРАЦИИ ТЕПЛА В КОНЧИКЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТРЕЩИНЫ В ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Б.А. Зимин, В.Е. Свентицкая, Ю.В. Судьенков

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: bazimin@mail.ru, vsvent@yandex.ru, sudenkov@land.ru*

В теории сплошной среды процесс разрушения сопровождается изменением жёсткости тела, что влечёт выделение энергии, затрачиваемой на образование новых поверхностей – трещины.

Особый интерес представляет механизм диссипации части этой энергии, что должно учитываться в общих энергетических критериях разрушения.

В настоящей работе приведены результаты исследования разрушения образцов из полиметилметакрилата (ПММА) при квазистатических испытаниях. Методика проведения эксперимента описана в [1]. Дополнительно, для фиксации температурного поля в окрестности движущейся трещины использовалась инфракрасная (ИК) фотометрия.

Для измерения теплового излучения использовался ИК-модуль PDM42 со спектральной полосой  $2,75 \div 4,6 \mu\text{m}$  и временным разрешением порядка  $1 \mu\text{s}$ .

Анализ экспериментальных данных указывает, что с увеличением скорости движения трещины увеличивается тепловое излучение в локальной окрестности конца трещины.

Эволюция температуры  $T$  в одномерном случае описывается уравнением теплопроводности с движущимся источником  $Q$  при скорости  $\frac{\partial l}{\partial t}$ , где  $l$  – длина трещины.

Асимптотический анализ решения этого уравнения проводился в движущейся системе координат с учётом зоны вынужденной эластической деформации, сформированной впереди бегущей трещины.

Размер этой зоны  $\delta$ , находящейся перед фронтом трещины, оценивается как  $\delta \sim \left(\frac{K_{1c}}{\sigma_e}\right)^2$ , где  $K_{1c}$  – коэффициент интенсивности напряжений,  $\sigma_e$  – предел вынужденной эластичности.

Учитывая низкую температуропроводность ПММА, можно показать, что производство тепла в окрестности движущейся трещины пропорционально скорости её распространения, что согласуется с экспериментом.

Таким образом, при построении энергетических соотношений в динамике трещины необходимо учитывать не только поверхностную энергию, но и энергию диссипации (потерь), зависящую от скорости движения трещины.

## Л и т е р а т у р а

1. Смирнов И.В., Судьенков Ю.В. Исследование динамики трещин в пластинах ПММА при квазистатических и динамических нагрузках // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 12. С. 114-117.

## Dissipation Energy and Heat Generation Process in a Tip of Moving Crack for Polymer Materials

B.A. Zimin, Y.V. Sudenkov, V.E. Sventitskaya

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Measurements of the temperature flow into the tip of running crack in PMMA had done in this paper by authors. It is shown in the paper that dissipation energy is a function of the crack's velocity.

# АСИМПТОТИКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

И.С. Зорин

*Петербургский государственный университет, Россия.*

*E-mail: i.s.zorin@spbu.ru*

Важнейшим для теории неоднородных анизотропных стержней и пластин [1,2] является тот факт, что их предельные системы уравнений равновесия в общем случае не допускают расщепления на независимые уравнения изгиба, плоской деформации и кручения [3, 4]. Здесь невозможно использовать классические представления о нейтральной линии и поверхности теории стержней и пластин, соответственно.

В работе применяется метод [5] асимптотического интегрирования к системе уравнений Ламе для вывода предельных краевых задач стержней и пластин. Так, для анизотропной и неоднородной пластины оператор системы предельных уравнений равновесия может быть записан [4] в виде:

$$L\left(x, \frac{d}{dx}\right) = K^t\left(\frac{d}{dx}\right)S^1(x)K\left(\frac{d}{dx}\right) - K^t\left(\frac{d}{dx}\right)S^2(x)K\left(\frac{d}{dx}\right)T\left(\frac{d}{dx}\right) - T^t\left(\frac{d}{dx}\right)K^t\left(\frac{d}{dx}\right)S^2(x)K\left(\frac{d}{dx}\right) + T^t\left(\frac{d}{dx}\right)K^t\left(\frac{d}{dx}\right)S^3(x)K\left(\frac{d}{dx}\right)T\left(\frac{d}{dx}\right).$$

Здесь  $S^j = \int_{g_-(x)}^{g_+(x)} A^{-1}(x, t)t^{j-1} dt$  – моменты первого, второго и третьего порядков, имеющие смысл жесткостей на растяжение-сжатие и изгиб-кручение,  $A$  – матрица упругих податливостей, ассоциированная с матрицей упругих модулей [1],  $g_+(x) < h(x) < g_-(x)$ ,  $h$  – толщина пластины,  $T$  и  $K$  – матричные  $3 \times 3$  дифференциальные операторы первого порядка с элементами  $t_{11} = t_{32} = k_{13} = \frac{d}{dx_1}$ ,  $t_{22} = t_{13} = k_{23} = \frac{d}{dx_2}$ ,  $x = (x_1, x_2)$ . Оператор  $L(x, \frac{d}{dx})$  применен к вектору  $(u, v, w)$  продольных смещений и поперечного изгиба пластины.

Аналогично можно представить и предельную самосопряженную систему уравнений для анизотропного и неоднородного по структуре стержня.

В работе показано, что нейтральная ось и нейтральная поверхность вследствие неоднородности и анизотропии материала не могут быть прямолинейной и плоской, соответственно.

Развивается подход к решению задачи об устойчивости равновесия таких объектов.

## Л и т е р а т у р а

1. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука. 1977. 416 с.
2. *Болотин В.В., Новичков Ю.И.* Механика многослойных конструкций. Москва: Машиностроение. 1980. 420 с.
3. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. Москва: Мир. 1982. 336 с.
4. *Зорин И.С.* Операторное представление системы Ламе и предельные задачи теории тонких плит // Вестник ЛГУ. Сер. 1. 1987. № 22. С. 108.
5. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Т. 1. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск. 2002. 408 с.
6. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. Москва: Наука. 1967. 984 с.

## Strain-Stress Asymptotic and Stability Nongomogenous Anisotropic Rods and Plates

I.S. Zorin

*Saint-Petersburg State University, Russia*

We derive an asymptotically exact equations of the theory of thin anisotropic inhomogeneous rods and plates. We study the issues of determining the neutral axis of the rod, the neutral surface of the plate and the stability conditions of equilibrium of bodies.

# ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

**К. А. Игнатьева**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: kseniiaignatieva@gmail.com*

Морозовым Н.Ф. было доказано [1,2], что возможность перехода круглой пластины, находящейся под действием нормального давления, в несимметричное состояние обусловлена появлением при больших прогибах сжимающих напряжений в окрестности внешнего контура пластины.

В данной работе исследована потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия неоднородных пластин, модуль упругости которых изменяется при движении от центра пластины к ее краю. Задача рассматривается для нескольких видов граничных условий на внутреннем и внешнем краях пластины. На внешнем крае рассматривается следующее граничное условие:

- край пластины закреплен от поворотов, но точки края свободно смещаются в радиальном и окружном направлении.

В случае внутреннего края рассматриваются два варианта условий:

- свободный край;

- жестко закрепленный край.

В основу решения задачи положена численная схема нахождения критической нагрузки, предложенная для пологой сферической оболочки Huang N.C. [3]. Предполагается, что несимметричная составляющая решения системы носит периодический характер, и численным методом определяется наименьшее значение нагрузки, при которой появляются волны в окружном направлении [4]. Методом пристрелки решается симметричная задача, затем методом прогонки проверяется существование несимметричного решения. Расчеты проводились в программах, написанных в пакетах MatLab и Mathematica. Таким образом, найдено критическое давление, при котором возможна бифуркация пластины в неосесимметричное состояние. Произведен численный анализ критической нагрузки для различных законов изменения модуля упругости пластины и различных краевых условиях. Исследовано влияние параметров отверстия в центре пластины и степени неоднородности материала на величину критической нагрузки и форму потери устойчивости. Подобная пластина может быть простейшей моделью решетчатой пластины диска зрительного нерва человека.

## Л и т е р а т у р а

1. Морозов Н.Ф. Единственность симметричного решения задачи и о больших прогибах симметрично загруженной круглой пластины // ДАН СССР. 1958. Т. 123. № 3.
2. Морозов Н.Ф. К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластины, загруженной симметричной нагрузкой // Изв. высш. уч. Заведений. Математика 1961. №2. С. 126-129.
3. Huang N.C. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells // J. Appl. Mech. 1964. №31. P. 447-457.
4. Cheo L.S., Reiss E.L. Unsymmetrical wrinkling of circular plates // Quart. Appl. Math. 1971. №31. P. 75-91.

## **Buckling of Axisymmetric Equilibrium States of Circular and Annular Plates Under Normal Pressure**

**K.A. Ignateva**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

This work is concerned with the numerical study of unsymmetrical buckling of clamped circular and annular plates under uniform pressure with different boundary conditions. The effect of material heterogeneity on the buckling load is examined. The in-plane elastic modulus continuously varies from point to point in the radial direction. The solutions of this problem based on the theory proposed Huang N.C. Buckling equations for axisymmetric problem constitute an eigenvalue problem. After that we use the shooting method to solve nonlinear axisymmetric problem together with boundary conditions. Such a plate can be used as the simplest model of Lamina Cribrosa (LC) in the human eye.

# ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКИ

**С.А. Кабриц, В.А. Шамина**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: shamina-valentina@yandex.ru, skabrits@yandex.ru*

Одним из видов локального воздействия на цилиндрическую оболочку является кольцевая нагрузка, распределение которой по срединной поверхности можно описать вектором  $\mathbf{q} = q(\varphi)\delta(z-z_k)$ . Здесь и далее  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты, ось  $z$  – ось цилиндра,  $r=R$  – радиус его поперечного сечения.

Задаче определения НДС цилиндрических оболочек при локальных нагрузках посвящены многочисленные работы различных авторов, опубликованные в разное время [1-4 и др.]. В большинстве из них используются уравнения теории цилиндрических оболочек в перемещениях, которые решаются в двойных или одинарных тригонометрических рядах. Так как основное внимание уделено сосредоточенным воздействиям, частное решение неоднородных уравнений представляется интегралом Фурье.

В представленной работе для определения НДС цилиндрической оболочки при кольцевой нагрузке принята постановка задачи в напряжениях, когда исходная система уравнений состоит из уравнений равновесия, соотношений упругости, уравнений сплошности и соотношений, позволяющих определить перемещения по компонентам деформации. Представляя неизвестные системы в тригонометрических рядах по  $\varphi$ , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неизвестные коэффициенты рядов которой с номером  $n$ , совпадают с соответствующими коэффициентами краевых величин. При  $n=1$  получаем уравнения работы [5], решению которых посвящена основная часть работы.

Рассматривается модельная задача о НДС цилиндрической оболочки при кольцевой нагрузке, возникающей при заданных жестких смещениях ряда поперечных сечений цилиндра. Именно этот случай реализуется при проведении ревизии НДС газопровода по измеренным смещениям в некоторых сечениях трубы.

Соответствующие линейные одномерные краевые задачи решаются численно. Так как в подобных задачах присутствует значительный краевой эффект, то для решения используется метод ортогональной прогонки Годунова, который обеспечивает получение численного решения с приемлемой точностью.

## Л и т е р а т у р а

1. Даревский В.М. К теории цилиндрических оболочек // ПММ. 1951. Т. XV. С. 531-562.
2. Христенко А.С. О действии сосредоточенных нагрузок на ортотропную цилиндрическую оболочку. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 3. С. 128-133.
3. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках (Пер. с англ. и польск.). М.: Мир. 1982. 542 с.
4. Виноградов Ю.И. Исследование концентрации напряжений в оболочке при локально воздействии методом матриц перехода. Изв. высших учебных заведений. Машиностроение. 2014. № 5. С. 3-9.
5. Кабриц С.А., Шамина В.А. Изгиб оболочки вращения поперечной силой и моментом // Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2014. Т.1(59). Вып. 2. С. 261-269.

## Cylindrical Shell under the Action of the Ring Load

**S.A. Kabrits, V.A. Shamina**

*Saint-Peterburg State University, Russia*

It is considered the stress-strain state of a cylindrical shell under the line ring load. The original system of equations consists of the equilibrium equations, the compatibility conditions, the stress-strain relations and relationships, allowing us to determine displacements if components of deformation are known. The unknown terms of this system are expressed in trigonometric series the coefficients of which satisfy the ordinary differential equations.

Corresponding linear one-dimensional boundary value problems are solved numerically. As in such problems there is a significant edge effect, we used the method of the orthogonal sweep Godunov, which provides a numerical solution with acceptable accuracy.

# THE INFLUENCE OF INITIAL MICROSTRESSES ON BEHAVIOR OF THE SOFTENING MATERIALS IN GEOMETRICALLY NONLINEAR ENDOCHRONIC THEORY OF INELASTICITY

Yu.I. Kadashevich<sup>1</sup>, S.P. Pomytkin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Saint-Petersburg State Technological University of Plant Polymers, Russia

<sup>2</sup> Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Russia

E-mail: kadashevich-yuliy@yandex.ru, sppom@yandex.ru

It was shown there is the close relationship between the classical theory of incremental plasticity and endochronic theory of inelasticity (ETI) [1]. Based on the ideas of the articles [2, 3] the ETI was extended on the domain of large deformations [4]. Some new effects (such as locking, microfractures and softening) derived from ETI were formulated in the paper [5]. The origin of the softening of material was explained in the study [6]. In the work of V.V. Novozhilov [7] it was shown that it is necessary to take into account both initial and residual microstresses in the description of inelastic phenomena.

For study the endochronic constitutive equations were chosen in form

$$\frac{1}{2G} \cdot \left[ \sigma_{ij} + \alpha \tau \frac{d\sigma_{ij}}{dr} \right] = \tau \frac{dr_{ij}}{dr} + \frac{r_{ij}}{g + \alpha}, \quad \varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{K}, \quad (1)$$

$$r_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1 - \alpha}{2G} \sigma_{ij}, \quad dr = \sqrt{dr_{ij} : dr_{ij}}, \quad \tau = \tau(r). \quad (2)$$

Here  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $r_{ij}$  are the deviators of stress, strain and auxiliary parametric tensors, respectively;  $\tau$  is the analogue of the strain at the yield limit;  $g$  is the analogue of the hardening coefficient;  $\alpha$  is the endochronic parameter ( $0 < \alpha \leq 1$ );  $G$  is the shear modulus;  $K$  is the bulk modulus.

It is assumed there is the random field of initial microstrains  $\varepsilon_{ij}^0$  in the polycrystalline material. It does not break the macro homogeneity and the isotropy of the material in initial state. Also it is postulated the probability density is the function of the second invariant of tensor  $\varepsilon_{ij}^0$ , namely  $f(\varepsilon_{ij}^0) = f(\varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 = \sqrt{\varepsilon_{ij}^0 : \varepsilon_{ij}^0}$ . Particularly for uniaxial case the relations (1) and (2) are reduced to the ordinary differential equation

$$\frac{1}{2G} \cdot \left[ \sigma + \tau \frac{d\sigma}{d\lambda} \right] = \tau \frac{d\varepsilon}{d\lambda} + \frac{\varepsilon}{g + 1}, \quad d\lambda = \sqrt{d\varepsilon_{ij} : d\varepsilon_{ij}}, \quad \langle \sigma \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon) f(\varepsilon_0) d\varepsilon_0,$$

where  $\lambda$  is the cumulated deformation when  $\alpha = 1$ ,  $f(\varepsilon_0)$  is the density of distribution of the stochastic variable  $\varepsilon_0$  and  $\langle \cdot \rangle$  is the symbol of the mean value of a random quantity.

The softening of materials are analyzed by geometrically non-linear ETI [4] with accounting the ideas from [5, 7] and the initial microstrains. Some examples of inelastic behavior of the softening materials and the influence of the initial microstresses and the initial microstrains are presented in the report.

The research was supported by grant No. 14-01-00202 from Russian Foundation for Basic Researches.

## References

1. Kadashevich Yu.I., Pomytkin S.P. On the interconnection of the theory of plasticity taking into account microstresses with the endochronic theory of plasticity // *Mechanics of Solids*. 1997. No 4. P. 99-105.
2. Kadashevich Yu.I. On various variants of the tensor-linear relations in the theory of plasticity // *Issledivaniya po uprugosti i plastichnosti*. Leningrad. 1967. No 46. P. 39-45.
3. Valanis K.C. Fundamental consequence of a new intrinsic time measure-plasticity as a limit of the endochronic theory // *Archives of mechanics*. 1980. V. 32. P. 171-191.
4. Kadashevich Yu.I., Pomytkin S.P. The new principles of formulating the constitutive equations of endochronic plasticity theory at finite deformations // *Mashiny i apparaty tsellulozno-bumazhnogo proizvodstva*. Saint-Petersburg. 1996. P. 124-127.
5. Ivanov B.F., Kadashevich Yu.I., Pomytkin S.P. Endochronic theory of nonelasticity allowing for the yield, the lock and microfractures in materials the presence of large displacements and physical instability // *Assessment of reliability of materials and structures. Problems and solutions: Trans. of Int. Conf. Saint-Petersburg*. 2008. V. 1. P. 143-146.
6. Kadashevich Yu.I., Pomytkin S.P. Endochronic theory of inelasticity for softening materials taking into account the finite deformations // *Sovremennyye problemy resursa materialov i konstruksij*. Moscow. 2009. P. 158-165.
7. Kadashevich Yu.I., Novozhilov V.V. On the influence of initial microstresses on the macroscopic deformation of polycrystals // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1968. V. 32. Issue 5. P. 908-922.

## ПРЕДЕЛ ПРОЧНОСТИ ГРАФЕНА С 5-8-5 ДЕФЕКТОМ РЕШЁТКИ

А.С. Кочнев<sup>1</sup>, И.А. Овидько<sup>1,2,3</sup>, Б.Н. Семёнов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Институт Проблем Машиностроения РАН, Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup>Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия

E-mail: [Andrey.S.Kochnev@gmail.com](mailto:Andrey.S.Kochnev@gmail.com), [Ovidko@gmail.com](mailto:Ovidko@gmail.com), [Semenov@bs1892.spb.edu](mailto:Semenov@bs1892.spb.edu)

Актуальной проблемой в исследовании свойств графена во всём мире остаётся вопрос о влиянии дефектов в структуре кристаллической решётки на прочностные характеристики этого материала.

В процессе исследования разработана модель кристаллической решётки графена, содержащая бивакансию в виде ячеек пяти- и восьмиугольной формы, так же называемую 5-8-5 дефектом. При помощи методов молекулярной динамики пакета параллельного моделирования LAMMPS была проведена серия экспериментов по одноосному растяжению графенового листа при температурах от 100К до 700К при различных комбинациях указанных дефектов.

В процессе растяжения выявлены закономерности разрушения графенового листа с единичным дефектом и группами 5-8-5 дефектов. Продемонстрировано влияние дефектов на предел прочности материала и характер разрушения. Исследован характер влияния температуры на предел прочности графена при одноосном растяжении.

Получены результаты, которые указывают на значительное снижение прочности графена при внедрении дефекта этого типа.

### Л и т е р а т у р а

1. *Steven J. Stuart*. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions // *Journal Of Chemical Physics*. V. 112. No 14 , 8 APRIL 2000.
2. *H. Zhao, K. Min, N. R. Aluru*. Size and Chirality Dependent Elastic Properties of Graphene Nanoribbons under Uniaxial Tension // *Nano Letters*. 2009. V. 9. No 8. P. 3012-3015.
3. *H. Zhao, N. R. Aluru*. Temperature and strain-rate dependent fracture strength of graphene // *Journal of applied physics*. 2010. 108, 064321.
4. *Ajing Cao, Yutang Yuan*. Atomistic study on the strength of symmetric tilt grain boundaries in graphene // *Applied physics letters*. 2012. 100, 211912.
5. *Ovid'ko I.A.* Review on grain boundaries in graphene. curved poly- and nanocrystalline graphene structures as new carbon allotropes // *Rev. Adv. Mater. Sci*. 2012. V. 30. P. 201-224.
6. *Ovid'ko I.A.* Mechanical properties of graphene // *Rev. Adv. Mater. Sci*. 2013. V. 34. P. 1-11.

## Tensile Strength of Graphene Containing 5-8-5 Defects

A.S. Kochnev<sup>1</sup>, I.A. Ovid'ko<sup>1,2,3</sup> and B.N. Semenov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Institute of Problems of Mechanical Engineering RAS, Saint-Petersburg, Russia

<sup>3</sup>Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia

Classical molecular dynamics with the AIREBO potential is used to examine the effect of 5-8-5 defects (divacancies associated with “pentagon-octagon-pentagon” configurations of carbon atoms) on tensile strength of graphene sheets containing such defects. These computer simulations have shown multistage character of fracture processes occurring in graphene sheets containing 5-8-5 defects. In particular, the final stage of fracture is realized through formation of carbon monatomic chains that join separate parts of graphene sheets under mechanical load. Also, it is revealed that the tensile strength significantly degrades (by tens of percent) due to the presence of 5-8-5 defects in graphene.

# ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ТОНКИХ КОЛЕЦ ИЗ АЛЮМИНИЕВОЙ ФОЛЬГИ С ПОКРЫТИЕМ ИЗ МЕДНЫХ НАНОЧАСТИЦ МАГНИТО-ИМПУЛЬСНЫМ МЕТОДОМ

**Д.К. Магомедова, А.А. Лукин**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: magmedva.dasha@mail.ru, anton\_lukin@mail.ru*

Проведён сравнительный анализ параметров деформирования и разрушения тонких алюминиевых фольг в виде колец без и с покрытием из медных наночастиц при воздействии распределённой радиальной нагрузки магнито-импульсным методом. Нанесение медных частиц на исходный алюминиевый образец осуществлялось методом катодного напыления.

Измерялось радиальное давление на внутреннюю поверхность кольца при деформировании и разрушении, а также время разрушения.

Исследовано состояние поверхности образцов после разрушения с помощью сканирующего электронного микроскопа, проанализированы возможные причины отслоения напылённого слоя.

## **Л и т е р а т у р а**

1. Морозов В.А., Петров Ю.В., Лукин А.А., Кай В.М., Удовик А.Г., Атрошенко С.А., Федоровский Г.Д. Растяжение металлических колец при ударном воздействии магнито-импульсным методом. ДАН. 2011. Т. 439. № 6. С. 761-763.

## **Deformation and Fracture of Thin Rings Made of Aluminum Foil Coated with Copper Nanoparticles by Magneto-Pulse Method**

**D.K. Magomedova, A.A. Lukin**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Comparative analysis of deformation and fracture parameters of thin aluminum foils in the form of rings with and without a coating of copper nanoparticles under the influence of distributed radial load by magneto-pulse method was conducted. Radial pressure onto the inner surface of the ring during deformation and fracture as well as destruction time were measured. Surface state of the samples after fracture was investigated and possible causes of the deposited layer was analyzed.

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Ю.В. Малькова, В.М. Мальков

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: vmmalkov@apmath.spbu.ru, jmalkova@list.ru

Получено точное аналитическое решение плоской задачи теории упругости (плоская деформация или плоское напряженное состояние) для упругой пластины, содержащей упругое эллиптическое включение из другого материала. На бесконечности пластины заданы постоянные нормальные и касательные усилия. На границе включения выполняются условия упругого сопряжения с пластиной. Задача имеет практическое значение для механики композитных материалов. Для решения задачи применяется аппарат теории функций комплексной переменной в сочетании с методом конформных отображений. Основное предположение, которое используется для построения решения в данной работе, состоит в том, что напряженное состояние в области эллиптического включения является однородным. Принятие этой гипотезы позволило свести решение сложной задачи сопряжения пластины с упругим включением к решению двух более простых краевых задач (первой и второй) для пластины с эллиптическим отверстием, методы их решения разработаны в [1]. Совместность решений двух задач обеспечивается выбором комплексных постоянных в области включения. Справедливость указанной гипотезы доказана тем, что полученное решение точно удовлетворяет всем граничным условиям задачи, уравнениям равновесия и совместности. Показано, что контур включения сохраняет эллиптическую форму после деформации. В качестве частных случаев из решения общей задачи получены решения следующих задач: пластина с эллиптическим отверстием, пластина с жестким эллиптическим включением, пластина с трещиной, пластина с жестким включением малой толщины.

Компоненты вектора сил и перемещения выразим через комплексные потенциалы [1]

$$f_1 + if_2 = \varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)}, \quad 2\mu(u_1 + iu_2) = \kappa\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}, \quad (1)$$

где  $z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1})$  – конформное отображение эллипса в плоскости  $z$  на круг в плоскости  $\zeta$ . Комплексные потенциалы включения имеют вид  $\varphi_1(z) = A_1 z$ ,  $\psi_1(z) = B_1 z$ , правые части формул (1) в области включения известны с точностью до постоянных. Условия равенства выражений (1) на границе включения и пластины дают две граничные задачи для комплексных потенциалов пластины  $\varphi_2(\zeta)$  и  $\psi_2(\zeta)$ . Комплексные постоянные  $A_1$  и  $B_1$  находятся из условий тождественности решений этих задач. Рассмотрены разные виды нагружений пластины усилиями на бесконечности, вычислены напряжения и перемещения в областях пластины и включения, построены графики.

## Л и т е р а т у р а

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1968. 708 с.

## The Analytical Solution of Plane Problem for a Plate with an Elastic Elliptic Inclusion

Yu.V. Mal'kova, V.M. Mal'kov

Saint-Petersburg State University, Russia

The exact analytical solution of a plane problem of the elasticity (plane deformation or plane stress) for the elastic plate containing an elliptic elastic inclusion of different material is received. The constant normal and shear tractions are given at infinity of a plate. Stresses and displacements of inclusion and plate are continuous at the interface. The methods of the theory of functions of a complex variable and the method of conformal transformation are applied to the solution of the plane problem. The basic assumption which is used for the construction of the solution is that the stress state in the elliptic inclusion is homogeneous. The acceptance of this hypothesis is allowed reducing the solution of the difficult problem for a plate with elastic inclusion to the solution of two boundary value problems (the first and the second) for a plate with an elliptic hole. The validity of the hypothesis in our work is proved to that the received solution precisely satisfies to all boundary conditions, the equations of equilibrium and the conditions of compatibility.

# ДЕФОРМАЦИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

**Ю.В. Малькова, В.М. Мальков**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: jmalkova@list.ru, vmmalkov@apmath.spbu.ru*

Задачи теории упругости для композитных материалов с отверстиями и включениями представляют большой практический интерес в механике, физике и других областях. В работе рассмотрена плоская задача теории упругости (плоская деформация или плоское напряженное состояние) для двухкомпонентной пластины с эллиптическим отверстием. Близость отверстия к границе раздела сред оказывает существенное влияние на величину напряжений в окрестности отверстия, а также на величину напряжений на линии раздела. Для инженерных приложений важно знать поля напряжений и перемещений, чтобы оценить влияние отверстия на прочность материалов, в частности на прочность соединения. Как частные случаи из рассмотренной задачи вытекают решения задач об эллиптическом отверстии в полуплоскости, о наклонной трещине в двухкомпонентной плоскости и полуплоскости. На контуре отверстия приложена внешняя поверхностная нагрузка. На бесконечности заданы напряжения и углы поворота. Для решения краевой задачи используется метод комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили [1] в сочетании с методом суперпозиции [2-4]. Решение исходной задачи строится в виде суммы решений двух частных задач: первой является задача для двухкомпонентной плоскости со скачками напряжений и перемещений на линии сопряжения полуплоскостей и заданными условиями на бесконечности, второй - задача для однородной плоскости с эллиптическим отверстием, нагруженной на контуре, напряжения на бесконечности во второй задаче отсутствуют. Основная сложность получения решения состоит в том, что скачки напряжений и перемещений первой вспомогательной задачи и поверхностная нагрузка на контуре отверстия второй вспомогательной задаче являются неизвестными функциями. Для нахождения этих функций из граничных условий исходной задачи получена система трех уравнений, которые путем преобразований сведены к одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода в комплексной форме относительно одной искомой функции. Решение уравнения представлено в виде тригонометрического полинома, неизвестные коэффициенты ищутся методом коллокации. Создана программа в среде Matlab для реализации метода коллокации.

## **Л и т е р а т у р а**

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука. 1966. 708 с.
2. Греков М.А. Слабо искривленная трещина около границы соединения двух различных материалов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 2008. Вып. 1. С. 93-101.
3. Малькова Ю.В. Некоторые задачи для двухкомпонентной плоскости с криволинейными трещинами. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2008. 160 с.
4. Мальков В.М., Малькова Ю.В. Трещина в форме дуги окружности, расположенная вблизи поверхности раздела материалов // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. Математика, механика, астрономия. 2010. Вып. 1. С. 93-104.

## **The Deformation of Bi-material Plate with an Elliptical Hole**

**I Yu.V. Mal'kova, V.M. Mal'kov**

*St. Petersburg State University, Russia*

The plane problems of elasticity for composite materials with the holes and inclusions have a great practical significance for mechanics, physics and other fields of science. In this paper the analytical solution of the plane problem (plane strain or plane stress) for a bi-material plate with an elliptic hole is obtained. A hole lies entirely in the lower half-plane, on a boundary of hole an external load is applied. The stresses and the angles of rotation at infinity are known. The method of complex potentials of Kolosov-Muskhelishvili and the method of superposition are used for the solution of the problem. The proximity of a hole to interface renders essential influence on the magnitude of stresses in a vicinity of a hole and also on the magnitude of stresses on an interface. For engineering applications it is important to know fields of the stresses and the strains. It allows estimating the influence of the hole on the strength of materials, in particularly on the bonding strength. As special cases of the considered problems the solution of a problem an elliptic hole in a half-plane follows, as well as the solution for a problem about an inclined crack in a bi-material plane and half-plane and some others.

# THE EFFECT OF STRESS STATE ON THE INTERNAL STRUCTURE OF THE MATERIALS

Y.A. Mochalova<sup>1</sup>, E.S. Merkushev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Problems in Mechanical Engineering of the RAS, Saint-Petersburg, Russia*

<sup>2</sup>*Saint-Petersburg State University, Russia*  
*E-mail: eugenemerkushev@gmail.com*

Hydrogen embrittlement of materials under load is one of the most important problems of the physics and mechanics of materials. Though the hydrogen concentration in metals can be very low (about 1 atom of hydrogen in 100,000 atoms of the metal matrix), nevertheless its influence on the mechanical properties of the metals can be of crucial importance. As a rule, the hydrogen is accumulated in metals during their exploitation. One of the main sources for hydrogen appearance in metals is water (or steam); however, hydrogen diffusion from gas and oil is feasible as well. In metals, the hydrogen is contained in traps with various bonding energies. It has been established (see Polyanskiy (2005) and references therein) that thermo-mechanical loading results in the hydrogen redistribution over the traps. A number of papers were devoted to the influence of hydrogen on the mechanical properties of metals, see e.g. Ahn (2007). The majority of the papers addressing the effect of hydrogen on the strength of materials utilize primarily phenomenological models and do not discuss the problem of redistribution of hydrogen over the traps. The degradation of mechanical properties in these papers is modeled by means of some empirical dependences. However, there is an open question: how kinetic processes in the material (such as the redistribution of hydrogen) affect its basic strength properties under static and dynamic loads?

The aim of our study is to describe the dynamics of the hydrogenated metal and the influence of internal kinetics on metal macroparameters using the fundamental principles of rational mechanics. The hydrogen diluted in structural materials can be conditionally divided into that with low bonding energy and that with high bonding energy. The hydrogen with low bonding energy is diffuse, and its interaction with material is very weak (mobile hydrogen). The high bonded hydrogen interacts with material very intensively. The mechanical material properties degrade owing to this strong interaction.

We suggest a one-dimensional model of two-component continuum, which allows us to describe both the hydrogen diffusion and its interaction with the material and, therefore, to find the equation of state for hydrogen-containing media. The first component is represented by the crystal lattice of the initial material including stationary hydrogen atoms embedded (attached) in chemical bonds between atoms (which significantly reduce the strength of the bonds), the second component is represented by free mobile hydrogen atoms dissolved in the material. The problem is reduced to analysis of a system of nonlinear equations describing the effect of stress state on the diffusion of impurity in the rod. The solutions of the problem are obtained for a number of model examples.

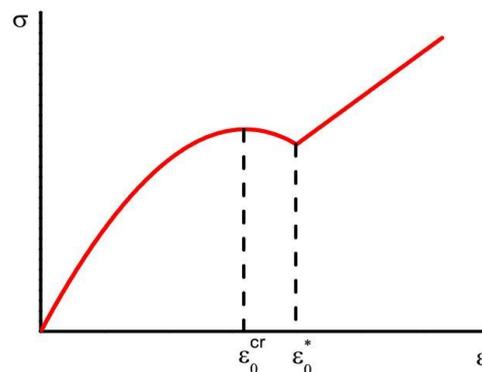


Figure 1. The diagram of strain-stress in view of influence of the bounded hydrogen

It has been shown (Fig. 1) that the stress-strain equation of state of the hydrogenated metal is shaped like the Van der Waals loop; therefore, brittle hydride regions are nucleated in metal by the mechanism of the first-order phase transition. This allows us to describe the kinetics of hydrogen in metals, to estimate hydrogen transition from the mobile into the bonded state depending on the stress state.

## УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ КОНСОЛИ ИЗ РАЗНОПРОЧНОГО МАТЕРИАЛА

**Г.В. Павилайнен, Н.В. Наумова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: g.pavilainen@math.spbu.ru*

Рассматривается задача упруго-пластического изгиба горизонтальной консольной балки с учетом веса при воздействии сосредоточенной нагрузки на свободной конце и эффекта SD (разнопрочности) материала балки. Исследуются случаи упругого и упруго-пластического состояния до потери устойчивости при образовании пластического шарнира в месте жесткой заделки консоли. Проведено сравнение критической нагрузки появления пластичности при учете веса и без учета веса, показано, что учет веса балки приводит к снижению критической нагрузки появления пластичности от 8 до 15 процентов.

Упруго-пластическое решение построено в рамках гипотез Бернулли-Эйлера с использованием теории идеальной пластичности А.А. Ильюшина. В работах В.В. Соколовского рассмотрена задача упруго-пластического изгиба в изотропном случае при интегрировании ОДУ второго порядка с нелинейными коэффициентами относительно неизвестной функции границы  $\chi(r)$  между упругой и пластическими частями балки. В случае учета разнопрочности количество неизвестных увеличивается из-за нарушения симметрии развития пластических областей в растягивающихся и сжимающихся частях балки и появления искажения нейтральной оси относительно геометрической средней линии балки. Данное искажение может составлять до 6 % толщины балки при различии пределов текучести при растяжении и сжатии до 30 %.

В предлагаемой работе для решения задачи построена система трех уравнений, которая решается аналитически. В результате функция прогиба выписывается в явном виде для трех случаев нагружения: I – упругий до момента появления точки пластичности в заделке, II – упруго-пластический при наличии одной зоны пластичности вблизи заделки, III — упруго-пластической при наличии двух зон пластичности. В последнем случае найдена критическая нагрузка образования пластического шарнира и найдены размеры пластических зон.

В качестве примера рассматривается расчет консоли из стального сплава А40Х, который широко используется в строительстве сложных балочных систем и конструкций ферм. Проведенный расчет позволяет сделать вывод о влиянии разнопрочности на прогиб консоли и об уменьшении его в пределах 6 - 8 % при увеличении предела текучести при сжатии на 10 - 20 %.

Хорошее совпадение наблюдается и при сравнении аналитического решения с решением методом конечных элементов в пакете ANSYS, которое не превышает 10%. Результаты можно использовать при определении прочностных свойств консольных балок из разнопрочных материалов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-01-00523.

## Elastic-Plastic Bending of the Cantilever Made of the Material with the SD-Effect

**G.V. Pavilaynen, N.V. Naumova**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The elastic-plastic bending of a cantilever beam made of isotropic material and material with the SD-effect is considered. The results for the bending under a concentrated load are discussed. The problem is solved analytically and results of the numerical simple presents as tables and plots.

## МОДЕЛЬ АДГЕЗИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

**В. Ю. Преснецова, С. Н. Ромашин, Л. Ю. Фроленкова, В. С. Шоркин**

*Государственный университет – учебно-научно-производственный комплекс, Орел, Россия  
E-mail: alluvian@mail.ru, Sromashin@yandex.ru, Larafrolenkova@yandex.ru, VShorkin@yandex.ru*

Предлагается математическая модель сплошной упругой среды. Ее точность и адекватность позволяют производить расчеты контактного взаимодействия твердых тел с учетом их адгезии. В работе предложено уточнение положений, лежащих в основе построения используемого в настоящее время потенциала Maugis-Dugdale. Данный потенциал характеризует поверхностно распределенные адгезионные силы.

Контактное взаимодействие твердых тел сопровождается их нелокальным (безконтактным) взаимодействием, вызванным электрическими и ван-дер-ваальсовыми адгезионными силами [1]. Несмотря на нелокальность безконтактные силы являются короткодействующими. Глубина расположения их источников соизмерима с шириной зоны действия, составляющей величину нескольких межатомных расстояний. Поверхностный слой реального твердого тела в пределах такой глубины имеет атомную структуру, существенно отличающуюся от объемной. Это дает основание использовать для описания его свойств математические модели, более сложные по сравнению с традиционной линейной теорией упругости [2, 3]. Необходимо отметить, что задача о контактном взаимодействии упругих материалов с учетом их адгезии ввиду своей актуальности привлекает к себе постоянное внимание [4-8].

На основании анализа работ [1-8] показано, что предложенный в [1, 4] потенциал нелокального взаимодействия участков поверхностей вступающих в контакт тел (потенциал D. Maugis – Dugdale), можно заменить на потенциал многочастичного взаимодействия элементов сплошной упругой среды. Этот потенциал взаимодействия, а также вычисляемый через него потенциал нелокального взаимодействия участков поверхности рассчитываются на основании информации о термоупругих свойствах материалов. Представлены результаты расчетов, сопоставляемые с известными из физики данными об адгезии твердых тел.

### Л и т е р а т у р а

1. *Maugis D.* Contact, Adhesion and Rupture of Elastic Solids. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. 2000. 425 p.
2. *Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B.* Multiscale Modeling in the Mechanics of Materials: Cohesion, Interfacial Interactions, Inclusions and Defects // In BOOK "Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Analysis and Simulation of Multifield Problems". Springer. 2003. V. 12. P. 101-110.
3. *Vitkovsky I.V., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* Adhesion-diffusion formation of a multilayer wall for the liquid metal flow channel of a fusion reactor blanket // *Technical Physics*. 2012. V. 57. P. 1013-1018.
4. *Johnson K.L., Greenwood J.A.* An Adhesion Map for the Contact of Elastic Spheres // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1997. V. 192 (2). P. 326-333.
5. *Johnson K., Kendall K.L., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Royal Soc. London*. 1971. A 324. No 1558. P. 301-313.
6. *Derjaguin B. V., Muller V. M., Toporov Y. P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci.* 1975. V. 67. P. 378-326.
7. *Maugis D.* Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // *J. Colloid Interface Sci.* 1991. V. 150. P. 243-269.
8. *Goryacheva I. G., Makhovskaya Yu. Yu.* Adhesive interaction of elastic bodies // *J. Appl. Maths Mechs*. 2001. V. 6. No 2. P. 273-282.

## Model of Adhesive Interaction Elastic Bodies

**V.Yu. Presnetsova, S.N. Romashin, L.Yu. Frolenkova, V.S. Shorkin**

*State University – Education-Science-Production Complex, Orel, Russia*

A mathematical model of a continuous elastic medium is offered. Its accuracy and adequacy allow to make calculations of contact interaction of solids with regard to their adhesion. In this paper we proposed clarifying provisions which are the basis construction of the currently used Maugis-Dugdale potential. This potential is characterized by the surface distribution of adhesion forces.

# TAKING ACCOUNT OF HYDROSTATIC PRESSURE IN THE MODELLING OF MECHANOCHEMICAL CORROSION OF SPHERICAL SHELLS

**Y.G. Pronina, O.S. Sedova**

*Saint-Petersburg State University, Russia  
E-mail: ag.olya.sedova@gmail.com*

In the paper, different solutions are compared for the problems of general mechanochemical corrosion of elastic spherical shells subjected to internal  $p_r$  and external  $p_R$  pressure. According to experimental data [1], the rate of uniform corrosion is often linear with an equivalent stress. Some models of shells corrosion have been developed earlier where the equivalent stress does not depend on the pressure values themselves, but depends only on their difference,  $\Delta p = p_r - p_R$ . However, hydrostatic pressure often accelerates corrosion process, e.g. of high strength steel [1, 2], even if  $p_r - p_R = 0$ . Therefore, it is of interest to take into consideration hydrostatic pressure  $p = \min\{p_r, p_R\}$  and to study how much it could affect the durability of the shell under corrosion conditions. Taking account of hydrostatic pressure can be realized, e.g., by using the maximum principal stress as the equivalent stress. In this case, corrosion rates on both sides of the shell depend on the values of inner and outer pressure themselves, and hence on the hydrostatic pressure.

**Corrosion kinetics.** Let the inner and outer radii of the shell be denoted by  $r$  and  $R$ , respectively. Sphere's material is uniformly corroded from the inside and the outside with the rates  $v_r$  and  $v_R$  [1]:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = [a_r + m_r \sigma(r)] \exp(-bt), \quad v_R = -\frac{dR}{dt} = [a_R + m_R \sigma(R)] \exp(-bt).$$

Here,  $b$ ,  $a_r$ ,  $m_r$ ,  $a_R$ , and  $m_R$  are empirically determined constants;  $\sigma$  is the equivalent stress: it can be the maximum principal stress or the von Mises stress at the related surface [1].

**The models considered.** Herein, three following cases are analyzed.

- 1) The maximum principal stress is used for the equivalent stress in the framework of the theory of thin elastic shells:

$$\sigma_1(r) = \sigma_1(R) = \frac{\Delta p (R + r)}{4(R - r)}.$$

We also propose a refined model for thin-walled sphere.

- 2) The equivalent stress equals the von Mises stress in the framework of the Lamé problem for pressurized thick-walled sphere:

$$\sigma_i(r) = \frac{3|\Delta p|R^3}{2(R^3 - r^3)}, \quad \sigma_i(R) = \frac{3|\Delta p|r^3}{2(R^3 - r^3)}.$$

- 3) The maximum principal stress (from the mentioned Lamé problem) is used as the equivalent stress:

$$\sigma_1(r) = \frac{2p_r r^3 + (p_r - 3p_R)R^3}{2(R^3 - r^3)}, \quad \sigma_1(R) = \frac{(3p_r - p_R)r^3 - 2p_R R^3}{2(R^3 - r^3)}.$$

Analytical solutions are obtained for all the cases.

## References

1. Pavlov P.A., Kadyrbekov B.A., Kolesnikov V.A. Strength of Steels in Corrosive Media. Alma Ata: Nauka. 1987. 272 p. (in Russian).
2. Yang Y., Zhang T., Shao Y., Meng G., Wang F. New understanding of the effect of hydrostatic pressure on the corrosion of Ni-Cr-Mo-V high strength steel // Corrosion Science. 2013. V. 73. P. 250-261.

# СВЯЗАННЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ КОМПЗИТНЫХ КОРОБЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

В.М. Рябов<sup>1</sup>, Б.А. Ярцев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup> Крыловский государственный научный центр, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: victor.ryabov@mail.ru, boris\_yar@mail.ru

Обсуждается влияние ориентации армирующих волокон на собственные частоты и диссипативные характеристики связанных колебаний безопорных коробчатых стержней из полимерных композиционных материалов (рис. 1).

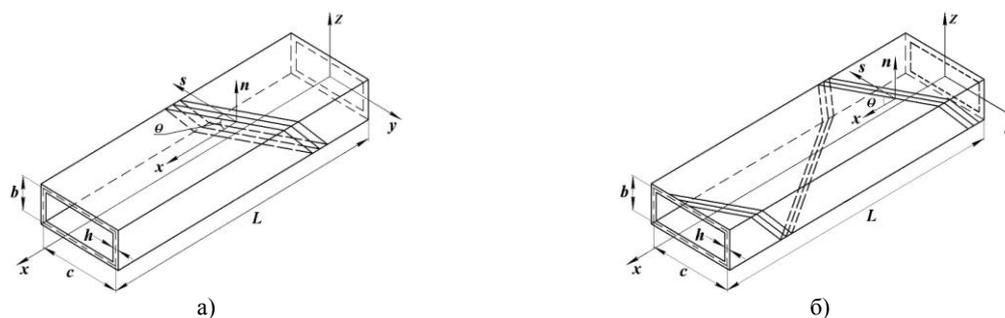


Рис. 1. Схема армирования симметричного (а) и асимметричного (б) коробчатого стержня

Предложена математическая модель затухающих колебаний слоистых анизотропных тонкостенных стержней, основанная на вариационном принципе Гамильтона, уточненной теории балки Тимошенко и принципе упруго-вязкоупругого соответствия в линейной теории вязкоупругости. Минимизация функционала Гамильтона сводит задачу к алгебраической проблеме комплексных собственных значений.

Установлено, что в отличие от стержней произвольной структуры армирования, характеризующихся продольно-изгибно-крутильно-сдвиговой упругой связанностью, при колебаниях симметричного коробчатого стержня возникают только изгибно-крутильная и продольно-сдвиговая связанность, а при колебаниях асимметричного коробчатого стержня – изгибно-изгибная (в двух взаимно ортогональных плоскостях) и продольно-крутильная связанности. Отмечено, что если дифференциальные уравнения колебаний содержат лишь нечетные производные собственных функций по пространственной переменной, то при изменении угла ориентации армирующих волокон происходит взаимная трансформация связанных мод колебаний; в противном случае взаимная трансформация связанных мод колебаний не возникает. Показано, что при исключении областей взаимной трансформации связанных мод колебаний достаточную точность при расчете собственных частот и коэффициентов механических потерь обеспечивает приближенный метод, основанный на вычислении парциальных частот и соответствующих им коэффициентов механических потерь при использовании предложенных Фойгтом «чистых» и «свободных» комплексных модулей упругости и сдвига.

## Coupled Damping Vibrations of Anisotropic Box Beams

V.M. Ryabov<sup>1</sup>, B.A. Yartsev<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup> Krylov State Scientific Center, Saint-Petersburg, Russia

A mathematical model for damping coupled vibrations of anisotropic box beam is given, and the algorithm for solving the equation of motion is elaborated. Vibration modes of a free-free symmetric and asymmetric composite box beam are investigated. The effect of reinforcement composition on eigenfrequencies and mechanical loss factors for various coupled vibration modes of layered anisotropic symmetric and asymmetric composite box beams is discussed.

# О ПОСТРОЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

**М.Ю. Рязанцева**

*НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова, Россия  
E-mail: marina-ryazantseva@yandex.ru*

Обсуждается проблема построения динамических уравнений теории упругих пластин из слоистых композитов. Предполагается, что каждый слой выполнен из однородного, изотропного материала, а условия на границе контакта слоёв – идеальные. Для пластин симметричной структуры по толщине деформации в ”плоскости пластины” и ”из плоскости пластины” описываются независимыми системами уравнений. Ставится задача построить осредненные динамические уравнения, надёжно работающие в достаточно широком диапазоне изменения геометрических и материальных характеристик композитов. Асимптотически точную динамическую теорию предполагается строить как теорию главного приближения.

Для трёхслойных упругих пластин (sandwich композитов) статическая проблема решена и исследована В.Л.Бердичевским [1] на основе разработанного им вариационно-асимптотического метода (см., например, [2]). Показано, при каких соотношениях геометрических и механических параметров классическая теория не применима.

Динамическую теорию упругих пластин, как теорию асимптотическую, построить нельзя, поэтому предлагается для вывода двумерных уравнений комбинировать вариационный подход с эвристическим. Основная идея, положенная в основу вывода уточненных двумерных уравнений из трехмерной динамической теории упругости, состоит в учете взаимодействия низкочастотных (классических) мод с первыми тремя высокочастотными формами. Учёт высокочастотных форм колебаний позволяет описать следующие механические эффекты: поперечный сдвиг, обжатие поперечного волокна, относительное продольное движение срединной и лицевых поверхностей пластины. В качестве законов распределения соответствующих характеристик по поперечной координате принимаются длинноволновые асимптотики собственных форм колебаний бесконечной трёхслойной пластины. Решение соответствующей задачи приведено в [3].

Уточненная динамическая модель, состоящая из двух независимых систем уравнений (продольных и изгибных колебаний), строилась при помощи использования метода асимптотического анализа и усреднения трехмерного функционала действия упругой трёхслойной пластины с последующей его коротковолновой экстраполяцией. Полученные динамические уравнения позволяют описать напряженно-деформированное состояние трёхслойных упругих пластин асимптотически точно при длинноволновых и высокочастотных процессах и качественно правильно в области достаточно коротких волн. Получены аналитические выражения для осреднённых констант теории и исследованы границы её применимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных НИИ-2029.2014.8.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Berdichevsky V.L.* An asymptotic Theory of Sandwich Plates // ELSEVIER, International Journal of Engineering Science. 2010. V. 48. P. 383-404.
2. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. 1983. 447 с.
3. *Ryazantseva M.Yu, Antonov F.K.* Harmonic running waves in sandwich plates // ELSEVIER, International Journal of Engineering Science. 2012. V. 59. P. 184-192.

## **On the Dynamic Theory of Laminated Composite Plates**

**M.Yu. Ryazantseva**

*Research Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Russia*

The study is focused on constructing averaged dynamic models for elastic laminated plates. For sandwich elastic plates the analogous static problem was solved by V.L. Berdichevsky on the basis of a variational-asymptotic method. For elastic plates the dynamic theory cannot be developed as an asymptotic theory; therefore, for deriving two-dimensional equations it is proposed to combine the variational and heuristic approaches. The main idea of the method for deriving refined two-dimensional equations from the three-dimensional dynamic theory of elasticity consists in taking into account the interaction between the low-frequency modes and the first high-frequency modes. The equations so obtained enable us to consider such effects as transverse shear, compression of a transverse fiber, and geometric dispersion of waves. For the theory proposed the applicability domain is determined.

# ЭНДОХРОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЗАИМОСВЯЗЬ ДЕФОРМАТИВНЫХ И ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ ИСХОДНЫХ И НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Г.Д. Федоровский

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: g.fedorovsky@spbu.ru

Последние десятилетия характеризуются бурным развитием нанотехнологий, получением новых наноматериалов и изделий из них, изучением и использованием из практически во всех областях человеческой деятельности: в технике, биологии, медицине и т.д. Важнейшими проблемами в этой сфере является феноменологическое моделирование определяющих механических свойств наноматериалов, установление взаимосвязи со свойствами исходного материала, проектирование технологий структурирования.

Из рассмотрения свойств таких сред [1-6] нами сделан вывод о том, что наиболее универсальные возможности для эффективного решения этих, как правило, нелинейных задач предоставляет «эндохронный» (с собственным, внутренним временем) подход [1, 2, 4, 6 и др.], базирующийся на преобразовании определяющих функций упруговязкопластичности и прочности во времени посредством формирования соответствующего «плетения» «ткани» собственного времени. Основными параметрами «нитей» «ткани» времени, взаимодействующих по иерархическому принципу, являются «горизонтальные» и «вертикальные» масштабы, зависящие от физико-химико-механических воздействий на среды. Использование «вертикального» масштаба позволяет откорректировать и упростить другие определяющие функции и коэффициенты (упругости, ползучести, релаксации, долговечности), упростить «горизонтальный» масштаб.

В [3-6] проведен экспериментальный и феноменологический анализ диаграмм растяжения или длительной ползучести долговечности при комнатной температуре: наноструктурированного алюминия и стали при различных размерах зерна; пиротехнических составов различного состава, плотности и давления прессования; сверхвысокомолекулярного полиэтилена (СВМПЭ) с разной молекулярной массой; фуллерен-полимерных композитов с разной концентрацией содержания фуллерена. Заметна существенная зависимость механических характеристик сред от параметров структуры. Апробированы отдельные эндохронные модели. Отмечены возможности прогнозирования свойств при изменении структуры.

В данном исследовании рассмотрены новые обобщающие варианты эндохронного моделирования.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 13-01-00598 и 14-01-00823, а также по гранту Правительства РФ 2013 г., Постановлению 220, договору 14.B25.31.0017.

## Л и т е р а т у р а

1. *Shapery R.* On the characterisation of nonlinear viscoelastic materials // *Polym. Eng. a Sci.* 1969. V. 9. № 4. P. 295-310.
2. *Fedorovsky G.D.* About Endochronic Approach, "Horizontal" and "Vertical" Scaling at Deformation and Destruction Modelling of Rheology Complex Media // *Proceedings of the XLII Summer School-Conference "Advanced Problems in Mechanics"* (APM 2014). St.-Petersburg: Institute for Mechanical Engineering, 2014. P. 263-267. (On SD).
3. *Tsuji N., Ito Y., Saito Y., Minamino Y.* Strength and Ductility of Ultrafine Grained Aluminum and Iron produced by ARB and Annealing // *Scripta Materialia*. 2002. No 47. P. 893-899.
4. *Александров Д.П., Санников В.А., Федоровский Г.Д.* Длительные деформативность и прочность пиротехнических составов // *Научно-технические ведомости СПбГТУ*. 2003. Вып. 3 (33). С. 148-151.
5. *Темнов О.В., Федоровский Г.Д.* Деформативные и прочностные свойства сверхвысокомолекулярных полиэтиленов высокой прочности. Тр. XXII Междунар. конф. «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов». СПб, 2007. Т. 2. С. 337-342.
6. *Федоровский Г.Д.* Математические модели зависимости деформативных, прочностных и временных свойств полимерного нанокompозита от содержания наполнителя фуллерена C<sub>60</sub>. // *Вестник ИНЖЭКОНА. Серия «Технические науки»*. 2013. Вып. 8 (67). С. 23-26.

## Endochronic Modelling and Interrelation of Deformation and Strenght Properties of Initial and Nanostructural Materials

G.D. Fedorovsky

Saint-Petersburg State University, Russia

Opportunities of application of endochronic approach for phenomenological modelling of mechanical properties of various nanomaterials, of establishments of interrelation with properties of initial material and estimation of influence of technology of structurization are considered.

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВЫМИ ПЛАСТИНАМИ

С.Б. Филиппов

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: s\_b\_filippov@mail.ru

В большинстве многочисленных исследований устойчивости подкрепленных оболочек шпангоуты рассматривались как круговые стержни. В монографии [1], где имеются ссылки на работы этого направления, разработан алгоритм определения оптимальных параметров подкрепленной круговыми стержнями цилиндрической оболочки с фиксированной массой, имеющей наибольшее критическое внешнее давление. Установлено, что критическое давление увеличивается с увеличением ширины шпангоута, однако стержневая модель дает удовлетворительные результаты при вычислении критического давления, если ширина шпангоута не слишком велика.

С увеличением ширины шпангоутов форма потери устойчивости первого типа, изображенная на рис. 1а, сменяется формой потери устойчивости второго типа, изображенной на рис. 1б. Для того чтобы найти форму потери устойчивости второго типа и соответствующее ей критическое давление, необходимо рассматривать шпангоут как кольцевую пластину [2].

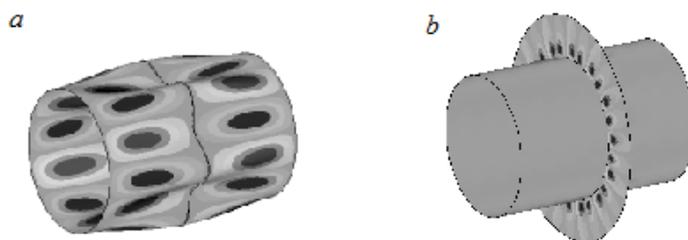


Рис. 1. Формы потери устойчивости подкрепленной оболочки.

В данной работе в качестве модели шпангоута используется кольцевая пластина. Асимптотическим методом найдены начальные напряжения в пластине, возникающие при действии на оболочку внешнего давления. Разработан алгоритм приближенного определения критического давления, соответствующего форме потери устойчивости второго типа, основанный на асимптотическом разложении решений краевой задачи. Показано, что критическое давление уменьшается с увеличением ширины шпангоута. Определены оптимальные параметры подкрепленной кольцевыми пластинами цилиндрической оболочки заданной массы, соответствующие максимальному значению критического давления.

## Л и т е р а т у р а

1. Филиппов С.Б. Теория сопряженных и подкрепленных оболочек. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. 196 с.
2. Filippov S.B. Buckling of circular ring joint with cylindrical shell // Shell Structures Theory and Applications. Proc. of the 9th SSTA Conference. Jurata, Poland, 2009. P. 109-112.

## Asymptotic Analysis of Buckling of the Cylindrical Shell stiffened by Annular Plates

S.B. Filippov

Saint-Petersburg State University, Russia,

The problem of buckling of circular cylindrical shell stiffened by annular plates under the action of uniform external pressure is considered. By means of asymptotic methods the approximate formulas for calculation of critical external pressure are derived. These formulas are used for the evaluation of optimal parameters corresponding to the maximal critical pressure of the ring-stiffened shell with given mass.

# V

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ И  
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

---

**STABILITY AND STABILIZATION OF MECHANICAL AND  
ELECTROMECHANICAL SYSTEMS**

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ВЛИЯНИЯ КРУТКИ ЛОПАСТИ НА ДИНАМИКУ ГОРИЗОНТАЛЬНО-ОСЕВОЙ ВЕТРОТУРБИНЫ

А.А. Мастерова<sup>1</sup>, В.А. Самсонов<sup>2</sup>, Sh.-Sh. Hwang<sup>3</sup>

<sup>1</sup> МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup> НИИ механики МГУ, Москва, Россия

<sup>3</sup> Chien Hsin University of Science and Technology, Zhongli City, Taiwan

E-mail: masterovaanya@yandex.ru, samson@imec.msu.ru, hwang002@ms10.hinet.net

В работе ставилась задача средствами малопараметрической модели ветротурбины «в первоначальном приближении» описать, как изменение установочного угла вдоль лопасти турбины влияет на характеристики стационарных режимов и переходных процессов в системе «ветротурбина–генератор». Модель, предложенная в работе, представляет собой развитие модели [1]: аэродинамический момент вычисляется с применением квазистатической модели, электрическая нагрузка со стороны потребителей энергии в цепи генератора ВЭУ характеризуется моментом, линейным по угловой скорости турбины. По сравнению с [1] усложнение заключается в следующем: для того, чтобы учесть крутку лопасти ВЭУ вдоль радиуса, лопасть представляется в виде двух пластин, расположенных на разном расстоянии от оси вращения, и отличных по длине, ширине и значению установочного угла.

В рамках построенной малопараметрической динамической модели ветроэнергетической установки (ВЭУ) исследована возможность улучшения аэродинамических свойств турбины за счет модификации геометрии лопастей при условии сохранения эффективного рабочего диапазона значений внешней нагрузки в цепи генератора ВЭУ. Особое внимание было уделено практической задаче вывода ветроустановки на высокоскоростной рабочий режим.

При условии сохранения общей площади и длины лопасти исследованы тенденции влияния геометрических параметров модифицированной лопасти на характеристики рабочих режимов. Варьировались следующие параметры: длина части лопасти, находящейся ближе к оси вращения, площадь, приходящая на эту часть, и установочные углы обеих частей. Выявленные тенденции влияния указанных параметров на динамику ВЭУ соответствуют реальной инженерной практике.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-08-01130.

### Л и т е р а т у р а

1. Досаев М.З., Кобрин А.И., Локишин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Части I-II. М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ. 2007. 75 с.; 88 с.

## On Modeling of Influence of Blade Twist upon Dynamics of a HAWT

А.А. Masterova<sup>1</sup>, V.A. Samsonov<sup>2</sup>, Sh.-Sh. Hwang<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University, Russia

<sup>2</sup> Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Russia

<sup>3</sup> Chien Hsin University of Science and Technology, Zhongli City, Taiwan

The modification of the model of a horizontal axis wind turbine (HAWT) is developed in order to take into account the influence of the blade twist upon dynamics of the wind turbine. Each blade of the HAWT is represented as a combination of two plates with different pitch angle, width and area. Such approach allowed performing the parametrical analysis of steady regimes of the system for different configurations of blades. Identified trends of influence of blade parameters upon the HAWT dynamics agree with the real engineering practice.

# СТАБИЛИЗАЦИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ГОРИЗОНТАЛЬНО-ОСЕВОЙ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПЛАНЕТАРНОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ

К.-Н. Lin<sup>1</sup>, А.П. Голуб<sup>2</sup>, Л.А. Климина<sup>2</sup>, Д.В. Гриценко<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Chien Hsin University of Science and Technology, Zhongli City, Taiwan,*

<sup>2</sup>*НИИ механики МГУ, Москва, Россия*

<sup>3</sup>*Военная академия РВСН имени Петра Великого, Москва, Россия*

*E-mail: klimina@imec.msu.ru, g8603003@hotmail.com*

Рассматривается динамическая модель малогабаритной горизонтально-осевой ветроэнергетической установки (ВЭУ), оснащенной дифференциальной планетарной передачей (ДПП). Солнечное кольцо ДПП соединено с ротором генератора ВЭУ. К внешней цепи генератора подключен потребитель с сопротивлением  $R$ . Каретка ДПП соединена с турбиной ВЭУ, которая находится в потоке ветра скорости  $V$ . К внешнему кольцу ДПП приложен управляющий момент. Аэродинамический момент, действующий на турбину, нелинейно зависит от быстроходности турбины. Момент электромагнитных сил, действующих на ротор генератора, считаем линейным по угловой скорости ротора.

Ставятся следующие задачи управления: поддерживать выходное сопротивление вблизи программного значения, на которое рассчитана конструкция потребителя; при сильном ветре не допустить превышения критического значения угловой скорости турбины, обусловленного техникой безопасности.

В работе [1] были получены уравнения движения системы и построены алгоритмы управления в случае постоянного управляющего момента. В данной работе рассмотрен случай линейной зависимости управляющего момента от быстроходности турбины. Построен закон управления, стабилизирующий те стационарные режимы ВЭУ, которые были неустойчивыми при постоянном управляющем моменте.

Исследованы бифуркации фазового портрета при изменении коэффициента обратной связи в законе управления. Получены достаточные условия на коэффициент обратной связи, при которых область притяжения стабилизированного режима совпадает со всем фазовым пространством. Показано, что при некоторых условиях на параметры на фазовой плоскости существует устойчивый предельный цикл.

В ходе численного моделирования поведения системы исследовались тенденции влияния инерционных свойств отдельных элементов ДПП на характер переходных процессов, соответствующих построенным законам управления. Для заданных параметров турбины и генератора определены условия на геометрические и массовые параметры ДПП, обеспечивающие предпочтительную динамику переходных процессов при характерных значениях скорости потока и внешнего сопротивления.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-08-01130.

## Л и т е р а т у р а

1. Голуб А.П., Климина Л.А. Регулирование рабочих режимов ВЭУ с помощью дифференциальной планетарной передачи // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 4. С. 24-32.

## Stabilization of a Steady Regime of a HAWT by Means of a Differential Planet Gear

К.-Н. Lin<sup>1</sup>, А.П. Golub<sup>2</sup>, L.A. Klimina<sup>2</sup>, D.V. Gritsenko<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Chien Hsin University of Science and Technology, Zhongli City, Taiwan,*

<sup>2</sup>*Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Russia*

<sup>3</sup>*Peter the Great Military Academy for Strategic Rocket Forces, Moscow, Russia*

The closed mathematical model of the small-scale wind turbine with a differential planetary gearbox is developed and studied. This model takes into account the aerodynamic load upon turbine blades, as well as electromagnetic torque acting on the rotor of the generator. Control torque is applied to the external ring of the gearbox. The control is aimed at preserving the output voltage within a certain range, and at preventing too high angular speed of the turbine. Two types of control laws are discussed: piecewise constant control and feedback control linear with respect to the tip speed ratio. We performed parametrical analysis of the phase portrait of the dynamical system, described the set of possible operation modes, domains of their attraction, and suggested different control algorithms corresponding to goals of the control. Constructed control laws allow the mechanical system to reach the target operation mode from any initial conditions.

# JOINT WORK OF TWO IDENTICAL SYNCHRONOUS GENERATORS WITH COMMON RL-LOAD

**F.F. Rodyukov<sup>1</sup>, G.J. Soederbacka<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Saint-Petersburg State University, Russia,*

<sup>2</sup>*Arctic University of Norway, Alta*

*E-mail: frodyukov@gmail.com, gunnar.j.soderbacka@uit.no*

On cosmic stations the autonomous electricity supply for different electrophysical devices and for keeping the system alive consists of two identical synchronous generators the rotors of which are rotating in opposite directions. The last property is principal just for cosmic stations because it ensures that the summarized kinetic moment is equal to zero. In this paper we consider one case of the functioning of such generators with symmetrical RL-load.

In this work the parameters of both generators are taken identical, but the mechanical load on the rotors have some difference. The Lagrange-Newton equations from [3] are used for the mathematical model of the synchronous generator and from there also the electromagnetic induction for the rotating transformer. For the connection of the two generators the Kirchhoff law and its analog for magnetic fields is used. Conditions for the local stability of the final system are obtained including estimate of the possible difference in the mechanical loads on the rotors of the generators.

This kind of investigation was already carried out in [1], but there were used the equations for the synchronous generator from [2]. The equations used here describe more exactly the physical processes in the synchronous generators. Thus the estimates obtained here are more close to reality.

## References

1. *Leonov G.A., Rodyukov F.F., Soederbacka G.* Joint work of two identical synchronous generators with common RL-load // *Technische Mechanik*. 1997. Band 17. Heft 1. P. 73-76 .
2. *Родюков Ф.Ф.* Математическая модель большой электроэнергетической системы. СПб: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2006. 153 с. ( *Mathematical model for a large electroenergetic system*. St.-Petersburg University Publisher).
3. *Родюков Ф.Ф.* Четыре шага вперёд в теории электромагнитного поля и в электромеханике. LAP Lambert Academic Publishing. 2013. 116 p. ( *Four steps forward in the theory of electromagnetic fields in electromechanics*).

# АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА ОСНОВЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ

**А.Ю. Александров, А.П. Жабко**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: alex43102006@yandex.ru, zhabko@apmath.spbu.ru*

В широком классе случаев движения механических систем описываются системами дифференциальных уравнений второго порядка высокой размерности, что существенно затрудняет исследование их устойчивости. Эффективным способом решения данной проблемы является метод декомпозиции [1].

В.И.Зубовым и Д.Р.Меркиным с помощью первого метода Ляпунова были разработаны подходы к анализу устойчивости линейных гироскопических систем, основанные на сведении исходной системы размерности  $2n$  к двум изолированным системам (прецессионной и нутационной) размерности  $n$  каждая [2, 3]. В [4] для обоснования указанной декомпозиции использовался второй метод Ляпунова. Следует отметить, что, в отличие от результатов [2] и [3], подход, предложенный в статье [4], позволил получить условия декомпозиции и для систем с нелинейными позиционными силами, а также для некоторых классов нестационарных систем (см. [5, 6]).

В настоящей работе рассматриваются механические системы, описываемые дифференциальными уравнениями второго порядка с запаздыванием в позиционных силах. Предполагается, что скоростные силы являются линейными, а позиционные могут быть как линейными, так и существенно нелинейными. С помощью метода декомпозиции и прямого метода Ляпунова определяются условия асимптотической устойчивости положений равновесия изучаемых систем. Показано, что в случае линейных позиционных сил дестабилизирующий эффект запаздывания может быть компенсирован за счет наличия достаточно большого параметра при векторе скоростных сил, в то время как в случае существенно нелинейных позиционных сил асимптотическая устойчивость гарантируется при любом значении указанного параметра.

Работа частично поддержана Санкт-Петербургским государственным университетом, НИР № 9.38.674.2013 и № 9.37.157.2014, и РФФИ, гранты № 13-01-00347-а и № 13-01-00376-а.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит. 2001. 384 с.
2. *Зубов В.И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение. 1970. 317 с.
3. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
4. *Косов А.А.* Исследование устойчивости сингулярных систем методом вектор-функций Ляпунова // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Вып. 4. С. 123-129.
5. *Александров А.Ю., Косов А.А.* Об устойчивости и стабилизации нелинейных нестационарных механических систем // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 5. С. 774-788.
6. *Александров А.Ю., Косов А.А., Чэнь Я.* Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 6. С. 5-17.

## **Stability Analysis of Equilibrium Positions of Mechanical Systems with Delay via Decomposition**

**A.Yu. Aleksandrov, A.P. Zhabko**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

In the present paper, mechanical systems whose motions are described by the second order differential equations with delay in the positional forces are considered. It is assumed that velocity forces are linear, whereas for positional forces both linear case and essentially nonlinear one are investigated. On the basis of the decomposition method and the Lyapunov direct method, sufficient conditions of the asymptotic stability of the trivial equilibrium positions are found. It is shown that, to provide the decomposition, in the case of linear positional forces the presence of a large parameter at the vector of velocity forces is required, whereas in the case of essentially nonlinear positional forces the decomposition is guaranteed for any positive value of the parameter.

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПСЕВДОРЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ГИБКОГО РОТОРА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

В.Г. Быков, П.Е. Товстик

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: v.bykov@spbu.ru*

Рассматривается простейшая модель статически неуравновешенного ротора в виде жесткого диска, закрепленного посередине невесомого гибкого вала, вращающегося в вертикальных шарнирных опорах. Исследуются прецессионные движения ротора под действием постоянного внешнего вращающего момента при учете сил внешнего сопротивления и внутреннего трения в вале.

В случае, когда угловая скорость ротора предполагается заданной функцией времени, ротор имеет две степени свободы, а его динамика описывается линейными уравнениями. При постоянной угловой скорости регулярные прецессии ротора асимптотически устойчивы в области, ограниченной предельной частотой, зависящей от коэффициентов внешнего сопротивления и внутреннего трения ([1, 2]). Если угловая скорость ротора равна предельной частоте, то движение ротора имеет характер псевдoreгулярной прецессии, а, если угловая скорость больше предельной, то траектория движения центра масс диска на вращающейся координатной плоскости представляет собой бесконечно раскручивающуюся спираль. Парадоксальность этого результата объясняется тем, что для поддержания постоянной угловой скорости ротора необходим источник энергии неограниченной мощности.

При ограниченном возбуждении заданной функцией считается внешний вращающий момент. В этом случае система имеет три степени свободы и описывается нелинейными уравнениями. Исследование подобных систем, проводимое с использованием традиционного метода осреднения Крылова-Боголюбова ([3, 4]), приводит к приближенным уравнениям, позволяющим получить условия существования и устойчивости стационарных режимов, отвечающих регулярным прецессиям ротора. Однако этот метод не подходит для исследования псевдoreгулярных прецессий, поскольку осредненные уравнения не содержат коэффициента внутреннего трения.

В настоящей работе исследование динамики ротора под действием постоянного вращающегося момента проводится на основе точных нелинейных уравнений механической модели. Построены амплитудно-моментные и частотно-моментные характеристики регулярных прецессионных режимов, соответствующих положениям равновесия во вращающейся системе координат. Исследована устойчивость данных режимов по первому приближению. Показано, что в зависимости от величины вращающего момента и параметров системы могут иметь место два типа прецессий ротора: регулярная и нерегулярная, но с периодическим изменением амплитуды. Построена приближенная система уравнений относительно средней угловой скорости собственного вращения ротора и средних значений амплитуды и угловой скорости псевдoreгулярной прецессии и, на ее основе, выведены аналитические формулы условий существования и асимптотической устойчивости обоих типов прецессионного движения.

## Л и т е р а т у р а

1. Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т., Гусаров А.А. Колебания машин. М.: Машиностроение. 1964. 308 с.
2. Genta G. Dynamics of Rotating Systems. New York: Springer-Verlag. 2005.
3. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М. 1964. 254 с.
4. Веричев Н.Н., Веричев С.Н., Ерофеев В.И. К динамике системы "гибкий ротор – источник возбуждения ограниченной мощности" // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып.4. С. 552-561.

## On Stability of Pseudoregular Whirling Motions of the Flexible Rotor under Limited Excitation

V.G. Bykov, P.E. Tovstik

*Sankt-Petersburg State University, Russia*

We derive approximate analytical formulas for the conditions of existence and stability of two types of whirling motion of the flexible statically unbalanced rotor under constant external torque taking into account forces of external and internal damping.

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ РОТОРА С ЭКСЦЕНТРИЧЕСКИМ ШАРОВЫМ АВТОБАЛАНСИРОВОЧНЫМ УСТРОЙСТВОМ

**В.Г. Быков, А.С. Ковачев**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: v.bykov@spbu.ru, alex0303@mail.ru*

Рассматривается статически неуравновешенный ротор, оснащенный шаровым автобалансирующим устройством (АБУ). Предполагается, что между осями динамической симметрии ротора и АБУ имеется малый эксцентриситет. Исследуются стационарные режимы движения ротора, вращающегося с постоянной угловой скоростью.

Ранее ([1], [2]) было установлено, что наличие эксцентриситета АБУ приводит к стационарному прецессионному режиму движения ротора с постоянным остаточным дисбалансом. В [4] для случая АБУ с двумя балансирующими шарами показана возможность существования двух различных типов стационарных режимов. Режим первого типа, когда балансирующие шары соприкасаются друг с другом, соответствует несбалансированному режиму, как и в случае ротора с идеальным АБУ [3]. Режим, при котором шарики не соприкасаются, соответствует сбалансированному режиму для ротора с идеальным АБУ, но при этом имеет место остаточная вибрация, амплитуда которой не зависит от угловой скорости и в точности равна эксцентриситету АБУ. Такой режим предложено называть полусбалансированным.

В настоящей работе для ротора с двухшариковым АБУ получены условия существования и построены амплитудно-частотные характеристики для разных типов несбалансированных стационарных режимов, а также проведено исследование их устойчивости по первому приближению. Проанализирована возможность использования приближенных уравнений для оценки областей устойчивости в плоскости параметров системы.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Агафонов Ю.В.* Автоматическое балансирующее устройство для ручных шлифовальных машин // Вестник машиностроения. 1976. № 9 С. 36-38.
2. *Нестеренко В.П., Соколов А.П.* Остаточный дисбаланс, вызванный эксцентриситетом беговой дорожки, при автоматической балансировке роторов шарами // Динамика управляемых механических систем. Иркутск. ИЛИ, 1983. С. 46 - 50.
3. *Быков В.Г.* Стационарные режимы движения неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом // Вест. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. 2006. Вып 2. С.90-101.
4. *Быков В.Г. Ковачев А.С.* Динамика ротора с эксцентрическим шаровым автобалансирующим устройством // Вест. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. 2014. Вып 4. С. 579-588.

## **On Stability of Steady State Motions of a Rotor with Eccentric Ball Autobalancing Device**

**V.G. Bykov, A.S. Kovachev**

*Sankt-Petersburg State University, Russia*

We study the conditions of existence and stability of the different types of unbalanced steady state modes of a statically unbalanced rotor with the eccentrically fixed ball autobalancer . Stability of unbalanced modes has been investigated both for exact and simplified truncated equations of two types.

# УПРОЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ РОТОРА, ОСНАЩЕННОГО ШАРОВЫМ АВТОБАЛАНСИРОВОЧНЫМ УСТРОЙСТВОМ

**В.Г. Быков, В.А. Шелковина**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: v.bykov@spbu.ru, weronik-s@yandex.ru*

Большое количество опубликованных за последнее время работ, посвященных проблемам автоматической балансировки роторов ([1-6]), вызвано широким применением автобалансирующих устройств на практике (центрифуги, электроинструменты, промышленная и бытовая техника и т.д.).

В настоящей работе рассматривается статически неуравновешенный ротор, оснащенный шаровым автобалансирующим механизмом. На основе предположения о «медленности» искомым переменных во вращающейся вместе с ротором системе координат построены две приближенные системы «укороченных» уравнений, моделирующих движение ротора и балансирующих шариков. Численные исследования переходных режимов движения, описываемых точными и приближенными уравнениями, а также исследование устойчивости сбалансированных и несбалансированных стационарных режимов, показывают, что при определенных ограничениях, наложенных на параметры системы, применение укороченных уравнений вполне оправдано и не приводит к серьезным погрешностям.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Olsson K-O.* Limits for the use of auto-balancing // International Journal of Rotating Machinery. 2004. V. 10. No 3. P. 221-226.
2. *Sperling L., Ryzhik B., Duckstein H.* Single-Plane Auto-Balancing of Rigid Rotors // Technische Mechanik. 2004. Band 24. Heft 1. P. 1-24.
3. *Быков В.Г.* Стационарные режимы движения неуравновешенного ротора с автобалансирующим механизмом // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2006. Сер.1. №2. С.90-101.
4. *Rodrigues D.J., Champneys A.R., Friswell M.I., Wilson R.E.* Automatic Two-Plane Balancing for Rigid Rotors // Special issue of International Journal of Non-linear Mechanics. 2008. V. 43. P. 527-541.
5. *Taekil K., Sungsoo N.* New automatic ball balancer design to reduce transient-response in rotor system // Mechanical Systems and Signal Processing. 2013. V. 37. Issue 1-2. P. 265-275.
6. *Быков В.Г.* Автобалансировка ротора с ортотропно упругим валом // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. № 4. С. 514-527.

## **Simplified Models for Research of Dynamics and Stability of a Rotor with the Ball Autobalancing Device**

**V.G. Bykov, V.A. Shelkovina**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The model of static unbalanced rotor equipped with the balls autobalancing device is considered. The system of truncated equations of motion is delivered. The solutions and stability conditions of steady states modes for both initial and simplified mathematical models are compared.

# ПЕРЕСТРОЙКА ПРОСТРАНСТВА ПОЛОЖЕНИЙ ПЛАТФОРМЫ СТЮАРТА С 6 СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Е.С. Гебель

*Омский государственный технический университет, Россия  
E-mail: Gebel\_es@mail.ru*

Одним из актуальных направлений развития современных мехатронных и робототехнических систем является создание пространственных мехатронных устройств, в которых, исходя из необходимости обеспечения высокой точности функционального управления перемещением и ориентацией выходного звена базовой компоненты в трехмерном рабочем пространстве, жесткости и компактности устройства при действии динамических нагрузок, оказываются более предпочтительными механизмы не с последовательной, а с параллельной структурой. Примерами применения таких устройств являются столы для монтажа сотовых сегментов экрана подземных туннелей и строительных конструкций; несущие конструкции многокоординатного сборочного и механообработывающего оборудования и, в частности, динамический тренажер водителей грузовых автомобилей [1].

Одной из проблем параметрического синтеза механизмов как с последовательной, так и с параллельной структурой является проблема «особых положений», в которых конфигурационное многообразие механизма обладает самопересечением при некоторых (критических) значениях параметров связей [2]. Обнаружение «особенностей» и пути их устранения в кинематике роботов описаны в работах многих как российских, так и зарубежных авторов, в частности, в статье [3].

Аналитический подход к исследованию критических и близких к ним механизмов, основанный на понятиях и методах теоретической механики, проиллюстрировал В.А.Самсонов. Перестройка конфигурационного многообразия механизмов с одной степенью свободы при переходе параметра критического значения описана в [4].

В статье предложены методики определения области возможных положений для шестистепенной платформы Стюарта в общем случае в шестимерном пространстве составляющих линейных перемещений и углов поворота. Ограничения на перемещения в рассматриваемом механизме обусловлены ограниченностью длин звеньев и ходов. С целью исключения особых положений и пересечения кинематических звеньев выполнен анализ конфигурационного пространства параметров. Исследования основаны на решении обратной кинематической задачи, формализации связей, исключающих неоднозначность положения выходного звена.

## Л и т е р а т у р а

1. Андриевский Б.Р. и др. Управление платформой Стюарта с шестью степенями свободы на базе пневмоприводов // Труды XII Всеросс. совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014), 2014. М.: ИПУ РАН им. В.А. Трапезникова. 2014. С. 2150-2153.
2. Лебедев В.И., Турланов А.М. Синтез механизмов с пассивными связями // Теория механизмов и машин. 2003. № 2. С. 28-31.
3. Arponen T. Regularization of Constraint Singularities in Multibody Systems // Multibody System Dynamics. 2001. No 6. P. 355-375.
4. Самсонов В.А. Перестройка конфигурационного многообразия и критические системы // Прикл. мат. и мех. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 770-774.

## Restructuring the Positions Space of the 6 DOF Stewart's Platform

E.S. Gebel

*Omsk State Technical University, Russia*

In the paper we have suggested the method for determining the area of possible positions for the 6 DOF Stewart's platform in the six-dimensional space of linear motion components and rotation angles. Limitations on the movement in the mechanism are connected with the existing constraints of link length and displacements. In order to exclude the special positions and intersections of the kinematic links the analysis of the configuration of the parameter space had been carried out. The study is based on the solution of the inverse kinematic problem and the formalization of links for the exclusion indeterminacy of the output link position.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕТРОЭЛЕКТРОСТАНЦИИ

Д.С. Глушкова<sup>1</sup>, К.А. Орехов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия*

<sup>2</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: k-a-orekhov93@ya.ru*

Ветроэлектростанции (ВЭС) – экологически самые чистые источники электрической энергии. Они строились в 30-е гг., но не получили широкого распространения из-за неконкурентоспособности по сравнению с гидроэлектростанциями. В связи с изменением экологической обстановки взгляды на ВЭС за рубежом уже пересмотрены, и в настоящее время снова приступили к их сооружению и расчёту.

За время, прошедшее с 30-х гг. многое изменилось как в плане новых технологий, так и в плане новых математических возможностей для нахождения оптимальных параметров ВЭС и тем самым улучшения всех их показателей.

В настоящее время имеются уравнения электрических машин переменного тока, обладающие существенными преимуществами по сравнению с аналогичными уравнениями, известными в те годы. Кроме того, сейчас известны методы асимптотического решения уравнений, содержащих малые параметры в правых частях и перед старшими производными.

Именно поэтому в настоящем исследовании рассматривается задача, описанная в [3], и с использованием метода уравнений Лагранжа-Ньютона [1] составлены полные математические модели ветроэлектростанции с синхронным генератором при работе параллельно с сетью бесконечной мощности и при работе на симметричную активно-индуктивную нагрузку.

В результате исследования полученной модели ветроэлектростанции проведён соответствующий анализ и найдены условия, при которых достигается устойчивость работы в обоих описанных режимах.

## Л и т е р а т у р а

1. Родюков Ф.Ф. Четыре шага вперёд в теории электромагнитного поля и в электромеханике. LAP Lambert Academic Publishing. 2013. 116 p.
2. Перли С.В. Ветронасосные и ветроэлектрические агрегаты. Харьков: ОНТИ. 1938. 266 с.
3. Пасынков В.Е., Родюков Ф.Ф. Математическое моделирование работы ветроэлектростанции // Динамика и устойчивость механических систем (Прикладная механика. Вып. 10). / Под ред. П.Е. Товстика. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 1997. С. 56-61.

## Mathematical Modeling and Stability Investigation of Wind-Power Station

D.S. Glushkova<sup>1</sup>, K.A. Orekhov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Saint-Petersburg State Polytechnical University, Russia*

<sup>2</sup>*Saint-Petersburg State University, Russia*

Mathematical model of the wind-power station consisting of synchronous generator which happens to in rotation by the propeller is considered. The rotating moment on the part of the propeller is proportional to square velocities of incoming air stream. The load of the synchronous generator is expected network of alternating current to unlimited power and symmetrical actively-inductive load. The conditions of stability in two cases are founded.

# ОЦЕНКА ОБЛАСТИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА И МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДЕ МАТЛАБ

М.Н. Деменков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Москва  
E-mail: max.demenkov@gmail.com

Функции Ляпунова (ФЛ) являются стандартным средством анализа устойчивости механических систем и могут быть аналитически записаны для конкретной системы, исходя из энергетических соображений. При этом предполагается, что ФЛ является ею в общем случае лишь в некоторой окрестности положения равновесия  $\Delta$ . Для оценки устойчивости на практике важно знать размеры этой окрестности, так как она является подмножеством области устойчивых начальных состояний системы (из которых она может вернуться к положению равновесия). При слишком малом размере этой области любое малое возмущение выводит систему из устойчивого режима работы.

Будем рассматривать систему, приведенную к форме Коши с вектором состояния  $x$ , тогда в окрестности существования  $\Delta$  заданной ФЛ  $V(x)$

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad V(x(t)) > 0, \quad \dot{V}(x(t)) < 0, \quad x \neq 0.$$

Пространство состояний системы некоторой поверхностью разделяется на те области, в которых производная ФЛ вдоль траекторий системы отрицательна, и на те, где она положительна. Если найти теперь минимум ФЛ на этой поверхности (определяемый равенством нулю производной ФЛ) и вычислить значение ФЛ в этом минимуме  $\beta$ , оценка области асимптотической устойчивости дается соответствующим множеством уровня ФЛ:  $\Delta = \{x : V(x) \leq \beta\}$ .

Такая оптимизационная задача является невыпуклой и поиск ее гарантированного глобального решения в общем случае невозможен [1]. Однако в случае полиномиальной системы и полиномиальной ФЛ оказывается возможным построить численный алгоритм решения задачи, теоретически гарантирующий нахождение глобального минимума [2]. Для этого записывается квадратная система полиномиальных уравнений, решения которой являются локальными минимумами. Перебором всех локальных минимумов мы определим и глобальный. Поиск всех решений системы уравнений осуществляется современными методами численной алгебраической геометрии на основе гомотопии – деформации решений некоторой упрощенной системы уравнений (которые легко определить аналитически) в решения заданной системы методом продолжения решения по параметру. Для автоматизации вычислений разработан пакет в системе Матлаб, доступный к началу конференции по адресу <http://www.ipu.ru/staff/demenkov>.

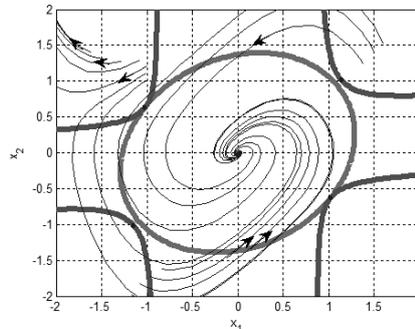


Рис. 1. Визуализация оценки для тестовой системы.

## Л и т е р а т у р а

1. Shields D., Storey C. The behaviour of optimal Lyapunov functions // Int. J. of Control. 1975. V. 21. P. 561-573.
2. Demenkov M. Estimating region of attraction for polynomial vector fields by homotopy methods // ACM Comm. in Comp. Algebra. 2012. V. 46. No 3. P. 84-85.

## Estimating Region of Attraction by Lyapunov Functions in MATLAB

M.N. Demenkov

Institute of Control Sciences, Moscow, Russia

We describe Matlab tool for region of attraction estimation using polynomial Lyapunov functions. The problem is formulated as an optimization task and its solution is achieved by numerical algebraic geometry methods.

# Multistability and Hidden Attractors in Nonsmooth Dynamical Systems

Zh.T. Zhusubaliyev<sup>1</sup>, E. Mosekilde<sup>2</sup>, O.O. Yanochkina<sup>1</sup>

<sup>1</sup> South West State University, Kursk, Russia

<sup>2</sup> The Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark

An attracting periodic, quasiperiodic or chaotic set of a smooth, autonomous system may be referred to as a “hidden attractor” if its basin of attraction does not overlap with the neighborhood of an unstable equilibrium point [1, 2]. Historically, this condition has implied that the basin of attraction for the hidden set in most cases has been so complicated that special analytic and/or numerical techniques have been required to locate the set [2].

By simulating the model of a multilevel DC/DC converter that operates in the regime of high feedback gain, we illustrate how nonsmooth dynamical system can produce complicated structures of attracting and repelling states organized around the basic switching cycle [3]. This leads us to suggest the existence of hidden attractors in such systems as well. In this case, the condition will be that the basin of attraction does not overlap with the fixed point that represents the basic switching cycle [3]. For instance, where one of the low-amplitude modes is an unstable quasiperiodic oscillation, the basins of attraction for coexisting modes with larger amplitudes cannot intersect with the neighborhood of the basic switching cycle, and our criterion for a hidden attractor to exist will be satisfied.

We first demonstrate how sets of mutually embedded attracting and repelling tori can arise in a DC/DC converter. The behavior of a converter is described by a set of coupled, non-autonomous differential equations with discontinuous right hand sides. For increasing gain factors, the build-up of nested dynamical modes starts with the destabilization of the regular switching cycle and the birth of quasiperiodic or resonant periodic oscillations of relatively low amplitude. This first instability occurs through various (smooth or non-smooth) torus-birth processes. For higher values of the gain factor, pairs of attracting and repelling, larger amplitude tori are born through (smooth or nonsmooth) torus-fold processes.

These tori may again be either ergodic or resonant periodic. Finally, at even higher values of the gain factor, additional complexity arises as dynamic modes associated with different voltage levels start to interact and mix with one another. A second objective for the present paper is to examine some of the reconstruction processes by which the basins of attraction for the coexisting attracting states change, and new hidden attractors are born.

## References

1. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Selezhi S.M., Vagitsev V.I. Hidden oscillations in dynamical systems // Trans. Syst. Control. 2011. V. 6. P. 54-67.
2. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems: From hidden oscillation in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits // Int. J. Bifurcat. Chaos. 23 (2013) 1330002.
3. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. Multistability and hidden attractors in multilevel DC/DC converter // Math. Comput. Simulation. 2014. <http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2014.08.001>

# БЕЗОПАСНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХНОЖНОЙ ПЛАТФОРМЫ СТЮАРТА

С.М. Зуев

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: good--day@ya.ru

Рассмотрим платформу Стюарта, состоящую из подвижной платформы и трех опор – стержней переменной длины [1]. Предположим, что они реализованы в виде пневмоцилиндров. Стержни крепятся к платформе в точках  $B_1, B_2, B_3$ . Опоры крепятся к основанию в точках  $A_1, A_2, A_3$ , которые образуют правильный треугольник. Основание представляет обруч с окружностью, описанной вокруг треугольника  $A_1A_2A_3$ . Обруч лежит на ровной поверхности – на полу.

Задача состоит в том, чтобы для любого заданного движения платформы предусмотреть остановку движения с целью предотвращения приподнимания обруча от пола.

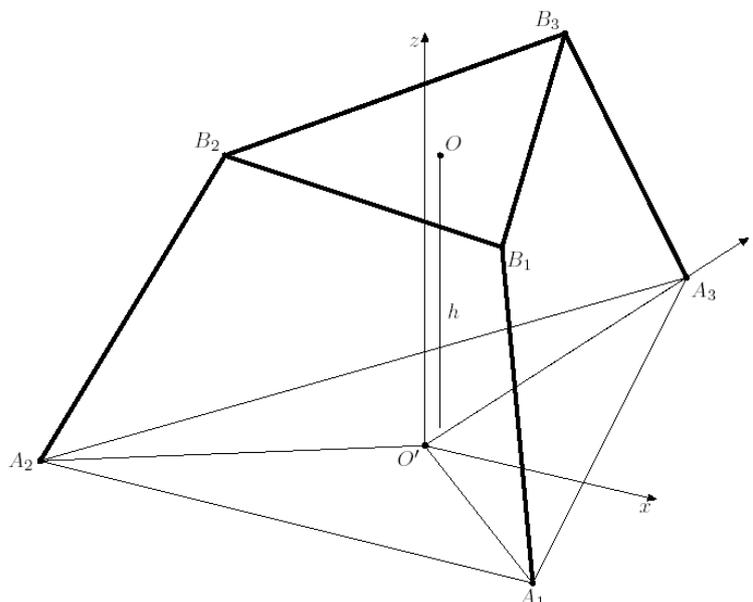


Рис. 1. Платформа Стюарта на трех опорах.

В работе по уравнениям динамики [2] исследованы силы, действующие со стороны платформы на штоки. Для этих сил найдены ограничения, не позволяющие отрывать основание механизма от пола. По этим ограничениям на силы найдены ограничения на движение платформы. Исследован вопрос опасных движений вблизи границы конструктивно возможных движений.

## Л и т е р а т у р а

1. Александров В.В., Локишин Б.Я., Л. Гомес Е.Л., Салазар И.Х. Стабилизация управляемой платформы при наличии ветровых возмущений // *Фундамент. и прикл. матем.* 2005. Т. 11. № 7. С. 97-115.
2. Зуев С.М. Стабилизация положения равновесия платформы Стюарта с тремя степенями свободы // *Вестн. С.-Петербург. ун-та.* 2013. Сер. 1. № 4. С. 84-92.

## Safety of Stewart Tripod Platform Movement

S.M. Zuev

Saint-Petersburg State University, Russia

The mechanism considered in this paper consists of a mobile platform connected to a hoop base by means of the three weightless rods, which could change their lengths. The forces in legs according platform motion are composed. The problem of safety motion ensuring immobility of hoop base is solved. Motions near geometrically valid boundary platform positions are considered.

# УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ БУРОВЫХ УСТАНОВОК С СИНХРОННЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

М.А. Киселева<sup>1</sup>, Н.В. Кондратьева<sup>1,2</sup>, Н.В. Кузнецов<sup>1</sup>, Г.А. Леонов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный Политехнический университет, Россия

E-mail: maria.kiseleva.87@gmail.com

Исследование математических моделей буровых установок [1-3] является актуальной задачей ввиду частых отказов бурового оборудования. Для привода буровых установок используются различные типы двигателей, поэтому необходимо построение адекватных математических моделей, описывающих эти установки и учитывающих динамику двигателя [2-3].

Настоящая работа является продолжением исследования, начатого в [3-7], где решается проблема колебаний буровой установки с регулируемым электроприводом на основе асинхронного двигателя с фазным ротором. Модель буровой установки построена на основе модифицированной модели буровой установки, полученной в Техническом университете Эйндховена, и модели асинхронного электродвигателя из [8,9]. В результате численного моделирования показана возможность появления скрытых колебаний в системе, описывающей динамику буровой установки. Для гашения колебаний предложено введение управления на основе дополнительного внешнего сопротивления в роторной сети.

В данной работе представлена математическая модель буровой установки с синхронным электроприводом. При построении модели используется модель буровой установки из [7] и модель явнополюсного синхронного электродвигателя из [9], учитывающая, в отличие от известной классической модели Парка-Горева, геометрию ротора синхронного двигателя.

## Л и т е р а т у р а

1. Bobașu E., Ivanov S., Popescu D., Răsvan V. Dynamics properties and control for oilwell drillstrings // Proceedings of the 18th International Conference on System Theory, Control and Computing, Sinaia, Romania, 2014. P. 249-255.
2. De Bruin J. C. A. et al. Control of mechanical motion systems with non-collocation of actuation and friction: A Popov criterion approach for input-to-state stability and set-valued nonlinearities // Automatica. 2009. T. 45. №2. С. 405-415.
3. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kiseleva M.A., Solovyeva E.P., Zaretskiy A.M. Hidden oscillations in mathematical model of drilling system actuated by induction motor with a wound rotor // Nonlinear Dynamics. 2014. T. 77, №1-2. С. 277-288.
4. Kiseleva M.A., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Neittaanmäki P. Hidden Oscillations in Drilling Systems Actuated by Induction Motor // Periodic Control Systems. 2013. Vol. 5. №1. P. 86-89.
5. Kiseleva M.A., Leonov G.A. Stability of Electromechanical Models of Drilling Systems under Discontinuous Loads // Doklady Mathematics. 2012. vol. 444. №2. P. 160-164.
6. Kiseleva M., Kuznetsov N., Leonov G., Neittaanmäki P. Drilling Systems Failures and Hidden Oscillations // Proceedings of the 4<sup>th</sup> IEEE International Conference on Nonlinear Science and Complexity (NSC-2012). 2012. Budapest, Hungary. P. 109-112.
7. Kiseleva M.A., Kondratyeva N.V., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Solovyeva E.P. Hidden periodic oscillations in drilling system driven by induction motor // Proceedings of 19th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC Congress), Cape Town, 2014. P. 5872-5877.
8. Leonov G. Phase synchronization: Theory and application // Automation and Remote Control. 2006. P. 1573-1609.
9. Leonov G.A., Zaretskiy A.M. Asymptotic behavior of solutions of differential equations describing synchronous machines // Doklady Mathematics. 2012. Vol. 86, №1. P. 530-533.

## Stability and Oscillations of Drilling Systems with Synchronous Motor

М.А. Kiseleva<sup>1</sup>, N.V. Kondratyeva<sup>1,2</sup>, N.V. Kuznetsov<sup>1</sup>, G.A. Leonov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg state University,

<sup>2</sup>Saint-Petersburg State Polytechnical University, Russia

Problem of sudden drilling systems failure is studied. There exist many mathematical models of drilling systems actuated by different types of motor. Here new mathematical model of drilling system actuated by synchronous motor is developed and studied. Here the model with salient-pole synchronous motor is considered, this allows one to take into account geometry of the rotor.

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

**В.С. Королев**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: vokorol@bk.ru*

Рассматриваются математические модели динамических систем классической механики [1-4] и биофизики [5, 6] на основе нелинейных дифференциальных уравнений. Исследованы особенности интегрирования уравнений, свойства решений, устойчивость и поведение решений в окрестности положений равновесия. Свойства устойчивости решений зависят от постановки задачи, выбора обобщенных координат и записи уравнений, которые описывают процесс. Они могут изменяться при замене переменных, в том числе для канонических преобразований исходной системы с использованием первых интегралов уравнений.

Движение называется устойчивым по Ляпунову, если малые отклонения в начальных данных фазовых переменных приводят к малым отклонениям в дальнейшем. Орбитальная устойчивость или устойчивость по части переменных [1] показывает, что фазовая траектория или её проекция на соответствующее подпространство остается в достаточной близости от опорной траектории, хотя изображающие точки могут сколь угодно разбегаться, удаляясь друг от друга со временем.

Устойчивость решений проверяют разными способами для различных типов уравнений в задачах динамики [2]. Уравнения Лагранжа второго рода для консервативных механических систем позволяют использовать [4] для оценки устойчивости вид функции  $P(x)$  для потенциальной энергии из условий минимума по фазовым переменным. При наличии циклических интегралов порядок системы уравнений уменьшается, а устойчивость оценивают для оставшихся обобщенных координат.

В случае приведения уравнений к виду канонических систем можно проверять аналогичные условия для функции Гамильтона  $H(x)$ , которая определяет правые части уравнений движения. Если уравнения записаны в каноническом виде и существует  $n$  первых интегралов, то по теореме Арнольда фазовые траектории лежат на  $n$ -мерном торе, а движение системы является условно периодическим. В общем случае для системы дифференциальных уравнений в нормальной форме могут выполняться первые интегралы, которые определяют интегральные многообразия как пересечение соответствующих поверхностей. Это множество называют равновесным или стационарным режимом системы.

Можно проводить исследование положений равновесия и возможные стационарные неравновесные состояния [3], которые могут возникать в открытых биологических системах, обменивающихся с окружающей средой энергией или веществом [5]. Процесс обмена может носить характер возмущений или управляющих стабилизирующих воздействий. Предлагаются модификации уравнений или дополнения для оценки устойчивости выделенных решений. Влияние возмущений и управляющих воздействий может изменить характер решений.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Воротников В.И.* К теории устойчивости по отношению к части переменных // Прикл. мат. и мех. 1995. Т. 59. № 4. С. 553-561.
2. *Зубов И.В.* Методы анализа динамики управляемых систем. М.: Физматлит. 2003. 224 с.
3. *Новоселов В.С.* Статистическая динамика. СПб: СПбГУ. 2009. 393 с.
4. *Новоселов В.С., Королев В.С.* Аналитическая механика управляемой системы. СПб: Изд. СПбГУ. 2005. 298 с.
5. *Новоселов В.С., Королев В.С.* Модель возбуждения мышцы // Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». М.: ИПУ РАН. 2005. С. 367-374.
6. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическое моделирование в биофизике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. 472 с.

## **Integration of Dynamical Systems and Stability Solution on a Part of the Variables**

**V. Korolev**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The nonlinear differential equations systems are under discussion for mathematical models in classical mechanics and biophysics. The integration and properties of equations, stability for equilibrium stationary state solutions and the behavior of the solutions in the neighborhood of the equilibrium are investigated.

## ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

**В.С. Королев, И.Ю. Потоцкая**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: vokorol@bk.ru, irinapototskaya@yandex.ru*

Рассмотрены математические модели динамических систем классической механики и биофизики на основе нелинейных дифференциальных уравнений. Исследованы особенности интегрирования этих уравнений, свойства их решений, устойчивость и поведение решений в окрестности положений равновесия. При исследованиях учтено изменение устойчивости решений в зависимости от постановки задачи, выбора обобщенных координат и уравнений, которые описывают процесс.

Сложные процессы классической механики и биофизики моделируются системами нелинейных дифференциальных уравнений. Наличие даже малых возмущений периодического или случайного характера может изменить характер решений таких систем. Поэтому поведение и свойства решений систем, моделирующих управляемые процессы, определяются выбранными управляющими воздействиями. При этом анализируется вид полученной устойчивости. Орбитальная устойчивость или устойчивость по части переменных [1] показывает, что фазовая траектория или её проекция на соответствующее подпространство остается в достаточной близости от опорной траектории, хотя изображающие точки могут сколь угодно разбегаться, удаляясь друг от друга со временем.

Изменения свойств и условий устойчивости решений возможны и в случае перехода к новой системе при замене переменных [2]. В случае контактных преобразований канонических уравнений при выборе нужной производящей функции получаем в новых переменных уравнения, где правые части равны нулю, а новые переменные определяют набор произвольных постоянных для решений первоначальной системы уравнений. Следовательно, при любых допустимых начальных условиях они остаются постоянными, сохраняя малые начальные отклонения.

Наличие возмущений и управляющих воздействий может также влиять на свойства положений равновесия и возможные стационарные неравновесные состояния. Для исследования этого влияния в известных математических моделях [3] предлагаются модификации и дополнения, упрощающие оценку устойчивости выделенных решений.

Наиболее подробно подобные методы демонстрируются на примере исследования устойчивости дифференциальных уравнений статистической модели возбуждения мышцы, полученных в работах В.С.Новоселова [4, 5]. Такие уравнения можно представить в виде, где возмущения зависят от управляющих параметров или функций  $u(t)$ . Полученная система нелинейных дифференциальных уравнений исследуется для стационарного режима, а также численными методами для оценки поведения решений в окрестности положений стационарного равновесия [5]. В зависимости от начальных условий и значений коэффициентов системы уравнений могут проявляться устойчивые и неустойчивые колебательные режимы по соответствующим группам переменных. Каждое из положений равновесия определяет 5-мерное подпространство, заполненное асимптотически устойчивыми движениями системы.

Особенностью такой системы уравнений является существование линейных по фазовым переменным интегралов, которые позволяют понизить порядок и проводить дальнейшее исследование устойчивости по упрощенным уравнениям для оставшихся фазовых переменных после исключения. Это позволяет получить критерии условной устойчивости для начальной системы, а также критерии устойчивости для упрощенной системы в случае изометрического сокращения.

### **Л и т е р а т у р а**

1. *Воротников В.И.* К теории устойчивости по отношению к части переменных // Прикл. мат. и мех. Т. 59. № 4. 1995. С. 553-561.
2. *Зубов И.В.* Методы анализа динамики управляемых систем. М.: Физматлит. 2003. 224 с.
3. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическое моделирование в биофизике. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. 472 с.
4. *Новоселов В.С.* Статистическая динамика. СПб: Изд-во СПбГУ. 2009. 393 с.
5. *Новоселов В.С., Королев В.С.* Модель возбуждения мышцы // Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». М.: ИПУ РАН. 2005. С. 367-374.

## **Stability Solution on a Part of the Variables**

**V.S. Korolev, I.Yu. Pototskaya**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The mathematical models of dynamical systems in classical mechanics and in biophysics which are represented by nonlinear differential equations are considered. The integration peculiarities of these equations, their solutions properties, the stability and the solutions behavior in a neighborhood of the equilibrium point are investigated. The change of the solutions stability is taken account. This change is depending on the choice of generalized coordinates and equations that describe the process.

## ГЕОМЕТРИЯ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РАЗНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

**Ю.М. Окунев, О.Г. Привалова, В.А. Самсонов**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*  
*E-mail privalova@imec.msu.ru, samson @imec.msu.ru, okunev@imec.msu.ru*

Предлагается геометрический подход к сравнению областей устойчивости систем разной размерности. Этот подход удобен для сопоставления свойств устойчивости стационарных решений в одностепенных задачах с различным числом степеней свободы.

Проводится сравнение областей устойчивости систем, которые описываются линейными комплексными дифференциальными уравнениями второго и третьего порядка с постоянными комплексными коэффициентами.

Области устойчивости строятся в пространстве комбинаций коэффициентов уравнения меньшей размерности. Геометрическое представление областей устойчивости позволяет наглядно определить их общие свойства и различия.

Построенный геометрический образ областей устойчивости используется для сравнения свойств установившегося свободного падения авторотирующего тяжелого тела в сопротивляющейся среде [1] и соответствующего режима авторотации, возникающего при движении осесимметричного оперенного тела [2-4].

Определяются интервалы значений установочного угла лопастей (оперения тела), на которых стационарные режимы в обеих задачах устойчивы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-08-01130, № 12-01-00364).

### Л и т е р а т у р а

1. Привалов В.А., Самсонов В.А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 37-48.
2. Привалова О.Г., Окунев Ю.М., Самсонов В.А. Об устойчивости движения осесимметричного оперенного тела в сопротивляющейся среде // Вестник НГУ. 2011. № 4. (2). С. 287-289.
3. Окунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А. Сопоставление свойств устойчивости трех режимов авторотации. Избранные труды Международной научной конференции по механике «Шестые Поляховские чтения». Санкт-Петербург. 2012. С. 59-63.
4. Окунев Ю.М., Привалова О.Г., Самсонов В.А. О динамике гироскопических систем // Актуальные проблемы механики. Академик А.Ю. Ишлинский – выдающийся ученый-механик. М: Наука. 2013. С. 124-128.

## The Geometry of Domains of Stability of Systems with Different Dimensions

**Yu.M. Okunev, O.G. Privalova, V.A. Samsonov**

*Institute of Mechanics of Lomonosov MSU, Moscow, Russia*

The geometric approach is used to compare domains of stability of dynamical systems with different dimensions.

# ОБ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Ю.Д. Селюцкий**

*НИИ механики МГУ, Москва, Россия*

*E-mail: seliutski@imec.msu.ru*

В работе исследуется аэродинамический маятник (флюгер), представляющий собой помещенное в поток среды твердое тело, состоящее из невесомого стержня-державки и крыла с симметричным профилем, жестко прикрепленного к державке так, что хорда крыла параллельна ей. Тело может вращаться вокруг неподвижной оси. Будем считать, что поток взаимодействует только с крылом, и его скорость на бесконечности постоянна и направлена перпендикулярно оси. Управление маятником осуществляется с помощью момента, приложенного в оси вращения.

Для учета внутренней динамики потока среды используется предложенная ранее модель присоединенного осциллятора [1].

На основе модели «маятник + осциллятор» обсуждается задача об управлении движением системы, направленном на приведение аэродинамического маятника в заданное положение при обеспечении выполнения определенных условий на аэродинамическое воздействие (например, отсутствие последействия, т.е. выход аэродинамической силы на стационарное значение, соответствующее конечному положению объекта, одновременно с приведением объекта в это положение и его остановкой).

Задача осложняется тем, что состояние движения присоединенного осциллятора недоступно непосредственному измерению, и эту информацию необходимо восстанавливать на основе наблюдений за состоянием движения маятника. Кроме того, управляющее воздействие может быть приложено только к самому маятнику.

Проведено сопоставление с результатами, получающимися в рамках традиционного квазистатического подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-01130).

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Selyutskiy Yu.D., Samsonov V.A., Andronov P.A.* On oscillations of aerodynamic pendulum // *Int. J. of Structural Stability and Dynamics*. 2013. V. 13. Issue 7.

## **On Motion Control of an Aerodynamic Pendulum**

**Yu.D. Selyutskiy**

*Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Russia*

Problem of motion control of an aerodynamic pendulum is considered, when the control is aimed at bringing the pendulum to specified position under some restrictions imposed upon aerodynamic forces (for instance, absence of the aftereffect). The unsteady interaction between the pendulum and the flow is simulated using the “attached oscillator” model. Comparison against results obtained using conventional quasi-steady approach is performed.

# VI

ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА, МЕХАТРОНИКА И  
РОБОТОТЕХНИКА

---

**ELECTROMECHANICS, MECHATRONICS, ROBOTICS**

# МЕТОДЫ ДИСТАНЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИМИ РОБОТАМИ

**Г.В. Алферов, П.А. Ефимова, Ф.М. Кулаков**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,  
E-mail: alferovgv@gmail.com*

Возможность проведения работ в космосе с помощью роботов открывает огромные перспективы освоения космического пространства. Значительные запаздывания в передаче космическим роботам (КР) управляющих сигналов с наземного центра управления (ЦУ) и получении сигналов обратной связи чрезвычайно затрудняет решение задачи управления КР. Человек-оператор, управляющий КР в копирующем режиме, не имеет возможности оперативного реагирования на быстрое изменение внешней среды. В докладе рассматриваются методы дистанционного управления КР. Предложен и теоретически обоснован перспективный и реалистичный подход к созданию системы телеуправления КР [1-6]. Рассматриваемые методы предполагают использование интерфейса-тренажера, включающего модели робота и его внешней среды, с имитацией условий гравитации, которые имеют место в зоне функционирования робота, в частности, создание условий невесомости. Однако создание идеальных моделей робота и его внешней среды не реально. Поэтому при «отработке» КР программной траектории и сигналов, представляющих силу взаимодействия модели рабочего инструмента робота с моделями внешней среды, возникают ошибки. Предложены способы коррекции ошибочных действий робота, вызванных «неидеальностью» моделей внешней среды. Приведены результаты экспериментальной проверки теоретических выводов с помощью прототипа системы управления КР.

## Л и т е р а т у р а

1. Кулаков Ф.М. Супервизорное управление манипуляционными роботами. М.: Наука. 1980. 448 с.
2. Кулаков Ф.М., Смирнов Е.Н., Липатов А.Е., Латыпов В.Н. Технология погружения виртуального объекта в реальный мир // Труды СПИИ РАН. СПб: СПИИ РАН. 2005. Т. 2. Вып. 2.
3. Кулаков Ф.М. Методы кинестетического взаимодействия рук человека с виртуальными объектами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005.
4. Алферов Г.В., Кулаков Ф.М., Неокесарийский В.Н. Кинематические и динамические модели исполнительной системы робота. Л.: Изд-во ЛГУ. 1983. 80 с.
5. Алферов Г.В., Кулаков Ф.М., Нечаев А.И., Чернакова С.Э. Информационные системы виртуальной реальности в мехатронике и робототехнике. Учеб. пособие. СПб: Изд-во С.-Петерб.ун-та. 2009. 168 с.
6. Ефимова П.А. Об особенностях управления космическими роботами-манипуляторами. Труды 44-й международной научной конференции аспирантов и студентов. СПб: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та. 2013. С. 211-215.

## Remote Control Methods Space Robots

**Kulakov F.M., Alferov G.V., Efimova P.A.**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The report discusses methods for remote control of space robots. Proposed and theoretically sound promising and realistic approach to the creation of a system of remote control space robots [1-6]. Considered methods involve the use of interface-simulator includes a model of the robot and its external environment, with simulated gravity conditions that exist in the area of operation of the robot, in particular, the creation of conditions of weightlessness. However, the creation of ideal models of the robot and its external environment is not real. Therefore the proposed methods of correction of erroneous actions of the robot caused by the "nonideal" models of the environment. The results of experimental verification of theoretical conclusions with the help of a prototype system of control of space robots.

## ПРОГРАММИРОВАНИЕ РОБОТА В ЗАДАЧАХ ИНСПЕКТИРОВАНИЯ И ПЕРЕХВАТА

**Г.В. Алферов, О.А. Малафеев, А.С. Мальцева А.С.**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,  
E-mail: alferovgv@gmail.com, malafeyeva@mail.ru, luna171@mail.ru*

Теория поиска подвижных объектов получила импульс для интенсивного развития в период Второй мировой войны. Изложению различного рода математических моделей, исследуемых в рамках этой теории и решению соответствующих задач, посвящены работы [1-5]. Результаты теории поиска подвижных объектов находят применения разного рода в области военного дела, при поиске реальных объектов в различных средах. В предлагаемой работе анализируется следующая ситуация. Корабль-перехватчик Р, оснащенный эхолотом, обнаружил перископ подводной лодки Е, которая тут же ушла прямым курсом в неизвестном направлении с постоянной скоростью. Предполагается, что Р не обладает точной информацией о скорости Е, однако известно конечное множество скоростей, одна из которых является истинной скоростью Е. Цель Р – обнаружить подводную лодку за минимально возможное время. В [6] описана стратегия преследователя, гарантирующая поимку убегающего. В [7-8] предложен алгоритм нахождения гарантированного времени поиска подвижного объекта. Для уменьшения найденного там гарантированного времени поимки в данной работе предлагается использовать метод динамического программирования, который позволяет упорядочить перебор скоростей в заданном их конечном множестве.

**Литература** Stone, L. D. Theory of optimal search. NY: Wiley. 1975.

1. Gal S., Alpern S. The theory of search games and rendezvous. Kluwer (now Springer) Academic Publishers. 2003. 319 p.
2. Хеллман О. Введение в теорию оптимального поиска. М.: Наука. 1985.
3. Абчук В.А., Суздаль В.Г. Поиск объектов. М.: Советское радио. 1977.
4. Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. Игры поиска. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 1992. 216 с.
5. Малафеев О.А., Зубова А.Ф. Моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия. СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2007. 1006 с.
6. Алферов Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С. Динамическая модель проведения инспекций. Процессы управления и устойчивость: Труды 45-й международной научной конференции аспирантов и студентов. СПб: Издат. Дом С.-Петерб. гос. ун-та. 2014. С. 434-440.
7. Алферов Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С. Процесс поиска и захвата объекта // Труды 44-й конференции «Процессы управления и устойчивость». СПбГУ. 2013. С. 113-118.

## Programming The Robot In Tasks Of Inspection And Interception

**G.V. Alferov, O.A. Malafeyev, A.S. Maltseva**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Various kinds of models studied in the frame of this theory one can find in [1-5]. Results of the search theory are applied in war affairs and when searching real objects in different media. The following problem is studied in the paper. A pursuer ship - interceptor equipped with sonar, searches adversary submarine and. It detected a submarine's periscope at a sea surface. Submarine at the same time, falling under the water starts to move in an unknown direction with an unknown speed. The pursuer P tries to complete the search process in the shortest possible time. It is assumed that the ship interceptor does not know exactly the speed of the submarine; however, it is informed of a finite set of possible speeds. a strategy of the pursuer, which guarantees the capture of the evader is proposed in [6]. An algorithm to find the guaranteed search time is given in [7-8]. To reduce the found guaranteed search time it is proposed to use the dynamic programming approach, which allows to choose best velocities ordering.

# ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧАХ КОНСТРУИРОВАНИЯ МАШИН И РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ

Г. В. Алферов<sup>1</sup>, О. А. Малафеев<sup>1</sup>, Ю.А. Пичугин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, Россия

E-mail: alferovgv@gmail.com, malafeyeva@mail.ru, yury-pichugin@mail.ru

Важным этапом в процессе проектирования и конструирования машин и механизмов является этап выбора их параметров адекватными эксплуатационным характеристикам, а также изготовления и испытания экспериментального образца на соответствие его характеристик требуемым, то есть параметры проектируемого механизма должны удовлетворять набору требований, соответствующих задачам, для выполнения которых предназначен конструируемый механизм. В работе предлагается статистическая процедура оценивания [1-5] параметров экспериментального образца по серии испытаний, позволяющая отбраковывать образцы с параметрами, непригодными для конструируемого механизма. Предложенный алгоритм может быть использован и при оценке устойчивости в задачах моделирования [4, 6].

## Л и т е р а т у р а

1. Алферов Г.В. К расчету динамической модели манипуляционных роботов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. Пермь. 1996. Вып. № 30. С. 6-13.
2. Алферов Г.В., Кулаков Ф.М., Неокесарийский В.Н. Кинематические и динамические модели исполнительной системы робота. Учебное пособие. Л.: Изд-во ЛГУ. 1983. 80 с.
3. Пичугин Ю.А., Малафеев О.А. Об оценке риска банкротства фирмы // VI Международная конференция "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация" (DSSCO'13), посвященная 95-летию со дня рождения Е.А. Барбашина, 1–5 октября 2013 г., Минск. С. 204-206.
4. Кондрашков А.В., Пичугин Ю.А. Идентификация и статистическая проверка устойчивости модели Вольтерры // НТВ СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. №1(189). С. 124-135.
5. Пичугин Ю.А. Кондрашков А.В. Геометрические аспекты проверки статистических гипотез в задачах математического моделирования. Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2014. Материалы научной конференции, 14-18 апр. 2014 г. СПб: РГПУ им. А.И. Герцена. 2014. С. 230-236.
6. Малафеев О.А., Зубова А.Ф. Моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия. СПб: Изд-во СПбГУ. 2007. 1006 с.

## Parameters Estimation in Mechanisms Design

G.V. Alferov<sup>1</sup>, O.M. Malafeyev<sup>1</sup>, Yu. A Pichugin<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Herzen State Pedagogical University, Russia

An important stage in mechanisms design process is choosing its parameters consistent with working characteristics and a stage of fabricating and estimating a working mechanism exemplar. A procedure to estimate working mechanism exemplar parameters by a testing series is proposed in the paper which makes possible to put off constructed exemplars with unsuitable parameters. The algorithm proposed can be used for systems stability estimation as well.

# УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОЛЕСНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА

А.С. Андреев

Ульяновский государственный университет, Россия  
E-mail: AndreevAS@ulsu.ru

В работе дано решение задачи о стабилизации управляемых движений и отслеживания траектории мобильного робота с тремя омни-колесами. Новизна результатов состоит в построении управляющих воздействий, решающих задачи стабилизации и слежения для широкого спектра программных движений и траекторий робота с учетом нелинейности и нестационарности системы, неизвестных массо-инерционных характеристик и запаздывания в цепи обратной связи.

Уравнения управляемого движения мобильного робота с тремя омни-колесами под действием моментов, развиваемых электродвигателями постоянного тока, имеют вид [1]

$$\begin{cases} m\ddot{\xi} + h\dot{\xi} + m_d\dot{\psi}\dot{\eta} = \sin\psi u_1 + \sin(\psi + \frac{2\pi}{3})u_2 + \sin(\psi + \frac{4\pi}{3})u_3, \\ m\ddot{\eta} + h\dot{\eta} - m_d\dot{\psi}\dot{\xi} = -\cos\psi u_1 - \cos(\psi + \frac{2\pi}{3})u_2 - \cos(\psi + \frac{4\pi}{3})u_3, \quad I\ddot{\psi} + 2a^2h\dot{\psi} = -a(u_1 + u_2 + u_3) \end{cases}$$

Здесь  $\xi$  и  $\eta$  – координаты центра платформы робота в неподвижной декартовой системе координат  $O\xi\eta$ ;  $\psi$  – угол поворота платформы вокруг вертикали, отсчитываемый от оси  $\xi$ ;  $u_1$ ,  $u_2$  и  $u_3$  – управляющие напряжения, подаваемые на электродвигатели.

Актуальными являются исследования, посвященные вопросам разработки новых методов и алгоритмов нелинейного управления мобильными роботами с роликонесущими колесами, обеспечивающих вывод робота на заданную траекторию и стабилизацию движения вдоль нее, для широкого спектра программных движений и траекторий робота с учетом нелинейности и нестационарности системы и неизвестных массо-инерционных характеристик, а также запаздывания обратной связи (см. например, [2, 3]). В настоящей работе дано решение задачи о стабилизации программного движения робота и задачи отслеживания его траектории при условии, что масса платформы известна неточно и в структуре обратной связи имеется запаздывание. Задача о стабилизации программного движения решена при помощи метода функций Ляпунова и его развития на основе предельных уравнений [4]. Задача отслеживания траектории робота решена с использованием релейного управления и его непрерывной аппроксимации на основе функции насыщения.

## Л и т е р а т у р а

1. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 142-149.
2. Liu Y., Zhu J.J., Williams II R.L., Wu J. Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization // Robotics and Autonomous Systems. 2008. V. 56. P. 461-479.
3. Velasco-Villa M., B. del-Muro-Cuellar and Alvarez-Aguirre A. Smith-predictor compensator for a delayed omnidirectional mobile robot // Proceedings of the 15<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control & Automation, Athene-Greece, July 27-29, 2007.
4. Андреев А.С., Перегудова О.А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // Доклады Академии наук. 2005. Т. 400. № 5. С. 621-624.

## Motion Control Of The Mobile Wheeled Robot

A.S. Andreev

Ulyanovsk State University, Russia,

In the work the solution of the stabilization problem of controlled motions and trajectory tracking for mobile robot with three omni-wheels is obtained. The novelty of the results consists in the constructing of controls that solve the problem of stabilization and tracking for a wide range of program motions and trajectories of the robot, taking into account the nonlinearity and nonstationarity of the system, the unknown mass-inertial characteristics and delayed feedback.

## УПРАВЛЕНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧЕ ПРЯМОХОЖДЕНИЯ

**А.Г. Белошапко, В.В. Бубнов, В.Н. Латыпов**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*  
*E-mail: red-octane21@yandex.ru, sklertright@yandex.ru, latypov\_viktor@inbox.ru*

Рассматривается задача о движении двуногого шагающего робота в сагиттальной плоскости. Разработана система для получения уравнений Лагранжа в различных фазах ходьбы. Уравнения движения в обобщенных координатах уменьшают размерность конфигурационного пространства механизма по сравнению с методами, основанными на уравнениях Ньютона-Эйлера.

Предлагается алгоритм построения кусочно-оптимального управления хождением с использованием быстро расширяющихся случайных деревьев (RRT). Предложенные методы реализуются с помощью собственной системы обработки символьных математических выражений.

### **Л и т е р а т у р а**

1. *Vukobratovic M., Borovac B., Surla D., Stokic D.* Biped Locomotion. Springer-Verlag. 1990.
2. *Udwadia F.E., Kalaba R.E.* A new perspective on constrained motion // Proceedings of the Royal Society. London. 1992. V. A439. No 1906. P. 407-410.
3. *LaValle S.M., Kuffner J.J.* Randomized Kinodynamic Planning // The International Journal of Robotics Research. 2001.
4. *Westervelt E.R., Grizzle J.W., Chevallereau C., Choi J.H., Morris B.* Feedback control of dynamic bipedal locomotion // Taylor and Francis Group. 2007.

## CONTROL OF HYBRID DYNAMICAL SYSTEMS IN BIPEDAL WALKING

**A.G. Beloshapko, V.V. Bubnov, V.N. Latypov**

*Saint Petersburg State University, Russia*

The problem of robotic bipedal locomotion in sagittal plane is considered. The software system for automatic derivation of Lagrange equations for different phases of walking is presented. The equations of motion in generalized coordinates reduce the dimension of the configuration space of mechanism as compared with the methods based on Newton-Euler equations.

The algorithm for construction of piecewise optimal control of walking using rapidly exploring random tree (RRT) is presented. The proposed methods are implemented using a custom system for symbolic mathematical expression manipulation.

# ВИДЕОТАКТИЛЬНЫЙ ДАТЧИК – ЭЛЕМЕНТ СИСТЕМЫ ОЧУВСТВЛЕНИЯ РОБОТА

**М.З. Досаев<sup>1</sup>, О.Э. Васюкова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*НИИ механики МГУ, Москва, Россия*

<sup>2</sup>*МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*E-mail: dosayev@imec.msu.ru*

Рассматривается движение n-звенного манипулятора, предназначенного для использования в медицинских целях: для массажа, при мануальной терапии и т.д. Геометрические и массовые характеристики заданы параметрами Денавита-Хартенберга. Уравнения движения звеньев выписаны в матричной форме с помощью однородных координат. В качестве рабочего элемента на последнем звене используется видеотактильный сенсор [1]. Головка сенсора представляет собой сплошной полушар, изготовленный из прозрачного силикона. Рассматривается задача о взаимодействия головки сенсора с исследуемой тканью. На оси звена закреплена видео камера, позволяющая определить положение и размер площадки контакта головки с исследуемой тканью. Кроме этого звено оборудовано датчиком нормальной силы. Ткань моделируется упругим двухслойным цилиндром. По положению первоначальной площадки контакта строится закон управления звеньями для проведения ортогонального индентирования головки в ткань. Разработан метод оценки толщины внешнего более мягкого слоя с помощью зависимости площади контакта от нормальной реакции. Такая оценка позволит задать необходимые характеристики движений манипулятора при выполнении медицинской процедуры.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-08-92010.

## Л и т е р а т у р а

1. *Goryacheva I.G., Martynenko Yu.G., Dosaev M.Z., Ryazantseva M.Yu., Antonov F.K., Morozov A.V., Su Fong-Chin, Sam Yeh. The analysis of contact interaction between tactile sensor head and soft biological tissue // Сб. трудов симпозиума "Taiwan-Russian Bilateral Symposium on Problems in Advanced Mechanics". М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. С. 73-76*

## Video tactile sensor for Robot Sensory System

**M.Z. Dosaev<sup>1</sup>, O.E. Vasiukova<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Russia*

<sup>2</sup>*Lomonosov Moscow State University, Russia*

Motion of n-link manipulator aimed for medical purposes (such as therapeutic massage, manual therapy and etc) is considered. The video tactile sensor proposed by joint Russian (Institute of Mechanics of LMSU and Institute for problem in Mechanics of RAS, Moscow) and Taiwan (NCKU, Tainan) scientific group is fixed on working link of manipulator and applied for contact between the link and soft tissue. The problem of contact between elastic semiball and elastic two-layer cylinder is considered. A method for estimating first layer thickness is proposed basing on dependence of contact area on normal force. Such estimation allows to program characteristics of manipulator motions needed for medical procedure.

# ИМИТАЦИОННОЕ ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛЫХ КАРЬЕРНЫХ ЭКСКАВАТОРОВ

Д.М. Костыгова<sup>1</sup>, Д.В. Казунин<sup>1</sup>, Р.А. Ганин<sup>1</sup>, Н.В. Кузнецов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ЗАО «Транзас Индустриальные Технологии», Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: kostygova.daria@gmail.com, dmitry.kazunin@transas.com, roman.ganin@transas.com, nkuznetsov239@mail.ru

Создание тренажеров спецтехники и, в частности, экскаваторов карьерных гусеничных (ЭКГ) в настоящее время является актуальной задачей. Отработка обучаемым необходимых навыков управления машиной на симуляторе позволяет экономить временные и энергоресурсы, связанные с обучением на реальной технике, а также снижает риск негативных последствий, связанных с ошибками в процессе выполнения упражнений на реальном оборудовании. В связи с этим при разработке тренажера оператора карьерного экскаватора особенно остро встает вопрос о воспроизведении нагрузок на обучаемого, максимально приближенных к реальной ситуации.

Для имитации движений рабочего места обучаемого в тренажере используется система подвижности (СП), встроенная в кресло оператора, которая осуществляет отработку движений в соответствии с математической моделью (ММ) ЭКГ. Система подвижности является механизмом параллельной структуры и конструктивно состоит из неподвижного основания и подвижной платформы, связанной с основанием поступательными звеньями. Число степеней свободы из экономических и мощностных соображений выбирается равным трем. В таблице 1 приведены основные типы вибраций, подлежащих имитированию, которые возникают под воздействием различных внешних факторов (погодные условия, разбалансировка роторов, износ оборудования, характеристики грунта и т.д.)

Табл. 1. Характерные вибрации, возникающие при работе ЭКГ

П/п	Эффект	Отработка на СП
1	Резкие толчки при пуске двигателей	Кратковременные ускорения в противоположных направлениях по осям крена и тангажа
2	Раскачивание стрелы и поворотной платформы при движении по забою	Качания из стороны в сторону с малой частотой
3	Колебания на холостом ходу двигателей	Установка вибромотора, либо отработка колебаний по оси Z
4	Толчки при начале и окончании поворота стрелы в режиме копания	Кратковременные ускорения по осям крена и тангажа

Для оценки характерных колебаний места оператора ЭКГ были проведены экспериментальные исследования с использованием малогабаритной ИНС КомпаНав-2М и системы угломерной СН-4721. В результате анализа полученных данных можно сделать вывод, что амплитудный спектр создаваемых колебаний ограничен малыми частотами (единицы Гц), что означает возможность имитации движений на подвижности. Возможность реализации резких ускорений зависит от типа и мощности выбираемых двигателей или актуаторов СП. Вопросу построения подвижной платформы, способной отрабатывать динамику рабочего места машиниста тяжелого карьерного экскаватора, достаточную для целей обучения, и посвящена данная работа.

## Л и т е р а т у р а

1. Дрыгин С.Ю. Применение вибродиагностики для повышения работоспособности горного оборудования/ С.Ю. Дрыгин, Л.И. Андреева, С.В. Буйских // Горные машины и автоматика. 2003. № 7. С. 26-28.
2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа. 1972. 416 с.

## Imitational Motion Replay of Heavy Mining Shovels

D.M. Kostygova<sup>1</sup>, D.V. Kazunin<sup>1</sup>, R.A. Ganin<sup>1</sup>, N.V. Kuznetsov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ZAO "Transas Industrial Technologies", Saint-Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

In this paper the problem of motion simulation of mining shovels has been formulated. Approaches and main results of experimental research done on a real excavator are presented. The design of motion system which allows imitating movements of real shovels is discussed.

# МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ КРИБОТА И ОЦЕНКИ ЕГО СКОРОСТНОГО ДИАПАЗОНА

О.С. Ерохина, Е.Н.Чумаченко

*Московский институт электроники и математики Высшей школы экономики, Россия  
E-mail : oerokhina@hse.ru, echumachenko@hse.ru*

В настоящее время в области космических исследований одним из актуальных направлений является изучение подледного пространства ледяных спутников. Особый интерес представляют спутники Юпитера Европа и Ганимед, спутники Сатурна Титан и Энцелад, поверхность которых покрыта толстым слоем льда. Предположение о наличие льда было сделано после обработки данных, переданных космическими аппаратами «Вояджер 1», «Вояджер 2», «Галилео» и «Кассини». Анализ этих данных позволил сделать предположение, что существует большая вероятность того, что под ледяной оболочкой может существовать глубокий океан. Кроме того, на спутнике Энцелад и Европа космическими аппаратами были зафиксированы водяные гейзеры. Также условия на этих спутников позволяют сделать предположение о возможной обитаемости, что делает эти спутники привлекательными и с астробиологической точки зрения.

Одной из возможных задач для будущей исследовательской миссии может стать исследование подледного пространства. Для этой цели необходимо разработать специальное оборудование, которое может быть пригодным для планетарного применения. Таким прибором, способным проникнуть глубоко под лед, может быть крибот, который работает за счет плавления и перемещается под лед под действием силы тяжести. Он должен иметь небольшие размеры и вес и не должен потреблять слишком много энергии [1].

При создании крибота одной из задач является оценка скорости его проникновения под лед. Также необходимо оптимизировать такие параметры крибота, как его форма и температура на поверхности. В данной работе рассматривается методика моделирования движения крибота сквозь лед, позволяющая получить оценку скорости прибора. Оценка проводится, с одной стороны, согласно упругопластической теории и так называемой теории «твердой воды» [2], а с другой стороны, рассматривает процесс плавления льда с учетом фазового перехода. Также приводится верификация методики по экспериментам, проведенным Австрийской академией наук [3].

Предложенная методика позволяет оценить скоростной диапазон движения крибота, а так же провести ряд расчетов, позволяющих выбрать прибор согласно заданным ограничениям.

## Л и т е р а т у р а

1. Чумаченко Е. Н., Дэнхэм Д.У., Назиров Р.Р., Кулагин В.П., Логашина И.В., Ерохина О.С. Компьютерное моделирование проникновения крибота под ледяной покров Европы. Математическое моделирование. Оптимальное управление // Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. №6 (1). С. 205-213.
2. Николаев О.С. Механические свойства жидких металлов. Экстремальные свойства минимальных монокристаллов металлов. М.: Едиториал УРСС. 2004.
3. Koemle N.I., Kaufmann E., Kargl G. Melting probe for Mars and Europa. Final report, IWF. 2009.

## A Technique to Simulate Melting Probe's Movement and to Estimate Penetration Velocities' Range

O.S. Erokhina, E.N. Chumachenko

*Moscow Institute of Electronics and Mathematics of Higher School of Economics, Russia  
E-mail : oerokhina@hse.ru, echumachenko@hse.ru*

This study provides a simulation technique that allows estimating melting probe's penetration velocity range while it melts through thick icy layer. This probe could be used as a one of possible means to study subsurface area on icy moons like Jovian moon Europa and Ganymede or Saturn's moons Titan and Enceladus.

# ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

М.А. Киселева<sup>1</sup>, Н.В. Кондратьева<sup>1,2</sup>, Н.В. Кузнецов<sup>1</sup>, Г.А. Леонов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия

E-mail: knat0202@mail.ru

Эффект вращающегося магнитного поля, изобретённого Г. Феррарисом и Н. Теслой в 1888 г., до сих пор является основой конструкции электрических машин переменного тока (синхронных и асинхронных).

Во всех работах, посвящённых математическому описанию электродвигателей, явным или неявным образом присутствует промежуточная идеализация, суть которой состоит в рассмотрении электромеханических моделей двигателей.

В [1-4] рассматриваются электромеханические и математические модели синхронных двигателей, которые приводят к дифференциальным уравнениям с угловыми координатами, а также уравнения асинхронных двигателей. Уравнения электродвигателей переменного тока получены на основе общего подхода, связанного с введением системы координат, жёстко связанной с вращающимся магнитным полем и движением ротора в этой системе координат. Этот подход позволяет изучать динамику синхронных и асинхронных двигателей с общих позиций

В [3] на основе двух электромеханических моделей (двухполюсной и четырёхполюсной), учитывающих в отличие от известного классического подхода Парка-Горева геометрию ротора, получены две системы уравнений явнополюсного синхронного электродвигателя.

В настоящем докладе делается обзор и сравнительная характеристика моделей синхронных и асинхронных двигателей из [1-4]. Описываются методы исследования статической и динамической устойчивости электродвигателей на основе полученных моделей. Описывается постановка и решение задачи о предельной нагрузке, тесно связанной с проблемой динамической устойчивости электродвигателей.

## Л и т е р а т у р а

1. Leonov G. Phase synchronization: Theory and application // Automation and Remote Control. 2006. P. 1573-1609.
2. Леонов Г.А., Кондратьева Н.В. Анализ устойчивости электрических машин переменного тока. СПб: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 2009. 259 с.
3. Leonov G.A., Kondrat'eva N.V. Electromechanical and Mathematical Models of Salient-Pole Synchronous Motors // Advanced Dynamics and Model-Based Control of Structures and Machines/Proof Mail [Chapter 17]. Springer. 2011. P. 143-150.
4. Leonov G.A., Zaretskiy A.M. Asymptotic behavior of solutions of differential equations describing synchronous machines // Doklady Mathematics. 2012. T. 86. No 1. P. 530-533.

## Electromechanical and Mathematical Models of AC Electrical machines

М.А. Kiseleva<sup>1</sup>, N.V. Kondratyeva<sup>1,2</sup>, N.V. Kuznetsov<sup>1</sup>, G.A. Leonov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Saint-Petersburg State Polytechnical University, Russia

In the current work different models of synchronous and induction motors are considered. Methods of static and dynamic stability are described. Limit load problem, which is connected to study of dynamic stability of electric motors, is considered.

# УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОПРИВОДОМ ЭКЗОСКЕЛЕТА НИЖНИХ КОНЕЧНОСТЕЙ

П.А. Комаров

НИИ механики МГУ имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия  
E-mail: kommail76@mail.ru

В работе рассматриваются проблемы организации ходьбы активного экзоскелета в режиме плоской регулярной ходьбы по ровной, горизонтальной поверхности. Алгоритмы управления позволяют эффективно отслеживать кинематику движения, заданную человеком.

Задачей организации ходьбы аппарата является осуществление движения стопы переносимой ноги, таза и корпуса по заданным, желаемым траекториям. Характерной особенностью подхода в работе является использование только двух управляющих приводов в коленях обеих ног, помимо этого на аппарат воздействуют упругие силы со стороны крепежных лямок. Стопы человека и экзоскелета считаются невесомыми.

Используя метод Лагранжа, можем получить в общем случае следующую систему [1, 3], описывающую движение экзоскелетона, структурные уравнения которой имеют вид

$$B(z)\|\dot{z}\| + D(z)\|\dot{z}^2\| + Ag\|\sin z\| = Q_z,$$

где  $\|z\| = \|x, y, \psi, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2\|$  – вектор пространства переменных, а  $B(z)$ ,  $D(z)$ ,  $A$  – некоторые матрицы. Динамика гидросистемы описывалась в соответствии с [4], а параметры человека выбирались из [5].

В отличие от [1-3] динамическая система содержит в правых частях функции, которые отражают воздействие пружин (лямок) в точках контакта с телом человека. Они играют важную роль в управлении движением экзоскелета.

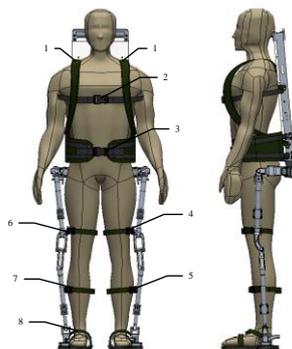


Рис. 1. Человек–оператор в экзоскелете.

При синтезе управления гидросистемой экзоскелета обеспечено желаемое угловое движение в коленных шарнирах и необходимое усилие между голенью и бедром.

## Л и т е р а т у р а

1. Белецкий В.В. Двухногая ходьба. М.: Наука. 1984. 286 с.
2. Лавровский Э.К., Письменная Е. В. Алгоритмы управления экзоскелетом нижних конечностей в режиме одноопорной ходьбы по ровной и ступенчатой поверхностям // МАУ. 2014. №.1. С. 44-51.
3. Белецкий В.В. Плоские линейные модели двухногого шагания. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР. № 95. 1973.
4. Mutuku Muvengi, John Kihiu. Bond Graph Modeling of Inter-Actuator Interactions in a Multi-Cylinder Hydraulic System // World Academy of Science. Engineering and Technology. 2011. V. 74. P. 32-41.
5. Лавровский Э.К., Воронов А.В. Определение масс-инерциальных характеристик ноги человека // Физиология человека. 1998. № 2. С. 91-101.

## Low Limb Exoskeleton Hydraulic Drive Control

Р.А. Komarov

Institute of mechanics of MSU, Moscow, Russia

In this paper we consider the problem of organizing walking of low limb exoskeleton for planar regular walk on flat, horizontal surface. Control algorithms can effectively track for wishing kinematics motion.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МАДЖИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ ОМНИ-МОБИЛЬНОГО РОБОТА

**Е.Р. Маликов**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия,  
E-mail: yumv2@inbox.ru*

Омни-колесо – это колесо, на ободе которого равномерно расположены ролики, оси вращения которых направлены по касательной к окружности обода. На несущую поверхность омни-колесо всегда опирается одним из роликов, что позволяет ему при отсутствии вращения самого колеса двигаться в направлении, перпендикулярном плоскости диска. Динамика омни-мобильного робота исследована в работах [1, 2] с использованием метода, предложенного в [3]. В построенных моделях предполагается, что движение каждого колеса в продольном направлении происходит без проскальзывания, что порождает собой систему с неголономными связями.

В настоящей работе построены динамические модели неголономных омни-мобильных роботов с тремя и четырьмя роликонесущими колесами на основе уравнений Лагранжа 2-го рода с множителями и уравнений Маджи.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Зобова А.А., Татаринов Я.В.* Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 1. С. 13-22.
2. *Зобова А.А.* Применение лаконичных форм уравнений движения в динамике неголономных мобильных роботов // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 4. С. 771-783.
3. *Татаринов Я.В.* Уравнения классической механики в новой форме // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2003. Вып. 3. С. 67-76.

## **Using Maggie's Equations for Description of the Dynamics of Omni-Wheeled Robot**

**Ye.R. Malikov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The dynamics of omni-wheeled robot is considered in two cases: three- and four-wheeled vehicles. Mathematical models of these vehicles are built on the basis of Maggie's equations. It is assumed that the movement of each wheel in the longitudinal direction is no slip, causing a system with nonholonomic constraints.

# УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯТОРА С УПРУГИМИ ШАРНИРАМИ

О.А. Перегудова

Ульяновский государственный университет, Россия,  
E-mail: peregudovaoa@sv.ulsu.ru

В работе дано построение кусочно-постоянного закона управления движением многозвенного манипулятора с упругими сочленениями. Разработана также методика решения задачи о робастной стабилизации нелинейных нестационарных систем с кусочно-постоянным управлением на основе дискретизации системы и применения функций Ляпунова вида векторных норм. Получены достаточные условия стабилизации программного движения манипулятора с оценкой области начальных отклонений.

Динамическая модель многозвенного манипулятора имеет вид [1-3]:

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + K(q - Q) = 0, \quad B\ddot{Q} + K(Q - q) = \tau, \quad (1)$$

где  $q \in R^n$  – вектор обобщенных координат управляемых звеньев манипулятора,  $Q \in R^n$  – вектор обобщенных координат управляющих приводов,  $M(q)$  – матрица инерции звеньев робота,  $N(q, \dot{q}) \in R^n$  – вектор центробежных, кориолисовых и гравитационных сил,  $K = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\} > 0$  – матрица жесткости шарниров,  $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$  – матрица инерции приводов,  $\tau \in R^n$  – вектор входных сигналов, поступающих на управляющие устройства. Предполагается, что управление  $\tau$  в системе (1) является кусочно-постоянным сигналом

$$\tau(t) = \tau(kT), \quad \forall t \in [kT, (k+1)T), \quad T > 0, k \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

и значения вектора состояния системы доступны измерению в моменты времени  $t = kT$ .

К настоящему времени разработаны различные подходы к синтезу управления для системы (1), в том числе, линеаризация обратной связью [2], управление на основе пассивности [4], метод бэкстеппинга [3]. Преимущество метода бэкстеппинга заключается в наличии систематической процедуры нахождения стабилизирующего закона управления. Однако такой закон, как правило, имеет довольно сложную структуру, что вызывает затруднения при его практической реализации.

С использованием результатов работы [4] найдено управление (2), при котором программное движение манипулятора  $q = q_0(t)$  равномерно асимптотически устойчиво. Новизна результата состоит в применении функций Ляпунова вида векторных норм и разностных уравнений сравнения, обеспечивающих более высокую скорость сходимости, расширение области притяжения решений, упрощение структуры управления по сравнению с известными результатами [3].

## Л и т е р а т у р а

1. Moberg S. On modeling and control of flexible manipulators. Linkoping: Linkoping University. 2007. 148 p.
2. Palli G., Melchiorri C., De Luca A. On the feedback linearization of robots with variable joint stiffness // IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2008. P. 1753-1759.
3. Brogliato B., Ortega R., Lozano R. Global Tracking Controllers for Flexible-joint Manipulators: a Comparative Study // Automatica. 1995. V. 31. No. 1. P. 941-956.
4. Перегудова О.А., Пахомов К.В. О стабилизации нелинейных систем с кусочно-постоянным управлением при помощи метода бэкстеппинга // Автоматизация процессов управления. 2013. № 4(34).

## Motion Control Of The Manipulator With Elastic Joints

O.A. Peregudova

Ulyanovsk State University, Russia

In the work the construction of piecewise-constant motion control law for the manipulators with elastic joints is given. Also the methods of solving the problem of robust stabilization of nonlinear nonstationary systems with piecewise constant control is developed on the basis of the sampling system and the use of Lyapunov functions of the form of vector norms. The sufficient conditions for the program motion stabilization of the manipulators are obtained.

# ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ АНАЛОГИЙ

**Ф.Ф. Родюков**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: frodyukov@gmail.com*

Формализм электромеханики более продвинут по сравнению с формализмом теоретической механики. Действительно, если в последней два тела взаимодействуют по закону всемирного тяготения, то есть чисто статически, то в электромеханике благодаря понятию взаимоиндуктивности взаимодействие двух электрических контуров зависит от их взаимной скорости и угла между векторами этих скоростей. Но, к сожалению, это преимущество сводится на нет привлечением к описанию динамики электрических контуров уравнений Лагранжа-Максвелла. В монографии [1] доказано, что в электромеханике надо применять вместо уравнений Лагранжа-Максвелла **уравнения Лагранжа-Ньютона**. Последние же исходят из формулировки второго закона динамики в формулировке Ньютона: “Изменение количества движения (импульса) тела равно приложенной силе”.

Возврат к формулировке Ньютона второго закона динамики, а также введение в механике понятия **взаимомассы**, аналога взаимоиндуктивности в электромеханике, позволили обобщить метод электромеханических аналогий, идеально работающего для динамики одного тела [2], для динамики двух тел.

В обобщённом методе электромеханических аналогий центральное место занимают импульсы как одного тела, так и двух тел. Так импульс тела при взаимодействии двух тел состоит из собственного импульса плюс взаимоимпульс. Взаимоимпульс каждого из тел включает взаимомассу, умноженную на скорость другого тела и на косинус угла между векторами скоростей тел.

Кинетическая энергия вводится как сумма квадратов импульсов тел, умноженных на коэффициент  $\frac{1}{2}$ . Диссипативная функция вводится как сумма квадратов импульсов тел, умноженных на коэффициенты, являющиеся отношениями механических сопротивлений для тел к их массам и на  $\frac{1}{2}$ . Выражение для потенциальной энергии строится соответствующим образом.

В случае электромеханики импульсы тел надо заменить потокоцеплениями, а коэффициенты перед импульсами заменить на соответствующие по таблице аналогий.

В качестве иллюстрации применения метода электромеханических аналогий приводится сравнение механической системы с одной степенью свободы, включающей массу на пружине и механическое сопротивление, с электрическим контуром тоже с одной степенью свободы, включающим сопротивление, индуктивность и ёмкость. То же проделано и с системами с двумя степенями свободы.

## Л и т е р а т у р а

1. Родюков Ф.Ф. Четыре шага вперёд в теории электромагнитного поля и в электромеханике. LAP Lambert Academic Publishing. 2013. 116 p. (Four steps forward in the theory of electromagnetic fields in electromechanics).
2. Львович А.Ю. Электромеханические системы. Л.: Изд-во С.-Петербург. ун-та. 1989. 296 с.

## Generalization of the Method of the Electromechanical Analogs

**F.F. Rodyukov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Method of Electromechanical analogies developed to date for the mechanical and electrical systems with only one degree of freedom, distributed on mechanical and electrical systems with two degrees of freedom. Obviously, this method applies to systems with “n” degrees of freedom.

# СДВОЕННЫЙ РОБОКРАН

**Б.В. Трифоненко, К.К. Тверев**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: waterpolo@mail.ru, gaura@narod.ru*

Платформа Гью-Стюарта обеспечивает управление по шести степеням свободы твёрдого тела с помощью шести равнозначных линейных приводов [1]. Такая конструкция на основе гидроцилиндров или пневмоцилиндров успешно используется в имитационных тренажёрах и других устройствах. Однако привод достаточно дорогой и ограничен по амплитуде. Поэтому Джеймс Альбус перевернул платформу Гью-Стюарта, заменил цилиндры тросами и создал робокран [2].

Такая замена в технической реализации означает превращение управляющих связей в неудерживающие. Вес управляемого тела расширяет пространство достижимых положений, и робокран оказывается весьма эффективным. Превосходя платформу Гью-Стюарта по размерам области достижимых положений, робокран имеет ограничения по конфигурации этой области и по динамике управляемого тела (особенность неудерживающих связей).

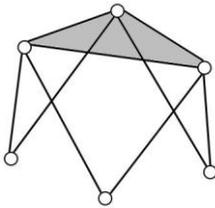


Рис. 1. Платформа Гью-Стюарта.

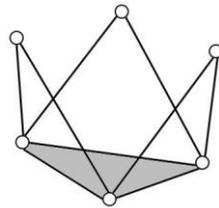


Рис. 2. Робокран.

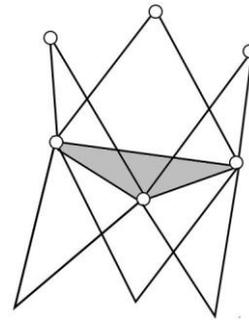


Рис. 3. Сдвоенный робокран.

Сочетание большой амплитуды и малой инерционности неудерживающих связей при сохранении управляющих связей в широком диапазоне (что характерно для традиционных удерживающих связей) обеспечивает комбинация из двух робокранов. По конфигурации это похоже на объединение шестиногой платформы (снизу) и робокрана (сверху). Только снизу находится перевернутый робокран, который сам в таком положении работать принципиально не может. Он является вспомогательным, обеспечивающим сохранение управляющих связей, накладываемых верхним робокраном. Эффект достигается избыточностью связей и требует специального управления.

## Л и т е р а т у р а

1. Stewart D. A Platform with Six Degrees of Freedom // UK Institution of Mechanical Engineers Proceedings. 1965-66. Т. 180-1. No 5.
2. Albus J.S., Bostelman R.V., Dagalak N. The nist robocrane // Journal of Robotics System: Ref. Libr. 1992. Т. 10. No 5. P. 709-724.

## Dual Robocrane

**B.V. Trifonenko, K.K. Tverev**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The Robocrane is a kind of manipulator resembling a Stewart platform but using an octahedral assembly of cables instead of struts. Like the Stewart platform, the Robocrane has six degrees of freedom. The Robocrane uses non-holding constraints and has some restrictions of dynamic quality. The dual robocrane has not such restrictions, but uses excess constraints and requires more research.



# VII

МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ  

---

MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS

# FREE VIBRATION ANALYSIS OF AXIALLY FGM TAPERED MICRO BEAM, USING MODIFIED STRAIN GRADIENT ELASTICITY

**Mohammad Bostani, Ardeshir Karami mohammadi**

*Shahrood University, Shahrood, Iran*

*Email: akaramim@yahoo.com*

In this paper, free Vibration analysis of axially functionally graded tapered microbeam are investigated in conjunction with strain gradient elasticity theory. It is assumed that cross section and material properties of the non-uniform and non-homogenous microbeam vary continuously in the longitudinal direction. Natural frequencies of the fixed-free microbeam are obtained by means of Rayleigh-Ritz method. The results show the effects of material properties and taper ratios on natural frequencies of axially functionally graded tapered microbeams and illustrate the effects of considering length scales parameters by comparing the results with those determined by classical theories. To validate and demonstrate accuracy of the present analysis, some results are compared with the available results from the existing literature and an excellent agreement is observed between them.

Recently, understanding static and dynamic behavior of FGM becomes increasing important. Reviewing the literature on beams that are made of FG materials are indicating that most of the research works on FG beams with varying material properties throughout thickness[1-3]and very few studies exist on axially functionally graded (AFG) beams that variations of material are considered along beam axis. Since the governing Equations of AFG beams have variable coefficients, solving these equations becomes complicated.

## References

1. *Li X-F*. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams // *Journal of Sound and Vibration*. 2008; 318:1210-29.
2. *Kang Y-A, Li X-F*. Large Deflections of a Non-linear Cantilever Functionally Graded Beam // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2009; 29:1761-74.
3. *Pradhan KK, Chakraverty S*. Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method // *Composites Part B: Engineering*. 2013; 51:175-84.

# СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НАНОМОСТИКА ДЛЯ УЛУЧШЕННОЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ АСМ МЕТОДИКИ

Б.О. Щербин<sup>1</sup>, А.В. Анкудинов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: esenin@nxt.ru, alexander.ankudinov@mail.ioffe.ru

При исследовании одномерных нанобъектов трехточечной методикой [1] атомно-силового микроскопа (АСМ) [2] существенную неопределенность в измеряемые значения модуля Юнга вносит незнание условий закрепления нанотрубок на краях микропоры. Мы предлагаем определять эти условия, аппроксимируя экспериментальный профиль жесткости нанотрубки (см. рис. 1) аналитическим выражением профиля жесткости трехпролетной балки (с заземленными концами и двумя опорами, симметрично расположенными относительно центра балки):

$$\frac{k}{k_{\text{MIN}}} = \frac{(2\lambda + 1)(3\lambda + 2)}{32(z - z^2)^2 [2(\lambda + 2)(z - z^2) + 3\lambda(\lambda + 1)]}, \quad (1)$$

где  $k$  – локальная жесткость наномостика,  $k_{\text{MIN}}$  – минимальная жесткость наномостика,  $z$  – относительная координата вдоль наномостика  $0 < L < 1$ ,  $\lambda$  – параметр закрепления (отношение длины бокового пролета к длине центрального). При  $\lambda \rightarrow \infty$  зависимость (1) принимает вид выражения для опертой, а при  $\lambda \rightarrow 0$  – для заземленной однопролетной балки.

Экспериментально установлено, что короткие нанотрубки (длина трубки сопоставима с длиной пролета) ведут себя как опертые балки, а длинные нанотрубки (длиной на порядок больше длины пролета) могут описываться промежуточным между опертой и заземленной балкой случаем.

Работа поддержана грантами РФФИ № 14-08-31452 мол\_а, 12-08-00389-а и 12-01-00815-а.

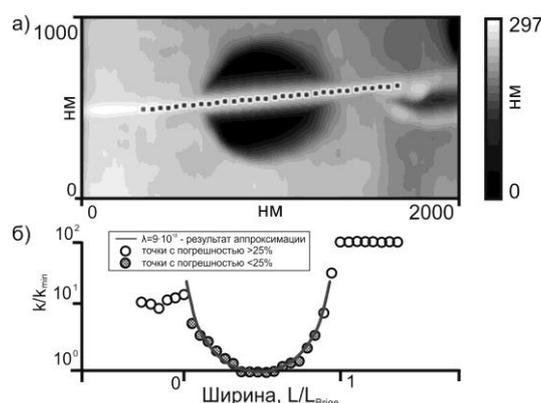


Рис. 1. а) Топография наномостика с обозначенными точками измерения жесткости. б) Профиль жесткости наномостика и результат аппроксимации.

## Л и т е р а т у р а

1. Нятушев И.А. Механические свойства наносвитков на основе  $\text{Mg}_3\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4$  // Наносистемы: физика, химия, математика. 2011. Т. 56. № 3. С. 516-521.
2. Bhushan B. Scanning Probe Microscopy in Nanoscience and Nanotechnology. Heidelberg: Springer-Verlag. 2010. 710 p.

## An Experimental Determination of Nanobridge Boundary Conditions for Improved Three-Point AFM Technique

B.O. Shcherbin<sup>1</sup>, A.V. Ankudinov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ITMO University, Saint-Petersburg, Russia

<sup>2</sup> Ioffe PTI, Saint-Petersburg, Russia

Experimental and theoretical details of the original method to determine nanotube fixing conditions at the edges of micropores (exclusively only by means of the atomic force microscopy) are discussed.

# НАНОРАЗМЕРНАЯ ШЕРОХОВАТОСТЬ МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ И ВИНЧЕСТЕРОВ

**В.П. Мемнонов**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: wlodmem@mail.ru*

Уменьшение размеров микроэлектромеханических устройств и канала между магнитной головкой и жестким диском винчестеров переводит анализ их работы в наномасштабную область [1-4]. В нашей работе [5], основанной на измерениях профиля поверхности жесткого диска с помощью атомно-силового микроскопа (АСМ), Solver PRO-M с NSG03, было введено представление шероховатости поверхности как набора плоских микроплощадок, соединяющихся краями друг с другом и имеющими нормали, отличающиеся на углы  $\beta$  от нормали  $n_0$  к среднему уровню шероховатости. Были получены распределения для углов наклона  $\alpha$  вдоль скана АСМ и, см. рис.1, геометрических параметров  $S_i$  и  $h_i$  на микроплощадке. В последующей статье [6] была разработана аналитическая техника преобразования параметров эмпирического статистического распределения углов  $\alpha$  по скану АСМ в параметры статистического распределения  $W(\beta, \varphi_0)$  для углов  $\beta$  нормалей микроплощадок с азимутальным углом  $\varphi_0$  ориентации микроплощадки.

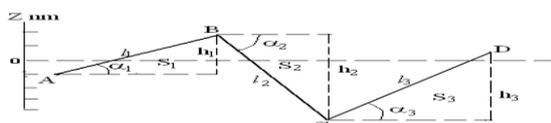


Рис. 1. Ломаная профиля скана.

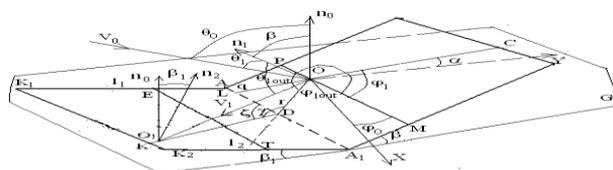


Рис. 2. Соударения молекулы с микроплощадками.

В настоящей работе с помощью дополнительной обработки экспериментальных измерений параметров шероховатости жесткого диска винчестера получены экспоненциальные распределения непосредственно для линейных размеров  $l_i$  микроплощадок с параметрами, зависящими от угла наклона  $\alpha$ , и распределенными по Гауссу и экспоненте:

$$W(l) = \exp(-l/l_0) / t(\alpha).$$

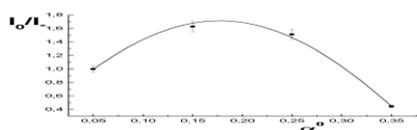


Рис. 3. Распределение параметра  $l_0$ , начало.

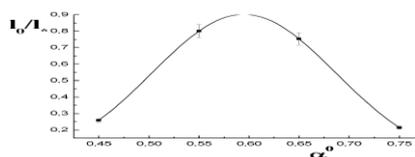


Рис. 4. Распределение параметра  $l_0$ , конец скана.

Эти распределения, см. рис. 2-4, позволили получить математическое ожидание числа последовательных столкновений молекулы на поверхности.

## Литература

1. Cowborn, R.P. Phil. Trans. R. Soc. Lond. 2000. Vol.A 358, P.281-301.
2. Li, D., Yip, W.Ch., Freire, F.L. J. Vac.Sci.Technol. 2003. V. A 21, P. L 19 - L 21.
3. Uchov A.I., Porodnov B.T., Borisov S.F.Prikl. Mech. and Techn. Phys. 2009. V.50. P.20-27. (In Russian).
4. Yang H. et al Tribol Lett 2011, V.43, P.247-256
5. Memnonov V.P., Ulyanov P.G. Technical Physics 2011. V.56, P. 1802-1806.
6. Memnonov V.P. Вестник Санкт-Петербургского университета. с. 1, 2012. P.111-119.

## Nanosize Roughness of Microelectromechanical Devices and Winchester

**V.P. Memnonov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

With the help of the experimental AFM measurements of our previous work [5] the statistical exponential distributions for linear dimensions of nanosize surface elements were obtained, which permitted to derive mathematical expectations for successive collisions of a molecule on them.

# VIII

БИОМЕХАНИКА

---

BIOMECHANICS

# AN OCULAR BIOMECHANICS MODEL DESCRIBING EARLY GLAUCOMA CAUSED ALTERATIONS IN THE PERIPAPILLARY SCLERA

Zana C. Dolicanin<sup>1</sup>, Dragan T. Spasic<sup>2</sup>

<sup>1</sup> State University of Novi Pazar, Serbia

<sup>2</sup> University of Novi Sad and State University of Novi Pazar, Serbia

E-mail: zdolicanin@np.ac.rs, spasic@uns.ac.rs

Glaucoma is a group of diseases of the major nerve of vision and, if not diagnosed and treated, it can progress to loss of central vision and blindness. It is usually associated with elevated pressure in the eye that leads to damage of the eye nerve or poor regulation of blood flow towards that nerve, [1]. Its pathophysiology is still not well understood so it attracts many researches. Recently, measurements based on uniaxial stress relaxation experiments performed for both normal and early glaucoma eyes showed that the peripapillary scleral viscoelastic material properties between the examined groups change, [2].

In this work we intend to suggest a new ocular biomechanics pattern for detecting these changes. Namely, we assume that chemical reactions as a part of all physiology processes within the human body, change its state. However, one way to observe the chemically induced changes is to examine the alterations of mechanical properties of the living tissue. This examination is based on experiments, a suitable constitutive description of the viscoelastic properties of the tissue as well as a new system identification procedure for determining the parameters included. Therefore, in order to describe the tissue alterations we relate the ramp-and-hold type of stress relaxation experiment, the fractional Zener model of viscoelastic body which comprises fractional derivatives of stress and strain together with thermodynamical restrictions on the relaxation constants of the model that follow from the Clausius-Duhem inequality [3], and finally, the system identification procedure based on the Post inversion formula and the Newton method, [4], [5].

We show that the progress of glaucoma increases the modulus of elasticity of the peripapillary sclera and decreases both the order of the derivative and the difference between the relaxation constants describing it. We may conclude that the suggested model has a chance to describe the relationship between hardness of the eye and the structural optic nerve changes known as glaucomatous optic neuropathy in terms of four parameters describing standard fractional linear viscoelastic body.

## References

1. Morrison J.C., Pollack I.P. Glaucoma: Science and Practice. New York: Thieme. 2002.
2. Downs J.C., Suh J.K.F., Thomas K.A., Bellezza A.J., Hart R.T., Burgoyne C.F. Viscoelastic Material Properties of the Peripapillary Sclera in Normal and Early-Glaucoma Monkey Eyes // Investigative Ophthalmology & Visual Science. 2005. V. 46. No 2. P. 540-546.
3. Spasic D.T. A Thermodynamically Consistent Rheological Model for Engineering Applications, in Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling, V. Mladenov and N. Mastrokakis, Eds., WSEAS, 2014.
4. Dolicanin C., Malti R. Spasic D.T. Post's inversion formula 85 years later, 3rd International Conference on Contemporary Problems of Mathematics, Mechanics and Informatics, Novi Pazar, 2014.
5. Popovic J.K., Spasic D.T., Tošić J., Kolarovic J.L., Malti R., Mitic I.M., Pilipovic S., Atanackovic T.M. Fractional model for pharmacokinetics of high dose methotrexate in children with acute lymphoblastic leukaemia, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2015. V. 22. P. 451-471.

## APPROXIMATION OF THE OSCILLATORY BLOOD FLOW USING THE CARREAU VISCOSITY MODEL

**Nikolay Kutev<sup>1</sup>, Sonia Tabakova<sup>2,3</sup>, Stefan Radev<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Institute of Mechanics, BAS, Sofia, Bulgaria*

<sup>2</sup> *Institute of Mechanics, BAS, Sofia, Bulgaria*

<sup>3</sup> *TU - Sofia, branch Plovdiv, Bulgaria*

*E-mail: stabakova@gmail.com, stradev@imbm.bas.bg*

The analysis of non-Newtonian flows in tubes is very important when studying the blood flow in different types of arteries. Usually the blood viscosity is defined by shear-dependent models, for example by the Carreau model, which represents the viscosity as a non-linear function of the shear-rate. In this paper the unsteady (oscillatory) 2D model of the blood flow in a straight tube is discussed theoretically and numerically. The solution of the non-linear parabolic equation for the velocity is constructed using appropriate analytical functions. Further the corresponding numerical solution is approximated by the theoretically predicted analytical functions. This solution is found to be in good agreement with other existing numerical solutions for the same problem.

# ИЗМЕНЕНИЕ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ ПОСЛЕ ВВЕДЕНИЯ ИНЪЕКЦИЙ В СТЕКЛОВИДНОЕ ТЕЛО

С.М. Бауэр<sup>1</sup>, Е.Б.Воронкова<sup>1</sup>, З.Г. Ершова<sup>2</sup>, А.Л. Смирнов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Тутаевский филиал Рыбинского государственного авиационного технического университета  
E-mail: s\_bauer@mail.ru, frumen@yandex.ru, ErshovaZG@yandex.ru, a\_l\_smirnov@mail.ru

Одним из современных способов лечения некоторых глазных заболеваний является интрасклеральная инъекция небольшой (до 0,2 мл) дозы лечебного препарата [1, 2]. За счет кратковременного увеличения внутреннего объема глазного яблока при введении таких инъекций в первый момент происходит резкое увеличение внутриглазного давления (ВГД). Увеличение ВГД выше определенного уровня может привести к нарушению кровообращения, поэтому важно уметь оценивать возможный уровень изменения ВГД в результате инъекции.

В работе решается задача определения изменения внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема несжимаемой жидкости. Внешняя оболочка глаза, корнеосклеральная оболочка, состоит из роговицы и склеры. Поскольку склера занимает 93% объема этой оболочки, в задачах, связанных с изменением объема глазного яблока под действием внутреннего давления, биомеханические свойства склеры играют решающую роль. В качестве математической модели рассматривается трехмерная задача о деформации ортотропного сферического слоя, находящегося под действием внутреннего давления. Для трансверсально изотропного сферического слоя эта задача решена в [1, 2].

Часто (в 80% случаев) близорукость связана с эллипсоидальной формой склеры, которая, в свою очередь, объясняется ортотропией склеральной оболочки. В работе [3] исследуется напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропной сферической оболочки, находящейся под действием нормального давления. Решение, полученное при решении трехмерной задачи, сравнивается с решениями, получающимися по уточненной итерационной теории анизотропных оболочек Родионовой-Титаева-Черныха и теории анизотропных оболочек средней толщины Палия-Спино. Показано, что первые два члена асимптотического разложения для прогиба оболочки в точном решении и в решениях, полученным по уточненным теориям анизотропных оболочек, совпадают. В работе сравниваются решения для прогиба ортотропной оболочки, тангенциальные модули упругости которой близки.

## Л и т е р а т у р а

1. Бауэр С.М., Замураев Л.А., Котляр К.Е. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики. 2006. № 2. С. 43-49.
2. Kotliar K, Maier M, Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I. Effect of Intravitreal Injections and volume changes on Intraocular Pressure: clinical results and biomechanical model // Acta Ophthalmologica Scandinavica. 2007. Nov. 85(7). P. 777-781.
3. Бауэр С.М., Воронкова Е.Б. Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев под действием нормального давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2011. Вып. 3. С. 86-93.

## Change of Intraocular Pressure after Intravitreal Injection

S.M. Bauer<sup>1</sup>, E.B. Voronkova<sup>1</sup>, Z.G. Ershova<sup>2</sup>, A.L. Smirnov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Tutaev branch of "Rybinsk State Aerotechnical University", Russia

The deformation of the orthotropic spherical layer under the normal pressure applied on the outer and inner surfaces is analyzed. The layer is assumed to be slightly orthotropic what permits to apply asymptotic method. The equations of zeroth and first approximation are derived. At the zeroth approximation we get the equations of transversely isotropic spherical layer firstly studied in [1,2]. The solution of the 3D problem is compared with solutions due to refined iteration theory for anisotropic shells by Rodionova-Titaev-Chernykh and theory for anisotropic shells of middle length by Palii –Spiro.

# МЕТОДИКА И АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ РЕГЕНЕРАТА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ РЕАБИЛИТАЦИИ ПАЦИЕНТА С ПЕРЕЛОМАМИ ТРУБЧАТЫХ КОСТЕЙ НИЖНИХ КОНЕЧНОСТЕЙ

П.И. Бегун, О.В. Щепилина

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Россия  
E-mail: begun@fromru.com, disjunction@gmail.com,

Методика исследования состояния регенерата построена на базе: 1. Клинических компьютерных исследований: магниторезонансной томографии (МРТ) или компьютерной томографии (КТ) 2. Программы Mimics, позволяющей по КТ и МРТ, используя разную рентгеновскую плотность элементов биологических объектов, строить геометрические модели органов и структур человеческого организма; 3. Программы SolidWorks, позволяющей по построенным в программе Mimics оболочкам структур костей строить геометрические твердотельные модели; 4. Программы CosmosWorks Designer, позволяющей проводить динамические и усталостные исследования объектов; 5. Экспериментальных исследований усилий, возникающих при различных движениях в структурах костей ([www.orthoload.com](http://www.orthoload.com)) и мышц [1]; 6. Установленных эмпирических соотношений между рентгеновской плотностью структур костей, выраженной в числах Хаунсвида, и их модулем нормальной упругости [2]. 7. ГОСТов на имплантаты для хирургии (ГОСТ Р ИСО 7206-4-2005).

Проведены исследования состояния регенерата бедренной кости при основных движениях пациента: 1. На первом этапе: отведение в сторону и поднятие ноги на 30 град.; 2. На втором этапе: ходьба с опорой на здоровую ногу (больная приподнята) с помощью костылей; ходьба с опорой на носок больной ноги с помощью костылей; ходьба с двумя костылями; ходьба на обеих ногах (костыль со стороны здоровой ноги и со стороны больной); 3. На втором и последующих этапах: при падении на лестнице, при движениях босиком и с использованием разного типа обуви: на каблуках, в мужских туфлях и в спортивной обуви. На третьем этапе проведены исследования движений, специфичных для пациента: прыжки на батуте, велоспорт, вождение автомобиля, бег. Исследования усталости большеберцовой кости проведено при нагрузке 700 Н с частотой 5 Гц в течение 30000 циклов. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными.

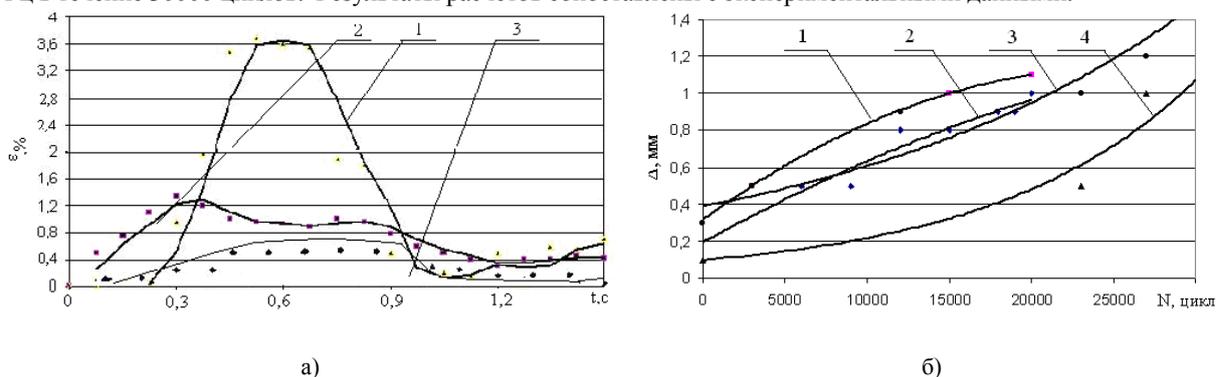


Рис.1

Использование методики позволяет исследовать состояние регенерата на разных этапах реабилитации.

## Л и т е р а т у р а

1. *Stolk J.* Hip-joint and abductor-muscle forces adequately represent in vivo loading of a cemented total hip reconstruction/ *J. Stolk, N. Verdonschot* // *Journal of Biomechanics*. 2001. No 34. P. 917-926.
2. *Rho J.Y. et.al.* Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone // *Medical Engineering and Physics*. 1995. V. 17. No 5. P. 347-355.

## Methods and Analysis of Research Status of Callus at Different Stage of Rehabilitation of Patients with Bone Fractures Lower Limbs

O.V. Shchepilina, P.I. Begun

Saint-Petersburg State Electrotechnical University "LETI", Russia

The developed method allows investigate the state of the regenerate at different stages of recovery osteosynthesis tubular bones of the lower limbs.

## МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СТРУКТУР ПОЗВОНОЧНИКА

П.И. Бегун<sup>1</sup>, Д.С. Годонюк<sup>2</sup>, Е.А. Лебедева<sup>1</sup>, А.С. Лысенкова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Россия

<sup>2</sup> Российский научно-исследовательский нейрохирургический институт им. проф. А.Л. Поленова, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: begun@fromru.com

Вопрос о целесообразности и степени редукции позвонков относительно крестца при спондилолистезе в хирургической практике не имеет однозначного решения. Использование комплекса компьютерных программ Mimics, SolidWorks позволяет определить состояние структур позвоночника как при патологических изменениях, так и при коррекции. На рис. 1, а, и б приведены, соответственно, МРТ срезы поясничного отдела позвоночника: сагитальный срединный и горизонтальный на уровне тела S1.

На срезах связки выделены кривыми, соответственно, непрерывной – надостная связка, пунктирной – межкостистая связка, штрихпунктирной – желтая связка. К сожалению, необходимые сведения о механических свойствах структур позвоночника отсутствуют.

Определение модулей нормальной упругости и допускаемых напряжений связок и структур пульпозного ядра выполняется на установках Instron и ИП –М - авто. Поэтому, для эксперимента из препарата, иссеченного при операции, выделяются образцы вместе с костными спилами позвонков. Схема горизонтального спила препарата приведена на рис. 1, в (1 – вершина остистого отростка, 2 – остистый отросток, 3 – пластинчатая часть дужки, 4 – надостная связка, 5 – межкостистая связка, 6 – желтая связка). Спили также разрушаются в зажимах измерительного устройства. Для исключения этого костные спилы перед установкой в измерительном устройстве фиксируются в перфорированных пластинках титановыми микровинтами. На схемах (рис. 1, г, д) приведены схемы фиксации, исследуемых образцов в титановых перфорированных пластинах (3) титановыми микровинтами (4), приняты следующие обозначения: а) 1 – вершина остистого отростка, 2 – остистый отросток, 2 – межкостистая связка (рис. 1, д).

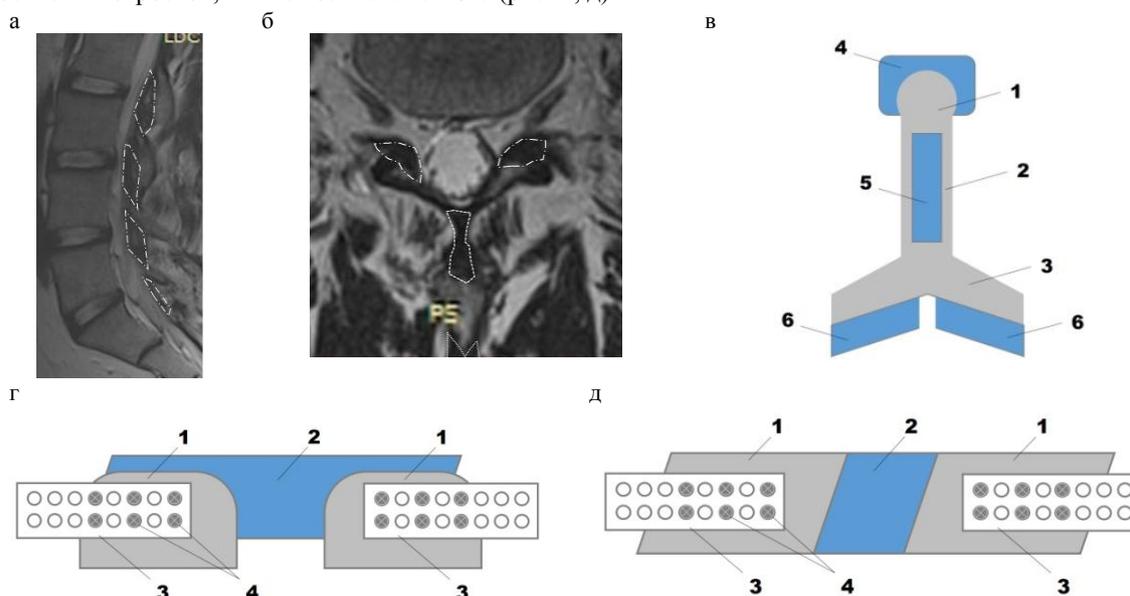


Рис. 1 Схема фиксации исследуемых образцов

## Method of Research of Mechanical Properties of Structures of the Backbone

P.I. Begun<sup>1</sup>, D.S. Godonyuk<sup>2</sup>, E.A. Lebedeva<sup>1</sup>, A.S. Lyisenkova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Saint-Petersburg Electrotechnical University "LETI", Russia

<sup>2</sup> Russian Polenov's Neurosurgical Institute, Saint-Petersburg

It is developed a method of research of modules of normal elasticity and the allowed tension of backbone structures.

# ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ БИООБЪЕКТОВ

**Е.О. Боденкова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: Bodenkova23@mail.ru*

Исследуется влияние двух биообъектов (например, двух соседних клеток) с внутренним давлением. Для этого обращаемся к идентичной задаче. Рассматривается прямоугольная пластинка размера  $26 \times 12$  с двумя круглыми включениями радиуса  $r=1$ . Внутри включений приложено давление.

Рассматривается несколько случаев: давление внутри включений одинаково и равно 100000 Па, давление в одном из отверстий больше, чем в другом в 2 раза, в 5 раз, в 10 раз и в 100 раз.

Поскольку результаты исследований будут качественно сравниваться с результатами исследований напряжений методом фотоупругости, то в качестве характеристики материала пластины берём механические характеристики эпоксидного полимера: модуль Юнга  $E = 3 \cdot 10^9$  Па и коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

В программе ANSYS построены картины напряжений при разных расстояниях между включениями. При малом расстоянии между объектами наблюдаем большие деформации, значит, будет изменяться структура ткани (рис. 3). Также построен график зависимости главного напряжения от расстояния между отверстиями (рис. 4). Для случая равного давления получено, что, чем меньше расстояние между отверстиями, тем больше напряжение в центре пластины. Данная модель может применяться при решении задач о взаимодействии клеток, людей. Практически применяется при посадке деревьев.

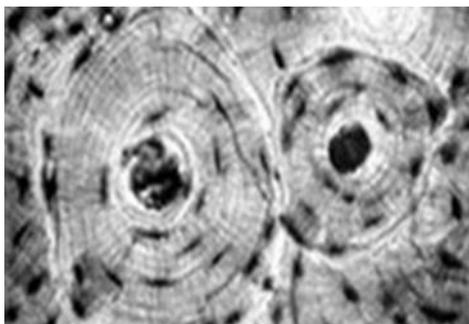


Рис. 1. Клетки костной ткани.

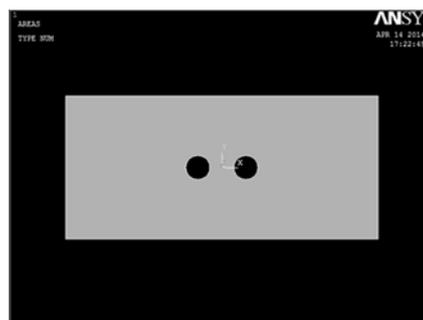


Рис.2. Исходный вид пластинки с двумя отверстиями.

## Л и т е р а т у р а

1. Няшин Ю.И., Лохов В.А. Основы биомеханики. Учебное пособие. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та. 2007. 210 с.
2. Дж. Гордон. Конструкции или почему не ломаются вещи. - Изд-во «Мир», Москва, 1980.

## Problem of Interaction of Two Bioobject

**E.O. Bodenkova**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The interaction of two biological objects is discussed. In particular, the effect of pressure changes on objects is investigated. These studies may be useful in the study of problems of increasing intra-abdominal pressure.

# ОЦЕНКА ИЗМЕРЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ ПОСЛЕ ОПЕРАЦИЙ ПО КОРРЕКЦИИ ЗРЕНИЯ

Л.А. Венатовская

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: l\_karamshina@mail.ru

Рассматривается задача о напряженно-деформированном состоянии мягких и близких к мягким оболочек под действием груза с плоским основанием для оценки измерения показателей внутриглазного давления (ВГД) после операций по коррекции зрения.

Измерение ВГД аппланационными тонометрами Гольдмана и Маклакова моделируется контактными задачами в программном пакете ANSYS (рис. 1). При моделировании используются контактные элементы «поверхность-поверхность» для создания жестко-податливого контакта между поверхностями тонометра и роговицы. Жесткая целевая поверхность тонометра связывается с так называемым «ведущим узлом», к которому прикладывается сила давления груза. Корнеосклеральная оболочка глаза, как и в работе [1], представляется сопряженными трансверсально-изотропными сферическими сегментами с разными диаметрами и разными упругими свойствами, при этом учитывается различие толщин и упругих свойств основных слоев роговицы. В случае моделирования последствий операции по коррекции гиперметропии полагается, что с внешней поверхности роговицы удаляется кольцевой слой  $L_{abl}$  определенной глубины с заданными внешним и внутренним радиусами.

Многочисленные расчеты, проведенные при различных геометрических параметрах удаляемого слоя, показали, что рефракционные операции по коррекции гиперметропии, как и операции по коррекции миопии [2], приводят к уменьшению тонометрических показателей ВГД, что согласуется с клиническими данными. По данным расчетов изменение показателей ВГД зависит от внутреннего и внешнего радиусов, ширины и глубины удаляемого слоя при операциях.

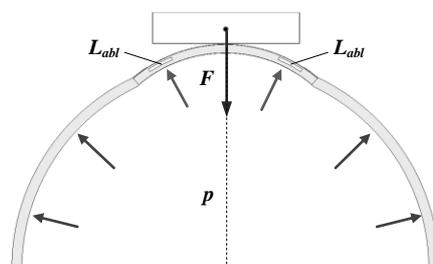


Рис. 1 Модель аппланационного тонометра

## Л и т е р а т у р а

1. Карамшина Л.А. Механические модели аппланационной тонометрии с учетом многослойности роговицы // Российский журнал биомеханики. 2011. № 3 (42). С. 37-44.
2. Бауэр С.М., Карамшина Л.А., Качанов А.Б. Механические модели измерения внутриглазного давления тонометрами Маклакова и Гольдмана после операций по коррекции зрения // Российский журнал биомеханики. 2012. № 3 (57). С. 25-31.

## Estimation of the Intraocular Readings Obtained after Refractive Surgery

L.A. Venatovskaya

Saint-Petersburg State University, Russia

The problem of stress-strain state of soft and close to soft shells under the load with a flat base for estimation of intraocular pressure (IOP) readings obtained after refractive surgery is considered. The measurements of IOP by Goldmann and Maklakov applanation tonometers are modeled in the software package ANSYS. Cornea-scleral eye shell is modeled as two thin transversely-isotropic conjunctured spherical shells with different radii of curvature and biomechanical properties. It is assumed, that during refractive surgical correction of hypermetropia an annular layer of given thickness, inner and outer diameters is removed. Reduction of the IOP readings after refractive surgery for hypermetropia, as for myopia, is obtained. Dependences of IOP readings on inner and outer radii, thickness and width of the removed annular layer are observed.

# РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ И ПУЛЬСИРУЮЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ В МОДЕЛИ СОСУДА СО СТЕНОЗОМ

Е.А. Федорова, Я.А. Гатаулин, А.Д. Юхнев

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Россия

E-mail: ekf5va@gmail.com, yakov\_gataulin@mail.ru, a.yukhnev@mail.ru

Закрученные течения крови привлекают к себе все более пристальный интерес исследователей нормальной и патологической гемодинамики [1, 2]. Цель настоящей работы – изучить влияние стационарной и пульсирующей закрутки на течение за стенозом.

Исследованы вопросы, связанные с образованием рециркуляционной зоны за гемодинамически значимым асимметричным стенозом (75% по площади). Отношение максимальных окружной и осевой скоростей в течении перед стенозом близко к зарегистрированному клинически физиологическому значению 0.2. Используются методы вычислительной гидродинамики и ультразвукового доплеровского сканирования потока кровезамещающей жидкости в силиконовой модели сосуда со стенозом.

Результаты проведенного расчетно-экспериментального исследования свидетельствуют о том, что закрутка потока приводит к уменьшению длины зоны рециркуляции на стенке, противоположной стенозу (рис.1). Тем самым сокращается область потенциального разрастания атеросклеротической бляшки. Сравнение измеренных и расчетных распределений максимальной осевой скорости вдоль оси модели сосуда со стенозом показало, что приближение ламинарного течения для расчета рассмотренных течений не подходит даже при числах Рейнольдса в несколько сотен. Применение модели турбулентности  $k-\omega$  SST дало близкие к эксперименту результаты для незакрученного и закрученного течений, в том числе для профилей осевой скорости в разных сечениях.

Выявленный положительный эффект закрученного течения может быть использован при проектировании протезов кровеносных сосудов.

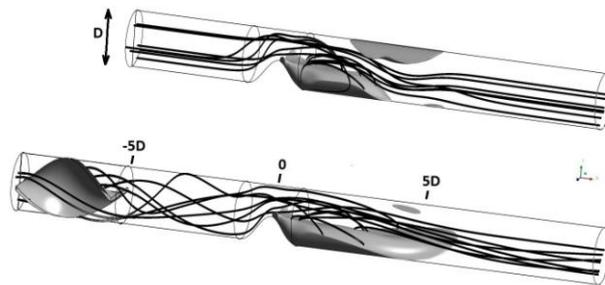


Рис. 1. Рассчитанные линии тока и зона рециркуляции стационарного незакрученного и закрученного течений для  $Re = 660$  (трубка сжата в 2 раза по длине)

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 12-01-0091-а.

## Л и т е р а т у р а

1. Кирсанов Р.И., Куликов В.П. Винтовое (вращательно-поступательное) движение крови в сердечно-сосудистой системе // Успехи физиологических наук. 2013. Т. 44. № 2. С. 62-78.
2. Liu X., Sun A., Fan Y. et al. Physiological significance of helical flow in the arterial system and its potential clinical application // Annals of Biomed. Eng. 2014. 10.1007/s10439-014-1097-2.

## Numerical and experimental investigation of stationary and pulsatile swirling flows in a stenosis model

E.A. Fedorova, Y.A. Gataulin, A.D. Yukhnev

Saint-Petersburg State Polytechnic University, Russia

Present study is dedicated to investigation of the stationary and pulsatile swirling flow effects in a stenosis model with 75% reduction in area by means of experimental flow measurement techniques (Ultrasound Doppler) and computational fluid dynamics. This research specifically focuses on the changes of the recirculation length.

# НАПРАВЛЕННАЯ ДОСТАВКА И ИНДУЦИРОВАННОЕ ВЫСВОБОЖДЕНИЕ РЕАКТИВОВ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИМЕРНЫХ КОНТЕЙНЕРОВ

С.И. Ерохина

*Казанский федеральный университет, Россия  
E-mail: svetlana.erokhina@gmail.com*

При разработке высокоэффективных лекарственных препаратов [1] и построении биохимических компьютеров [2] к контейнерам, призванным осуществлять транспортировку активных реагентов, выдвигаются сходные требования: вещество должно быть доставлено в нужное место, и его выброс в среду должен произойти в строго определенное время. В этой связи, большой интерес представляют собой функциональные полимерные капсулы.

Реализация полимерных капсул осуществляется посредством последовательной самосборки полианионов и поликатионов [3] на поверхности сферических ядер с их последующим растворением [4]. Толщина оболочек варьируется от 4 до сотен нанометров, а их архитектура определяется в процессе изготовления. Диаметр капсулы обычно составляет величину от 50 нанометров до нескольких микрон.

Характерной особенностью данных объектов является возможность изменения проницаемости оболочек путем изменения характеристик жидкой среды, в которой они находятся. Таким образом, полая капсула может быть заполнена активным веществом, служащим для лечения заболевания в случае лекарственных препаратов или для осуществления определенной программы в случае биохимических компьютеров. В данном докладе будут рассмотрены конкретные примеры реализации капсул, позволяющих осуществить направленную доставку и индуцированное высвобождение активного вещества.

Полимерные контейнеры с заданной архитектурой оболочек позволяют осуществить два вида доставки активного вещества: грубую и точную. Для грубой доставки в оболочку включаются магнитные наночастицы, изготовленные, например, из окиси железа. Направленный транспорт таких капсул в жидкости осуществляется посредством приложения внешнего магнитного поля. В случае необходимости точного позиционирования на поверхности контейнера иммобилизуются молекулы рецепторов. В данном докладе будет рассмотрен пример капсул, имеющих на поверхности молекулы антител (иммуноглобулин IgG).

В случае индуцированного высвобождения идеальным является случай, когда проницаемость оболочек капсул увеличивается из-за изменения состава и свойств окружающей среды. Простейшим примером высвобождения такого типа является образование пор в оболочках при увеличении кислотности раствора, в котором они находятся. В более сложном случае будет рассмотрен пример разрушения коллаген-содержащих оболочек при возникновении заболевания (артрит). В случае, когда изменения свойств среды не приводят к увеличению проницаемости оболочек, необходимо изменить их состав таким образом, чтобы открывание пор можно было осуществить путем внешнего воздействия. В качестве примера будут рассмотрены капсулы, содержащие в оболочке упорядоченные слои бактериородопсина, который под действием света осуществляет направленный перенос протонов во внутреннюю область капсул, что приводит к уменьшению pH и, как следствие, к открыванию пор.

## Л и т е р а т у р а

1. *Pastorino L., Erokhina S., Erokhin V.* Smart nanoengineered polymeric capsules as ideal pharmaceutical carriers // *Curr. Org. Chem.* 2013. V. 17. P. 58-64.
2. *Erokhina S., Pastorino L.* Nanoengineered polymeric capsules as elements of unconventional computing systems // *Physica Status Solidi*. 2014. (In press).
3. *Decher G.* Fuzzy nanoassemblies: toward layered polymeric multicomposites // *Science*. 1997. V. 277. P. 1232-1237.
4. *Donath E., Sukhorukov G.B., Caruso F., Davis S.A., Mohwald H.* Novel hollow polymer shells by colloid-templated assembly of polyelectrolytes // *Angew. Chem. Int. Ed.* 1998. V. 37. No 16. P. 2201-2205.

## Targeted Delivery and Induced Release by Polymeric Containers

S.I. Erokhina

*Kazan Federal University, Russia*

The presentation is dedicated to the review of the application of functional polymeric capsules in the fields of drug design and chemical and biochemical computers. These containers allow targeted delivery and induced release of the active reagents.

# О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ИЗМЕРЕНИЯ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ ПНЕВМОТОНОМЕТРОМ

А.В. Ивченкова

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: alina\_ivchenkova@bk.ru

В работе моделируется деформация роговицы глаза при аппланационном (см. [1, 2]) измерении внутриглазного давления (ВГД) современным бесконтактным прибором – пневмотонометром. Это устройство делает роговицу плоской, используя для этого струю воздуха.

Внешней оболочкой глаза является корнеосклерная капсула. Эта оболочка состоит из двух сопряжённых оболочек – склеры и роговицы. Известно [3], что роговица является более мягкой оболочкой, чем склера, и радиус кольца сопряжения роговицы и склеры практически не меняется при тонометрии [1]. Таким образом, в первом приближении роговицу можно рассматривать отдельно как пологую сферическую оболочку. На рис. 1 представлена модель оболочки и функция нагружения.

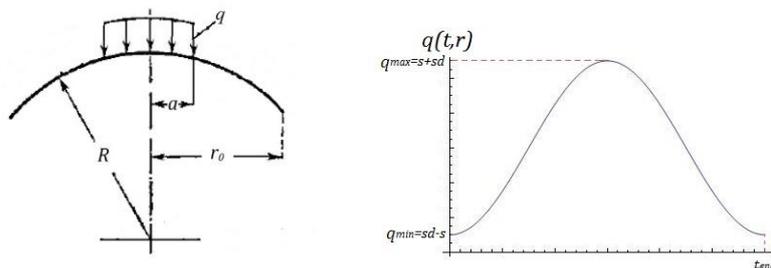


Рис. 1. Моделирование аппланационного нагружения при измерении ВГД.

В работе построены две простейшие модели пневмотонометра, одна из которых основывается на уравнениях для моментной теории оболочек, другая – на уравнениях для безмоментной теории оболочек. Проведено исследование поведения пологой сферической оболочки при разных параметрах и сравнение результатов, получающихся по двум моделям. На основании сравнений сделан вывод о том, что модель безмоментной оболочки даёт результаты, близкие к наблюдаемым в экспериментах. Показано, что моментная модель не может адекватно описать клинические данные.

## Л и т е р а т у р а

1. Бауэр С.М. Об аппланационных методах измерения внутриглазного давления // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2006-2007 гг./под ред. А.Л. Смирнова, Е.Ф. Жигалко. СПб.: Изд-во СПбГУ. 2007. С. 3-19.
2. Вургафт М.Б., Вургафт Я.М. Тонометрические методы исследования внутриглазного давления и гидродинамика глаза при глаукоме. Казань. 1991. 112 с.
3. Иомдина Е.Н. Биомеханика склеральной оболочки глаза при миопии: диагностика нарушений и их экспериментальная коррекция: дис. биол. докт. М. 2000. 32 с.

## The Mathematical Modeling of Measurement of Intraocular Pressure with a Pneumotonometer

A.V. Ivchenkova

Saint-Petersburg State Marine Technical University, Russia

The problem of dynamic loading of a spherical shallow shell is analyzed. Modeling of the interaction between a pneumotonometer and a cornea under measurement of intraocular pressure has special interest. Two mathematical models of a pneumotonometer are developed in the paper. The first one is based on equations of the moment theory of shells and the second - on the membrane theory of shells. The effect of different parameters on behavior of a spherical shallow shell is studied. It appears that results obtained with the membrane shell model agree better with experimental data than those due to the moment shell theory. It seems that last theory cannot provide an adequate description of the clinical data.

# ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ЗОНДА В СЛАБОИОНИЗОВАННОЙ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

А.А. Клементьева, А.В. Норин

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Россия

E-mail: 777alla7@mail.ru, norina@land.ru

Сферические электрические зонды до сих пор являются эффективным инструментом диагностики плазмы [1]. Для слабоионизованной однотемпературной плазмы с замороженными реакциями ионизации и рекомбинации используется система уравнений диффузии заряженных частиц и уравнения Пуассона, которая в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{dn_e}{dt} - n_e \frac{d\hat{\Phi}}{dt} = -\gamma_e, \quad \frac{dn_i}{dt} + n_i \frac{d\hat{\Phi}}{dt} = -\gamma_i, \quad \frac{d^2\hat{\Phi}}{dt^2} = \mu \frac{n_e - n_i}{2t^4}, \quad (1)$$

где  $t \in [0;1]$ ,  $n_e, n_i, \Phi, \gamma_e, \gamma_i$  – безразмерные концентрации, безразмерный электростатический потенциал и безразмерные полные потоки заряженных частиц на зонд,  $\mu$  – квадрат отношения радиуса зонда к радиусу Дебая.

Обычно система решается при следующих граничных условиях:

$n_e(0) = n_i(0) = 1$ ;  $\Phi(0) = 0$ ;  $\Phi(1) = \Phi_0$ . В первых работах [2,3] строилось численное и асимптотическое решения в случае тонкого слоя объемного заряда  $\mu \ll 1$  при условиях  $n_e(1) = n_i(1) \neq 0$  на зонде. Но при нулевых условиях для заряженных частиц на зонде первые два уравнения системы (1) не применимы вблизи зонда. Попытка преодолеть это затруднение была предпринята в работах [4,5], где вблизи зонда вводился тонкий бесстолкновительный слой, описываемый уравнением Власова, а решения для макропараметров приравнивались на границе зон. Если предположить, что распределения заряженных частиц “максвеллизуются” на расстоянии длины свободного пробега, то концентрации заряженных частиц на зонде легко связать с потоками заряженных частиц на зонд. В настоящем докладе рассмотрены решения системы (1) в первом приближении для малых и больших значений  $\mu$ , а также произвольных  $\mu$ , но при малом значении  $\Phi_0$ .

## Л и т е р а т у р а

1. Чан П., Тэлбот Л., Туриан К. Электрические зонды в неподвижной и движущейся плазме // М.: Изд. “Мир”. 1978. 201 с.
2. Su C.H., Lam S.H. Continuum theory of spherical electrostatic probes // Phys. Fluids. 1963. V. 6. No 10. P. 1479-1491.
3. Cohen I.M. Asymptotic theory of spherical electrostatic probes in a slightly ionized, collision-dominated gas // Phys. Fluids. 1963. V. 6. No 3. P. 1492-1499.
4. Гунько Ю.Ф., Норин А.В. Сферический электростатический зонд в слабоионизованной плазме с тонким бесстолкновительным экранирующим слоем // Вестник ЛГУ. 1979. № 13. С. 75-79.
5. Калинина Н.А. Задача о малом сферическом зонде в слабоионизованной плазме с тонким бесстолкновительным слоем // Труды студенческого центра прикладных математических исследований. СПб: НИУ ИТМО. 2012. Т. 2. С. 52-60.

## Boundary Conditions for Spherical Electrostatic Probe in a Weakly Ionized Collisional Plasma

A.A. Klementyeva, A.V. Norin

ITMO University, Saint-Petersburg, Russia

For single-temperature weakly ionized plasma with frozen ionization and recombination reactions we use the system (1). There  $t \in [0;1]$ ,  $n_e, n_i, \Phi, \gamma_e, \gamma_i$  – dimensionless concentrations, dimensionless electrostatic potential and dimensionless streams of charged particles in the probe,  $\mu$  – the squared ratio of the radius of the probe to the Debye radius. This report considered the solutions of (1) in the first approximation for small and large values  $\mu$ , and also for arbitrary values  $\mu$  with low values  $\Phi_0$ .

# СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ РЕЧИ И ФИЛЬТРАЦИЯ ИХ ОТ ШУМОВ

**А.А. Кузнецова**

*Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова,  
Санкт-Петербург, Россия,  
E-mail: anastasiya.smith@yandex.ru*

В современном мире повсеместно используется голосовое управление техникой. Системы распознавания речи прочно осели в смартфонах, навигаторах, специализированных программах и других технических средствах. Учитывая их быстрое развитие и нахождение всё большего количества областей применения, можно с уверенностью сказать, что эта тенденция будет только нарастать.

Но, несмотря на огромную популярность, существующие системы распознавания речи не лишены недостатков. Так, одним из минусов является затруднённое использование таких систем заикающимися людьми. Можно выделить две основные проблемы использования голосового управления заикающимися людьми:

1. При появлении в речи сложного слова, приводящего к спазму или ступору, система не дожидается диктора, считая, что ввод команды закончен.

2. Система неверно интерпретирует фонемы из-за их «нечистого» произношения.

Второй пункт, вообще говоря, относится к глобальным проблемам систем распознавания, но в данном контексте имеет более узкую направленность.

Гипотеза проводимого исследования заключается в том, что спектры, соответствующие участкам речи с заиканием, могут быть автоматически распознаны системой с целью дальнейшей их модификации.

Проверка гипотезы ведется путём спектрального анализа образцов «чистой» речи и речи заикающегося человека и выявления закономерностей. В случае подтверждения гипотезы на основе полученных данных будет выбран метод распознавания, который максимально гибко сможет быть настроен под диктора.

## **Л и т е р а т у р а**

1. Фролов А.В., Фролов Г.В. Синтез и распознавание речи. Современные решения. [Электронный ресурс]. 2003. Режим доступа: <http://www.frolov-lib.ru/>
2. Винцюк Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. Киев: Наук. Думка. 1987. 262 с.
3. Блог компании Яндекс. Распознавание речи от Яндекса. Под капотом у Yandex.SpeechKit. [Электронный ресурс], 2013. Режим доступа: <http://habrahabr.ru/company/yandex/blog/198556/>

## **Structure Analysis of Speech Signals and Filtering Them From Noise**

**A.A. Kuznetsova**

*Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping, Saint-Petersburg, Russia,*

Speech recognition is the important part of life. Today speech recognition using in different technical equipment: smartphones, navigators, specially programs and other. This technologies are developing rapidly and this trend will only grow.

But stutterer can not use this technologies fully. There are two main troubles:

1. The system of recognition speech does not wait for speaker and think that speech is end, when there is spasm of throat.

2. The system wrong recognize phonemes because their pronunciation is different from “pure sound”.

The theory of research is that sound spectrum of speech with stuttering can be find automatically. Hypothesis is tested by comparing the spectra of the speech and the identification of pattern. If the hypothesis is confirmed, will be an optimal model of recognition.

## ОПИСАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КРОВИ

**К.В. Папина, В.А. Цибаров**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия.*

*E-mail : papakurt@mail.ru, tsibarov@mail.ru*

Механика жидкости и газа начиная с середины XX века находит всё большее применение в медицине при исследовании процессов, происходящих в человеческом организме. При этом одной из наиболее важных проблем является исследование кровеносной системы живого организма, в проблеме гемодинамики которого можно выделить две основные задачи. Первая – это глобальная задача описания функционирования кровеносной системы. Вторая задача заключается в описании гемодинамики участка кровеносного сосуда. Именно вторая задача рассматривается в настоящей работе.

В практических задачах часто применяется ньютоновская модель крови. Однако у такого подхода есть недостаток: приходится ограничиваться рассмотрением лишь крупных сосудов. При течении крови в микрососудах и при больших скоростях сдвига необходимо учитывать отличие её реологических свойств от свойств ньютоновской жидкости. Эти отличия определяются наличием взвешенных в плазме крови микрочастиц, в основном, эритроцитов. Вследствие указанных причин была рассмотрена модель крови как неньютоновской жидкости, а также подход, основанный на стохастическом (кинетическом) описании концентрированных гидровзвесей [1, 2].

Немаловажным преимуществом этой модели является применение метода оптимизации уравнений переноса по переменной области с подвижной границей. В этом и есть основное отличие результатов, полученных на основе этой модели [3] от работ других авторов, не учитывающих эластичных свойств сосудистой стенки и изменения диаметра сосуда в зависимости от величины давления крови.

Задача о течении крови является достаточно проблематичной (недостаток начальных и граничных условий, трудность переноса экспериментальных результатов на реальный сосуд, проблема замыкающих соотношений для уравнений динамики фаз крови). Были сделаны упрощения: 1) отображение сосуда на круговой цилиндрический канал единичного радиуса и единичной длины с неподвижными стенками; 2) система уравнений гемодинамики заменена на оптимизированную. Такие упрощения позволяют получить теоретические и полуэмпирические формулы для расчетов параметров, характеризующих течение крови.

В работе рассмотрено движение крови в сосудах различного диаметра и длины. На основе полученных формул были исследованы скорости пульсовой волны, выявлено влияние диаметра сосуда на скорость пульсовой волны в здоровых сосудах и сосудах, пораженных стенозом. Показано, что в сосудах, пораженных стенозом, увеличены такие характеристики, как поперечная и продольная скорости звука в сосуде. Также был проведен расчет среднего давления и плотности крови в сосуде и исследовано значение наиболее вероятной скорости форменных элементов.

### **Л и т е р а т у р а**

1. Цибаров В.А. Концепция современного естествознания. Учебное пособие. СПб: «ВВМ». 2012. 185 с.
2. Цибаров В.А., Юдинцева Д.А. Метод оптимизации в гемодинамике // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер.1. 2012. Вып. 2. С. 131-138.
3. Фомина О.Н., Цибаров В.А. Гемодинамика отрезка сосуда // Вторые Поляховские чтения. Избранные труды. СПб: НИИ Химии СПбГУ. 2000. С. 179-189.

## **Blood Physical Properties Description**

**V.A. Tsibarov, K.V. Papina**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Blood is considered as non-Newtonian liquid with plasma and the weighted elements such as erythrocytes, leucocytes, platelets. Pulse wave velocity for vessel of different radius, density and average pressure of blood are calculated by quasi-one-dimensional kinetic approach. Increase in longitudinal and cross speed of a sound is shown in the vessels struck with a stenosis. Value of the most probable speed of elements and its dependence on a choice of correlation function is investigated.

# МОРФОМЕТРИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНЕКЛЕТОЧНОГО МАТРИКСА В СУСТАВНОМ ХРЯЩЕ

**Е.В. Перевалова**

*Волгоградский государственный университет, Россия*

*E-mail: perevalovakaty@gmail.com*

Возрастные опорно-двигательные заболевания суставов в настоящее время являются одними из важных проблем в современном мире. Остеоартроз (ОА) наиболее распространенное хроническое заболевание суставов [1]. Он характеризуется деградацией суставного хряща, изменением мягких тканей и субхондриальной кости. Ухудшение состава суставного хряща является отличительной чертой патогенеза ОА. Гомеостаз хрящей и костей поддерживается сложным механизмом, контролирующим оборот и реконструкцию внеклеточного матрикса (ЕСМ) [2, 3]. ЕСМ представляет собой комплекс самостоятельно собранных макромолекул, которые состоят преимущественно из коллагена, неколлагеновых гликопротеинов, гиалуроновой кислоты и протеогликанов. Внеклеточный матрикс является важным регулятором нескольких функциональных клеточных процессов [4]. Из статических данных, полученных нами, можно сделать выводы, что зона приближенная к синовиальной оболочке сильно размыта и не имеет четких границ, а так же имеет малую плотность хрящевого матрикса. В глубокой зоне хряща матрикс имеет более плотную структуру. В области, приближенной к субхондриальной кости, так же не имеет четких границ, и плотность хрящевого матрикса меньше, чем в глубокой зоне. Показана зависимость обновления и разрушения матрикса, приближенного к синовиальной оболочке и зоне субхондриальной кости, которые подвержены меньшему разрушению и способны к большему обновлению. Моделирование процессов, которые происходят во внеклеточном матриксе, а так же в зоне субхондриальной кости, помогут в дальнейшем предсказывать на ранних этапах развитие заболевания, такого как остеоартроз.

## **Л и т е р а т у р а**

1. Lutz W., Sanderson W., Scherbov S. The coming acceleration of global population ageing // Nature. 2008. 451 (7179). P. 716-719.
2. Goldring M.B., Goldring S.R. Osteoarthritis // J. Cell. Physiol. 2007. 213 (3). P. 626-634.
3. Hamerman D. The biology of osteoarthritis // N. Engl. J. Med. 1989. 320:1322-1330.
4. Von der Mark K., Gauss V., von der Mark H., Müller P. Relationship between cell shape and type of collagen synthesised as chondrocytes lose their cartilage phenotype in culture // Nature. 1977. 267:531-532.

## **Morphometry Distribution of the Extracellular Matrix in Articular Cartilage**

**E.V. Perevalova**

*Volgograd State University, Russia*

Extracellular matrix is an important regulator of cellular function of several processes. Modeling of processes that occur in the extracellular matrix, as well as in the area of bone subchondrial help in the future to predict early in the progression of the disease, such as osteoarthritis.

# НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗАДАЧАХ О ДЕФОРМАЦИИ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЕВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

**П.В. Трофименко**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: pasha.trofimenko@inbox.ru*

Для построения более точных моделей глаза важно учитывать особенности его сложной структуры, многие элементы которой с точки зрения механики являются многослойными оболочками. Слои некоторых оболочек под действием внутреннего давления могут смещаться относительно друг друга. Внешняя оболочка глаза состоит из нескольких слоев, которые отличаются как по толщине, так и по своим биомеханическим свойствам. Данные особенности биологических тканей заметно влияют на общую деформацию оболочек глаза.

В работе рассмотрено решение задачи о деформации тонкой упругой сферической оболочки, состоящей из двух трансверсально-изотропных слоев, под действием внутреннего и внешнего давлений. Получены решения по теориям Родионовой-Титаева-Черныха [1] и Палия-Спира [2].

Проведенные расчеты показали, что чем больше разность упругих коэффициентов оболочек на поверхности изотропии материала и в направлении перпендикулярном к ней, тем сильнее изломы в перемещениях и напряжениях, возникающих на поверхности контакта.

Из полученных результатов можно сделать вывод о том, что теории оболочек Палия-Спира и Родионовой-Титаева-Черныха позволяют получить достаточно точные результаты для оценки величины нормальных прогибов и напряжений оболочек. Следует отметить, что к классической трехмерной теории [3] более близки результаты, полученные по теории Палия-Спира, а также эта теория является более простой по сравнению с теорией Родионовой-Титаева-Черныха.

## **Л и т е р а т у р а**

1. Родионова В.А., Титаев В.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб: Изд-во СПбГУ. 1996. 280 с.
2. Палий О.М., Спира В.Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. 1977. 386 с.
3. Бауэр С.М., Воронкова Е.Б. Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев под действием нормального давления // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3. 2011. С. 86-93.

## **Non-Classical Theory of Anisotropic Shells in Problems of the Deformation of Spherical Shells under the Influence of the Normal Pressure**

**P.V. Trofimenko**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The solution of the problem of the deformation of a thin elastic spherical shell consisting of two transversely isotropic layers, under the influence of internal and external pressures is studied. The solutions according to the theories Rodionova-Titaev-Chernykh and Paliy-Spiro are obtained.

The results obtained in the theory of Paliy-Spiro, more close to the results obtained by the classical three-dimensional theory.

# ИЗМЕНЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РОГОВИЦЫ ГЛАЗА ПОСЛЕ ОПЕРАЦИЙ ПО КОРРЕКЦИИ ЗРЕНИЯ

Д.В. Франус

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: franus@mavis.ru

В виду активного развития рефракционной хирургии, которая меняет профиль роговицы, появляются актуальные вопросы не только по оценке изменения показателей внутриглазного давления, но и по оценке изменения напряженно-деформированного состояния и упругих свойств роговицы [1].

В работе проводится сравнение напряженно-деформированного состояния роговицы глаза до и после операции ЛАЗИК (LASIK) по коррекции зрения. Модель строится в программной системе конечно-элементного анализа ANSYS. Рассматривается трансверсально - изотропная сферическая оболочка переменной толщины, состоящая из четырех слоёв: эпителий роговицы, Боуменова мембрана, строма роговицы, и Десцеметова оболочка. Слои задаются сферическими сегментами, каждый из которых имеет свои упругие и геометрические характеристики. В качестве граничных условий используется жесткая заделка по краю роговицы на все слои.

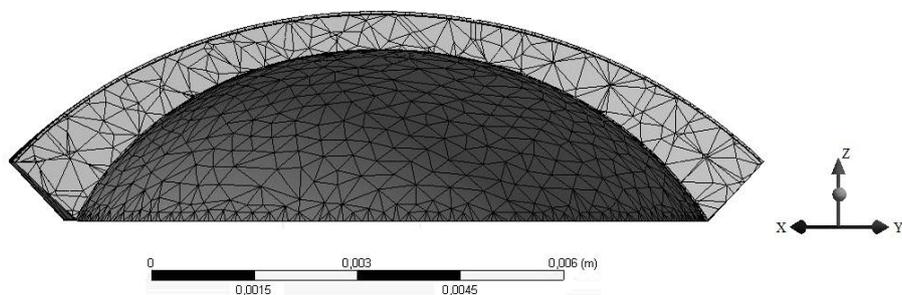


Рис. 1. Сечение модели роговицы глаза с нанесенной сеткой конечных элементов.

Цель операции - изменение кривизны роговицы. В случае коррекции миопии (близорукости) необходимо сделать роговицу более плоской – увеличить радиус кривизны в центре. При такой операции при помощи управляемого компьютером высокоточного эксимерного лазера удаляется выпуклый (в форме линзы) материал из средней части роговицы (стромы). В случае гиперметропии (дальнозоркости) необходимо уменьшить радиус кривизны роговицы, для этого при помощи лазера проводится удаление кольцевого слоя тканей стромы.

Проведены расчеты при различных геометрических параметрах оболочки. В частности, исследуется влияние изменения размеров и расположения удаляемого слоя при миопии и кольцевого слоя при гиперметропии на деформации и напряжения с целью определения наилучшей области удаления тканей стромы роговицы при проведении операции по коррекции зрения. Также в совокупности с изменением геометрических характеристик, проведен анализ влияния модулей сдвига и тангенциальных модулей упругости при растяжении-сжатии на поверхности на напряженно-деформированное состояние роговицы.

## Л и т е р а т у р а

1. Бауэр С.М., Воронкова Е.Б., Ермаков А.М., Качанов А.Б., Федотова Л.А., Изменение напряженно-деформированного состояния роговицы и показателей ВГД после лазерной коррекции гиперметропии // IV российский общенациональный офтальмологический форум. Москва: Издательство Апрель, 2013. С. 193-197

## Change of Stress-Strain State of the Cornea after Vision Correction Surgery

D.V. Franus

Saint-Petersburg State University, Russia

Transversally isotropic four-layer spherical shell of the cornea with variable thickness after refractive surgery, the removal of the ring segment of stroma, is simulated in a software system of finite-element analysis ANSYS.



# IX

ФИЗИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

---

PHYSICAL MECHANICS

# STRESS, STRAIN AND STRAIN-RATE IN THE SHOCK-INDUCED PROCESSES

**K.R. Abdullaev, T.A. Khantuleva**

*Saint-Petersburg State University, Russia*  
*E-mail: d1evas@rambler.ru, khan47@mail.ru*

Conventional consideration of the plane elastic-plastic waves is based on the notion of two-wave front consisting of elastic and plastic parts characterized by different stress-strain dependences. Within the model of ideal plasticity assuming the strain-rate neglected, a following stress-strain dependence ( $J-e$  respectively) for uniaxial deformation was derived in paper [1]

$$J = \rho_0 C_0^2 e^{elastic} + \sigma(e^{plastic}). \quad (1)$$

Here  $\rho_0 C_0^2 = K$  is the elastic modulus of volume compression, and  $\sigma$  determines a dependence of stress on plastic strain obtained from experiments on the simple tensile-compression of thin rods.

However, experiments on high-rate shock loading of solid materials [2] have shown that nonstationary waves are followed by relaxation processes related to a multi-scale energy exchange between different degrees of freedom and self-organization of new internal structures. Such transition dynamic processes should essentially depend on the strain-rate and loading pulse duration.

In the paper the gradual transition to the plastic deformation regime is considered on the base of nonlocal theory of nonequilibrium transport processes [3]. Unlike the conventional stress-strain dependence, the elastic modulus depending on the strain-rate vary during the transition. Basing on the new theory a relationship between stress, strain and strain-rate during high-rate deformation is derived to include the transition regime.

$$J = \rho_0 C_0^2 e + \rho_0 C_g^2 \dot{e} \frac{\tau}{2} \left( \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi}}{\tau} \left( \frac{e}{\dot{e}} - \theta \right) + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi} \theta}{\tau} \right). \quad (2)$$

In the relationship (1) stress and strain are related to a one spatiotemporal point, whereas in the expression (2) there appear typical times of retardation  $\theta$  and shear relaxation  $\tau$  (normalized to the loading time  $t_R$ ) which conditioned by inertial medium properties. The transition to the plastic regime goes faster at low values  $\tau, \theta$ , and slower at high values  $\tau, \theta$ . Under the long-time loading ( $t_R \rightarrow \infty, \tau \rightarrow 0$ ), the expression (2) results a dependence of the shear stress on the strain-rate  $P_g = \rho_0 C_g^2 \tau \dot{e} = \mu \dot{e}$  ( $\mu$  is the shear viscosity), which corresponds to hydrodynamic regime of deformation.

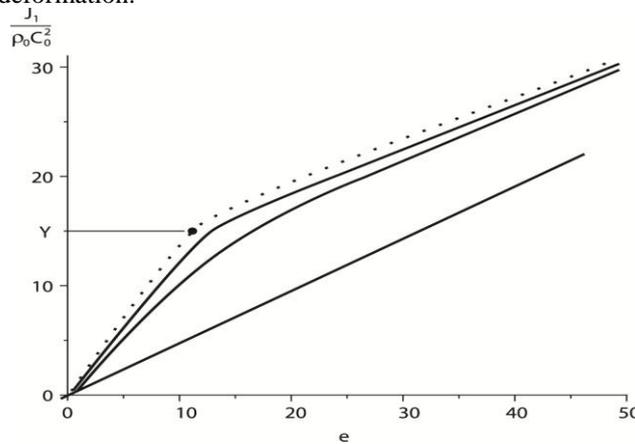


Рис. 1. Examples of the stress-strain dependence for semi-space ( $e$  normalized by  $\dot{e} t_R$ )

For short powerful shocks the inertial medium properties induce aftereffect and memory when the plastic regime begins after the shock impulse transfer. These effects fundamentally distinguish the dynamic processes from the quasi-static ones. The assumptions adopted in the paper [1] with respect to the strain separation into the elastic and plastic components and to the absence of the strain-rate influence on the deformation make the recalculation of the stress-strain dependence for rods to semi-space incorrect. Unlike quasi-static loading the shock-induced wave processes are essentially defined by the transition rate and the medium inertial properties.

[1] Wood D. Journal of Applied Mechanics. 1952. V. 19. No 4.

[2] Meshcheryakov Yu.I. et al. Phys. Rev. B. 2008. V. 78. P. 64301-64316.

[3] Khantuleva T.A. Nonlocal theory of nonequilibrium transport processes. SPb: Saint-Petersburg State Univ. 2013. 278 p.

# МОДЕЛЬ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРЕОХЛАЖДЕНИЯ МЕТАСТАБИЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЕЕ ПАДЕНИИ НА ТВЕРДОЕ ТЕЛО

**И.А. Амелюшкин**

*Центральный аэрогидродинамический институт, Жуковский (Моск. обл.), Россия  
E-mail: Amelyushkin\_Ivan@mail.ru*

Физико-математическое описание кристаллизации и адгезии переохлажденной жидкости к поверхности твердого тела – одна из нерешенных проблем механики многофазных течений и физики конденсированного состояния. Понимание физики и создание теоретической модели – математического описания кристаллизации и устойчивости метастабильных переохлажденных капель воды, взаимодействующих с поверхностью обтекаемого тела, необходимо для достоверных теоретических и численных исследований обледенения летательных аппаратов, а также для борьбы с этим опасным явлением.

В настоящей работе предложена оригинальная физико-математическая модель кристаллизации и критерий устойчивости метастабильного состояния переохлажденных капель при их взаимодействии с обтекаемым телом в аэрозольном потоке в процессе обледенения. Предлагаемая физико-математическая модель – уравнение, связывающее скорость цепной реакции кристаллизации  $V_C$  переохлажденной воды с массовой долей  $\alpha$  образующихся после прохождения фронта кристаллов льда имеет следующий вид:

$$\lambda_l \left[ \frac{\partial T_l}{\partial x} - \left( 1 + \alpha \frac{\rho_l}{\rho_s} \right)^n \frac{\partial T_s}{\partial x} \right] + \chi(\Delta T) = L\alpha\rho_l V_C.$$

Здесь  $\rho$  – плотность вещества,  $L$  – удельная теплота плавления льда,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности. Индексы  $l$  и  $s$  относятся к жидкой (liquid) и твердой (solid) фазам соответственно. Показатель степени  $n$  зависит от свойств жидкости, определяется экспериментально, и для воды был принят в настоящей работе  $n \approx 4$  на основе экспериментальных данных, собранных в монографии [1]. Последнее слагаемое в левой части уравнения  $\chi$  – плотность потока энергии при кристаллизации в виде электризации и излучения с межфазной границы лед-вода (индекс  $ls$ ), зависящая от степени переохлаждения  $\Delta T$  метастабильной жидкости.

На основании предложенной и обоснованной в настоящей работе физико-математической модели устойчивости переохлажденного состояния жидкости к механическим возмущениям получены оценки минимальных скоростей ударов переохлажденной каплей о поверхность обтекаемого тела, необходимых для зарождения цепной реакции – кристаллизации. Учтены размерные эффекты, связанные с характеристиками потенциалов парного взаимодействия молекул (на примере воды) и поверхностным натяжением жидкости, которое, вообще говоря, может быть выражено через эти характеристики [2]. Показано влияния скорости, размера каплей и свойств материала твердого тела на его устойчивость к обледенению.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13–01–00766.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Нугматулин Р.И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука. 1987. 464 и 360 с.
2. *Amelyushkin I.A., Stasenko A.L.* Dynamics of molecules in a supercooled water nanoparticle during the ice accretion on the aircraft surface // EUCASS-Paper. Flight Physics. 2014. V. 7.

## **Model of Crystallization and Stability of the Supercoolness of a Metastable Liquid Falling on a Solid Body**

**I.A. Amelyushkin**

*Central aerohydrodynamic institute, Zhukovsky, Russia*

Original models of crystallization and stability criteria of the metastable liquid were proposed for ice accretion on a solid body simulation. Theoretical and numerical calculations and estimations were made. Several mechanisms of crystallization were considered and taken into account.

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВУХФАЗНОГО ПОТОКА ПО РАССЕЯННОМУ ИЛИ ЗОНДИРУЮЩЕМУ ИЗЛУЧЕНИЮ

И.А. Амелюшкин

Центральный аэрогидродинамический институт, Жуковский (Моск. обл.), Россия

E-mail: Amelyushkin\_Ivan@mail.ru

Изменение характеристик зондирующего излучения, распространяющегося в дисперсных средах, несет богатую информацию о происходящих в них физических процессах. В работе рассмотрены способы определения, расчета и восстановления основных параметров двухфазных потоков по анализу рассеянного и поглощенного дисперсной фазой монохроматического излучения с целью повышения информативности экспериментальных исследований. Разработан метод решения обратной задачи, заключающийся в расчете полей скорости и других параметров несущей фазы (жидкости или газа) двухфазного потока по полю скорости движения в нём частиц на основании известных законов их поведения в потоках жидкости и газа, а также уравнений аэрогидромеханики. При этом предполагается, что вдали от рассматриваемой возмущенной области известны значения скорости, плотности и температуры фаз. Приведен анализ влияния погрешностей эксперимента на устойчивость и достоверность решения обратной задачи. Показана возможность повышения информативности методов диагностики потоков, основанных на анализе движения в нем частиц. Обработка экспериментальных данных о прохождении частиц сквозь косой скачок уплотнения показала преимущества новой технологии (по сравнению с [1]) расчета скорости и других характеристик газа по полю скорости движущихся в нем частиц. На рис. 1 показан пример соответствующего расчета: 0 – поле скорости газа: точное значение, 1 – поле скорости частиц в эксперименте, 2 – поле скорости газа, полученное при обработке экспериментальных данных без погрешностей, 3, 4 и 5 – то же, что 2, но при ошибках определения скорости, коэффициента сопротивления и радиуса частиц соответственно. На основании известных физико-математических моделей двухфазных потоков предложен новый критерий их скоростной неравновесности (отличия скорости частиц от скорости несущего их потока), позволяющий определить условия и области потока с заданной разностью скоростей фаз. Приведены результаты визуализации и исследования двухфазных потоков на установке ЦАГИ, имитирующей условия обледенения, с помощью лазерной плоскости прямых параллельных лучей. Использование такой плоскости (а не расходящегося «веера») существенно упрощает калибровку и обработку изображений рассеянного дисперсной фазой излучения (в лазерной плоскости), а также позволяет учесть ряд физических эффектов при решении обратной задачи перехода от интенсивности излучения к концентрации частиц, тем самым повышая качество экспериментальных исследований. Описаны и теоретически обоснованы новые возможности плоскостной лазерной нефелометрии – определения полей концентрации частиц (массовой, объемной и счетной) двухфазного потока по интенсивности рассеянного и поглощенного частицами излучения в лазерной плоскости. В отличие от [2] учтены эффекты ослабления излучения в двухфазном потоке и отражения от обтекаемого тела. Обобщен разработанный ранее алгоритм решения обратной задачи восстановления распределения массовой концентрации частиц в пространстве по интенсивности рассеянного излучения в лазерной плоскости на случай полидисперсного двухфазного потока.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13–01–00766.

## Л и т е р а т у р а

1. Koike S., Tamura T., Masua G. Influence of Drag Coefficients and Velocity Fluctuation on PIV Correction Method // AIAA 2009-75 Copyright. AIAA PIV 47<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting. Orlando. Florida. P. 1–17.
2. Findeisen J., Gnirß M., Damaschke N., Schiffer H.P., Tropea C. 2D – Concentration Measurements Based on Mie Scattering using a Commercial PIV system // 6th International Symposium on Particle Image Velocimetry Pasadena. California, USA, September 21–23, 2005, PIV'05 Paper.

## Restoration of the Two-phase Flow Parameters via Scattered Probe Radiation

I.A. Amelyushkin

Central aerohydrodynamic institute, Zhukovsky, Russia

Novel methods and numerical algorithms were developed in order to increase information from the experimental optical two-phase flow investigations.

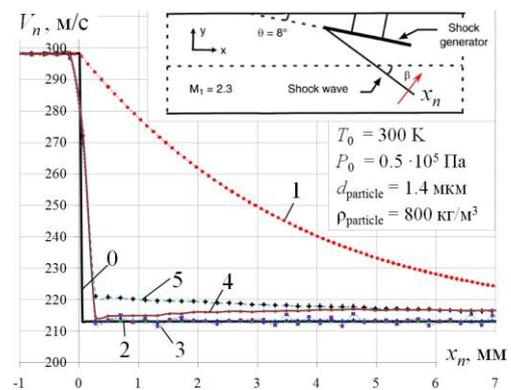


Рис. 1 Восстановление поля скорости газа по полю скорости движущихся в нем частиц

# НЕЛИНЕЙНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ ГАЗОВ ДЛЯ ПСЕВДОСТЕПЕННЫХ СЕЧЕНИЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Л.А.Бакалейников<sup>1</sup>, Э.А.Тропп<sup>1</sup>, Е.Ю.Флегонтова<sup>1</sup>, А.Я.Эндер<sup>1</sup>, И.А.Эндер<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: bakal.ammp@mail.ioffe.ru, fl.xiees@mail.ioffe.ru, andrei.ender@mail.ioffe.ru

При решении нелинейного уравнения Больцмана одной из основных трудностей является расчет интеграла столкновений (ИС), особенно его приходной части. При разложении функции распределения (ФР) по сферическим гармоникам ИС заменяется набором билинейных интегральных операторов с ядрами  $G_{l_1, l_2}^l(v, v_1, v_2)$ , зависящими лишь от модулей скоростей [1]. С использованием преобразования Лапласа были получены ядра  $G_{l, 0}^l$  для моделей твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул (Krook-Wu model) [2]. В частном случае  $l=0$  эти ядра совпали с ядрами, найденными ранее [3, 4]. До последнего времени аналитические выражения для ядер  $G_{0, 0}^0$  были известны только для этих двух моделей. В [5] эти ядра были построены для псевдостепенных сечений взаимодействия (то есть в предположении такой же зависимости сечения от относительной скорости, как и при степенном потенциале, и независимости сечения от угла рассеяния). В [6, 7] было показано, что ядра  $G_{l_1, l_2}^l$  связаны между собой рекуррентными соотношениями и могут быть найдены, если известно ядро  $G_{0, 0}^0$ . Это подчеркивает важность построения ядра  $G_{0, 0}^0$  для различных моделей взаимодействия.

Отметим, что интегралы с ядрами  $G_{l_1, l_2}^l$  в правых частях уравнений для коэффициентов разложения ФР имеют тот же вид, что и ИС в изотропном случае. Теперь, когда принципиально все ядра можно найти, разработка методов решения изотропной задачи становится особенно важной. Кроме того, решение этой задачи при различных начальных условиях представляет самостоятельный интерес [8].

В докладе проанализирована структура ядер ИС скалярного уравнения Больцмана, проведено их сравнение для ряда псевдостепенных сечений взаимодействия. Разработан алгоритм вычисления ИС для произвольных псевдостепенных сечений. Реализована численная процедура расчета временной релаксации сильно неравновесной ФР в скоростном интервале порядка 10 тепловых скоростей. Выполнен расчет процесса нелинейной однородной изотропной релаксации при различных начальных условиях, проведено сравнение с известным аналитическим решением в случае псевдомаксвелловских молекул и с результатами, приведенными в литературе.

## Л и т е р а т у р а

1. Эндер А.Я., Эндер И.А. Интеграл столкновений уравнения Больцмана и моментный метод. СПб: СПбГУ. 2003. 224 с.
2. Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю. // ПЖТФ. 2012. Т. 38. №1. С. 40-48.
3. Kugerl G. // ZAMP. 1989. V. 40. P. 816-827.
4. Ziff R.M. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 306-310.
5. Бакалейников Л.А., Тропп Э.А., Флегонтова Е.Ю., Эндер А.Я., Эндер И.А. // ЖТФ. 2015. Т. 85. №1. С. 10-14.
6. Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А. // ДАН. 2011. Т. 437. №5. С. 1-3.
7. Ender A.Ya., Ender I.A., Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu. // Europ. J. Mech. B-Fluid. 2012. V. 36. P. 17-24.
8. Sospedra-Alfonso R., Shizgal B.D. // 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. AIP Conf. Proc. 2012. V. 1501. P. 91-98.

## Nonlinear Gas Relaxation for Pseudo-Power Interaction Cross Section

L.A.Bakaleinikov<sup>1</sup>, E.A.Tropp<sup>1</sup>, E.Yu.Flegontova<sup>1</sup>, A.Ya.Ender<sup>1</sup>, I.A.Ender<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ioffe Institute, Saint-Petersburg, Russia

<sup>2</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

The problem of nonlinear isotropic homogeneous gas relaxation is solved for pseudo-power cross section in velocity range up to 10 thermal velocities at various initial conditions. The new analytical expression for the isotropic collision integral kernel and new algorithm of collision integral estimation are used in the calculations. The developed approach is a base for anisotropic distribution function evolution calculation.

# ОБ УРАВНЕНИИ СОСТОЯНИЯ РЕАЛЬНОГО ГАЗА В РАМКАХ КВАЗИХИМИЧЕСКОЙ КЛАСТЕРНОЙ МОДЕЛИ

А.В. Гелиев<sup>1,2</sup>, Ю.Е. Маркачев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е.Жуковского (ЦАГИ), Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия

E-mail: yuri\_markachev@mail.ru

В настоящее время единственной теоретически обоснованной формой состояния реального газа является вириальное уравнение. Однако ввиду ограничения сходимости вириального разложения, которое начинает становиться неудовлетворительным уже на стадии сжатого газа, полностью удовлетворительного описания состояния реального газа получить не удастся [1]. Другим подходом к получению уравнения состояния реального газа является использование квазихимической кластерной модели, построенной на квантово-статистических основах [2].

Это уравнение в первом приближении оказывается уравнением состояния для смеси идеальных газов и подчиняется закону Дальтона – давление в газе равно сумме парциальных давлений мономеров и кластеров, распределение мольных долей которых вычисляется с использованием квазиравновесной функции распределения кластеров по размерам. Константы равновесия реакций кластеризации вычислялись с помощью статистических сумм различных видов движения кластеров, необходимые для этого геометрические и энергетические характеристики кластеров определялись на основе квантово-химических расчетов *ab initio*. Оказывается, что в таком приближении показатель сжимаемости  $Z < 1$ , что не всегда совпадает с экспериментальными данными.

В настоящей работе вводится поправка на объем кластеров и взаимодействие их между собой, в качестве примера приведены расчеты для аргона, и поправки оцениваются, исходя из знания эффективного парного потенциала взаимодействия между атомами аргона [3]. В этом случае удастся добиться лучшего совпадения с имеющимися экспериментальными данными [4].

## Л и т е р а т у р а

1. Мейсон Э., Сперлинг Т. Вириальное уравнение состояния. М.: Мир. 1972. 280 с.
2. Артюхин А.С., Егоров Б.В. и др. Квазихимическая кластерная модель нуклеации. Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. СПб: Изд-во “ВВМ”. 2006. С. 309-320.
3. Ronald A.Aziz . A highly accurate interatomic potential for argon // J. Chem. Phys. 1993. V. 99. P. 4518-4525.
4. Tegeler Ch., Span R., Wagner W. A New Equation of State for Argon Covering the Fluid Region for Temperatures From the Melting Line to 700 K at Pressures up to 1000 MPa // J. Phys. Chem. Ref. Data. 1999.- V. 28. No 3. P. 779-850.

## About the Equation of State for Real Gas Within the Quasi-Chemical Cluster Model

A.V. Geliev<sup>1,2</sup>, Y.E. Markachev<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

Currently, the only theoretically valid form of equation of state for real gas is the virial equation. However, due to the limitations of convergence of the virial expansion a fully satisfactory description of state for real gas could not be obtained [1]. Another approach to obtain the equation of state for real gas is the use of quasi-chemical cluster model based on quantum-statistical description [2].

This equation, in first approximation is the equation of state for a mixture of ideal gases and obeys Dalton's law - the pressure in the gas is equal to the sum of partial pressures of monomers and clusters, the distribution of the molar fractions are calculated using the quasi-equilibrium distribution function of cluster size. The equilibrium constants of clusterization reactions was calculated using partition functions of different types of motions of the clusters, the necessary structure and energetic characteristics of clusters were determined on the basis of quantum-chemical *ab initio* calculations. It turns out that in this approximation, the measure of the compressibility  $Z < 1$ , which does not always coincide with the experimental data.

In the present work introduces a correction for the volume of the clusters and the interaction between them, as an example, the calculations for argon and necessary corrections are estimated from a knowledge of the effective pair interaction potential between atoms of argon [3]. In this case, it is possible to achieve better agreement with the available experimental data [4].

# ЭВОЛЮЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИОНОВ ПРИ ВКЛЮЧЕНИИ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. РАЗЛИЧНЫЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

И.А. Эндер<sup>1</sup>, А.Я. Эндер<sup>2</sup>, А.Б. Герасименко<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: andrei.ender@mail.ioffe.ru

Ранее нами было получено аналитическое решение задачи о временной эволюции функции распределения после резкого включения переменного электрического поля для резонансной перезарядки с постоянной частотой столкновений (СЕМ-модель) [1]. В докладе представлены результаты численного расчета для этой же задачи с использованием разработанного ранее нестационарного моментного метода для различных моделей взаимодействия. Были изучены модели с различной зависимостью сечения рассеяния как от энергии, так и от углов. Кроме того, было проанализировано влияние отношения масс ионов и атомов. Рассматривались малые значения параметра  $\alpha = \epsilon_0 / \omega$ , где  $\epsilon_0$  – безразмерная амплитуда напряженности, а  $\omega$  – безразмерная частота приложенного электрического поля. Расчет проводился в нестандартной нормировке, в которой безразмерная подвижность при постоянном поле при малых  $\epsilon_0$  равнялась единице. При решении моментным методом было использовано большое количество матричных элементов интеграла столкновения, нахождение которых стало возможным после построения рекуррентных процедур [2]. Были рассмотрены первое и второе приближения по  $\alpha$ . Показано, что первое приближение совпадает для всех моделей при любых частотах в области до двух тепловых скоростей; в области больших частот наблюдается полное совпадение для всех скоростей. Было установлено, что зависимость тока от времени оказалась универсальной и совпадающей с соответствующей зависимостью для СЕМ-модели. Универсальными также оказались зависимости полной энергии (момент второго приближения по  $\alpha$ ) от времени при  $\omega \gg 1$ . Однако, распределение полной энергии на продольную и поперечную составляющую оказалось зависящим от угловой части сечения рассеяния.

Одним из важных результатов является универсальность зависимости фазового сдвига тока относительно поля от частоты  $\Delta_E^j(\omega) = -\arctg(\omega)$ . Этот факт может быть использован в эксперименте, в котором будет проводиться измерение фазового сдвига тока относительно поля при малых значениях альфа. В результате такого эксперимента будет находиться  $\tau_{ef}$  и следовательно коэффициенты переноса (подвижность и диффузия) для заданной пары ионов и атомов.

## Л и т е р а т у р а

1. Эндер А.Я., Эндер И.А., Герасименко А.Б. Эволюция распределения ионов по скоростям после резкого включения периодического электрического поля. СЕМ-модель // ЖТФ. 2013. Т. 83. № 7. С. 6-15.
2. Эндер А.Я., Эндер И.А. Интеграл столкновений уравнения Больцмана и моментный метод. СПб: СПбГУ. 2003. 224 с.

## Evolution of non-stationary ion distribution function after the high-frequency AC field application. Different models of interactions

I.A. Ender<sup>1</sup>, A.Ya. Ender<sup>2</sup>, A.B. Gerasimenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Ioffe Institute Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russia

We have presented a numerical solution of the problem of the distribution function evolution after the AC field application. The problem was studied for small  $\alpha = \epsilon_0 / \omega$ . Here  $\epsilon_0$  – dimensionless amplitude and  $\omega$  is a dimensionless frequency of the applied electric field. The study was carried out for different interaction cross sections and different mass ratio of ions and atoms. It is shown that the time dependence of the current is general, i.e. does not depend on the nature of the interaction cross section. The phase shift between the current and the field proved to be identical  $\Delta_E^j(\omega) = -\arctg(\omega)$ . We have proposed to use this fact for the experimental determination of the effective collision frequency and transport coefficients – mobility and the diffusion coefficient.

# GAS-DYNAMIC EQUATIONS FOR REACTIVE GAS MIXTURES: PROBLEMS AND SOLUTIONS

E.G. Kolesnichenko<sup>1</sup>, Yu.E. Gorbachev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Moscow State University, Institute for Mechanics, Russia

<sup>2</sup>Coddan Technologies LLC, Saint-Petersburg, Russia

E-mail: egkolesnichenko@gmail.com, yuriy.gorbachev@gmail.com

Main issues of contemporary physical-chemical gas-dynamics are discussed in [1]. Here we are going to overview some aspects of the problem and describe the newest results.

Derivation of gas-dynamic equations for rarefied gases is based on the solution of the Wang Chang-Uhlenbeck equation for the one-particle distribution function. The intermolecular processes connected, for instance, with the redistribution of internal energy between the internal degrees of freedom of the isolated molecule are not taken into account in these equations. The kinetic equation for the elements of the density matrix can be reduced to the generalized Wang Chang-Uhlenbeck equation with an additional collisional term [2]. This term is Pauli-like, but containing the Lorentz function instead of  $\delta$ -function ( $\delta$ -function is meaningless where there is a discrete spectrum). This term at low-level molecule excitation is negligible, while for highly-excited molecules, for which the energy interlevel distance is comparable with the broadening of the spectral lines caused by collisions, the Lorentz function behaves as the internal energy conservation  $\delta$ -function. Thus the irreversible behavior of the finite system (separated molecule) is caused exactly by the intermolecular collisions. For solving obtained equation we propose the method described in [3].

While neglecting the unimolecular processes mentioned above, methodology of paper [3] was applied for solving the generalized Boltzmann equation for reactive gas mixtures. In [3] the general expressions for reaction rates for Euler equations were derived. Those expressions have an additive structure containing the equilibrium rate and two additional terms responsible for spatially homogeneous and spatially inhomogeneous non-equilibrium effects respectively. The last term is proportional to the gas-dynamic velocity divergence.

General expressions for the reaction rates for one-temperature case were derived in [4]. What is important, is that the corrections to the reaction rates responsible for the spatially homogeneous case, does not impact the chemical equilibrium, i.e. the chemically equilibrium values of species concentrations for both equilibrium and spatially-homogeneous non-equilibrium cases coincide. In contrast, the inhomogeneous effects leads to the shift of the chemical equilibrium, i.e. traditionally used values for equilibrium concentrations of species don't lead to the vanishing of the reaction rates. Both corrections are the complex functions of the species concentrations, thus the concept of the introduction of the rate constants fails.

For the cut-off harmonic oscillator model within the two-temperature approximation, the exact explicit analytical expressions for the reaction rates and relaxation rates were obtained assuming the translational and rotational decrease of freedom are Maxwell-Boltzmann, so that the vibrational non-equilibrium is responsible for the non-equilibrium effects in the reaction and relaxation rates [1]. For this specific model these rates can be represented as a linear combination of corresponding equilibrium rates.

Neglecting the perturbation of the Maxwell-Boltzmann distribution for translational-rotational decrease of freedom the model expressions for the generalized relaxation rates were obtained [5]. Strong deviation of chemical reaction rates from their equilibrium values in vibrationally non-equilibrium gas was shown. The influence of non-equilibrium vibrational distributions, which are caused by the chemical reactions, on the chemical reactions themselves was studied. Strong correlation between parallel reactions (when one molecule reacts with a number of others) is shown. The situation when one reaction blocks another one is described. Such a behavior of the reaction rates means the mass action law breakdown.

Above discussed as well as the data from [6] changes our view dramatically on the methodology of getting data on chemical reaction rates from experiments and on the physical-chemical gas-dynamics as a whole.

## References

1. Kolesnichenko E.G., Gorbachev Yu.E. Physical-chemical gas-dynamics: challenges and solutions // JNAIAM. 2014 (accepted for publication).
2. Kolesnichenko E.G., Gorbachev Yu.E. Chemical Gas-dynamics Beyond Boltzmann's kinetics // 29th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. July 13-18, 2014, Xi'an, China, Ed: Jing Fan. Abstract Book. P. 146-147.
3. Kolesnichenko E.G., Gorbachev Yu.E. Gas-dynamic equations for spatially inhomogeneous gas mixtures with internal degrees of freedom. I.General theory // Appl. Math. Modelling. 2010. V. 34. P. 3778-3790.
4. Kolesnichenko E.G., Gorbachev Yu.E. Gas-dynamic equations for spatially inhomogeneous gas mixtures with internal degrees of freedom. I.General theory // Appl. Math. Modelling. 2012. V. 37. P. 5304-5314.
5. Kolesnichenko E.G., Gorbachev Yu.E. Chemical reactions in non-equilibrium gas mixtures and mass action law breakdown // Shock Waves. 2013. V. 23. P.635-648.
6. Kustova E.V. Report on the Seminar for Fundamental Problems of Aerodynamics. 10 Dec., 2013.

# ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ НАНО- И МИКРОЧАСТИЦ ВБЛИЗИ ЭМИТТИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю.Ф. Гунько<sup>1</sup>, Н.А. Гунько<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: yurigunko@mail.ru, nataliagunko@gmail.com

В целом ряде явлений, связанных с переносом заряженных частиц, наряду с частицами основного или «несущего» потока могут присутствовать вкрапленные в него заряженные частицы нано- и микрометров. Подобная ситуация может иметь место в вакуумных приборах, устройствах электрической очистки, вблизи поверхности космических аппаратов, искусственных спутников Земли и безатмосферных небесных тел.

Естественно, характер движения указанных частиц определяется как их свойствами, так и свойствами частиц основного потока, а также электрических и магнитных полей. Сами поля, в первую очередь электрические, могут носить самосогласованный характер. Расчет этих полей является трудоемким и выполняется при целом ряде предположений о свойствах переносимых частиц, поверхностей, формирующих и ограничивающих основной поток, наличия внешних полей и т.д.

В данной работе на основе решения, приведенного в [1], исследуется движение частиц в приповерхностном слое. Показано, что среди решений, определяющих закон движения частиц, имеются решения, выраженные полиномами третьей степени. В частности, для частиц, стартующих с поверхности с нулевой начальной скоростью:

$$x = kt^3, \quad (1)$$

где  $k = \frac{\pi}{3} j_0 \cdot (2|Q|/M)^{3/2} \cdot (\frac{m}{2e})^{1/2},$

$x$  – координата в направлении перпендикулярном к поверхности,

$e$  и  $m$  – заряд и масса частиц, относящихся к основному потоку,

$Q$  и  $M$  – заряд и масса примесных частиц,

$j_0$  – плотность тока основных частиц.

Решения в виде полиномов третьей степени получены и для ряда других случаев.

Показано, что при наличии вблизи поверхности экранирующего слоя, возможен захват нано- и микрочастиц. Сами частицы совершают движения, близкие к периодическим.

При наличии в экранирующем слое силовых полей с малой горизонтальной составляющей возможен дрейф частиц вдоль эмиттирующей поверхности.

## Л и т е р а т у р а

1. Гунько Ю.Ф., Колесникова Э.Н. Структура течения вблизи плоской поверхности в сильно разреженной плазме // Модели неоднородных сред. Физическая механика. Вып. 8. СПб: С.-Петерб. гос. ун-т. 2004. С. 63-95.

## Motion of Charged Nano-and Microparticles Near an Emitting Surface

Yu.F. Gunko<sup>1</sup>, N.A. Gunko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Ioffe Physical Technical Institute Russian Academy of Science, Saint-Petersburg, Russia

In this presentation, the motion of charged nano- and microparticles near a plain emitting surface is studied. Solutions for the particle motion are found in the form of a third-order polynomial. In the presence of a screening layer near the surface, the capture of particles can occur. In such a case, the particle drift along the emitting surface can also occur due to a small horizontal component of the force field.

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ТОНКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ОБРАЗЦОВ ИЗ МЕДИ И АЛЮМИНИЯ МАГНИТНО-ИМПУЛЬСНЫМ МЕТОДОМ

**Н.А. Гунько<sup>2</sup>, Ю.Ф. Гунько<sup>1</sup>, О.К. Зайченко<sup>1</sup>, А.А. Лукин<sup>1</sup>, В.А. Морозов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

<sup>2</sup>*Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Россия*

*E-mail: yurigunko@mail.ru, nataliagunko@gmail.com*

Представлены и проанализированы 3 схемы с различным временем нагружения кольцевых образцов из меди и алюминия в виде тонких лент магнитно-импульсным методом. Сделана оценка пределов применимости электрических схем, собранных на сосредоточенных элементах. Показаны и реализованы возможности существенного укорочения периода гармонического и времени импульсного нагружения. Проведен численный расчет изменения электрического тока в кольце. Разработаны и применены пьезоэлектрические преобразователи для измерения импульсных напряжений в кольцах. Проведен анализ полученных экспериментальных результатов.

## **Deformation and Fracture of Thin Ring Samples of Copper and Aluminum by Magnetic Pulse Method**

**N.A. Gunko<sup>2</sup>, Y.F. Gunko<sup>1</sup>, O.K. Zaychenko<sup>1</sup>, A.A. Lukin<sup>1</sup>, V.A. Morozov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Saint-Petersburg State University, Russia*

<sup>2</sup>*Ioffe Institute, Saint-Petersburg, Russia*

Three circuits with different time loading of ring samples of copper and aluminum in the form of thin strips by magnetic pulse method were presented and analyzed. The estimation of the applicability of electrical circuits composed by lumped elements was estimated. Possibilities of the significant shortening of the period of time harmonic and impulsive loading was shown. The numerical calculation of the change of the electric current in the ring was performed. The piezoelectric transducers for measuring the pulse strain in the rings was Developed and applied. The analysis of the experimental results was carried out.

# О ВЛИЯНИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ В СИСТЕМЕ «КОМПАКТНЫЙ ИСТОЧНИК – СФЕРИЧЕСКИЙ ОТРАЖАТЕЛЬ» НА СВОЙСТВА ОТРАЖАЕМОГО СИГНАЛА

А.В. Дементьев

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: a.dementiev@spbu.ru

Рассмотрена модельная система, которая состоит из 1) компактного источника, вращающегося вокруг своей оси с периодом  $P$ ; 2) сферического экрана радиуса  $R$ , расположенного на расстоянии  $r$  от источника; 3) наблюдателя, удалённого от источника и экрана на расстояние  $a$ . Размеры источника малы по сравнению с  $R$ ,  $r$  и  $a$ , что позволяет считать его точечным. Излучение источника сосредоточено в пределах ограниченного телесного угла (можно сказать, что источник излучает подобно вращающемуся маяку). Взаимное расположение экрана и диаграммы направленности (ДН) источника таково, что при вращении источника ДН пробегает по поверхности экрана так, что на все точки экрана, с которых источник находится в прямой видимости, излучение падает в виде импульсов с периодом  $P$ .

Процесс отражения предполагается линейным. Это позволяет рассматривать отражение падающих импульсов с произвольным профилем следующим образом. Сначала находится функция  $h(t)$ , где  $t$  – время, описывающая профиль отражённого импульса в случае очень короткого  $\delta$ -образного падающего импульса. Импульс  $h(t)$  имеет уже конечную длительность по времени вследствие того, что конечны линейные размеры отражателя. Падающий импульс произвольного профиля  $s(t)$  представляется в виде соответствующей суммы  $\delta$ -импульсов, которые в силу линейности отражаются от поверхности экрана независимо друг от друга. При этом профиль отражённого импульса даётся свёрткой  $h(t)$  и  $s(t)$  [1].

В работе [2] показано, что в данной системе свойства отражённых импульсов – их профиль и моменты прихода к наблюдателю – существенным образом зависят от соотношения между временем прохождения излучением расстояния, равного диаметру экрана-шара, и временем прохождения ДН по поверхности экрана. При этом в указанной работе предполагалось, что местоположения источника и экрана не меняются, а также нет вращения экрана. Кроме того, считалось, что каждая малая площадка поверхности экрана мгновенно отражает всё падающее на неё излучение и её яркость оказывается одинаковой во всех направлениях. В настоящем докладе исследуется, каким образом изменяются свойства отражённых импульсов, если допустить, что 1) экран и источник движутся друг относительно друга по эллиптической орбите (например, под действием силы гравитации); 2) экран вращается вокруг некоторой оси, проходящей через его центр; 3) время отражения поверхностью экрана конечно.

Анализируется возможность применения полученных результатов в астрофизике при изучении эффекта отражения в двойных системах 1) с рентгеновскими пульсарами, излучающими за счёт аккреции вещества компаньона; 2) с пульсарами, излучающими за счёт своей кинетической энергии вращения.

## Л и т е р а т у р а

1. Avni Y., Bahcall J.N. Short-time optical variability of X-ray sources // *Astrophysical Journal*. 1974. V. 191. P. 221-230.
2. Dementyev A.V. On some features of reflection of radiation of the source rotating about its axis by the spherical screen // *Vestnik of St. Petersburg University. Series 1*. 2014. V. 1(59). Issue 3. (In press).

## On the Influence of the Rotational Movements in the System "Compact Source – Spherical Reflector" on the Properties of the Reflected Signal

A.V. Dementyev

Saint-Petersburg State University, Russia

The paper deals with the model system representing: 1) a compact source rotating about its axis and radiating in the limited solid angle (like a lighthouse); 2) a spherical reflective screen. The properties of the reflected pulses substantially depend on the correlation between the time when the radiation passes the distance which is equal to the diameter of the sphere, and the time when the source's beam runs over the surface of the screen. In this paper the influence of some factors on the reflected signal is taken into account. They are 1) rotation of the screen, 2) orbital movement of the source and the screen, and 3) finite time of the reflection of radiation by the surface of the screen. The ways of possible application of the obtained results to the binary systems with pulsars emitting X-ray radiation are analyzed.

# О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПЛАЗМЕННОГО КАНАЛА НА ДИНАМИКУ ИОННОЙ ШЛАНГОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Е.К. Колесников<sup>1</sup>, А.Г. Зеленский<sup>2</sup>, А.С. Мануйлов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

<sup>2</sup>Воскресенский филиал Российского нового университета, Россия

E-mail: kolesnikov\_evg@mail.ru, zel-alex@mail.ru, man06@mail.ru

К числу новых перспективных методов транспортировки релятивистских электронных пучков (РЭП) в газоплазменных средах относится метод, основанный на использовании для транспортировки электронного потока искусственного плазменного канала, создаваемого в результате ионизации нейтральной компоненты фонового газа потоком излучения вспомогательного ультрафиолетового лазера [1].

Предельные дистанции транспортировки РЭП по искусственному плазменному каналу определяются развитием целого комплекса динамических процессов, приводящих к постепенному разрушению пучка.

Основная причина возникновения ионной шланговой неустойчивости (ИШН) при транспортировке РЭП в режиме ионной фокусировки обусловлена инерционным отставанием ионного канала относительно поперечных колебаний пучка. Кроме того, равная по величине и противоположная по направлению сила будет действовать на канал со стороны пучка, что приведет к поперечному смещению ионного канала. В результате пучок и канал начинают совершать нарастающие по амплитуде поперечные колебания, что и приводит к развитию указанной неустойчивости [1-4].

В данной работе исследуется влияние различных параметров прямолинейного и периодического по плотности плазменных каналов на динамику ионной шланговой неустойчивости РЭП.

С помощью модели распределённых масс [1, 2] найдены условия, при которых ионная шланговая неустойчивость не препятствует распространению пучка на расстояния порядка 100 бетатронных длин волны пучка по прямолинейному периодическому по плотности плазменному ионному каналу.

## Л и т е р а т у р а

1. *Buchanan H.L.* Electron beam propagation in the ion-focused regime // *Phys. Fluids*. 1987. V. 30. No 1. P. 221-231.
2. *Lee E.P.* Resistive hose instability of a beam with the Bennett profile // *Phys. Fluids*. 1978. V. 21. No 8. P. 1327-1343.
3. *Зеленский А.Г., Колесников Е.К.* Численное моделирование развития ионной шланговой неустойчивости РЭП, распространяющегося по кусочно-прямолинейному плазменному каналу // *ЖТФ*. 1995. Т. 65. № 5. С. 188-190.
4. *Колесников Е.К., Мануйлов А.С., Зеленский А.Г.* Динамика релятивистских электронных пучков в режиме ионной фокусировки. Воскресенск: Позитив. 2013. 104 с.

## On Some Features of the Influence of Parameters on the Behavior of the Plasma Channel Ion Hose Instability of a Relativistic Electron Beam

Е.К. Kolesnikov<sup>1</sup>, A.G. Zelenskiy<sup>2</sup>, A.S. Manuilov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Voskresensk Branch of Russian New University, Russia

The dynamics of a relativistic electron beam propagating in an ion channel with a periodically varying density is considered. The behavior of the ion hose instability at different parameters of the beam-ion channel system is studied using the spread mass model. Conditions are determined under which the ion hose instability does not hinder the beam propagation over distances on the order of 100 betatron lengths of the beam.

# ОБ ОБЛАСТЯХ ПРИМЕНИМОСТИ ДРЕЙФОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИКЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В СУПЕРПОЗИЦИИ ДИПОЛЬНОГО И ОДНОРОДНОГО МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

**Е.К. Колесников, Г.Н. Ключников**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: evgkolesn@yandex.ru, gklyushnicov@yandex.ru*

Рассмотрен вопрос об областях применимости дрейфовых уравнений движения в задаче о динамике заряженной частицы в суперпозиции дипольного магнитного поля и однородного магнитного поля, параллельного магнитному моменту диполя. Известно, что указанная модель может быть использована для описания магнитного поля Земли на достаточно больших расстояниях от центра Земли. Из необходимых для применимости дрейфового приближения условий слабой неоднородности магнитного поля выведена система неравенств, определяющая область применимости дрейфового приближения. С использованием указанной системы для электрона с фиксированной энергией, движущегося в магнитном поле Земли, построены области применимости дрейфовых уравнений для различных значений однородного поля. Исследован вопрос о том, при каких значениях кинетических энергий электрона силовая линия суперпозиционного поля целиком лежит в области применимости дрейфовых уравнений движения. Показано, что для фиксированного значения однородного магнитного поля силовая линия, вдоль которой движется ведущий центр, полностью лежит в области применимости только в том случае, если значение энергии меньше некоторого порогового значения.

## **Л и т е р а т у р а**

1. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика. Основные принципы. М.: Мир. 1967. 260 с.
2. Шалимов В.П., Швачунов И.Н. Изучение движения заряженных частиц в поле магнитного диполя, находящегося во внешнем магнитном поле, методом Штермера. I // Космические исследования. 1966. Т. IV. Вып. 2. С. 208-220.
3. Колесников Е.К., Филиппов Б.В. Некоторые задачи эволюции заряженных частиц в поле магнитного диполя. Л.: Изд. ЛГУ. 1974. 72 с.
4. Lemaire J.F. The effect of a southward interplanetary magnetic field on Stormer's allowed regions // Space Res. 2003. V. 31. No 5. P. 1131-1153.

## **About Drift Approach Applicability Regions in the Problem for Dynamics of a Charge Particle in a Superposition of Dipole and Uniform Magnetic Fields**

**E.K. Kolesnicov, G.N. Klyushnicov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

As is known, the magnetic field of the Earth can be considered approximately as a superposition of dipole and uniform magnetic fields, and the dipole's magnetic moment is either parallel or antiparallel to the induction of the uniform field. Thus, the problem concerning the dynamics of the charged particle in the magnetic field of the Earth is reduced to that of the dynamics of the charged particle in the superpositional field. The paper is devoted to the drift approach applicability regions for superpositional field movement. With use of inequalities that are deduced from conditions of weak heterogeneity such regions are constructed. For an example, the movement of an electron in the earth's magnetic field is considered.

# ВЛИЯНИЕ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ РАДИУСА РЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА НА ДИНАМИКУ ИОННОЙ ШЛАНГОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ТРАНСПОРТИРОВКЕ ПУЧКА В РЕЖИМЕ ИОННОЙ ФОКУСИРОВКИ

**Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: kolesnikov\_evg@mail.ru, man06@mail.ru*

В рамках модели «жесткого» пучка рассмотрена задача о влиянии временной модуляции характерного радиуса релятивистского электронного пучка (РЭП) на динамику ионной шланговой неустойчивости (ИШН) в случае транспортировки пучка вдоль предварительно созданного плазменного канала в режиме ионной фокусировки [1-3]. Физической причиной развития ИШН РЭП является инерционное отставание поперечных колебаний канала более тяжелых ионов (по сравнению с электронами пучка) относительно соответствующих колебаний РЭП. Показано, что временная зависимость характерного радиуса РЭП может существенно изменить пространственную динамику указанной неустойчивости.

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Buchanan H.L.* Electron beam propagation in the ion-focused regime // *Physics of Fluids*. 1987. V. 30. No 1. P. 221-231.
2. *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* Стабилизирующие факторы при развитии шланговой неустойчивости релятивистского электронного пучка в режиме ионной фокусировки // *Радиотехника и электроника*. 1992. Т. 37. № 4. С. 694-699.
3. *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* Определение конечного равновесного радиуса неподстроенного к равновесным условиям релятивистского электронного пучка при транспортировке в режиме ионной фокусировки // *Журнал технической физики*. 2013. Т. 83. № 3. С. 118-122.

## **Influence of the Relativistic Electron Beam Radius Time Dependence on the Development of a Ion Hose Instability in the Ion Focused Regime**

**E.K. Kolesnikov, A.S. Manuilov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

Within framework of the “rigid” beam model the problem of the influence of a relativistic electron beam (REB) radius time modulation on the ion hose instability dynamics is investigated at the beam transportation in the ion focused regime. It is shown that the beam radius time profile can appreciably influence on the REB’s ion hose dynamics.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ИНИЦИИРОВАНИЯ ЭНЕРГОНАСЫЩЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРОДУКТАМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЗРЫВА ПРОВОДНИКА

В.А. Морозов<sup>1</sup>, Г.Г.Савенков<sup>2</sup>, А.А. Лукин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный технологический институт  
(технический университет)

E-mail: Viktor.Morozov@math.spbu.ru, sav-georgij@yandex.ru, anton\_lukin@mail.ru

Проведено экспериментальное исследование воздействия электроразрядной плазмы, образующейся при электрическом взрыве медного проводника диаметром 80 мкм, на различные по физико-химическим свойствам энергонасыщенные материалы.

Составы на основе пикрата калия, свинцового сурика и баллиститная композиция СБК-3, которая имеет очень низкую скорость горения 1.6 мм/с, помещались в контейнеры из оргстекла.

Начало процесса плавления металла проводника определяли по скачку на осциллограмме тока. Момент времени, соответствующий пику сигнала после процесса плавления, принимался за момент взрыва проводника.

Представлены результаты по зажиганию трех составов. Отмечено, что процессы, происходящие при воспламенении составов, качественно и количественно различаются, но составы воспламеняются стабильно.

На основе анализа осциллограмм тока констатируется, что зажигание составов происходит не после электрического взрыва проводника, а на стадиях нагрева материала (меди) до точки плавления, плавления и нагрева жидкого металла.

Дана оценка скорости горения составов по зависимости  $u = d / 2t$ , где  $d = 5$  мм – внутренний диаметр контейнера,  $t$  – время горения каждого из составов.

Из полученных результатов экспериментов можно сделать вывод, что воспламенение составов осуществляется за счет химически активных, нагретых до температуры  $\sim 10^4$ К частиц плазмы, фильтрующихся из области высокого давления и поджигающих каждую частицу состава. В этом случае мы имеем дело не с поверхностным, а с объемным горением заряда, помещенного внутрь контейнера.

## Investigation of Ignition of Energy-Storage Materials by Product of Electrical Explosion of Conductors

V.A. Morozov<sup>1</sup>, G.G. Savenkov<sup>2</sup>, A.A. Lukin<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Saint-Petersburg State University, Russia

<sup>2</sup>Saint-Petersburg State Technological Institute (technical university), Russia

An experimental study of effects of discharge plasma produced by electrical explosion of copper wire with a diameter of 80 microns on a energy-storage materials with various physical and chemical properties was carried out.

Results on the ignition of three compositions were presented. It is noted that the processes occurring both qualitatively and quantitatively different, but the compositions are ignited stable. The estimation of the burning rate of the compositions by dependence  $u = d / 2t$ , where  $d = 5$  mm – inner diameter of the container,  $t$  – the burning time of the compositions, was given.

From these experimental results it can be concluded that the ignition of composition is carried out by chemically active particles of the plasma heated to a temperature of  $10^4$ К. These particles filter from the high pressure region and igniting particles of composition. In this case we are dealing with volume combustion of charge placed inside the container.

# ФИЗИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И ТЕПЛОФИЗИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗОДИСПЕРСНОЙ СТРУИ С ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ

Г.В. Моллесон<sup>1</sup>, А.Л. Стасенко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

E-mail: stasenko@serpantin.ru, molleson@yandex.ru

Экспериментальные исследования воздействия на твердое тело струи газа, несущей диспергированную фазу, выполненные, в частности, на газодинамических стендах ЦАГИ [1, 2], обнаружили богатый набор сопровождающих физических явлений.

В настоящей работе основное внимание уделено различным режимам теплового воздействия частиц. В исследованиях [3, 4] были предложены математические модели процессов, предшествующих попаданию частиц на тело, с учетом оригинальной эвристической теории отскока и предельных случаев взаимодействия частиц друг с другом (бесстолкновительный и диффузионный режимы).

Осмысление результатов упомянутых экспериментов привело к заключению, что вследствие широкого массового спектра частиц различные фракции по-разному взаимодействуют с обтекаемым телом, что вызывает необходимость моделировать разнообразные режимы: отскок, дробление, образование псевдосжиженного слоя у твердой обтекаемой поверхности. В частности, последний режим не дает возможности разделить тепловой поток от газа и диспергированной фазы.

Приведены соответствующие математические модели и результаты численных исследований. Сравнение с измеренными значениями тепловых потоков позволило не только обосновать адекватность этих моделей, но и восстановить значения параметров, которые трудно измерить экспериментально. Последняя процедура относится к решению обратных задач [5], характеризующихся неединственностью результатов.

Численные исследования на холодных потоках ( $T_0 = 290$  К) моделировались на сопле с  $M = 3.8$  для частиц окислов кремния  $\text{SiO}_2$  (кварца) и алюминия  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (корунда), а также меди с фиксированным радиусом 30.5 мкм. Обтекаемые тела – медные шары радиусом 25 и 8 мм, расположенные на расстоянии радиуса среза сопла до точки торможения. Горячие струи ( $T_0 = 1600$  К) при обтекании торца цилиндра моделировались на сопле с  $M = 2.25$ . Численно изучено влияние на тепловые потоки начальных значений массовой доли частиц  $\text{SiO}_2$  ( $\epsilon^0 = 3\text{--}50\%$ ) и их радиуса (13.5, 30.5 и 50 мкм).

Результаты могут быть использованы для предсказания тепловых режимов летательного аппарата, быстро движущегося в запыленных атмосферах планет, в вулканических выбросах, а также в водно-кристаллических облаках Земли.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 13-01-00766.

## Литература

1. Василевский Э.Б., Осипцов А.Н., Чирихин А.В., Яковлева Л.В. Теплообмен на лобовой поверхности затупленного тела в высокоскоростном потоке, содержащем малоинерционные частицы // ИФЖ. 2001. Т. 74. № 6. С. 34-42.
2. Кудин О.К., Нестеров Ю.Н., Токарев О.Д., Флакман Я.Ш. Экспериментальное исследование натекания высокотемпературной струи запыленного газа на преграду // Ученые записки ЦАГИ. 2013. Т. XLIV. № 6. С. 105-115.
3. Моллесон Г.В., Стасенко А.Л. Кинетически-тепловое воздействие газодисперсной сверхзвуковой струи на осесимметричное тело // ТВТ. 2014. Т. 52. № 6. С. 65-77.
4. Стасенко А.Л. Коэффициенты восстановления скорости частиц при отражении от поверхности твердого тела // ИФЖ. 2007. Т. 80. № 5. С. 38-44.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1979. 286 с.

## Physical Mechanics and Thermophysics of the Gas– Particle Jet Interaction With a Solid Body

G.V. Molleson<sup>1</sup>, A.L. Stasenko<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

Physico-mathematical model of gas–particle axisymmetric jet impinged upon a surface, and the corresponding numerical code are derived. A wide range mass spectrum of the particulates is taken into consideration. A comparison with the experiments of other investigators has proved the validity of the derived theoretical models.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ОБРАЗЦА В АТОМНОЙ ЗОНДОВОЙ ТОМОГРАФИИ И ПОЛЕВОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ МИКРОСКОПИИ

К.А. Никифоров

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: knikiforov@apmath.spbu.ru

В работе представлена математическая модель кристаллической структуры эмиттера, являющегося объектом исследования в атомной зондовой томографии и в полевой электронной микроскопии [1]. Электронные, механические и другие свойства образца, имеющего форму острия с радиусом кривизны при вершине порядка десятков нанометров, рассматриваются данными методами на основе полевой десорбции и эмиссии (электронной или ионной). Прикладываемое сильное электрическое поле одновременно выполняет генерирующую, фокусирующую, ускоряющую и транспортную функции. Поэтому многомасштабное моделирование свойств образца, включающее аппроксимацию его формы на микро-, мезо- и наноуровне, вычисление плотности атомной упаковки и размеров кристаллографических граней является актуальной прикладной задачей и применяется для интерпретации результатов натурального эксперимента.

Представленные вычислительные алгоритмы и программное обеспечение позволяют моделировать образцы с формой не только полусферы на цилиндре [2], но и сферы на конусе [3, 4] (рис. 1), и фигур вращения второго порядка [5].

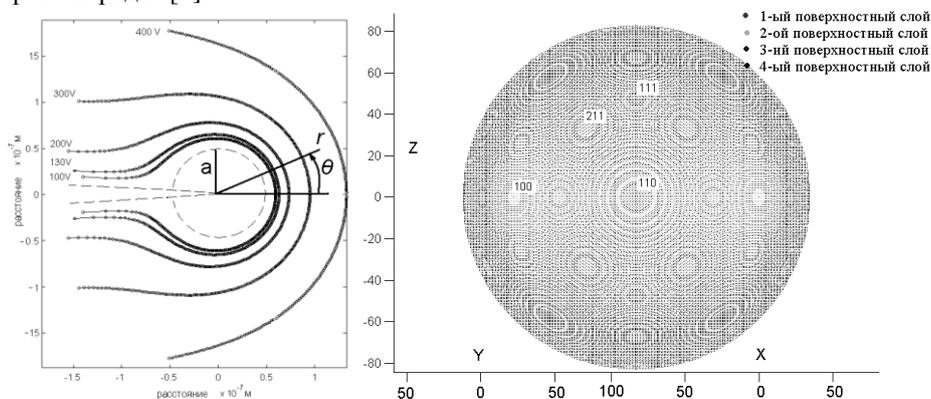


Рис. 1. Возможные аппроксимации формы эмиттера в виде эквипотенциальных поверхностей электрического поля, создаваемого заряженным конусом со сферой на вершине (слева). Модель структуры поверхности образца, показаны атомы поверхностных слоев различной глубины.

## Л и т е р а т у р а

1. Gault B., Moody M.P., Cairney J.M., Ringer S.P. Atom Probe Microscopy. Heidelberg: Springer. 2012. 396 p.
2. Oberdorfer Ch., Eich S.M. Schmitz G. A full-scale simulation approach for atom probe tomography // Ultramicroscopy. 2013. V. 128. P. 55-67.
3. Никифоров К.А., Егоров Н.В. Моделирование структуры поверхности и численный расчет плотности тока полевого эмиссионного металлического катода // Вестник С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. 2006. № 2. С. 39-45.
4. Никифоров К.А., Егоров Н.В., Шен Ч.-Ч. Реконструкция поверхности полевого электронного эмиттера // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009. № 10. С. 100-106.
5. Nikiforov K.A., Krasnova A.A. Model of field electron emitter surface structure // 2014 Tenth International Vacuum Electron Sources Conference (IVESC). St. Petersburg: IEEE, 2014. P. 148-149.

## Simulation of Structure of Sample in Atom Probe Tomography and Field Electron Microscopy

К.А. Nikiforov

Saint-Petersburg State University, Russia

Atomistic mathematical modeling and computer simulation of emitter in atom probe tomography [1, 2] and field emission microscopy includes optimal approximation for the emitter shape based on digital image processing and curvilinear regression. Emitter tip's crystal faces are modeled during study of the surface atoms environment geometry [3-5] and other electronic and mechanical properties are simulated.

# РОЛЬ ДИСПЕРСИОННЫХ ЭФФЕКТОВ И ЗАПАЗДЫВАНИЯ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

**Э.В. Прозорова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия  
E-mail: prozorova@niimm.spbu.ru*

Имеется несколько теорий, уточняющих классические законы сохранения механики сплошной среды и кинетической теории. В работе рассматриваются эффекты запаздывания и дисперсионные, т.е. рассматривается влияние нелокальности во времени и в пространстве и влияние момента количества движения. Каждый из эффектов рассматривается отдельно

При построении теории в настоящее время неявно предполагается, что ось инерции всегда проходит через рассматриваемую точку. Во второй классической теории переход к законам сохранения осуществляется путем использования для плотности суммы дельта функций от разности (аналогично выстраиваются законы сохранения для количества движения и энергии). Для точки выбор оси инерции не важен, для конечного объема существенен. Таким образом, переход от дискретной среды и обратно осуществляется без учета объемного распределения физических величин, точка статическая. Классическая и квантовая теории построены по единому алгоритму. Современная механика сплошной среды берет за основу условия равновесия сил. Это приводит к симметрии тензора напряжений и нарушению «сплошности» среды. После уточнения нами получен несимметричный тензор напряжений. Степень несимметричности тензора определяется из закона сохранения момента сил. Новые уравнения с включением момента количества движения и перекрестных потоков содержат только два безразмерных параметра: числа Рейнольдса и Прандтля. Устанавливаются причины и необходимость учета запаздывания в уравнениях движения разреженного газа, основанные на оценках производных по времени и по координате с учетом определений производных и длины свободного пробега молекул, времен между столкновениями. Устанавливаются приоритеты процессов в различных ситуациях. Приводятся примеры.

## **Effect of Dispersion and Delay in Continuum Mechanics**

**E.V. Prozorova**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

The paper discusses the possibility of a more complete mathematical description of certain physical phenomena that is dictated by the inability to describe them in the traditional mechanics. The effect of the angular momentum and the associated with it rotation of the elementary volume on account of the conservation laws of continuum mechanics and kinetic theory.

# ГЕОМЕТРОГИДРОДИНАМИКА

**С.А. Сошников**

*Группа компаний «Феникс-Авто», Омск, Россия  
E-mail: lns\_1959@mail.ru*

В основе рассматриваемой модели лежит аналогия между электрическими зарядами и гидродинамическими источниками и стоками (в идеальной жидкости). Особенно такая аналогия прослеживается в поведении силовых линий электрического поля и линий тока жидкости, движущейся вокруг источников и стоков. Однако аналогия становится неуместной, если попытаться сравнить силы взаимодействия зарядов и источников. Если одноименные заряды отталкиваются, то сила, действующая со стороны одного источника на другой, является силой притяжения.

Для того чтобы изменить направление силы, предлагается достаточно простое решение: изменить знак у плотности жидкости. Корректность такого шага может быть обоснована использованием метрики Эйнштейна-Розена [1], имеющей в сферических координатах вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{a^2}{r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin(\theta)^2 d\varphi^2.$$

Такая метрика так же, как и метрика Шварцшильда, описывает пространство, представляющее собой два асимптотически плоских листа, соединенных между собой горловиной. При этом инерционные свойства горловины (ее масса) определяются размерами самой горловины (ее радиусом).

Основная гипотеза ГеометроГидроДинамики [2] состоит в том, что все пространство считается заполненным некоей средой, поведение которой аналогично поведению идеальной жидкости, обладающей постоянной и отрицательной (по знаку) плотностью и не имеющей никакой внутренней структуры. Среда не обладает энергией покоя, а плотность энергии движущейся среды выражается (в простейшем случае) произведением половины ее плотности на квадрат скорости. Динамика среды может быть описана релятивистски-инвариантными уравнениями, если вектору локальной скорости среды сопоставить вектор:  $\vec{F} = \vec{E} + ic\vec{B}$ . При этом, в соответствии с электрогидродинамической аналогией, вектору напряженности электрического поля будет соответствовать вектор локальной скорости среды внутри пространства, а вектор магнитной индукции – скорости среды, связанной с движением самого пространства. Функция Лагранжа для среды в этом случае будет соответствовать лагранжиану электромагнитного поля, но с противоположным знаком. Именно последнее обстоятельство и позволяет получить метрику Эйнштейна-Розена.

Протекающая через такую горловину с одного листа пространства на другой среда как раз и образует со стороны одного листа источник, со стороны другого – сток. Но при этом масса самой горловины с учетом энергии движущейся вблизи нее среды всегда остается положительной. Это, в конечном итоге, и обеспечивает нужное направление силы между источниками.

Кроме того, учет движения среды позволяет найти интерпретацию квантово-механических особенностей в поведении микрочастиц, а также интерпретировать основные уравнения квантовой механики как динамические уравнения комплексно-значного импульса, включающего инерциальные свойства горловины и движущейся вблизи нее среды.

## Л и т е р а т у р а

1. *Einstein A.* The Particle Problem in the General Theory of Relativity (With N. Rosen) // *Phys. Rev.* 1935. V. 48. P. 73-77.

2. *Сошников С.А.* Геометрогидродинамика: попытка геометрической интерпретации электромагнитного поля и квантовой механики // *Математические структуры и моделирование.* 2011. Вып. 22. С. 33-37

## Geometrohydrodynamics

**S.A. Soshnikov**

*Group of companies "Fenix-Auto", Omsk, Russia*

Based on electrohydrodynamic analogy and metric Einstein-Rosen proposes a model of electric charge and the quantum-mechanical behavior of micro-particles.

# ИСПРАВЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ БЕЗАТМОСФЕРНОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА И АНАЛИЗ ВОЗМОЖНЫХ В ЭТОМ СЛУЧАЕ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ

А.Б. Яковлев

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

E-mail: andy\_yakovlev@rambler.ru

В связи с подготовкой к проведению программ «Луна-Глоб» и «Луна-Ресурс» в последнее время усилился интерес к исследованию пыли у поверхности Луны [1, 2]. В частности, интерес вызывает изучение динамики пылинок под действием приповерхностного электрического поля. Как показано, например, в [3] вблизи лунной поверхности наиболее вероятным является немонокотное распределение потенциала с высотой. Используемый в большинстве работ метод определения параметров такого потенциала основан на решении системы двух интегральных уравнений, которая, как показывает проведенный в [4] анализ, не имеет решения. Поэтому, будем определять параметры немонокотного потенциала, решая систему трех интегральных уравнений, как предложено в [4]. Наводимый на пылевой частице электрический заряд  $Q$  определяется численным решением уравнения зарядки

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_i J_i$$

где  $J_i$  – токи плазменных электронов и ионов и фотоэлектронов на поверхность частицы, а также фотоэлектронов с ее поверхности. При малых скоростях движения пылинки заряд можно считать квазиравновесным, то есть зависящим только от высоты частицы над поверхностью Луны  $h$ . Это дает возможность осуществить полиномиальную аппроксимацию зависимости  $Q(h)$  и, используя предложенный в [5] обобщенный зарядово-полевой потенциал, провести аналитическое исследование движения пылевой частицы в суперпозиции электрического и гравитационного полей. Проведено сравнение полученных аналитических результатов с результатами численного решения уравнения движения пылинки.

## Л и т е р а т у р а

1. Попель С.И., Копнин С.И., Голубь А.П., Дольников Г.Г., Захаров А.В., Зеленый Л.М., Извекова Ю.Н. Плазма у поверхности луны // *Астрономический вестник*. 2013. Т. 47. № 6. С. 455-466.
2. Голубь А.П., Дольников Г.Г., Захаров А.В., Зеленый Л.М., Извекова Ю.Н., Копнин С.И., Попель С.И. Плазменно-пылевая система в приповерхностном слое освещенной части Луны// *Письма в ЖЭТФ*. 2012. Т. 95. № 4. С. 198-204.
3. Fu J.H.M. Surface potential of photoemitting plate // *Geophysical Research*. 1971. V. 76. № 10. P. 2506-2509.
4. Москаленко А.М. Электростатический потенциал у поверхности Луны // *Кинематика и физика небесных тел*. Т. 8. № 5. С. 31-40.
5. Kolesnikov E.K., Chernov S.V., Yakovlev A.B. On correctness of canonical formulation of the problem of motion of sub-micron particles in the Earth's plasmasphere// *Kosm. Issled.* 2007. Т. 45. № 6. С. 499-504.

## The Corrected Method for Calculation of Electrostatic Potential Near to Surface of Nonatmospheric Space Body and the Analysis of Possible Modes of Dust Particles Motion

A.B. Yakovlev

Saint-Petersburg State University, Russia

In the report the opportunities of the calculation of electrostatic potential near to Moon surface and the analytical solution of a problem about vertical movement of dust particles are examined, and dependence of movement character from the granule size is analyzed. Comparison of the received analytical results with results of the numerical solution of the equation of dust particle motion is given.

# X

ИСТОРИЯ МЕХАНИКИ

---

**HISTORY OF MECHANICS**

# РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ СВЕРХЗВУКОВЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ В БГТУ – «ВОЕНМЕХ»: ИССЛЕДОВАНИЯ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Г.А. АКИМОВ

*Балтийский государственный технический университет «Военмех», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: akimov103@mail.ru*

Научные исследования в области ударно-волновых взаимодействий связаны с деятельностью профессора В.Н. Ускова. В 1970–80-е годы В.Н. Усковым был разработан метод расчета ударно-волновых структур. Этим методом его учениками (А.Л. Старых, А.Л. Андрияновым и др.) были рассчитаны конкретные типы взаимодействий газодинамических разрывов. На эту тему В.Н. Усковым (в соавторстве с учениками) была опубликована монография [1].

В монографии выводятся уравнения интерференции, характеризующие свойства течения в окрестности точки пересечения разрывов. Определяются области регулярного и нерегулярного взаимодействия разрывов, а также области отсутствия решений уравнений интерференции. Предлагаются простые математические модели, позволяющие выявить основные факторы, влияющие на структуру течения в сверхзвуковой нерасчетной струе. Приводится описание маршевого численного метода расчета двумерных стационарных газодинамических течений с выделением множества разрывов. На примерах расчета течений различной сложности показана высокая разрешающая способность метода.

Проблеме нестационарных одномерных волн посвящена еще одна монография В.Н. Ускова [2]. Она содержит теорию ударных волн и простых волн Римана, распространяющихся в потоках газа или жидкости. Приводятся примеры практического использования теоретических результатов для проектирования технических объектов.

В 2000-е гг. В.Н. Усков опубликовал ряд статей в сборниках материалов «Поляховских чтений», «Уткинских чтений», «Семинаров по течениям жидкостей, газа и плазмы» и др. Также в 2013 г. было опубликовано содержательное учебное пособие «Бегущие одномерные волны» [3].

На Всероссийском семинаре по аэрогидродинамике, посвященном 90-летию со дня рождения С.В. Валландера, В.Н. Усков выступил с четырьмя докладами: «Рефракция бегущей ударной волны» (с Ариповой Л.П.), «Тройные конфигурации стационарных и бегущих ударных волн» (в соавт. с Мостовых П.С., Чернышовым М.В.), «Нестационарные тройные конфигурации ударных волн» (в соавт. с Мостовых П.С.), «Особенности ударно-волновой структуры нерасширенной газовой струи на начальном участке истечения» (в соавт. Чернышов М.В.). Экологическая премия ЭКО «МИР» 2007 г.

Можно вполне обоснованно утверждать о создании научной школы в этом направлении газодинамики – школы «Ударно-волновых взаимодействий газодинамических разрывов».

Следует отметить также содержательную и оригинальную книгу В.Н. Ускова «Наука о стихиях», в которой ярко рассказывается об ученых, внесших свой вклад в ее развитие [4].

## Л и т е р а т у р а

1. Адрианов А.Л., Усков В.Н., Старых А.Л. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. Новосибирск: ВО «Наука». 1995.
2. Усков В.Н. Бегущие одномерные волны. СПб. 2000.
3. Усков В.Н. Бегущие одномерные волны. Учебное пособие. Кн. 1–2. СПб: БГТУ. 2013.
4. Усков В.Н. Наука о стихиях: Исторический очерк становления гидроаэродинамики. СПб: БГТУ. 2007.

## The Study of Supersonic Waves in the Baltic State Technical University (The Interaction of Shock Waves)

G.A. Akimov

*Baltic State Technical University “Voenmekh”, Saint-Petersburg, Russia*

The paper is devoted to the interaction of shock waves. Special attention is given to the research works of Professor Vladimir N. Uskov (1941–2014).

## САНКТ-ПЕТЕРБУРГ – ТРИ ВЕКА НАУКИ

**О.В. Газиева**

*Гимназия №148 имени Сервантеса, Санкт-Петербург, Россия*

*E-mail: olgagazieva@mail.ru*

Доклад построен в виде экскурсии по городу, отражающей основные вехи развития науки в Петербурге. При этом основное внимание уделено развитию механики, что соответствует научному направлению данной конференции. Разрабатывая экскурсию, попытаемся затронуть тему жизни, историю зданий, где проживали наши ученые, тему исследований великих механиков нашего города, как русского, так и иностранного происхождения, а также места их захоронения.

Фундамент для научного развития был заложен основанием по проекту Петра Первого триединых Академии Наук, Университета и Классической гимназии. Знаменитыми механиками-иностранцами были Л.Эйлер, Даниил, Николай и Якоб Бернулли, первым русским академиком стал М.В.Ломоносов (автор мозаичного панно в вестибюле здания АН). Следует отметить особую связь между Академией Наук и Университетом, естественный факультет которого с математическим отделением, а позже физико-математический факультет находились в здании “Двенадцати коллегий”. После Великой Отечественной войны факультет был переведен в здание бывших “Бестужевских курсов”. Здесь работали и творили академики-механики О.И.Сомов, П.Л.Чебышёв, А.М.Ляпунов, а также Д.К.Бобылев, Г.В.Колосов, А.А.Саткевич, Н.В.Розе, К.И.Страхович, Ю.А.Крутков, С.В.Валландер, Н.Н.Поляхов и др.

Петербург всегда являлся колыбелью Российского флота. Строительство кораблей началось в Адмиралтействе, а в настоящее время можно в дельте Невы выделить такие заводы-гиганты как “Балтийский” и “Адмиралтейские верфи”. Знаменитым механиком-кораблестроителем был А.Н.Крылов, выпускник Морского кадетского корпуса. Именем Алексея Николаевича назван Центральный научно-исследовательский институт (знаменитое ЦНИИ им. А.Н.Крылова), являющееся мозговым центром нашего кораблестроения. Крупнейшими учеными в этом направлении были И.Г.Бубнов (первые русские подводные лодки), П.Ф.Папкович, Ю.А.Шиманский, В.В.Новожилов, Н.С.Соломенко.

Крупным центром механики в городе является Политехнический университет, в котором работали такие видные механики как И.В.Мещерский, Л.Г.Лойцянский, А.И.Лурье, К.И.Страхович, Н.Н.Поляхов и др. В целом ряде и других институтов (например, в Технологическом, Путей сообщения, Горном, Электромеханическом) работали выдающиеся ученые-механики М.В.Остроградский, И.А.Вышнеградский, С.П.Тимошенко и др. В 1991 г. в системе Академии Наук выделился Институт проблем машиноведения, который сразу же стал центром притяжения для ведущих ученых-механиков города.

Следует отметить, что в этом кратком обзоре представлены совершенно недостаточно видные ученые-механики Санкт-Петербурга, их перечень можно весьма расширить.

Экскурсию будет сопровождать обсуждение уникальных зданий, связанных с деятельностью упомянутых в тезисах ученых – Академии Наук, “Двенадцати коллегий”, “Дома Эйлера”, Морского кадетского корпуса, Горного института, Адмиралтейства, Дома ученых РАН, заводов “Балтийский” и “Адмиралтейские верфи”, комплексов “Новой Голландии” и Политехнического университета. Завершить экскурсию можно посещением мемориальных кладбищ Александро-Невской лавры и “Литераторских мостков” Волковского кладбища.

## Saint Petersburg – Three Centuries of Science

**O.V. Gazieva**

*Gymnasium school №148 n.a. Cervantes, Saint-Petersburg, Russia*

*E-mail: olgagazieva@mail.ru*

The report presents a Saint Petersburg sight-seeing tour taking into consideration the main places connected with the science development in Saint Petersburg. In this respect, much attention is paid to the development of mechanics. A brief scientific characteristic is given for the scientists-specialists in mechanics who worked in the city, and the history of the buildings where they worked is enlightened.

## **П.Ф. ЛЕСГАФТ - ОДИН ИЗ ОСНОВОПОЛОЖНИКОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ БИОМЕХАНИКИ В РОССИИ**

**И.И. Демидова**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: maria\_ib@mail.ru*

С середины 19-го века исследователями обсуждался вопрос о влиянии механических усилий на процессы, происходящие в живой природе, т.е. об установлении связи между строением кости и функцией, которую она выполняет. В это же время были проведены Г. Вертгеймом первые исследования по определению механических свойств тканей человеческого тела. В 1866 врач проф. Г.Н. Меуер в Цюрихе и проф. по механике Culmann на примере бедренной кости показали, что строение костной ткани соответствует законам механики.

В России этому вопросу первым большое внимание уделил анатом профессор П.Ф. Лесгафт (1837-1909). Им были написаны работы, в которых обсуждались вопросы о росте костей в зависимости от механических усилий и окружающей среды, и формулировались темы для исследований данных вопросов. П.Ф. Лесгафтом был создан и прочитан новый курс «Теоретическая анатомия», в котором автор собирал данные по физико-механическим свойствам живых тканей организма человека и животных. С 1885 года начались работы с сотрудниками механической лаборатории Санкт-Петербургского института путей сообщений, возглавляемой Н.А. Белелюбским по исследованию механических свойств тканей и конструкций тела человека. В лаборатории были получены данные о модуле Юнга и прочности костей черепа и таза. Конструкция черепа при сжатии выдержала нагрузку 1440 кг (90 пудов). По результатам исследований критических нагрузок и прочности костей таза можно сделать только качественную характеристику о влиянии возраста на механические параметры конструкции и материала - прочность до 30 лет увеличивается, затем падает.

В 1895 году под руководством П.Ф. Лесгафта была создана биологическая лаборатория. Большая работа по определению прочности костей человека и животных в дальнейшем была проведена в Технологическом институте при участии сотрудника биологической лаборатории К.К. Гильзена и профессоров института.

### **Л и т е р а т у р а**

1. *Лесгафт П.Ф.* Общая анатомия. Ч.1. СПб. 1885.
2. *Лесгафт П.Ф.* Основы теоретической анатомии. Ч.1. СПб. 1892. 337с.
3. *Белелюбский Н.А.* Механическая лаборатория. 1886. 1891-1892.
4. *Гильзен К.К.* Удельный вес, упругость и крепость костной ткани // Изв. СПб. биол. лаб. 1896. Вып. 2. С. 7-37.

## **P.F. Lesgaft – One of Founders of Experimental Biomechanics in Russia**

**I.I. Demidova**

*Sankt-Petersburg State University. Russia*

P.F. Lesgaft was first in Russia who began to explore the mechanical properties of the bones. He wrote the book “Theoretical anatomy”. With the prof. N.A. Beleljubsii in the Institute of the communications performed the experiments on the heads and pelvic bones in the dependence from the age. Then he opened the biological laboratory where the different investigations of the bones were conducted.

## **ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ НАЧАЛЬНОЙ ШКОЛЫ ОСНОВАМ МЕХАНИКИ В РАМКАХ ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ**

**В.В. Иванова**

*Средняя школа № 222 «Петришуле», Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: iegspb@mail.ru*

Учащиеся младших классов начальной школы весьма восприимчивы к познанию новых для них явлений в окружающем мире. В этом отношении большое поле деятельности представляет собой наблюдение, осмысление и усвоение различных механических процессов. Механика, являясь весьма наглядной дисциплиной, очень доступна, для детей младшего возраста, поэтому она оказывается одним из наиболее доступных разделов физики. В частности, с учащимися младших классов интересно обсуждать природу силы трения и объяснять знаменитую ошибку Аристотеля, считавшего, что движение с постоянной скоростью достигается приложением постоянной силы.

С большим интересом ребята наблюдают явление резонанса и выслушивают объяснение природы этого явления. Им интересно слушать рассказ о катастрофе Египетского моста в Петербурге в 1905 году, когда частота шага лошадей эскадрона гвардейской кавалерии, двигавшегося по мосту под звуки оркестра, совпала с собственной частотой колебаний моста. Это привело к резонансу, повлёкшему за собой разрушение моста. Учащиеся с интересом рассматривают фотографии известного фотографа К. Буллы.

Большое оживление вызывает демонстрация фильма, о катастрофе Такомского моста, при этом даётся пояснение, что интенсивные колебания при этом вызываются не периодической силой, а постоянно действующим напором ветра.

## **Teaching the Elements of Mechanics to Pupils of Primary School in the Frame of Extracurricular Activity**

**V.V. Ivanova**

*Secondary school № 222 "Petreschule"  
Saint Petersburg, Russia*

The report presents a possibility of teaching the elements of mechanics to the pupils of primary school by the example of phenomena of resonance and auto vibration. The display of photographs and educational films is of great importance in the process of teaching.

# МОДЕЛИ МЕХАНИЗМОВ ЧЕБЫШЁВА В МЕХАНИЧЕСКОМ КАБИНЕТЕ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Г.А. Кутеева, Б.А. Ершов

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*  
*E-mail: gkut@rambler.ru*

Цель доклада: описать, какие модели механизмов П.Л. Чебышёва были в механическом кабинете Императорского Санкт-Петербургского университета, в каком состоянии эти модели находятся в наши дни. Обсуждается вопрос о необходимости сохранять эти модели и использовать в преподавании механики.

Механический кабинет (первоначальное название: кабинет практической механики) – учебно-вспомогательный кабинет при физико-математическом факультете Императорского Санкт-Петербургского университета, существовал в конце 19 века – в начале 20 века [1]. Большая часть моделей механизмов и приборов кабинета фиксировалась в инвентарной книге. Такая инвентарная книга в наши дни хранится на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ).

Под термином “Механизмы Чебышёва” будем понимать деревянные или металлические модели механизмов, созданные собственноручно или при непосредственном участии знаменитого русского ученого П.Л. Чебышёва в 1860-1890 гг. В современных российских научных изданиях (в том числе, электронных) поддерживается интерес к истории и описанию этих моделей [2, 3]. В этом докладе мы добавим информацию о механизмах Чебышёва, которые хранились в механическом кабинете.

Вернемся к инвентарной книге кабинета практической механики Санкт-Петербургского университета. Модели П.Л. Чебышёва отмечены в двух разделах этой книги. В первом разделе “Кинематические и статические модели” и в разделе “Приборы”. В качестве примера приведем одну запись инвентарной книги раздела “Приборы”. “1895 г. Приборы Академика П.Л. Чебышёва. Дар. 1. Изгибаемая сочлененная линейка для черчения дуг кругов больших радиусов. 69J. 2. Центробежный регулятор с шарами и постоянным противовесом. 70J. 3. Центробежный регулятор с шарами и переменным противовесом. 71J. 4. Машина для сортирования зерна по дальности полета. 72J.” Из этого перечня приборов на кафедре сейчас можно осмотреть центробежный регулятор с шарами и переменным противовесом. Машина для сортирования зерна находится в музее истории университета. На кафедре также хранятся и другие механизмы, связанные с именем русского математика П.Л. Чебышёва. Они будут представлены в докладе.

## Л и т е р а т у р а

1. *Кутеева Г.А.* О кабинете практической механики в Санкт-Петербургском государственном университете // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. Гомель. 2013. Вып. 7. С. 177-185.
2. Проект “Механизмы П.Л. Чебышева” 2009-2014 гг. (первое издание, второе издание) интернет-ссылка: <http://www.tcheb.ru>
3. *Чиненова В.Н.* Работы П.Л.Чебышева по теории механизмов в курсе “История механики” на математико-механическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова // Труды IX международных Колмогоровских чтений: Сборник статей. Ярославль: Изд-во ЯГПУ. 2011. С. 270-275.

## Mechanisms of P.L. Tchebyshev in Mechanical Cabinet of Saint-Petersburg University

G.A. Kuteeva, B.A. Ershov

<sup>1</sup>*Saint-Petersburg State University, Russia*  
*E-mail: gkut@rambler.ru*

The aim of this report is to describe which mechanisms of Tchebyshev were in mechanical cabinet of Imperial St.-Petersburg University. The current state of these models, their use in the educational process in the 19th c. and now are discussed.

Mechanical cabinet (former name: applied mechanics cabinet) is a cabinet with a collection of teaching mechanisms for physicists and mathematics faculty of Imperial Saint-Petersburg University.

Now the part of the collection are still saved and used at the theoretical and applied mechanics department of mathematics and mechanics faculty in Saint-Petersburg State University. Among the sections of the collection there are the models created by a great Russian mathematician, academics P.L. Tchebyshev (with his own hand or by his drawings). These models will be presented.

## О РАБОТАХ ПО МЕХАНИКЕ ПАФНУТИЯ ЛЬВОВИЧА ЧЕБЫШЁВА

**Г.А. Кутеева, М.П. Юшков**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: gkut@rambler.ru, yushkovmp@mail.ru*

Доклад готовился в связи со 120-летием со дня кончины гениального механика-математика Пафнутия Львовича Чебышёва.

Началу работ П.Л.Чебышёва по механике положили исследования по выбору оптимальных размеров в кинематической цепи, превращающей прямолинейное движение поршня паровой машины во вращательное движение колеса. Решение этой технической задачи в то время имело особое значение. При этом П.Л.Чебышёв впервые ставит минимаксную задачу. Исследование этой задачи потребовало одновременно решения принципиально важных задач не только для исследования этой впервые сформулированной задачи, но и для решения задач из области математического анализа, вычислительной математики (в частности, создания полиномов Чебышёва) и из других областей математики. Полученные результаты заложили основу для создания теории синтеза в теории машин и механизмов. Эффективность этой теории демонстрировалась с помощью приборов, часть из которых была изготовлена собственноручно Пафнутием Львовичем. Эти экспонаты составили известные коллекции в Политехническом музее, Музее истории РАН, Музее истории Санкт-Петербургского университета (СПбГУ). Часть из этих приборов сохранилась на кафедре теоретической и прикладной механики математико-механического факультета СПбГУ.

## **Works on Mechanics by Pafnutiy Lvovich Chebyshev**

**G.A. Kuteeva, M.P. Yushkov**

*Saint-Petersburg State University, Russia*

This paper is prepared in connection with the 120th anniversary of the death of a great Russian mechanic and mathematician P.L.Chebyshev (1821-1894).

The cycle of scientific works on mechanics by P.L.Chebyshev was started with his research to find an optimal size of the parts in a kinematic chain transforming linear motion of the piston of a steam engine into rotary motion of a wheel. The solution of this problem at that date (mid 19<sup>th</sup> century) was of fundamental importance. In these works P.L.Chebyshev first put the minimax problem.

# МЕХАНИКА В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ НА ЭТАПЕ СБЛИЖЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ И ГУМАНИТАРНЫХ НАУК

**Д.А. Лисаченко**

*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

*E-mail: da@fr.spb.ru*

История механики – это также её настоящее и будущее. Современная наука переживает период конвергенции – взаимодействия не только естественных наук между собой, но и естественных наук с гуманитарными. Этот процесс не может не затрагивать и преподавание в высшей школе. Однако представители естественнонаучной и гуманитарной культур обычно плохо понимают друг друга, поэтому обостряется необходимость поиска общей основы для их диалога [1].

Механика обладает для этого рядом качеств, выделяющих её среди других точных наук. Многие современные задачи касаются привычных и распространённых предметов (прочность брони, управление спутниками и т.п.) и находят опору в обыденном сознании, что облегчает их восприятие гуманитариями. Язык классической механики, при всей его абстрактности, всё же доступнее, чем язык квантовой механики, который можно сравнить с новым иностранным языком [2]. Механика удерживает баланс между абстрактностью и наглядностью, между сложностью математического аппарата и доступностью её предмета. Классическая механика способна популярно вводить в мир современных понятий, например, динамического хаоса, причём изображения траекторий могут быть реальными траекториями в более понятном реальном, а не формальном пространстве. А поскольку изучение физики начинается обычно с механики, именно на неё возлагается формирование навыков культуры мышления, общения и публичного выступления.

Развитие международного сотрудничества требует повысить качество изучения иностранных языков, а для этого – повысить и квалификацию самих преподавателей до уровня обсуждения несложных научных вопросов. Можно полагать, что баланс доступности для филологов и строгости для студентов обеспечит именно механика.

Наконец, красота самого объекта, например, самолёта, или изящество описывающих его графиков и уравнений – более, чем в других точных науках, описывающих чувственно осязаемый предмет – невольно возлагают на механику долю ответственности за эстетическое воспитание, тем более что эстетика в механике высоко развита и имеет давнюю историю [3].

## **Л и т е р а т у р а**

1. *Лисаченко Д.А.* Взаимное непонимание и отторжение «физиков» и «лириков» в университетском преподавании // *Лженаука в современном мире: медиасфера, высшее образование, школа.* Сборник материалов Международной научно-практической конференции, посвящённой памяти академика Э.П. Круглякова. СПб: Изд-во «ВВМ». 2013. С. 102-107.
2. *Лисаченко Д.А.* Квантовая механика как иностранный язык: взаимодействие методик преподавания // XXXVII Межд. филол. конф. СПб: Изд-во СПбГУ. 2008.
3. *Revue de mécanique.* 1901. V. 9.

## **Mechanics in High School at the Stage of Convergence Between Sciences and Humanities**

**D.A. Lisachenko**

<sup>1</sup>*Saint-Petersburg State University, Russia*

The convergence between sciences and humanities needs some basis for better understanding between the representatives from both sides, especially in high school. We believe that mechanics as a university discipline has a number of advantages allowing to contribute to such understanding better than other exact sciences.

## ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА

**И.Е. Лопатухина<sup>1</sup>, А.Л. Лопатухин<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*

<sup>2</sup>*ООО «Ирисофт», Санкт-Петербург, Россия*

*E-mail: irevlo@gmail.com, alexeylo@gmail.com*

Педагогическая деятельность академика Алексея Николаевича Крылова (1863-1945), длившаяся более, чем полувека в различных высших учебных заведениях, многочисленные семинары, проведенные в различных научно-исследовательских институтах и на заводах, участие в создании новых учебных заведений и факультетов, – всё это говорит о многогранности академика.

С осени 1891 года А.Н. Крылов, штабс-капитан по Адмиралтейству, обучает в Морском училище кадетов и гардемарин плоской и сферической тригонометрии, начертательной и аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению. А слушателям Морской Академии читает курс по теории корабля и ведёт практические занятия по математике. Причем курс по теории корабля читает с небольшими перерывами вплоть до 1938 года. В дальнейшем читает в Академии основные математические дисциплины (сферическую тригонометрию, аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления и др.), открывает ряд новых курсов: вибрация судов (1901 г.) и приближенные вычисления (1906 г.). В августе 1910 года Алексей Николаевич назначается ординарным профессором Морской Академии, а в октябре 1913 года утверждается в звании её заслуженного профессора.

Алексей Николаевич преподавал не только в Морской Академии. В 1906 г. он прочёл курс лекций о приближённых вычислениях на вольном математическом факультете, руководимом профессором Н.М. Гюнтером (1871-1941). Неоднократно читал курс вибрации судов студентам вышеупомянутого кораблестроительного факультета. В 1911-1913 гг. А.Н. Крылов состоял экстраординарным профессором Петербургского института инженеров путей сообщения, в котором он читал полный курс теоретической механики. Лекции по приближенным вычислениям и методам интегрирования дифференциальных уравнений математической физики читал в различные годы в Ленинградском университете. В 1931 году совместно с Ю.А. Крутковым (1890-1952) прочёл группе слушателей Военно-воздушной академии систематический курс общей теории гироскопов и некоторых технических их применений.

Но не только в высших учебных заведениях преподавал А. Н. Крылов. Разнообразной была его педагогическая деятельность в аудиториях научно-исследовательских институтов и на заводах. В процессе консультаций, которые во множестве проводил Алексей Николаевич, выяснялась необходимость прочтения соответствующего курса лекций. Так, в связи с работами, выполнявшимися инженерами и техниками Эпрона (Экспедиция подводных работ), А.Н. Крылов прочитал для них цикл лекций по теории судоподъёма. Многие задачи строительной механики корабля, над которыми работали конструкторские бюро судостроительных заводов, приводили к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений, и А.Н. читает в заводских аудиториях курс лекций по высшей алгебре. Лекции А.Н. Крылова по аналитическим и численным методам приближённого интегрирования дифференциальных уравнений и по теории корабля слушают инженеры-конструкторы Ленинградского металлического завода, научные сотрудники Артиллерийского научно-исследовательского морского института и других ленинградских предприятий. Лекции отличались практической направленностью, доведение решений до численных результатов с точностью, необходимой для практических технических нужд.

### **Л и т е р а т у р а**

1. *Крылов А.Н.* Воспоминания и очерки. М.: Воениздат. 1949. 434 с.
2. *Ханович И.Г.* Академик Алексей Николаевич Крылов. Л.: Наука, 1967. 250 с.
3. *Лопатухина И. Е., Лопатухин А. Л.* Академик А.Н. Крылов как педагог // Наука и техника: Вопросы истории и теории. СПб: Санкт-Петербургский филиал ИИЕТ РАН. 2013. С. 147-148.

## **Teaching Activities of Academician A. N. Krylov**

**I.E. Lopatukhina<sup>1</sup>, A.L. Lopatukhin<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Saint-Petersburg State University, Russia*

<sup>2</sup>*ООО “Irisoft”, Saint- Petersburg, Russia*

Different relations of teaching activities of academician A.N. Krylov are discussed.

## **ИЗ ИСТОРИИ ПРЕПОДАВАНИЯ МЕХАНИКИ В ПЕТРОВСКОЙ ИМПЕРАТОРСКОЙ КОММЕРЧЕСКОЙ ШКОЛЕ**

**С.В. Пасынкова**

*Средняя школа №206, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: psv206@yandex.ru*

Создание 206-й школы Санкт-Петербурга уходит в далекий 1880 год, когда под Высочайшим покровительством Императорского Дома Романовых Петровская школа открыла свои двери для петербургских школьников.

Петровская школа стала учебным заведением нового типа; учащиеся получали не только общее образование, приравненное к курсу реальных училищ, но и специальное коммерческое. Будущая профессия коммерсанта была связана с развитием торговли и промышленности в России. Одним из основных учебных дисциплин была физика.

Музейный кабинет физики, который является составной частью Музейного комплекса 206-й школы, хранит уникальную коллекцию физических приборов, приобретенных в конце XIX века в столярных мастерских Акционерного общества Макса Коля в Германии. Приобретение коллекции приборов для физической лаборатории коммерческой школы было связано с изменениями преподавания курса физики в средних учебных заведениях.

В XVIII веке содержание преподавания физики включало описание отдельных физических явлений, опытов, изучение действия физических приборов и устройств. В XIX веке в курсах физики средних учебных заведений всё большее внимание стало уделяться освещению основных законов физики, общих физических принципов и теорий. Качественно изменилось преподавание физики в коммерческих школах, что диктовалось требованиями развивающегося капиталистического производства. Одним из новшеств было введение лабораторно-практических работ.

Физические приборы, сохраненные в музейном кабинете, свидетельствуют об изучении механики, одного из важнейших разделов физики. При изучении одной из интереснейших тем «Механические колебания и волны» использовался огромных размеров внушительный маятник, период которого не зависит от изменения температуры в помещении. Его подвес изготовлен из стержней разных металлов, которые имеют разный температурный коэффициент расширения.

Образование поперечных механических волн наглядно демонстрировалось на модели волновой машины. Звуковые волны и их характеристики изучались с использованием монохорда, показывающего взаимосвязь частоты звука от длины и натяжения струны. При изучении явлений звукового резонанса использовались шары-резонаторы Гельмгольца.

Прибор Леви, который демонстрировал принцип независимости движений, использовался при рассмотрении свободного падения тел.

Простыми механизмами в механике считаются: рычаг, наклонная плоскость, а так же их разновидности: ручной ворот, винт, клин, червячная передача и домкрат, передача зубчатыми колесами. Эти механизмы на общих подставках так же представлены в коллекциях музейного кабинета физики.

Сохраненные с дореволюционных времен физические приборы позволяют проследить историю изменения преподавания физики в разное историческое время.

### **From the history of Mechanics teaching in Petrovsky Imperial Commercial school**

**S.V. Pasyukova**

*Secondary comprehensive school № 206, Saint-Petersburg, Russia*

The Museum of the Physics classroom in St Petersburg school 206 has a unique collection of old physical equipment of the 19<sup>th</sup> century, which was ordered in Max Kohl's workshop in Germany.

Our investigations of this collection let us determine the teaching level of Mechanics, one of the most important Physics branches, in secondary educational institutions in Russia in the pre-revolutionary period.

# О ЗНАЧИМОСТИ ОПЕРАТОРА ПОЛЯХОВА В НЕГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКЕ

Ш.Х. Солтаханов

Чеченский государственный университет, Россия  
E-mail: Soltakhanov@yandex.ru

Как известно, Э. Линделёф [1, 1895 г.], исследуя типично неголономную задачу методами голономной механики, допустил знаменитую ошибку, базирующую на предположении о том, что реакция идеальной неголономной связи имеет такую же структуру, как и реакция идеальной голономной связи. В связи с этим возникла необходимость выяснения того, как формируется вектор реакции идеальных неголономных связей.

Н.Н. Поляхов [2, 1974 г.] вектор реакции идеальных неголономных связей, записанных в обобщенных координатах

$$f_1^k(t, q, \dot{q}) = 0, \quad q = (q^1, \dots, q^s), \quad k = 1, \dots, \kappa,$$

предложил представлять в виде 
$$\vec{N} = \Lambda_k \frac{\partial f_1^k}{\partial \dot{q}^\tau} \vec{e}^\tau, \quad \tau = 1, \dots, s, \quad k = 1, \dots, \kappa,$$

где  $\vec{e}^\tau$ ,  $\tau = 1, \dots, s$ , являются векторами взаимного базиса введенной криволинейной системы координат. Отметим, что по дважды встречающимся индексам производится суммирование. Введенные здесь векторы

$$\vec{\nabla} / f_1^k = \frac{\partial f_1^k}{\partial \dot{q}^\tau} \vec{e}^\tau, \quad k = 1, \dots, \kappa, \quad \tau = 1, \dots, s,$$

естественно назвать векторами Поляхова. Каждый из них задается обобщенным оператором Гамильтона.

Отметим, что Н.Н.Поляхову, С.А.Зегжде и М.П.Юшкову [3, 1981 г.] также удалось с использованием понятия изображающей точки по Герцу получить и выражения обобщенных реакций как функций времени и обобщенных координат и скоростей для идеальных нелинейных неголономных связей

$$\Lambda_k = \Lambda_k(t, q, \dot{q}), \quad k = 1, \dots, \kappa.$$

Оператор Поляхова наряду со связями типа Четаева сыграл важную роль в развитии теории неголономных систем.

## Л и т е р а т у р а

- [1] *Lindelöf E.* Sur le mouvement d'un corps de revolution roulant sur un plan horizontal // Acta Societatis Scientiarum Fennicae. 1895. V. XX. No 10. P. 1-18.
- [2] *Поляхов Н.Н.* О дифференциальных принципах механики, получаемых из уравнений движения неголономных систем // Вестн. Ленингр. ун-та. 1974. Вып. 3. № 13. С. 106-116.
- [3] *Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П.* Уравнения динамики как необходимые условия минимальности принуждения по Гауссу // Колебания и устойчивость механических систем. Прикл. механика. Вып. 5. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1981. С. 9-16.

## On the Significance of the Operator From Polyakhov in Nonholonomic Mechanics

Sh.Kh. Soltakhanov  
Chechen State University, Russia

The article shows a significant role of the operator from Polyakhov for the development of the theory of non-holonomic mechanics as linear constraints and non-linear constraints.

## АДРЕС ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА НА ВАСИЛЬЕВСКОМ ОСТРОВЕ

**О.А. Шаркова**

*Средняя школа № 27 имени И.А. Бунина, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: nicolaysharkov@yandex.ru*

Леонард Эйлер, один из величайших математиков и механиков, большую часть жизни провел в Санкт-Петербурге. Его деятельность более полувека была связана с Петербургской Академией наук. В первый раз Эйлер приехал в Санкт-Петербург 13 мая 1727 года – ему было всего двадцать лет. С 1727 по 1741 год – первый Петербургский период его научной деятельности; впоследствии Эйлер писал: «Я и все остальные, имевшие счастье служить в Российской Императорской Академии, должны признать, что всем, чем мы являемся, мы обязаны тем благоприятным условиям, в каких мы там находились».

Диапазон научных интересов Эйлера был чрезвычайно широк: математика и механика, астрономия и картография, оптика и баллистика. В 1727 году, прибыв в Петербург, Эйлер «занял освободившееся место академика по физике, а после отъезда Даниила Бернулли в Базель в 1733 году стал академиком по математике».

До июня 1741 года, до отъезда Эйлера, в Петербурге вышло более пятидесяти его работ, и ещё около тридцати работ были оставлены здесь в рукописях и напечатаны уже после его отъезда в Берлин. Покидая Петербург, Эйлер договорился о сохранении прочных связей с Академией Наук в звании её иностранного члена.

В 1766 году Эйлер вернулся в Петербург по приглашению императрицы Екатерины II. За последние семнадцать лет жизни Эйлер представил Академии более 500 работ. Среди его сочинений такие, как «Интегральное исчисление» (1768-1770 годы), «Диоптрика» (1769-1771 годы), «Письма о разных физических и философических материях, писанные к некоторой немецкой принцессе» (1768-1772 годы) – каждый из трудов в трех томах.

14 августа 1766 года Эйлер купил большой каменный двухэтажный дом, который находился на Васильевском острове, на набережной Большой Невы, недалеко от здания Академии Наук. Этот дом был построен в 1720 году его первым владельцем – князем Александром Куракиным. На Университетской набережной было несколько связанных с именем Эйлера зданий: не сохранившиеся до наших дней старое здание Академии Наук, Шляхетский корпус, Кунсткамера. Эйлер также часто бывал в Адмиралтействе, так как интересовался проблемами кораблестроения, однако здание старого Адмиралтейства не дошло до наших дней.

Таким образом, дом Эйлера на набережной Большой Невы является единственным точным адресом ученого в Санкт-Петербурге, достойным серьезного изучения. Современный адрес дома Эйлера: 10 линия Васильевского острова, д.1/15, литер А. В день 250-летия со дня рождения Леонарда Эйлера, в 1957 году, была установлена мемориальная доска на доме, где жил ученый.

## Leonhard Euler Address on Vasilievsky Island

**O.A. Sharkova**

*Secondary school №27 with depth study of literature, history and foreign languages, Saint-Petersburg, Russia*

Leonhard Euler, one of the greatest mathematicians and engineers, most of life spent in St. Petersburg. Its activities more than half a century was connected with the St. Petersburg Academy of Sciences. For the first time Euler arrived in St. Petersburg on May 13, 1727 - he was only twenty years. In 1766 he bought the house on the bank of the Neva River – this is single house in St.-Petersburg, which keeps the memory about the great scientist Euler.

## AUTHOR INDEX

Abdullaev K.R., 248  
Agafontseva M.V., 72  
Akimov G.A., 268  
Aldoshin G.T., 14  
Aleksandrov A.Yu., 50, 195  
Alekseeva M.V., 73  
Alferov G.V., 210, 211, 212  
Amelin R.N., 51  
Amelyushkin I.A., 249, 250  
Andreev A.S., 213  
Androsov S.P., 20  
Ankudinov A.V., 227  
Antipov K.A., 50

Baikov A.E., 21, 22  
Bakaleinikov L.A., 251  
Bakhareva E.A., 154  
Bakulev V.L., 75  
Barabanov I.N., 23  
Barinova O.V., 76  
Bauer S.M., 155, 156, 232  
Bayalina D.K., 77  
Baykov B.S., 74  
Begun P.I., 233, 234  
Belkin A.A., 78  
Beloshapko A.G., 214  
Belyaev A.K., 9  
Belyaev F.S., 157  
Berdnikov K.V., 158  
Besschetnov V.A., 159  
Bestuzheva A.N., 79  
Biachkov A.B., 24  
Bobyliov D., 80  
Bodenkova E.O., 235  
Bogatko V.I., 81  
Bondar Ye.A., 82, 83, 84  
Botogova M.G., 160  
Brykina I.G., 85  
Bubnov V.A., 86  
Bubnov V.V., 214  
Buldakov E.L., 161  
Buturlimov O.V., 87  
Bykov N.Y., 88  
Bykov V.G., 196, 197, 198

Chernov S.V., 55  
Chevrychkina A.A., 167  
Chistov A.L., 138  
Chistyakov V.V., 67  
Chivilikhin S.A., 150  
Chumachenko E.N., 217

Dahl Yu.M., 168  
Demenkov M.N., 201  
Dementyev A.V., 257  
Demidova I.I., 270  
Dievskii V.A., 26  
Dmitriev N.N., 27, 28  
Dobrynin D.S., 29  
Dolgaja A.A., 30  
Dolicanin C.B., 18  
Domanskaia T.O., 169  
Dosaev M.Z., 215  
Dragan T. Spasic, 230

Efimova P.A., 210  
Egorova L.A., 52  
Emelyanov V.N., 90, 98  
Ender A.Ya., 251, 253  
Ender I.A., 251, 253  
Ermakov A.M., 170  
Ermolaeva N.N., 99  
Erokhin V., 12  
Erokhina O.S., 217  
Erokhina S.I., 238  
Ershov B.A., 164, 272  
Ershov V.I., 156  
Ershova Z.G., 232  
Eshakov P.A., 100  
Evard M.E., 162  
Evdokimenko A.P., 31

Fedorova E.A., 237  
Fedorova M.Y., 30  
Fedorovsky G.D., 189  
Filippov S.B., 190  
Filonchik E.S., 160  
Flegontova E.Yu., 251  
Franus D.V., 245  
Frolenkova L.Yu., 185

Gabdykhakova V.G., 92  
Gaifullin A.M., 94  
Galunova K.V., 25  
Ganin R.A., 216  
Gaponov S.A., 95  
Gataulin Y.A., 237  
Gavrilov A.A., 93  
Gazieva O.V., 269  
Gebel E.S., 199  
Geliev A.V., 252  
Gerasimenko A.B., 253  
Getsov L.B., 159  
Glushkova D.S., 200

Godonyuk D.S., 234  
 Gorbachev Y.E., 88  
 Gorbachev Yu.E., 254  
 Grekov M.A., 165  
 Grigorieva V.I., 166  
 Gritsenko D.V., 193  
 Gruzdkov A.A., 167  
 Gunko N.A., 255, 256  
 Gunko Y.F., 255, 256  
 Guzeev A.S., 96  
  
 Holub A.P., 193  
 Hwang Sh.-Sh., 192  
  
 Iaparova E.N., 162  
 Ignateva K.A., 176  
 Indeitsev D.A., 10  
 Istomin V.A., 105  
 Ivanov A.P., 34  
 Ivanov D.N., 164  
 Ivanov N.G., 104  
 Ivanova V.V., 271  
 Ivchenkova A.V., 239  
  
 Jaichibekov N.Zh., 97  
  
 Kabrits S.A., 177  
 Kadashevich Yu.I., 178  
 Kalas V.O., 54  
 Kalenova V.I., 11  
 Karami mohammadi A., 226  
 Karpenko A.G., 98  
 Kashkovsky A.V., 82, 84  
 Kazunin D.V., 35, 216  
 Khantuleva T.A., 248  
 Khanukaev Y.I., 45  
 Khitrykh D.P., 124  
 Kholodova S.E., 139, 140  
 Khrabry A.I., 102  
 Kirilovskiy S.V., 106, 107, 108  
 Kiselev N.A., 109  
 Kiseleva M.A., 204, 218  
 Klementyeva A.A., 240  
 Klimina L.A., 193  
 Klyushnicov G.N., 259  
 Kochnev A.S., 179  
 Kolesnichenko E.G., 254  
 Kolesnikov E.K., 55, 258, 259, 260  
 Kolton G.A., 81  
 Kolyari I.G., 20, 37  
 Komarov P.A., 219  
 Kondratyeva N.V., 204, 218  
 Korneev S.A., 20  
 Korolev V.S., 56, 205, 206  
 Kosjakov E.A., 57  
  
 Kostygova D.M., 216  
 Kostyrko S.A., 165  
 Kovachev A.S., 197  
 Kovalev M.D., 36  
 Krasilnikov P.S., 51, 54  
 Kuibin P.A., 72, 112  
 Kulakov F.M., 210  
 Kuleshov A.S., 29  
 Kunitsyn A.L., 58  
 Kunova O.V., 113, 114  
 Kurbatova G.I., 99  
 Kustova E.V., 74, 77, 105, 113, 115, 116, 117, 118, 119  
 Kuteeva G.A., 59, 272, 273  
 Kutev N., 231  
 Kuznetsov M.M., 111  
 Kuznetsov N.V., 35, 204, 216, 218  
 Kuznetsov V.M., 110  
 Kuznetsova A.A., 241  
  
 Latypov V.N., 214  
 Lebedev D.A., 38  
 Lebedeva E.A., 234  
 Leonov G.A., 204, 218  
 Lin K.-H., 193  
 Lisachenko D.A., 274  
 Lobach A.V., 89  
 Lobachev M.P., 122  
 Lobanova M.A., 120, 121  
 Lokhin V.V., 52  
 Lopatukhin A.L., 275  
 Lopatukhina I.E., 275  
 Lubomirov Y.M., 123  
 Lukin A.A., 180, 256, 261  
 Lyisenkova A.S., 234  
  
 Magomedova D.K., 180  
 Mal'kov V.M., 169, 181, 182  
 Mal'kova Yu.V., 181, 182  
 Malafeyev O.A., 211, 212  
 Malamanov S.Y., 124  
 Maliavkin G.P., 60  
 Malikov Ye.R., 220  
 Maltseva A.S., 211  
 Malykh K.S., 39  
 Malyugin A.A., 35  
 Manuilov A.S., 258, 260  
 Marakueva O.V., 126  
 Markachev Y.E., 252  
 Markovich D.M., 125  
 Martysheva A.A., 61  
 Masterova A.A., 192  
 Matveev S.K., 127  
 Matveev S.V., 111  
 Mayorov U., 22

Mekhonoshina M.A., 113  
 Melnikov B.E., 159  
 Melnikov G.I., 39  
 Melnikov V.G., 39  
 Memnonov V.P., 228  
 Merkushev E.S., 183  
 Mikhasev G.I., 160  
 Miroshin R.N., 8, 128  
 Mishin L.D., 115  
 Mishina A.I., 116  
 Mityakov A.V., 125  
 Mityakov V.Y., 125  
 Mochalova Y.A., 183  
 Mochalova Yu.A., 10  
 Mohammad Bostani, 226  
 Moiseev A.A., 129  
 Molchanova A.N., 82  
 Molleson G.V., 262  
 Morozov N.F., 9  
 Morozov V.A., 256, 261  
 Morozov V.M., 11, 38  
 Mosekilde E., 202  
 Moshkin R.P., 40  
 Mostovykh P.S., 117  
  
 Nadymov E.N., 131  
 Nagnibeda E.A., 113, 114, 130  
 Narbut M.A., 132  
 Naumova N.V., 164, 184  
 Nikiforov K.A., 263  
 Norin A.V., 240  
 Nurmukhambetov M.S., 121, 133, 134  
  
 Oblapenko G.P., 118  
 Okunev Yu.M., 207  
 Orekhov K.A., 200  
 Orlova E.S., 128  
 Os'kina K.I., 61  
 Ostov Y.J., 34  
 Ovchinnikova O.K., 137  
 Ovid'ko I.A., 179  
 Ovsyannikov V.M., 135, 136  
  
 Pannevitc O.V., 91  
 Papina K.V., 242  
 Pascal M., 19  
 Pasyukova S.V., 276  
 Pavilaynen G.V., 184  
 Pavlovskiy V.A., 124, 138  
 Peregudin S.I., 139, 140  
 Peregudova O.A., 221  
 Perevalova E.V., 243  
 Petrov N.A., 61  
 Pichugin Yu.A., 212  
 Platonov A.V., 50  
  
 Polyakhov ( Jr.). N.N., 15  
 Polyakhova E.N., 61  
 Pomytkin S.P., 178  
 Poplavskaya T.V., 106, 107, 108  
 Potekhina E.A., 81  
 Pototskaya I.Yu., 206  
 Presnetsova V.Yu., 185  
 Privalova O.G., 207  
 Pronina Y.G., 186  
 Prozorova E.V., 264  
 Pykhov D.C., 141  
  
 Radev S., 231  
 Rajnes A.A., 142  
 Razov A.I., 166  
 Reshetova A.I., 106  
 Ris V.V., 104  
 Rodnikov A.V., 62  
 Rodyukov F.F., 194, 222  
 Romanova M.S., 143  
 Romashin S.N., 185  
 Rudyak V.Ya., 78, 144  
 Rupasov D.A., 163  
 Ryabinin A.N., 92, 109, 145  
 Ryabov V.M., 187  
 Ryazantseva M.Yu., 188  
 Rydalevskaya M.A., 91, 143  
  
 Safronov A.N., 41  
 Salnikova T.V., 63  
 Samsonov V.A., 192, 207  
 Sapozhnikov S.Z., 125  
 Savelev A.S., 119  
 Savenkov G.G., 261  
 Savin A.V., 129, 146  
 Sedova O.S., 186  
 Selyutskiy Yu.D., 208  
 Semenov A.S., 159  
 Semenov B.N., 179  
 Semenov S.G., 159  
 Sentyabov A.V., 93  
 Sergeev V.S., 42  
 Sergushova V.A., 137  
 Shamina V.A., 177  
 Shamolin M.V., 46  
 Sharafutdinov I.Z., 151  
 Sharkova O.A., 278  
 Shashkova A.A., 121  
 Shatrov E.A., 47  
 Shchepilina O.V., 233  
 Shcherbin B.O., 227  
 Shelkovina V.A., 198  
 Shevyrin A.A., 84  
 Shirobokov M.G., 65  
 Shishkin E.V., 41

Shmyrov A.S., 60, 68, 69  
 Shmyrov V.A., 69  
 Shoev G.V., 83  
 Shorkin V.S., 185  
 Shumkov S.G., 152  
 Shymanchuk D.V., 68  
 Sidorov D.G., 127  
 Silantyeva O.A., 27, 28  
 Sinilshchikov B.E., 103  
 Sinilshchikov V.B., 103  
 Smirnov A.L., 79, 156, 232  
 Smirnov E.M., 102  
 Smirnov P.G., 146  
 Smirnov R.I., 87  
 Smotrova L.V., 111  
 Soederbacka G.J., 194  
 Sokolov E.I., 146  
 Sokolov L.L., 59  
 Sokolov V.V., 96  
 Solopov V.M., 43  
 Solovev S.U., 96  
 Soltakhanov Sh.Kh., 13, 32, 277  
 Soshnikov S.A., 265  
 Starkov V.N., 147  
 Stasenko A.L., 262  
 Stepanov S.Ya., 19, 63  
 Stepanov Yu.G., 148  
 Struzhanov V.V., 154, 158  
 Sudenkov Y.V., 173, 174  
 Sventitskaya V.E., 173, 174  
  
 Tabakova S., 231  
 Taranov A.E., 122  
 Terekhova N.M., 95, 149  
 Tereshkina K.B., 110  
 Teterina I.V., 90  
 Tikhonov A.A., 13, 18, 50, 57, 64  
 Tkhai V.N., 23, 31, 44, 64  
 Tovstik P.E., 9, 172, 196  
 Tovstik T.P., 9  
 Trifonenko B.V., 223  
 Trofimenko P.V., 244  
 Trofimov S.P., 65  
 Tropp E.A., 251  
 Tschur N.A., 104  
 Tsibarov V.A., 141, 242  
 Tsirkunov Yu.M., 89, 120, 121, 126, 133, 134  
 Tsyryulnikov I.S., 107, 108  
 Tureshbaev A.T., 58, 66  
 Tverev K.K., 223  
  
 Usacheva T.V., 170  
 Usenova A.B., 97  
 Uskov V.N., 73  
 Uzdin A.M., 30  
  
 Vashchenkov P.V., 84  
 Vasiukova O.E., 215  
 Venatovskaya L.A., 236  
 Veryovkin A.A., 89  
 Volkov A.E., 162, 163  
 Volkov D.Yu., 25  
 Volkov K.N., 90  
 Voloshinova T.V., 164  
 Voronkova E.B., 155, 232  
 Voroshilova Yu.N., 91  
  
 Yakovchuk M.S., 100  
 Yakovlev A.B., 266  
 Yakovlev S.P., 14  
 Yanochkina O.O., 202  
 Yartsev B.A., 123, 187  
 Yukhnev A.D., 237  
 Yushkov M.P., 8, 13, 32, 273  
  
 Zabiyakin M.V., 171  
 Zana C. Dolicanin, 230  
 Zasukhin O.N., 100  
 Zavyalov O.G., 101  
 Zaychenko O.K., 256  
 Zaytsev D.K., 102  
 Zegzhda S.A., 32  
 Zelenina N.A., 53  
 Zelenskiy A.G., 258  
 Zelinskaya A.V., 172  
 Zhabko A.P., 195  
 Zhusubaliyev Zh.T., 202  
 Zimin B.A., 173, 174  
 Zorin I.S., 175  
 Zuev S.M., 203  
 Zykov A.V., 33  
 Zyuzlikov V.P., 103

## ПЕРЕЧЕНЬ АВТОРОВ

Агафонцева М.В., 72  
Акимов Г.А., 268  
Алдошин Г.Т., 14  
Александров А.Ю., 195  
Алексеева М.В., 73  
Алферов Г.В., 210, 211, 212  
Амелин Р.Н., 51  
Амелюшкин И.А., 249, 250  
Андреев А.С., 213  
Андросов С.П., 20  
Анкудинов А.В., 227

Байков А.Е., 21, 22  
Байков Б.С., 74  
Бакалейников Л.А., 251  
Бакулев В.Л., 75  
Барабанов И.Н., 23  
Бауэр С.М., 155, 156, 232  
Бахарева Е.А., 154  
Баялина Д.К., 77  
Бегун П.И., 233, 234  
Белкин А.А., 78  
Белошапко А.Г., 214  
Беляев А.К., 9  
Беляев Ф.С., 157  
Бердников К.В., 158  
Бессчетнов В.А., 159  
Бестужева А.Н., 79  
Бобылев Д.Е., 80  
Богатко В.И., 81  
Боденкова Е.О., 235  
Бондарь Е.А., 82, 83, 84  
Ботогова М.Г., 160  
Брыкина И.Г., 85  
Бубнов В.А., 86  
Бубнов В.В., 214  
Булдаков Е.Л., 161  
Бутурлимов О.В., 87  
Быков В.Г., 196, 197, 198  
Быков Н.Ю., 88  
Бячков А.Б., 24

Васюкова О.Э., 215  
Ващенко П.В., 84  
Венатовская Л.А., 236  
Веровкин А.А., 89

Волков А.Е., 162, 163  
Волков К.Н., 90  
Волошинова Т.В., 164  
Воронкова Е.Б., 155, 232  
Ворошилова Ю.Н., 91

Габдылхакова В.Г., 92  
Гаврилов А.А., 93  
Газиева О.В., 269  
Гайфуллин А.М., 94  
Ганин Р.А., 216  
Гапонов С.А., 95  
Гатаулин Я.А., 237  
Гебель Е.С., 199  
Гелиев А.В., 252  
Герасименко А.Б., 253  
Гецов Л.Б., 159  
Глушкова Д.С., 200  
Годонюк Д.С., 234  
Голуб А.П., 193  
Горбачев Ю.Е., 88  
Греков М.А., 165  
Григорьева В.И., 166  
Гриценко Д.В., 193  
Груздков А.А., 167  
Гузеев А.С., 96  
Гунько Н.А., 255, 256  
Гунько Ю.Ф., 255, 256

Даль Ю.М., 168  
Деменков М.Н., 201  
Дементьев А.В., 257  
Демидова И.И., 270  
Джайчибеков Н.Ж., 97  
Диевский В.А., 26  
Дмитриев Н.Н., 27, 28  
Добрынин Д.С., 29  
Долгая А.А., 30  
Доличанин Ч.Б., 18  
Доманская Т.О., 169  
Досаев М.З., 215

Евард М.Е., 162  
Евдокименко А.П., 31  
Егорова Л.А., 52  
Емельянов В.Н., 90, 98  
Ермаков А.М., 170  
Ермолаева Н.Н., 99  
Ерохин В.В., 12

Ерохина О.С., 217  
Ерохина С.И., 238  
Ершов Б.А., 164, 272  
Ершов В.И., 156  
Ершова З.Г., 232  
Ефимова П.А., 210  
Ешаков П.А., 100

Жабко А.П., 195

Забиякин М.В., 171  
Завьялов О.Г., 101  
Зайцев Д.К., 102  
Зайченко О.К., 256  
Засухин О.Н., 100  
Зегжда С.А., 32  
Зеленина Н.А., 53  
Зеленский А.Г., 258  
Зелинская А.В., 172  
Зимин Б.А., 173, 174  
Зорин И.С., 175  
Зуев С.М., 203  
Зыков А.В., 33  
Зюзликов В.П., 103

Иванов А.П., 34  
Иванов Д.Н., 164  
Иванова В.В., 271  
Ивченкова А.В., 239  
Игнатъева К.А., 176  
Истомин В.А., 105

Кабриц С.А., 177  
Казунин Д.В., 35, 216  
Калас В.О., 54  
Калёнова В.И., 11  
Карпенко А.Г., 98  
Кашковский А.В., 82, 84  
Кириловский С.В., 106, 107, 108  
Киселев Н.А., 109  
Киселева М.А., 204, 218  
Клементьева А.А., 240  
Климина Л.А., 193  
Клюшников Г.Н., 259  
Ковалёв М.Д., 36  
Ковачев А.С., 197  
Колесников Е.К., 55, 258, 259, 260  
Колтон Г.А., 81  
Коляри И.Г., 20, 37  
Комаров П.А., 219

Кондратьева Н.В., 204, 218  
Корнеев С.А., 20  
Королев В.С., 56, 205, 206  
Костыгова Д.М., 216  
Костырко С.А., 165  
Косяков Е.А., 57  
Кочнев А.С., 179  
Красильников П.С., 51, 54  
Кузнецов М.М., 111  
Кузнецов Н.В., 35, 204, 216, 218  
Кузнецова А.А., 241  
Куйбин П.А., 72, 112  
Кулаков Ф.М., 210  
Кулешов А.С., 29  
Куницын А.Л., 58  
Кунова О.В., 113, 114  
Курбатова Г.И., 99  
Кустова Е.В., 74, 77, 105, 113, 115, 116, 117, 118, 119  
Кутеева Г.А., 59, 272, 273

Латыпов В.Н., 214  
Лебедев Д.А., 38  
Лебедева Е.А., 234  
Леонов Г.А., 204, 218  
Лисаченко Д.А., 274  
Лобанова М.А., 120, 121  
Лобач А.В., 89  
Лобачев М.П., 122  
Лопатухин А.Л., 275  
Лопатухина И.Е., 275  
Лохин В.В., 52  
Лукин А.А., 180, 256, 261  
Лысенкова А.С., 234  
Любомиров Я.М., 123

Магомедова Д.К., 180  
Майоров А.Ю., 22  
Маламанов С.Ю., 124  
Малафеев О.А., 211, 212  
Маликов Е.Р., 220  
Малых К.С., 39  
Мальков В.М., 169, 181, 182  
Малькова Ю.В., 181, 182  
Мальцева А.С., 211  
Малюгин А.А., 35  
Малявкин Г.П., 60  
Мануйлов А.С., 258, 260  
Маракуева О.В., 126  
Маркачев Ю.Е., 252

Маркович Д.М., 125  
 Мастерова А.А., 192  
 Матвеев С.В., 111  
 Матвеев С.К., 127  
 Мельников Б.Е., 159  
 Мельников В.Г., 39  
 Мельников Г.И., 39  
 Мемнонов В.П., 228  
 Мехоношина М.А., 113  
 Мирошин Р.Н., 8, 128  
 Митяков А.В., 125  
 Митяков В.Ю., 125  
 Михасев Г.И., 160  
 Мишин Л.Д., 115  
 Мишина А.И., 116  
 Моисеев А.А., 129  
 Моллесон Г.В., 262  
 Молчанова А.Н., 82  
 Морозов В.А., 256, 261  
 Морозов В.М., 11, 38  
 Морозов Н.Ф., 9  
 Мостовых П.С., 117  
 Мошкин Р.П., 40

Нагнибеда Е.А., 113, 114, 130  
 Надымов Е.Н., 131  
 Нарбут М.А., 132  
 Наумова Н.В., 164, 184  
 Никифоров К.А., 263  
 Норин А.В., 240  
 Нурмухамбетов М.С., 121, 133, 134

Облапенко Г.П., 118  
 Овидько И.А., 179  
 Овсянников В.М., 135, 136  
 Овчинникова О.К., 137  
 Окунев Ю.М., 207  
 Орехов К.А., 200  
 Орлова Е.С., 128  
 Остов Ю.Я., 34

Павилайнен Г.В., 184  
 Павловский В.А., 124, 138  
 Панневиц О.В., 91  
 Папина К.В., 242  
 Пасынкова С.В., 276  
 Перевалова Е.В., 243  
 Перегудин С.И., 139, 140  
 Перегудова О.А., 221  
 Пичугин Ю.А., 212

Поплавская Т.В., 106, 107, 108  
 Потехина Е.А., 81  
 Потоцкая И.Ю., 206  
 Преснецова В.Ю., 185  
 Привалова О.Г., 207  
 Прозорова Э.В., 264  
 Пыхов Д.С., 141

Разов А.И., 166  
 Райнес А.А., 142  
 Решетова А.И., 106  
 Родюков Ф.Ф., 222  
 Романова М.С., 143  
 Ромашин С.Н., 185  
 Рудяк В.Я., 78, 144  
 Рупасов Д.А., 163  
 Рыдалевская М.А., 91, 143  
 Рябинин А.Н., 92, 109, 145  
 Рябов В.М., 187  
 Рязанцева М.Ю., 188

Савельев А.С., 119  
 Савенков Г.Г., 261  
 Савин А.В., 129, 146  
 Сальникова Т.В., 63  
 Самсонов В.А., 192, 207  
 Сапожников С.З., 125  
 Сафронов А.Н., 41  
 Свентицкая В.Е., 173, 174  
 Селюцкий Ю.Д., 208  
 Семенов А.С., 159  
 Семёнов Б.Н., 179  
 Семенов С.Г., 159  
 Сентябов А.В., 93  
 Сергеев В.С., 42  
 Сергушова В.А., 137  
 Сидоров Д.Г., 127  
 Силантьева О.А., 27, 28  
 Синильщиков Б.Е., 103  
 Синильщиков В.Б., 103  
 Смирнов А.Л., 79, 156, 232  
 Смирнов Е.М., 102  
 Смирнов П.Г., 146  
 Смирнов Р.И., 87  
 Смотров Л.В., 111  
 Соколов В.В., 96  
 Соколов Е.И., 146  
 Соколов Л.Л., 59  
 Соловьев С.Ю., 96  
 Солопов В.М., 43

Солтаханов Ш.Х., 13, 32, 277  
Сошников С.А., 265  
Старков В.Н., 147  
Стасенко А.Л., 262  
Степанов С.Я., 63  
Степанов Ю.Г., 148  
Стружанов В.В., 154, 158  
Судьенков Ю.В., 173, 174

Таранов А.Е., 122  
Тверев К.К., 223  
Терехова Н.М., 95, 149  
Тетерина И.В., 90  
Тихонов А.А., 13, 18, 57, 64  
Товстик П.Е., 9, 172, 196  
Товстик Т.П., 9  
Трифоненко Б.В., 223  
Тропп Э.А., 251  
Трофименко П.В., 244  
Трофимов С.П., 65  
Турешбаев А.Т., 58, 66  
Тхай В.Н., 23, 31, 44, 64

Уздин А.М., 30  
Усачева Т.В., 170  
Усенова А.Б., 97  
Усков В.Н., 73

Федорова Е.А., 237  
Федорова М.Ю., 30  
Федоровский Г.Д., 189  
Филиппов С.Б., 190  
Филончик Е.С., 160  
Флегонтова Е.Ю., 251  
Франус Д.В., 245  
Фроленкова Л.Ю., 185

Ханукаев Ю.И., 45  
Хитрых Д.П., 124  
Холодова С.Е., 139, 140  
Храбрый А.И., 102

Цибаров В.А., 141, 242  
Циркунов Ю.М., 89, 120, 121, 126, 133,  
134  
Цырюльников И.С., 107, 108

Чеврычкина А.А., 167  
Чернов С.В., 55  
Чивилихин С.А., 150

Чистов А.Л., 138  
Чумаченко Е.Н., 217

Шамина В.А., 177  
Шамолин М.В., 46  
Шарафутдинов И.З., 151  
Шаркова О.А., 278  
Шатров Е.А., 47  
Шашкова А.А., 121  
Шевырин А.А., 84  
Шелковина В.А., 198  
Шиманчук Д.В., 68  
Широбоков М.Г., 65  
Шишкин Е.В., 41  
Шмыров А.С., 60, 68  
Шоев Г.В., 83  
Шоркин В.С., 185  
Шумков С.Г., 152

Щепилина О.В., 233  
Щербин Б.О., 227

Эндер А.Я., 251, 253  
Эндер И.А., 251, 253

Юхнев А.Д., 237  
Юшков М.П., 8, 13, 32, 273

Яковлев А.Б., 266  
Яковлев С.П., 14  
Яковчук М.С., 100  
Япарова Е.Н., 162  
Ярцев Б.А., 123, 187

## CONTENTS

<b>PREFACE .....</b>	<b>3</b>
<b>PLENARY LECTURES .....</b>	<b>7</b>
R.N. Miroshin, M.P. Yushkov. In Commemoration of Professor K.I. Strakhovich (to the 110th Anniversary of His Birth) .....	8
A.K. Belyaev, N.F. Morozov, P.E. Tovstik, T.P. Tovstik. Dynamic Stability of a Thin Rod Under Axial Compression .....	9
D.A. Indeitsev, Yu.A. Mochalova. Dynamics of Continuum with Variable Structure .....	10
V.M. Morozov, V.I. Kalenova. Stability and Control Problems in Linear Time-Varying Systems .....	11
V. Erokhin. Bio-Inspired Systems of the Information Processing Based on Polymeric Elements .....	12
Sh.Kh. Soltakhanov, A.A. Tikhonov, M.P. Yushkov. On the Role of Saint Petersburg House of Scientists RAS in the Scientific Life of Saint Petersburg (on the 95th Anniversary of the Foundation) .....	13
G.T. Aldoshin, S.P. Yakovlev. Mechanical Models of Quantum Mechanics Systems Oscillations .....	14
N.N. Polyakhov ( Jr.). Nikolay Nikolaevich Polyakhov (1906 - 1987) (Short Personal and Scientific Biography) .....	15
<b>THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS .....</b>	<b>17</b>
C.B. Dolicanin, A.A. Tikhonov. On Dynamical Equations in S-Parameters for Rigid Body Attitude Motion .....	18
M. Pascal, S.Ya. Stepanov. A New Model of Dry Friction Oscillator : Periodic Motions with Overshooting Parts .....	19
S.A. Korneev, I.G. Kolyari, S.P. Androsov. Use of Operational Calculation in the Solution of Problems of the Course of Resistance of Materials .....	20
A.E. Baikov. Non-Autonomous Integrals of Quasi-Conservative System with One or Two Degrees of Freedom: Construction and Application .....	21
U. Mayorov, A. E. Baikov. On the Stability of Rod-Like System with Three Degrees of Freedom under the Action of Tracking Force .....	22
I.N. Barabanov, V.N. Tkhai. Oscillations of Identical Weekly Coupled Systems .....	23
A.B. Biachkov. Problem of Particular Configuration in Constrained System Dynamics .....	24
D. Yu. Volkov, K.V. Galunova. On Some Bifurcations near Resonant Hopf–Hopf Interaction .....	25
V. A. Dievskii. Applying the Coenergy Concept to the Description of the Variable Mass Point Movement .....	26
N.N. Dmitriev, O.A. Silantyeva. Static and Dynamics of Systems under Asymmetric Orthotropic Friction .....	27
O.A. Silantyeva, N.N. Dmitriev. Movement Evolution of Thin Elliptical Plate on a Plane Surface under Anisotropic Friction Forces .....	28
A.S. Kuleshov, D.S. Dobrynin. Motion of a Rotationally Symmetric Ellipsoid on a Perfectly Rough Plane .....	29
A.A. Dolgaja, A.M. Uzdin, M.Y. Fedorova. The Analysis of Parameters for Modeling Earthquake Inputs .....	30
A.P. Evdokimenko, V.N. Tkhai. On Sympathetic Pendulums Dynamics .....	31
S. A. Zegzhda, Sh. Kh. Soltakhanov, M. P. Yushkov. Oscillation Suppression on the Basis of a Generalized Gauss Principle Followed by the Minimization of Functionals Given .....	32
A.V. Zykov. Controllable Deployment of a Rotating Solar Sail From the Packed Configuration .....	33
A.P. Ivanov, Y.J. Ostov. About the Problem of Flight Dynamics .....	34
A.A. Malugin, D.V. Kazunin, N.V. Kuznetsov. Drillstring-hole Calculation in Drilling Simulator .....	35
M.D. Kovalev. Plane Hinge Devises not Restorable from Self Stresses .....	36
I.G. Kolyari. Behaviour of the Stream of Energy at Absolutely Elastic Blow of Three Bodies .....	37

D.A. Lebedev, V.M. Morozov. Stability of Stationary Movements of a Monocycle on the Ice Surface .....	38
V.G. Melnikov, K.S. Malykh, G.I. Melnikov. Poincare-Dulac Method with Chebyshev Economization in Autonomous Mechanical Systems Simulation Problem .....	39
R.P. Moshkin. Application of Poincare Equations in the Problems about Rolling Solid Bodies. Appel Equations. Energy of Accelerations .....	40
E.V. Shishkin, A.N. Safronov. Research of Dynamics of Vibratory Jaw Crusher with Inclined Crushing Chamber .....	41
V.S. Sergeev. On the Resonance Oscillations of a Plate in an Unsteady Flow .....	42
V.M. Solopov. N-step $n + 2$ th Order Stable Method for Linear Ordinary Differential Equations .....	43
V.N. Tkhai. On the Symmetry of the Oscillations of the Lagrange Systems .....	44
Y.I. Khanukaev. Analytical Solution of the Equations of Dynamics Heavy Solid Body with the Motionless Point .....	45
M.V. Shamolin. On Problem of Conic Form Body Motion in a Medium .....	46
E.A. Shatrov. New Approach to the Solution of the Task on Clearing of Fluctuations of the Cart with Pendulums .....	47
<b>DYNAMICS OF NATURAL AND ARTIFICIAL CELESTIAL BODIES .....</b>	<b>49</b>
A.Yu. Aleksandrov, K.A. Antipov, A.V. Platonov, A.A. Tikhonov. On a Satellite Stabilization in the König Frame .....	50
P.S. Krasilnikov, R.N. Amelin. On the Rotation of Saturn Around the Center of Mass under the Action of Gravitational Moments of the Sun and Jupiter .....	51
L.A. Egorova, V.V. Lokhin. On the Modeling of Large Fireball Destruction in the Atmosphere .....	52
N.A. Zelenina. Synergetic Synthesis of Orbital Maneuvering for Artificial Earth Satellites .....	53
V.O. Kalas, P.S. Krasilnikov. On the Investigation of Stability of Equilibrium in Sitnikov Problem in Nonlinear Formulation .....	54
E.K. Kolesnikov, S.V. Chernov. Some Features of Dynamics of Ensemble of the Technogenic Microparticles Instantaneous Injected in a Near-Earth Space by the Point Source Moving on the Elongated Elliptic Orbit with a Low Perigee.....	55
V.S. Korolev. Simulate Multi-Impulse Spaceship Trajectory with Presence Restriction .....	56
E.A. Kosjakov, A.A. Tikhonov. On Nonlinear Resonances in Oscillations of Charged Satellite .....	57
A.L. Kunitsyn, A.T. Tureshbaev. Stabilization of Orbital Station Relative Equilibrium in the Afterlunar Collinear Libration Point .....	58
L.L. Sokolov, G.A. Kuteeva. On the Consequences of Resonant Returns of Near-Earth Asteroids ....	59
A.S. Shmyrov, G.P. Maliavkin. Inter-Orbital Transfer to the Neighborhood of a Collinear Libration Point .....	60
N.A. Petrov, A.A. Martyusheva, E.N. Polyakhova, K.I. Os'kina. Solar Radiation Pressure Influence in Motion of Asteroids, Including Near- Earth Objects .....	61
A.V. Rodnikov. On Equilibria of a Space Station Tethered to an Oblate Asteroid .....	62
T.V. Salnikova, S.Ya. Stepanov. On the Kordylewski Cosmic Dust Clouds .....	63
A.A. Tikhonov, V.N. Tkhai. On Symmetrical Oscillations of Gyrostat in Weak Elliptic Orbit .....	64
M.G. Shirobokov, S.P. Trofimov. An Overview of Stationkeeping Methods for Collinear Libration Point Orbits .....	65
A.T. Tureshbaev. Stability of Triangular Libration Points of the Photogravitational Restricted Circular Three Body Problem with Two Radiating Masses .....	66
V.V. Chistyakov. Highly Precise Parametrical Equation for the Trajectory of a Point Mass Projectile in Air Under Head-, Tail- or Side Wind Conditions .....	67
D.V. Shymanchuk, A.S. Shmyrov. Maneuvering in Near-Earth Space with the Use of the Collinear Libration Points .....	68
A.S. Shmyrov, V.A. Shmyrov. The Approximation of Controllability Area in the Problem of Controllable Movement in a Neighborhood of Collinear Libration Point .....	69

<b>MECHANICS OF FLUIDS AND GASES .....</b>	<b>71</b>
P.A. Kuibin, M.V. Agafontseva. Investigation of Diffusion of the Helical Vortex of Small Diameter in Low-Viscosity Liquid .....	72
V.N. Uskov, M.V. Alekseeva. On Enthalpy Variation in Wave Process .....	73
B.S. Baykov, E.V. Kustova. The Coefficient of Bulk Viscosity in Non-Equilibrium Flows .....	74
V.L. Bakulev. Suppression of Supersonic Block Jets Noise by Water Injection .....	75
O.V. Barinova. Added Masses Some Axisymmetric Bodies, Arising in the Theory of Local Interaction .....	76
D.K. Bayalina, E.V. Kustova. Calculation of Dissociation Cross-Sections Using Inverse Laplace Transformation .....	77
V.Ya. Rudyak, A.A. Belkin. Statistical Mechanics of Transport Processes in Dispersed Systems, Including Nanofluids .....	78
A.N. Bestuzheva, A.L. Smirnov. Propagation Dynamics of Toxic Pollutants on the Water Surface and in Water .....	79
D. Bobyliev. Numerical Simulation of Free-surface Creeping Flow with Boundary Element Method .....	80
V.I. Bogatko, G.A. Kolton, E.A. Potekhina. About an Approach to the Solution of Problem of a Three-Dimensional Hypersonic Flow Past a Thin Wing .....	81
Ye.A. Bondar, A.N. Molchanova, A.V. Kashkovsky. Surface Chemistry Model for the Direct Simulation Monte Carlo Method.....	82
G.V. Shoev, Y.A. Bondar. Numerical Simulation of Flows with Thermochemical Non-Equilibrium using Ansys Fluent.....	83
Ye.A. Bondar, P.V. Vashchenkov, A.V. Kashkovsky, A.A. Shevyrin. A Study of Ionized High-Enthalpy Flows by the Direct Simulation Monte Carlo Method .....	84
I.G. Brykina. Analytical Prediction of Heat Transfer on Fully Catalytic Surface in 2D and 3D Hypersonic Flows .....	85
V.A. Bubnov. The New Form of Hydrodynamic Equations with Variable Density is Represented .....	86
R.I. Smirnov, O.V. Buturlimov. Calculation of Gas-Liquid Mixture Parameters Distribution over the Depth of the Production Well for the Hardware-Software Complex of the Offshore Ice-Resistant Platform "Prirazlomnaja" .....	87
N.Y. Bykov, Y.E. Gorbachev. Direct Simulation Monte Carlo of Condensation Process in Gas Phase .....	88
A.A. Veryovkin, A.V. Lobach, Yu.M. Tsirkunov. Initial Phase Condensation of Water Vapor in a Hypersonic Shock Tunnel .....	89
K.N. Volkov, V.N. Emelyanov, I.V. Teterina. Dynamics and Combustion Non-Spherical Particle in Non-Uniform Flow Field .....	90
O.V. Pannevitc, M.A. Rydalevskaya, Yu.N. Voroshilova. Shock Waves in Nonequilibrium Flows of Partially Dissociated Gas .....	91
V.G. Gabdylkhakova, A.N. Ryabinin. Experimental Study of Prism Rotational Oscillations in the Airflow .....	92
A.V. Sentyabov, A.A. Gavrilov. Numerical Simulation of the Swirling Flows by Means of Unsteady Reynolds stress model .....	93
A.M. Gaifullin. Mathematical Models of the Vortex Wake and of the Aircraft Aerodynamics in a Vortex Wake .....	94
S.A. Gaponov, N.M. Terekhova. Management Flow Regimes in a Gradient Flow on Solid and Porous Surfaces .....	95
A.S. Guzeev, V.V. Sokolov, S.U. Solovev. Development of Methods of Reducing the Fluctuations of Elements Aeroelastic Bridge Structures .....	96
N.Zh. Jaichibekov, A.B. Usenova. Rarefied Gas Flow Around Bodies .....	97
V.N. Emelyanov, A.G. Karpenko. Modeling of the Air Blast Wave Interaction with Obstacles .....	98

N.N. Ermolaeva, G.I. Kurbatova. The Models of Heat Transfer in a Sea Gas-Pipeline at the Glaciation .....	99
P.A. Eshakov, O.N. Zasukhin, M.S. Yakovchuk. Numerical Modeling of Self-Oscillatory Processes of a Radial Jet with the Cylindrical Resonator .....	100
O.G. Zavyalov. Lubrication Task Solution of the Internal Combustion Engine Piston Pin and Its Parameters' Optimization .....	101
D.K. Zaytsev, E.M. Smirnov, A.I. Khrabry. Viscous Separation Phenomenon in a Single Wave Flowing Over an Obstacle .....	102
V.P. Zyuzlikov, B.E. Sinilshchikov, V.B. Sinilshchikov. Interaction Between Droplet Water Jets And High Temperature Gas Jets .....	103
N.G. Ivanov, V.V. Ris, N.A. Tschur. Numerical Modeling of Buoyancy-Induced Flow Through a Subsea Tube Bank .....	104
V.A. Istomin, E.V. Kustova. Influence of Electronic Excitation on High-Temperature Gas Mixture Flows behind Strong Shock Wave .....	105
A.I. Reshetova, S.V. Kirilovskiy, T.V. Poplavskaya. Evolution of Disturbances in a Shock Layer on a Flat Plate into a Vibrational Excited Flow of Gase Mixtures .....	106
S.V. Kirilovskiy, T.V. Poplavskaya, I.S. Tsyryulnikov. Influence of Vibrational Relaxation of CO <sub>2</sub> on the Evolution of Disturbances in a Hypersonic Shock Layer on a Flat Plate .....	107
S.V. Kirilovskiy, T.V. Poplavskaya, I.S. Tsyryulnikov. Spectral Distribution of Disturbances in Pulse Aerodynamic Tunnel .....	108
N.A. Kiselev, A.N. Ryabinin. Cylinder Rotational Oscillations in the Airflow .....	109
V.M. Kuznetsov, K.B. Tereshkina. Continual Model of Nanostructures, Clusters and Massive Bodies .....	110
M.M. Kuznetsov, S.V. Matveev, L.V. Smotrova. Translational Nonequilibrium Pyrolysis of Molecular Gases in Shock Waves .....	111
P.A. Kuibin. Models of Helical Vortices with Smooth Vorticity Distribution .....	112
O.V. Kunova, E.V. Kustova, M.A. Mekhonoshina, E.A. Nagnibeda. Heat Flux behind a Shock Wave in the State-to-State Approximation .....	113
O.V. Kunova, E.A. Nagnibeda. Vibrational and Chemical Relaxation behind the Shock Waves Formed in Non-equilibrium Gas Mixtures Flows .....	114
L.D. Mishin, E.V. Kustova. On the Influence of Multi-Quantum Vibrational Transitions on Gas-Dynamic Parameters of Flows Behind Shock Waves .....	115
A.I. Mishina, E.V. Kustova. Spatially Homogeneous Relaxation of CO Molecules with Resonant VE Transitions .....	116
E.V. Kustova, P.S. Mostovyykh. Boundary Conditions for Slightly Rarefied Chemically Nonreactive Gas Mixtures in an Energy-Distinguishing Approach .....	117
E.V. Kustova, G.P. Oblapenko. Vibrational Relaxation Rates in Multi-Temperature Rarefied Gas Flows .....	118
A.S. Savelev, E.V. Kustova. On the Choice of Parameters for the Treanor-Marrone Model of State-To-State Dissociation Rate Coefficients .....	119
M.A. Lobanova, Yu.M. Tsirkunov. Modeling of the Large-Scale Vortex Structure in the Near Jet-Vortex Wake Behind an Aircraft .....	120
A.A. Shashkova, M.S. Nurmukhambetov, M.A. Lobanova, Yu.M. Tsirkunov. Numerical Investigation of Flow and Aerodynamic Characteristics of a Hypersonic Vehicle .....	121
A.E. Taranov, M.P. Lobachev. Influence of the Laminar-Turbulent Transition on the Accuracy of the Propeller Characteristics Prediction .....	122
Y.M. Lubomirov, B.A. Yartsev. Classical Flutter of the Anisotropic Composite Wing .....	123
S.Y. Malamanov, V.A. Pavlovskiy, D.P. Khitrykh. Simulation of Rotating Movement of Conducting Fluids .....	124
S.Z. Sapozhnikov, V.Y. Mityakov, A.V. Mityakov, D.M. Markovich. Combination PIV Method and Gradient Heat Flux Measurement for Heat Transfer and Fluid Dynamics Research .....	125
O.V. Marakueva, Yu.M. Tsirkunov. Investigation of Flow Structure in Blade Channels of a Helicopter Gas Turbine Compressor at Different Flight Conditions .....	126

S.K. Matveev, D.G. Sidorov. Stationary Stratified Flow of Two Incompressible Fluids in an Inclined Pipe .....	127
R.N. Miroshin, E.S. Orlova. Inequalities for the Drag of a Convex Body in the Theory of Local Interaction .....	128
A.A. Moiseev, A.V. Savin. Modeling of Physical and Chemical Processes in a Shaft Lime Kiln with Gas Fuel .....	129
E.A. Nagnibeda. Current Problems of Non-equilibrium Kinetics in High-Temperature Air Flows. Problems and Results .....	130
E.N. Nadymov. Calculation of Added Masses with Approximation of Drop-Shaped Bodies .....	131
M.A. Narbut. Electrokinetic Polarization in the Theory of Ground Water Filtration .....	132
M.S. Nurmukhambetov, Y.M. Tsirkunov. Computational Simulation of Flow and Heat Transfer in the Shock Layer of a Blunt Body with Tangential Gas Injection through a Slot Nozzle Near the Stagnation Point .....	133
M.S. Nurmukhambetov, Y.M. Tsirkunov. Numerical Simulation of Large-Scale Vortex Structure of the Near Wake for the Aircraft at Supercritical Angles of Attack .....	134
V.M. Ovsyannikov. The Pair of the Deformations is the Reason of Occurrence of Terms of the High Order on the Time in Euler's Conclusion of the Equation of Continuity .....	135
V.M. Ovsyannikov. Formation of the Regagliptes on the Surface of the Meteorite, which Enters in the Atmosphere of the Earth .....	136
O.K. Ovchinnikova, V.A. Sergushova. Simulation of Vacuum Jets .....	137
V.A. Pavlovsky, A.L. Chistov. Turbulence f-model Use for Rough Wall Channels and Pipes Internal Flows Research .....	138
S.I. Peregudin, S.E. Kholodova. Impact of Long Waves on the Bottom Rheology .....	139
S.I. Peregudin, S.E. Kholodova. Influence of the Magnetic Field Diffusion on the Large and Large-Scale Wave Movements .....	140
D.C. Pykhov, V.A. Tsibarov. Quasi-one-dimensional Flows of Non-Newton Fluids .....	141
A.A. Rajnes. Two Problems about Interaction of the Supersonic Gas Mixture with a Wall .....	142
M.S. Romanova, M.A. Rydalevskaya. Influence of Thermal Ionization on Small Perturbations Velocity in Monatomic Gas .....	143
V.Ya. Rudyak. Transport processes in Nanofluids. Current State, Problems and Perspectives .....	144
A.N. Ryabinin. Calculation of Transonic Flow past the Twisted Wings .....	145
A.V. Savin, E.I. Sokolov, P.G. Smirnov. Control of Floppy Circulation Zone Inside Low-Pressure Supersonic Jets .....	146
V.N. Starkov. Equations of Dynamics for an Ostwald Fluid Spherical Layer .....	147
Yu.G. Stepanov. Some Features of Application of the Continuous Medium with Couple-Stresses Model in Hydrodynamics and Hydrophysics .....	148
N.M. Terekhova. Evolution by Natural and Controlled Disturbances in Supersonic Boundary Layer .....	149
S.A. Chivilikhin. The Stokes Equations in the Non-Inertial System of Reference .....	150
I. Z. Sharafutdinov. Two-Temperature Rate Coefficients of Chemical Reaction in Shock Heated Air .....	151
S.G. Shumkov. Shock Waves in Flows of Carbon Dioxide .....	152
<b>MECHANICS OF SOLIDS.....</b>	<b>153</b>
E.A. Bakhareva, V.V. Struzhanov. The Method of Stability Analysis of Circular Rods Torsion from Softening Material .....	154
E.B. Voronkova, S.M. Bauer. Free Vibration of Nonhomogeneous Transversaly Isotropic Circular Plates .....	155
S.M. Bauer, V.I. Ershov, A.L. Smirnov. Deformations of Spherical and Cylindrical Layers under Normal Pressure .....	156
F.S. Belyaev. Influence of Martensite Variants Interaction on Reversible and Irreversible Deformation in Shape Memory Alloys .....	157

K.V. Berdnikov, V.V. Struzhanov. Calculation of External Pressure Limit to Spherical Vessel From Softening Material .....	158
L.B. Getsov, A.S. Semenov, S.G. Semenov, B.E. Melnikov, V.A. Besschetnov. Modern Methods of Service Life Computation for Single Crystal Blades of GTU and Material Certification .....	159
G.I. Mikhasev, M.G. Botogova, E.S. Filonchik. Modeling of Buckling of Multi-walled Carbon Nanotube Embedded in Elastic Medium on the Base of Non-local Theory of Orthotropic Shells .....	160
E.L. Buldakov. Mathematical Modeling of the Impacts of Blast Waves on the Underground Oil Pipeline .....	161
A.E. Volkov, M.E. Evard, E.N. Iaparova. Calculation of Deformation of Porous Shape Memory Alloy .....	162
A.E. Volkov, D.A. Rupasov. The Calculation of the Stress Field in the Bend of the Plate Shape Memory Alloy under the Microstructural Model .....	163
N.V. Naumova, D.N. Ivanov, B.A. Ershov, T.V. Voloshinova. Mathematical Modelling of Cylindrical Shell Vibrations Under Internal Pressure of Fluid Flow .....	164
M.A. Grekov, S.A. Kostyrko. Surface Defect Formation in Nanosized Film Coatings Due to Diffusion Processes .....	165
V.I. Grigorieva, A.I. Razov. Thermomechanical Properties of TiNi-Alloy after High Strain Rate Loading .....	166
A.A. Gruzdkov, A.A. Chevrychkina. Application of Nonlocal Fracture Criteria for Strength Characteristics .....	167
Yu.M. Dahl. Some Basic Problems About Elastic Plane With Cuts .....	168
T.O. Domanskaia, V.M. Mal'kov. The Nonlinear Problem of Concentrated Force at the Interface of Two Half-Planes .....	169
A.M. Ermakov, T.V. Usacheva. Buckling of the Conjugated Spherical Segments under the Load with a Flat Base .....	170
M.V. Zabiyaikin. Low-Frequency Vibrations of Cylindrical Shell Stiffened by Rollers .....	171
A.V. Zelinskaya, P.E. Tovstik. Buckling under Axial Compression of a Transversely Isotropic Cylindrical Shell with the Weakly Supported Curvilinear Edge .....	172
B.A. Zimin, Y.V. Sudenkov, V.E. Sventitskaya. Dispersion Analysis of Two-Phase Generalized Model of Dynamic Thermoelasticity .....	173
B.A. Zimin, Y.V. Sudenkov, V.E. Sventitskaya. Dissipation Energy and Heat Generation Process in a Tip of Moving Crack for Polymer Materials .....	174
I.S. Zorin. Strain-Stress Asymptotic and Stability Nongomogenous Anisotropic Rods and Plates .....	175
K.A. Ignateva. Buckling of Axisymmetric Equilibrium States of Circular and Annular Plates Under Normal Pressure .....	176
S.A. Kabrits, V.A. Shamina. Cylindrical Shell under the Action of the Ring Load .....	177
Yu.I. Kadashevich, S.P. Pomytkin. The Influence of Initial Microstresses on Behavior of the Softening Materials in Geometrically Nonlinear Endochronic Theory of Inelasticity .....	178
A.S. Kochnev, I.A. Ovid'ko, B.N. Semenov. Tensile Strength of Graphene Containing 5-8-5 Defects .....	179
D.K. Magomedova, A.A. Lukin. Deformation and Fracture of Thin Rings Made of Aluminum Foil Coated with Copper Nanoparticles by Magneto-Pulse Method .....	180
Yu.V. Mal'kova, V.M. Mal'kov. The Analytical Solution of Plane Problem for a Plate with an Elastic Elliptic Inclusion .....	181
Yu.V. Mal'kova, V.M. Mal'kov. The Deformation of Bi-material Plate with an Elliptical Hole .....	182
Y.A. Mochalova, E.S. Merkushev. The Effect of Stress State on the Internal Structure of the Materials .....	183
G.V. Pavilaynen, N.V. Naumova. Elastic-Plastic Bending of the Cantilever Made of the Material with the SD-Effect .....	184
V.Yu. Presnetsova, S.N. Romashin, L.Yu. Frolenkova, V.S. Shorkin. Model of Adhesive Interaction Elastic Bodies .....	185

Y.G. Pronina, O.S. Sedova. Taking Account of Hydrostatic Pressure in the Modelling of Mechanochemical Corrosion of Spherical Shells .....	186
V.M. Ryabov, B.A. Yartsev. Coupled Damping Vibrations of Anisotropic Box Beams .....	187
M.Yu. Ryazantseva. On the Dynamic Theory of Laminated Composite Plates .....	188
G.D. Fedorovsky. Endochronic Modelling and Interrelation of Deformation and Strenght Properties of Initial and Nanostructural Materials .....	189
S.B. Filippov. Asymptotic Analysis of Buckling of the Cylindrical Shell Stiffened by Annular Plates .....	190
<b>STABILITY AND STABILIZATION OF MECHANICAL AND ELECTROMECHANICAL SYSTEMS .....</b>	<b>191</b>
A.A. Masterova, V.A. Samsonov, Sh.-Sh. Hwang. On Modeling of Influence of Blade Twist upon Dynamics of a HAWT .....	192
K.-H. Lin, A.P. Holub, L.A. Klimina, D.V. Gritsenko. Stabilization of a Steady Regime of a HAWT by Means of a Differential Planet Gear .....	193
F.F. Rodyukov, G.J. Soederbacka. Joint Work of Two Identical Synchronous Generators with Common RL-Load .....	194
A.Yu. Aleksandrov, A.P. Zhabko. Stability Analysis of Equilibrium Positions of Mechanical Systems with Delay via Decomposition .....	195
V.G. Bykov, P.E. Tovstik. On Stability of Pseudoregular Whirling Motions of the Flexible Rotor under Limited Excitation .....	196
V.G. Bykov, A.S. Kovachev. On Stability of Steady State Motions of a Rotor with Eccentric Ball Autobalancing Device .....	197
V.G. Bykov, V.A. Shelkovina. Simplified Models for Research of Dynamics and Stability of a Rotor with the Ball Autobalancing Device .....	198
E.S. Gebel. Restructuring the Positions Space of the 6 DOF Stewart's Platform .....	199
D.S. Glushkova, K.A. Orekhov. Mathematical Modeling and Stability Investigation of Wind-Power Station .....	200
M.N. Demenkov. Estimating Region of Attraction by Lyapunov Functions in MATLAB .....	201
Zh.T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde, O.O. Yanochkina. Multistability and Hidden Attractors in Nonsmooth Dynamical Systems .....	202
S.M. Zuev. Safety of Stewart Tripod Platform Movement .....	203
M.A. Kiseleva, N.V. Kondratyeva, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov. Stability and Oscillations of Drilling Systems with Synchronous Motor .....	204
V. Korolev. Integration of Dynamical Systems and Stability Solution on a Part of the Variables .....	205
V.S. Korolev, I.Yu. Pototskaya. Stability Solution on a Part of the Variables .....	206
Yu.M. Okunev, O.G. Privalova, V.A. Samsonov. The Geometry of Domains of Stability of Systems with Different Dimensions .....	207
Yu.D. Selyutskiy. On Motion Control of an Aerodynamic Pendulum .....	208
<b>ELECTROMECHANICS, MECHATRONICS, ROBOTICS .....</b>	<b>209</b>
Kulakov F.M., Alferov G.V., Efimova P.A. Remote Control Methods Space Robots .....	210
G.V. Alferov, O.A. Malafeyev, A.S. Maltseva. Programming the Robot in Tasks of Inspection and Interception .....	211
G.V. Alferov, O.M. Malafeyev, Yu.A. Pichugin. Parameters Estimation in Mechanisms Design .....	212
A.S. Andreev. Motion Control Of The Mobile Wheeled Robot .....	213
A.G. Beloshapko, V.V. Bubnov, V.N. Latypov. Control of Hybrid Dynamical Systems in Bipedal Walking .....	214
M.Z. Dosaev, O.E. Vasiukova. Video tactile sensor for Robot Sensory System .....	215
D.M. Kostygova, D.V. Kazunin, R.A. Ganin, N.V. Kuznetsov. Imitational Motion Replay of Heavy Mining Shovels .....	216
O.S. Erokhina, E.N. Chumachenko. A Technique to Simulate Melting Probe's Movement and to Estimate Penetration Velocities' Range .....	217
M.A. Kiseleva, N.V. Kondratyeva, N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov. Electromechanical and Mathematical Models of AC Electrical machines .....	218

P.A. Komarov. Low Limb Exoskeleton Hydraulic Drive Control .....	219
Ye.R. Malikov. Using Maggie's Equations for Description of the Dynamics of Omni-Wheeled Robot .....	220
O.A. Peregodova. Motion Control of the Manipulator with Elastic Joints .....	221
F.F. Rodyukov. Generalization of the Method of the Electromechanical Analogs .....	222
B.V. Trifonenko, K.K. Tverev. Dual Robocrane .....	223
<b>MICROELECTROMECHANICAL SYSTEMS .....</b>	<b>225</b>
Mohammad Bostani, Ardeshir Karami mohammadi. Free Vibration Analysis of Axially FGM Tapered Icro Beam, Using Modified Strain Gradient Elasticity .....	226
B.O. Shcherbin, A.V. Ankudinov. An Experimental Determination of Nanobridge Boundary Conditions for Improved Three-Point AFM Technique .....	227
V.P. Memnonov. Nanosize Roughness of Microelectomechanical Devices and Winchesters .....	228
<b>BIOMECHANICS .....</b>	<b>229</b>
Zana C. Dolicanin, Dragan T. Spasic. An Ocular Biomechanics Model Describing Early Glaucoma Caused Alterations in the Peripapillary Sclera .....	230
N. Kutev, S. Tabakova, S. Radev. Approximation of the Oscillatory Blood Flow Using the Carreau Viscosity Model .....	231
S.M. Bauer, E.B. Voronkova, Z.G. Ershova, A.L. Smirnov. Change of Intraocular Pressure after Intravitreal Injection .....	232
O.V. Shchepilina, P.I. Begun. Methods and Analysis of Research Status of Callus at Different Stage of Rehabilitation of Patients with Bone Fractures Lower Limbs .....	233
P.I. Begun, D.S. Godonyuk, E.A. Lebedeva, A.S. Lyisenkova. Method of Research of Mechanical Properties of Structures of the Backbone .....	234
E.O. Bodenkova. Problem of Interaction of Two Bioobject .....	235
L.A. Venatovskaya. Estimation of the Intraocular Readings Obtained after Refractive Surgery .....	236
E.A. Fedorova, Y.A. Gataulin, A.D. Yukhnev. Numerical and Experimental Investigation of Stationary and Pulsatile Swirling Flows in a Stenosis Model .....	237
S.I. Erokhina. Targeted Delivery and Induced Release by Polymeric Containers .....	238
A.V. Ivchenkova. The Mathematical Modeling of Measurement of Intraocular Pressure with a Pneumotonometer .....	239
A.A. Klementyeva, A.V. Norin. Boundary Conditions for Spherical Electrostatic Probe in a Weakly Ionized Collisional Plasma .....	240
A.A. Kuznetsova. Structure Analysis of Speech Signals and Filtering Them from Noise .....	241
V.A. Tsibarov, K.V. Papina. Blood Physical Properties Description .....	242
E.V. Perevalova. Morphometry Distribution of the Extracellular Matrix in Articular Cartilage .....	243
P.V. Trofimenko. Non-Classical Theory of Anisotropic Shells in Problems of the Deformation of Spherical Shells under the Influence of the Normal Pressure .....	244
D.V. Franus. Change of Stress-Strain State of the Cornea after Vision Correction Surgery .....	245
<b>PHYSICAL MECHANICS .....</b>	<b>247</b>
K.R. Abdullaev, T.A. Khantuleva. Stress, Strain and Strain-Rate in the Shock-Induced Processes ...	248
I.A. Amelyushkin. Model of Crystallization and Stability of the Supercoolness of a Metastable Liquid Falling on a Solid Body .....	249
I.A. Amelyushkin. Restoration of the Two-phase Flow Parameters via Scattered Probe Radiation ..	250
L.A. Bakaleinikov, E.A. Tropp, E. Yu. Flegontova, A. Ya. Ender, I.A. Ender. Nonlinear Gas Relaxation for Pseudo-Power Interaction Cross Section .....	251
A.V. Geliev, Y.E. Markachev. About the Equation of State for Real Gas Within the Quasi-Chemical Cluster Model .....	252

I.A. Ender, A.Ya. Ender, A.B. Gerasimenko. Evolution of non-stationary ion distribution function after the high-frequency AC field application. Different models of interactions .....	253
E.G. Kolesnichenko, Yu.E. Gorbachev. Gas-Dynamic Equations for Reactive Gas Mixtures: Problems And Solutions .....	254
Yu.F. Gunko, N.A. Gunko. Motion of Charged Nano-and Microparticles Near an Emitting Surface .....	255
N.A. Gunko, Y.F. Gunko, O.K. Zaychenko, A.A. Lukin, V.A. Morozov. Deformation and Fracture of Thin Ring Samples of Copper and Aluminum by Magnetic Pulse Method .....	256
A.V. Demytyev. On the Influence of the Rotational Movements in the System "Compact Source – Spherical Reflector" on the Properties of the Reflected Signal .....	257
E.K. Kolesnikov, A.G. Zelenskiy, A.S. Manuilov. On Some Features of the Influence of Parameters on the Behavior of the Plasma Channel Ion Hose Instability of a Relativistic Electron Beam .....	258
E.K. Kolesnicov, G.N. Klyushnicov. About Drift Approach Applicability Regions in the Problem for Dynamics of a Charge Particle in a Superposition of Dipole and Uniform Magnetic Fields .....	259
E.K. Kolesnikov, A.S. Manuilov. Influence of the Relativistic Electron Beam Radius Time Dependence on the Development of a Ion Hose Instability in the Ion Focused Regime .....	260
V.A. Morozov, G.G. Savenkov, A.A. Lukin. Investigation of Ignition of Energy-Storage Materials by Product of Electrical Explosion of Conductors .....	261
G.V. Molleson, A.L. Stasenko. Physical Mechanics and Thermophysics of the Gas– Particle Jet Interaction with a Solid Body .....	262
K.A. Nikiforov. Simulation of Structure of Sample in Atom Probe Tomography and Field Electron Microscopy .....	263
E.V. Prozorova. Effect of Dispersion and Delay in Continuum Mechanics .....	264
S.A. Soshnikov. Geometrohydrodynamics .....	265
A.B. Yakovlev. The Corrected Method for Calculation of Electrostatic Potential Near to Surface of Nonatmospheric Space Body and the Analysis of Possible Modes of Dust Particles Motion .....	266
<b>HISTORY OF MECHANICS .....</b>	<b>267</b>
G.A. Akimov. The Study of Supersonic Waves in the Baltic State Technical University (the Interaction of Shock Waves).....	268
O.V. Gazieva. Saint Petersburg – Three Centuries of Science .....	269
I.I. Demidova. P.F. Lesgaft – One of Founders of Experimental Biomechanics in Russia .....	270
V.V. Ivanova. Teaching the Elements of Mechanics to Pupils of Primary School in the Frame of Extracurricular Activity .....	271
G.A. Kuteeva, B.A. Ershov. Mechanisms of P.L. Tchebyshev in Mechanical Cabinet of Saint-Petersburg University .....	272
G.A. Kuteeva, M.P. Yushkov. Works on Mechanics by Pafnutiy Lvovich Chebyshev .....	273
D.A. Lisachenko. Mechanics in High School at the Stage of Convergence between Sciences and Humanities .....	274
I.E. Lopatukhina, A.L. Lopatukhin. Teaching Activities of Academician A. N. Krylov .....	275
S.V. Pasyukova. From the History of Mechanics Teaching in Petrovsky Imperial Commercial School .....	276
Sh.Kh. Soltakhanov. On the Significance of the Operator From Polyakhov in Nonholonomic Mechanics .....	277
O.A. Sharkova. Leonhard Euler Address on Vasilievsky Island .....	278
<b>AUTHOR INDEX .....</b>	<b>279</b>
<b>CONTENTS .....</b>	<b>288</b>

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	<b>3</b>
<b>ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ</b> .....	<b>7</b>
Р.Н. Мирошин, М.П. Юшков. Памяти профессора К.И. Страховича (к 110-летию со дня рождения) .....	8
А.К. Беляев, Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик, Т.П. Товстик. Динамическая устойчивость тонкого стержня при продольном сжатии .....	9
D.A. Indeitsev, Yu.A. Mochalova. Dynamics of Continuum with Variable Structure .....	10
В.М. Морозов, В.И. Калёнова. Вопросы устойчивости и управления в линейных нестационарных системах .....	11
В.В. Ерохин. Био-подобные системы обработки информации на основе полимерных элементов .....	12
Ш.Х. Солтаханов, А.А. Тихонов, М.П. Юшков. О роли дома ученых им. М.Горького РАН в научной жизни Санкт-Петербурга (к 95-летию со дня основания) .....	13
Г.Т. Алдошин, С.П. Яковлев. Механические модели колебаний квантово-механических систем .....	14
N.N. Polyakhov ( Jr.). Nikolay Nikolaevich Polyakhov (1906 - 1987) (Short Personal and Scientific Biography) .....	15
<b>ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА</b> .....	<b>17</b>
Ч.Б. Доличанин, А.А. Тихонов. Об уравнениях динамики вращательного движения твёрдого тела в s-параметрах .....	18
M. Pascal, S.Ya. Stepanov. A New Model of Dry Friction Oscillator: Periodic Motions with Overshooting Parts .....	19
С.А. Корнеев, И.Г. Коляри, С.П. Андросов. Использование операционного исчисления в решении задач курса сопротивления материалов .....	20
А.Е. Байков. Построение и применение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной или двумя степенями свободы .....	21
А.Ю. Майоров, А.Е. Байков. Об устойчивости стержневой системы с тремя степенями свободы, нагруженной следящей силой .....	22
И.Н. Барабанов, В.Н. Тхай. Колебания слабо связанных идентичных систем .....	23
А.Б. Бячков. Проблема особых положений в динамике связанных систем .....	24
D. Yu. Volkov, K.V. Galunova. On Some Bifurcations Near Resonant Hopf–Hopf Interaction .....	25
В.А. Диевский. Применение понятия коэнергии к описанию движения точки переменной массы .....	26
Н.Н. Дмитриев, О.А. Силантьева. Статика и динамика систем при наличии сил ортотропного асимметричного трения .....	27
О.А. Силантьева, Н.Н. Дмитриев. Исследование движения тонкой эллиптической пластины по горизонтальной плоскости с анизотропным трением .....	28
А.С. Кулешов, Д.С. Добрынин. О движении динамически симметричного эллипсоида вращения по неподвижной абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости .....	29
А.А. Долгая, А.М. Уздин, М.Ю. Федорова. Выбор параметров, определяющих модели сейсмических воздействий .....	30
А.П. Евдокименко, В.Н. Тхай. К динамике симпатических маятников .....	31
С.А. Зегжда, Ш.Х. Солтаханов, М.П. Юшков. Гашение колебаний на основе обобщенного принципа Гаусса с последующей минимизацией заданных функционалов .....	32
А.В. Зыков. Управляемое раскрытие вращающегося солнечного паруса из уложенного состояния .....	33
А.П. Иванов, Ю.Я. Остов. Оптимизация в задаче динамики полета .....	34

А.А. Малюгин, Д.В. Казунин, Н.В. Кузнецов. Расчет динамики бурильной колонны в скважине в тренажере бурения .....	35
М.Д. Ковалёв. Плоские шарнирные конструкции, невосстановимые по внутреннему напряжению .....	36
Коляри И. Г. Поведение потока энергии при абсолютно упругом ударе трех тел .....	37
Д.А. Лебедев, В.М. Морозов. Устойчивость стационарных движений одноколесного экипажа на ледяной поверхности .....	38
В.Г. Мельников, К.С. Малых, Г.И. Мельников. Метод Пуанкаре-Дюлака с экономизациями Чебышева в проблеме моделирования автономных механических систем.....	39
Р.П. Мошкин. Применение уравнений Пуанкаре в задачах о качении твердых тел. Уравнения Аппеля. Энергия ускорений .....	40
Е.В. Шишкин, А.Н. Сафронов. Исследование динамики вибрационной щековой дробилки с наклонной камерой дробления.....	41
В.С. Сергеев. О резонансных колебаниях пластины в нестационарном потоке .....	42
В.М. Солопов. N-шаговые устойчивые методы порядка $n+2$ для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.....	43
В.Н. Тхай. О симметричности колебаний Лагранжевой системы .....	44
Ю.И. Ханукаев. Аналитическое решение уравнений динамики тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой .....	45
М.В. Шамолин. К задаче о движении тела конической формы в среде.....	46
Е.А. Шатров. Новый подход к решению задачи о гашении колебаний тележки с маятниками.....	47
<b>ДИНАМИКА ЕСТЕСТВЕННЫХ И ИСКУССТВЕННЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ.....</b>	<b>49</b>
A.Yu. Aleksandrov, K.A. Antipov, A.V. Platonov, A.A. Tikhonov. On a Satellite Stabilization in the König Frame.....	50
П.С. Красильников, Р.Н. Амелин. О вращении Сатурна относительно центра масс под действием гравитационных моментов Солнца и Юпитера.....	51
Л.А. Егорова, В.В. Лохин. О моделировании разрушения крупных болидов в атмосфере .....	52
Н.А. Зеленина. Синергетический синтез систем орбитального маневрирования искусственных спутников земли .....	53
В.О. Калас, П.С. Красильников. Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке .....	54
Е.К. Колесников, С.В. Чернов. Некоторые особенности динамики ансамбля техногенных микрочастиц, мгновенно инжектируемых в околоземное космическое пространство точечным источником, движущимся по вытянутой эллиптической орбите с низким перигеем .....	55
В.С. Королев. Моделирование многоимпульсных траекторий космических аппаратов при наличии ограничений .....	56
Е.А. Косяков, А.А. Тихонов. О нелинейных резонансах в колебаниях заряженного ИСЗ.....	57
А.Л. Куницын, А.Т. Турешбаев. О стабилизации относительного равновесия орбитальной станции в залунной коллинеарной точке либрации.....	58
Л.Л. Соколов, Г.А. Кутеева. О последствиях резонансных возвратов астероидов, сближающихся с землей .....	59
А.С. Шмыров, Г.П. Малявкин. Межорбитальный переход в окрестность коллинеарной точки либрации.....	60
N.A. Petrov, A.A. Martyusheva, E.N. Polyakhova, K.I. Os'kina. Solar Radiation Pressure Influence in Motion of Asteroids, Including Near- Earth Objects .....	61
A.V. Rodnikov. On Equilibria of a Space Station Tethered to an Oblate Asteroid .....	62
Т.В. Сальникова, С.Я. Степанов. О космических пылевых облаках Кордылевского.....	63
А.А. Тихонов, В.Н. Тхай. О симметричных колебаниях гиростата на слабоэллиптической орбите .....	64
М.Г. Ширококов, С.П. Трофимов. Методы стабилизации неустойчивых орбит космических аппаратов в окрестности коллинеарных точек либрации.....	65
А.Т. Турешбаев. Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной	

ограниченной круговой задачи трех тел с двумя излучающими массами.....	66
V.V. Chistyakov. Highly Precise Parametrical Equation for the Trajectory of a Point Mass Projectile in Air Under Head-, Tail- or Side Wind Conditions .....	67
Д.В. Шиманчук, А.С. Шмыров. Маневрирование в околоземном космическом пространстве с использованием коллинеарных точек либрации .....	68
A.S. Shmyrov, V.A. Shmyrov. The Approximation of Controllability Area in the Problem of Controllable Movement in a Neighborhood of Collinear Libration Point .....	69
<b>ГИДРОАЭРОМЕХАНИКА .....</b>	<b>71</b>
П.А. Куйбин, М.В. Агафонцева. Исследование диффузии винтового вихря малого диаметра в маловязкой жидкости .....	72
В.Н. Усков, М.В.Алексеева. Особенности изменения удельного теплосодержания в волновых процессах различного типа .....	73
Б.С. Байков, Е.В. Кустова. Объемная вязкость в неравновесных течениях .....	74
В.Л. Бакулев. Снижение шума блочной сверхзвуковой струи с помощью впрыска воды .....	75
O.V. Barinova. Added Masses Some Axisymmetric Bodies, Arising in the Theory of Local Interaction .....	76
Д.К. Баялина, Е.В. Кустова. Расчет сечений реакции диссоциации с помощью обратного преобразования Лапласа .....	77
В.Я. Рудяк, А.А. Белкин. Статистическая механика процессов переноса в дисперсных средах, включая наножидкости .....	78
А.Н. Бестужева, А.Л. Смирнов. Динамика распространения токсичных веществ на поверхности и в толще воды .....	79
Д.Е. Бобылев. Численное моделирование медленных течений жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов .....	80
В.И. Богатко, Г.А. Колтон, Е.А. Потехина. Об одном подходе к решению пространственной гиперзвуковой задачи обтекания тонкого крыла .....	81
Е.А. Бондарь, А.Н. Молчанова, А.В. Кашковский. Модель поверхностных химических процессов для метода прямого статистического моделирования .....	82
Г.В. Шоев, Е.А. Бондарь. Численное моделирование газовых течений с учетом термохимической неравновесности в ANSYS Fluent .....	83
Е.А. Бондарь, П.В. Ващенко, А.В. Кашковский, А.А. Шевырин. Исследование ионизованных высокоэнтропийных течений методом прямого статистического моделирования Монте-Карло.....	84
И.Г. Брыкина. Аналитическое определение теплопередачи на идеально каталитической поверхности в двумерных и трехмерных гиперзвуковых течениях .....	85
В.А. Бубнов. Об уравнениях гидродинамики с переменной плотностью .....	86
Р.И. Смирнов, О.В. Бутурлимов. Расчет распределения параметров газожидкостной смеси по глубине добывающей скважины для программно-аппаратного комплекса морской ледостойкой платформы "Приразломная" .....	87
Н.Ю. Быков, Ю.Е. Горбачев. Прямое статистическое моделирование процесса конденсации в газовой фазе .....	88
А.А. Веревкин, А.В. Лобач, Ю.М. Циркунов. Начальная стадия конденсации паров воды в гиперзвуковой ударной аэродинамической трубе .....	89
К.Н. Волков, В.Н. Емельянов, И.В. Тетерина. Движение и горение частиц несферической формы в неоднородном потоке .....	90
Ю.Н. Ворошилова, О.В. Панневиц, М.А. Рыдалевская. Ударные волны в неравновесных потоках частично диссоциированного газа.....	91
В.Г. Габдылхакова, А.Н. Рябинин. Экспериментальное исследование вращательных колебаний призмы в воздушном потоке .....	92
А.В. Сентябов, А.А. Гаврилов. Численное моделирование закрученных течений с помощью нестационарной модели переноса Рейнольдсовых напряжений .....	93
А.М. Гайфуллин. Математические модели вихревого следа и аэродинамики самолета в вихревом следе .....	94

С.А. Гапонов, Н.М. Терехова. Управление режимами обтекания в градиентном потоке на твердой и пористой поверхностях .....	95
А.С. Гузеев, В.В. Соколов, С.Ю. Соловьев. Разработка способов уменьшения аэроупругих колебаний элементов мостовых сооружений .....	96
Н.Ж. Джайчибеков, А.Б. Усенова. Обтекание тел разреженным газом .....	97
В.Н. Емельянов, А.Г. Карпенко. Моделирование взаимодействия воздушной взрывной волны с преградами .....	98
Н.Н. Ермолаева, Г.И. Курбатова. Модели теплообмена в морском газопроводе при оледенении .....	99
П.А. Ешаков, О.Н. Засухин, М.С. Яковчук. Численное моделирование автоколебательных процессов веерной струи с цилиндрическим резонатором .....	100
О.Г. Завьялов. Решение задачи смазки подшипника поршневого пальца двигателя внутреннего сгорания и оптимизация его параметров .....	101
Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов, А.И. Храбрый. Явление вязкого отрыва в одиночной волне, натекающей на препятствие .....	102
В.П. Зюзликов, Б.Е. Синильщиков, В.Б. Синильщиков. Взаимодействие водокапельных струй с высокотемпературными газовыми струями .....	103
N.G. Ivanov, V.V. Ris, N.A. Tschur. Numerical Modeling of Buoyancy-Induced Flow Through a Subsea Tube Bank .....	104
В.А. Истомина, Е.В. Кустова. Влияние электронного возбуждения на высокотемпературные течения смеси газов за сильной ударной волной .....	105
А.И. Решетова, С.В. Кириловский, Т.В. Поплавская. Развитие возмущений в ударном слое на пластине в потоке смеси колебательно возбужденных газов .....	106
С.В. Кириловский, Т.В. Поплавская, И.С. Цырюльников. Влияние колебательной релаксации CO <sub>2</sub> на развитие возмущений в ударном слое на пластине .....	107
С.В. Кириловский, Т.В. Поплавская, И.С. Цырюльников. О модовом составе возмущений импульсной аэродинамической трубы .....	108
Н.А. Киселев, А.Н. Рябинин. Вращательные колебания цилиндров в воздушном потоке .....	109
V.M. Kuznetsov, K.V. Tereshkina. Continual Model of Nanostructures, Clusters and Massive Bodies .....	110
М.М. Кузнецов, С.В. Матвеев, Л.В. Смотрова. Поступательно неравновесный пиролиз газообразных молекулярных соединений в ударных волнах .....	111
П.А. Куйбин. Модели винтовых вихрей с гладким распределением завихренности .....	112
О.В. Кунова, Е.В. Кустова, М.А. Мехоношина, Е.А. Нагнибеда. Поток тепла за фронтом ударной волны в поуровневом приближении .....	113
О.В. Кунова, Е.А. Нагнибеда. Колебательная и химическая релаксация за ударными волнами, возникающими в неравновесных потоках смесей газов .....	114
Л.Д. Мишин, Е.В. Кустова. О влиянии многоквантовых обменов колебательной энергией на параметры течения за ударной волной .....	115
А.И. Мишина, Е.В. Кустова. Пространственно однородная релаксация молекул CO с учетом резонансных VE обменов .....	116
Е.В. Кустова, П.С. Мостовых. Граничные условия для слабо разреженных смесей химически не реагирующих газов в поуровневом приближении .....	117
Е.В. Кустова, Г.П. Облапенко. Скорость колебательной релаксации в много- температурных течениях разреженных газов .....	118
А.С. Савельев, Е.В. Кустова. О выборе параметров модели Тринора-Маррона для поуровневых коэффициентов скорости диссоциации .....	119
М.А. Лобанова, Ю.М. Циркунов. Моделирование крупномасштабной вихревой структуры в ближнем следе за самолетом .....	120
А.А. Шашкова, М.С. Нурмухамбетов, М.А. Лобанова, Ю.М. Циркунов. Численное исследование течения и аэродинамических характеристик гиперзвукового летательного аппарата .....	121
А.Е. Таранов, М.П. Лобачев. Влияние учета ламинарно-турбулентного перехода на точность определения гидродинамических характеристик моделей гребных	

винтов .....	122
Я.М. Любомиров, Б.А. Ярцев. Классический флаттер анизотропного композитного крыла .....	123
С.Ю. Маламанов, В.А. Павловский, Д.П. Хитрых. Моделирование вращающегося движения проводящей жидкости .....	124
С.З. Сапожников, В.Ю. Митяков, А.В. Митяков, Д.М. Маркович. Совмещение PIV и градиентной теплотметрии в исследовании теплообмена и гидродинамики .....	125
О.В. Маракуева, Ю.М. Циркунов. Исследование вихревой структуры течения в межлопаточных каналах компрессора газотурбинного двигателя вертолета на различных режимах полета .....	126
С.К. Матвеев, Д.Г. Сидоров. Стационарное стратифицированное течение двух несжимаемых жидкостей в наклонной трубе .....	127
Р.Н. Мирошин, Е.С. Орлова. Неравенство для лобового сопротивления выпуклого тела в теории локального взаимодействия .....	128
А.А. Моисеев, А.В. Савин. Моделирование физико-химических процессов обжига карбонатных материалов в шахтных печах с газовым отоплением .....	129
Е.А. Нагнибеда. Современные модели неравновесной кинетики в высокотемпературных потоках воздуха. Проблемы и результаты .....	130
Е.Н. Надымов. О расчете присоединенных масс с помощью приближения каплевидными телами .....	131
М.А. Нарбут. Электрокинетическая поляризация в теории фильтрации грунтовых вод .....	132
М.С. Нурмухамбетов, Ю.М. Циркунов. Численное моделирование течения и теплообмена при тангенциальном вдуве через щелевое сопло вблизи передней точки затупленного тела в сверхзвуковом потоке .....	133
М.С. Нурмухамбетов, Ю.М. Циркунов. Численное моделирование крупномасштабной вихревой структуры ближнего следа за самолетом при закрытических углах атаки .....	134
В.М. Овсянников. Парность деформаций – причина возникновения членов высокого порядка по времени в выводе Эйлера уравнения неразрывности .....	135
В.М. Овсянников. Образование регмаглиптов на поверхности метеорита, входящего в атмосферу земли .....	136
О.К. Овчинникова, В.А. Сергушова. Моделирование вакуумных струй .....	137
В.А. Павловский, А.Л. Чистов. Применение f-модели турбулентности для исследования внутренних течений в каналах и трубах с шероховатыми стенками .....	138
С.И. Перегудин, С.Е. Холодова. Воздействие длинных волн на реологию дна .....	139
С.И. Перегудин, С.Е. Холодова. Влияние эффектов диффузии магнитного поля на крупномасштабные волновые движения .....	140
Д.С. Пыхов, В.А. Цибаров. Квазидномерное течение неньютоновской жидкости .....	141
А.А. Райнес. Две задачи о взаимодействии сверхзвуковой газовой смеси со стенкой .....	142
М. С. Романова, М.А. Рыдалевская. Влияние термической ионизации на скорость распространения малых возмущений в одноатомных газах .....	143
В.Я. Рудяк. Процессы переноса в наножидкостях. Современное состояние, проблемы и перспективы .....	144
А.Н. Рябинин. Расчет трансзвукового обтекания крыльев с круткой .....	145
А.В. Савин, Е.И. Соколов, П.Г. Смирнов. Управление свободно-висящими циркуляционными зонами в сверхзвуковых струях малой нерасчетности .....	146
В.Н. Старков. Исследование уравнений динамики сферического слоя степенной жидкости .....	147
Ю.Г. Степанов. Особенности применения модели сплошной среды с моментными напряжениями в задачах гидродинамики и гидрофизики .....	148
Н.М. Терехова. Эволюция естественных и контролируемых возмущений в сверхзвуковом пограничном слое .....	149

С.А. Чивилихин. Квазистационарные уравнения Стокса в неинерциальных системах отсчета.....	150
И.З. Шарафутдинов. Двухтемпературные скорости химических реакций в ударно нагретом воздухе.....	151
С.Г. Шумков. Скачки уплотнения в потоках углекислого газа.....	152
<b>МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА .....</b>	<b>153</b>
Е.А. Бахарева, В.В. Стружанов. Об одном методе исследования устойчивости кручения круглых стержней из разупрочняющегося материала .....	154
Е.Б. Воронкова, С.М. Бауэр. Свободные колебания неоднородных трансверсально-изотропных круглых пластин.....	155
С.М. Бауэр, В.И. Ершов, А.Л. Смирнов. Деформации цилиндрического и сферического слоев под действием нормального давления .....	156
Ф.С. Беляев. Влияние взаимодействия вариантов мартенсита на обратимую и необратимую деформацию в сплавах с памятью формы .....	157
К. В. Бердников, В.В. Стружанов. Расчет предельного внешнего давления на сферический сосуд из разупрочняющегося материала.....	158
Л.Б. Гецов, А.С. Семенов, С.Г. Семенов, Б.Е. Мельников, В.А. Бессчетнов. Современные методы расчетного определения ресурса лопаток ГТД из монокристаллических сплавов и их паспортизация .....	159
Г.И. Михасев, М.Г. Ботогова, Е.С. Филончик. Моделирование потери устойчивости многостенной углеродной нанотрубки, внедренной в упругую среду, на основе нелокальной теории ортотропных оболочек .....	160
Е.Л. Буддаков. Математическое моделирование воздействия взрывных волн на подземный нефтепровод.....	161
А.Е. Волков, М.Е. Евард, Е.Н. Япарова. Расчет деформации пористого сплава с памятью формы .....	162
А.Е. Волков, Д.А. Рупасов. Расчет поля напряжений в изгибаемой пластинке из сплава с памятью формы в рамках микроструктурной модели.....	163
Н.В. Наумова, Д.Н. Иванов, Б.А. Ершов, Т.В. Волошинова. Моделирование вынужденных колебаний цилиндрической оболочки, вызываемых действием внутреннего потока жидкости.....	164
М.А. Греков, С.А. Костырко. Образование дефектов поверхности наноразмерных пленочных покрытий в результате действия диффузионных процессов.....	165
А.И. Разов, В.И. Григорьева. Термомеханические свойства сплава TiNi после высокоскоростного нагружения .....	166
А.А. Груздков, А.А. Чеврычкина. Применение нелокальных критериев к определению прочностных характеристик материала .....	167
Ю. М. Даль. Некоторые основные задачи об упругой плоскости с разрезами .....	168
Т.О. Доманская, В.М. Мальков. Нелинейная задача о сосредоточенной силе на межфазной границе двух полуплоскостей.....	169
А.М. Ермаков, Т.В. Усачева. Устойчивость сопряженных сферических сегментов находящихся под действием груза с плоским основанием. ....	170
М.В. Забиякин. Низкочастотные колебания подкрепленной роликами цилиндрической оболочки .....	171
А.В. Зелинская, П.Е. Товстик. Устойчивость при осевом сжатии трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки со слабо закрепленным криволинейным краем.....	172
Б.А. Зимин, В.Е. Свентицкая, Ю.В. Судьенков. Дисперсионный анализ двухпараметрической обобщенной модели динамической термоупругости .....	173
Б.А. Зимин, В.Е. Свентицкая, Ю.В. Судьенков. Энергия диссипации и процесс генерации тепла в кончике движущейся трещины в полимерных материалах.....	174
И.С. Зорин. Асимптотика напряженно-деформированного состояния и устойчивость равновесия неоднородных анизотропных стержней и пластин.....	175

К. А. Игнатъева. Потеря устойчивости осесимметричных форм равновесия круглых и кольцевых пластин под действием нормального давления .....	176
С.А. Кабриц, В.А. Шамина. Цилиндрическая оболочка под действием кольцевой нагрузки.....	177
Yu.I. Kadashevich, S.P. Pomytkin. The Influence of Initial Microstresses on Behavior of the Softening Materials in Geometrically Nonlinear Endochronic Theory of Inelasticity .....	178
А.С. Кочнев, И.А. Овидько, Б.Н. Семёнов. Предел прочности графена с 5-8-5 дефектом решётки .....	179
Д.К. Магомедова, А.А. Лукин. Деформирование и разрушение тонких колец из алюминиевой фольги с покрытием из медных наночастиц магнито-импульсным методом .....	180
Ю.В. Малькова, В.М. Мальков. Аналитическое решение плоской задачи для пластины с упругим эллиптическим включением .....	181
Ю.В. Малькова, В.М. Мальков. Деформация двухкомпонентной пластины с эллиптическим отверстием.....	182
Y.A. Mochalova, E.S. Merkushev. The Effect of Stress State on the Internal Structure of the Materials .....	183
Г.В. Павилайнен, Н.В. Наумова. Упруго-пластический изгиб консоли из разнопрочного материала .....	184
В. Ю. Преснецова, С. Н. Ромашин, Л. Ю. Фроленкова, В. С. Шоркин. Модель адгезионного взаимодействия упругих тел.....	185
Y.G. Pronina, O.S. Sedova. Taking Account of Hydrostatic Pressure in the Modelling of Mechanochemical Corrosion of Spherical Shells .....	186
В.М. Рябов, Б.А. Ярцев. Связанные затухающие колебания композитных коробчатых стержней.....	187
М.Ю. Рязанцева. О построении динамических уравнений механики слоистых композитов.....	188
Г.Д. Федоровский. Эндохронное моделирование и взаимосвязь деформативных и прочностных свойств исходных и наноструктурированных материалов.....	189
С.Б. Филиппов. Асимптотический анализ устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми пластинами .....	190
<b>УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....</b>	<b>191</b>
А.А. Мастерова, В.А. Самсонов, Sh.-Sh. Hwang. О моделировании влияния крутки лопасти на динамику горизонтально-осевой ветротурбины .....	192
К.-Н. Lin, А.П. Голуб, Л.А. Климина, Д.В. Гриценко. Стабилизация стационарного режима горизонтально-осевой ветроэнергетической установки с дифференциальной планетарной передачей.....	193
F.F. Rodyukov, G.J. Soederbacka. Joint Work of Two Identical Synchronous Generators with Common RL-Load .....	194
А.Ю. Александров, А.П. Жабко. Анализ устойчивости положений равновесия механических систем с запаздыванием на основе декомпозиции.....	195
В.Г. Быков, П.Е. Товстик. Об устойчивости псевдорегулярной прецессии гибкого ротора при ограниченном возбуждении .....	196
В.Г. Быков, А.С. Ковачев. Об устойчивости стационарных режимов движения ротора с эксцентрическим шаровым автобалансирующим устройством.....	197
В.Г. Быков, В.А. Шелковина. Упрощенные модели для исследования динамики и устойчивости ротора, оснащенного шаровым автобалансирующим устройством .....	198
Е.С. Гебель. Перестройка пространства положений платформы стюарта с 6 степенями свободы .....	199
Д.С. Глушкова, К.А. Орехов. Математическое моделирование и исследование устойчивости ветроэлектростанции .....	200

М.Н. Деменков. Оценка области асимптотической устойчивости с помощью функций Ляпунова и методов вычислительной алгебраической геометрии в среде Матлаб.....	201
Zh.T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde, O.O. Yanochkina. Multistability and Hidden Attractors in Nonsmooth Dynamical Systems .....	202
С.М. Зуев. Безопасность движения трехножной платформы Стюарта.....	203
М.А. Киселева, Н.В. Кондратьева, Н.В. Кузнецов, Г.А. Леонов. Устойчивость и колебания буровых установок с синхронным двигателем .....	204
В.С. Королев. Интегрирование динамических систем и устойчивость решений по части переменных .....	205
В.С. Королев, И.Ю. Потоцкая. Вопросы устойчивости по части переменных .....	206
Ю.М. Окунев, О.Г. Привалова, В.А. Самсонов. Геометрия областей устойчивости систем разной размерности .....	207
Ю.Д. Селюцкий. Об управлении движением аэродинамического маятника .....	208
<b>ЭЛЕКТРОМЕХАНИКА, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИКА .....</b>	<b>209</b>
Г.В. Алферов, П.А. Ефимова, Ф.М. Кулаков. Методы дистанционного управления космическими роботами .....	210
Г.В. Алферов, О.А. Малафеев, А.С. Мальцева А.С. программирование робота в задачах инспектирования и перехвата .....	211
Г. В. Алферов, О. А. Малафеев, Ю.А. Пичугин. Оценивание параметров в задачах конструирования машин и роботов-манипуляторов.....	212
А.С. Андреев. Управление движением колесного мобильного робота .....	213
А.Г. Белошапко, В.В. Бубнов, В.Н. Латыпов. Управление в динамических системах с переключениями в задаче прямохождения.....	214
М.З. Досаев, О.Э. Васюкова. Видеотактильный датчик – элемент системы очувствления робота .....	215
Д.М. Костыгова, Д.В. Казунин, Р.А. Ганин, Н.В. Кузнецов. Имитационное воспроизведение движений тяжелых карьерных экскаваторов.....	216
О.С. Ерохина, Е.Н. Чумаченко. Методика моделирования движения криобота и оценки его скоростного диапазона .....	217
М.А. Киселева, Н.В. Кондратьева, Н.В. Кузнецов, Г.А. Леонов. Электромеханические и математические модели электрических машин переменного тока.....	218
П.А. Комаров. Управление гидроприводом экзоскелета нижних конечностей.....	219
Е.Р. Маликов. Использование уравнений Маджи для описания динамики омни-мобильного робота .....	220
О.А. Перегудова. Управление движением манипулятора с упругими шарнирами .....	221
Ф.Ф. Родюков. Обобщение метода электромеханических аналогий .....	222
Б.В. Трифоненко, К.К. Тверев. Сдвоенный робокран .....	223
<b>МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>225</b>
Mohammad Bostani, Ardeshir Karami mohammadi. Free Vibration Analysis of Axially FGM Tapered Icro Beam, Using Modified Strain Gradient Elasticity .....	226
Б.О. Щербин, А.В. Анкудинов. Способ определения условий закрепления наномостика для улучшенной трехточечной АСМ методики .....	227
В.П. Мемнонов. Наноразмерная шероховатость микроэлектромеханических устройств и винчестеров.....	228
<b>БИОМЕХАНИКА .....</b>	<b>229</b>
Zana C. Dolicanin, Dragan T. Spasic. An Ocular Biomechanics Model Describing Early Glaucoma Caused Alterations in the Peripapillary Sclera .....	230
N. Kutev, S. Tabakova, S. Radev. Approximation of the Oscillatory Blood Flow Using the Carreau Viscosity Model .....	231

С.М. Бауэр, Е.Б.Воронкова, З.Г. Ершова, А.Л. Смирнов. Изменение внутриглазного давления после введения инъекций в стекловидное тело.....	232
П.И. Бегун, О.В. Щепилина. Методика и анализ исследования состояния регенерата при различных режимах реабилитации пациента с переломами трубчатых костей нижних конечностей.....	233
П.И. Бегун, Д.С. Годонюк, Е.А. Лебедева, А.С. Лысенкова. Методика исследования механических свойств структур позвоночника.....	234
Е.О. Боденкова. Задача о взаимодействии двух биообъектов.....	235
Л.А. Венатовская. Оценка измерения показателей внутриглазного давления после операций по коррекции зрения .....	236
Е.А. Федорова, Я.А. Гатаулин, А.Д. Юхнев. Расчетно-экспериментальное исследование стационарных и пульсирующих закрученных течений в модели сосуда со стенозом .....	237
С.И. Ерохина. Направленная доставка и индуцированное высвобождение реактивов с помощью полимерных контейнеров.....	238
А.В. Ивченкова. О математическом моделировании измерения внутриглазного давления пневмотонометром .....	239
А.А. Клементьева, А.В. Норин. Граничные условия для сферического электро-статического зонда в слабоионизированной столкновительной плазме.....	240
А.А. Кузнецова. Структурный анализ сигналов речи и фильтрация их от шумов .....	241
К.В. Папина, В.А. Цибаров. Описание физических свойств крови.....	242
Е.В. Перевалова. Морфометрия распределения внеклеточного матрикса в суставном хряще.....	243
П.В. Трофименко. Неклассические теории анизотропных оболочек в задачах о деформации сферических слоев под действием нормального давления .....	244
Д.В. Франус. Изменение напряженно-деформированного состояния роговицы глаза после операций по коррекции зрения.....	245
<b>ФИЗИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА .....</b>	<b>247</b>
К.Р. Abdullaev, Т.А. Khantuleva. Stress, Strain and Strain-Rate in the Shock-Induced Processes .....	248
И.А. Амелюшкин. Модель кристаллизации и устойчивость переохлаждения метастабильной жидкости при ее падении на твердое тело.....	249
И.А. Амелюшкин. Восстановление параметров двухфазного потока по рассеянному им зондирующему излучению.....	250
Л.А. Бакалейников, Э.А. Тропп, Е.Ю. Флегонтова, А.Я. Эндер, И.А. Эндер. Нелинейная релаксация газов для псевдостепенных сечений взаимодействия.....	251
А.В. Гелиев, Ю.Е. Маркачев. Об уравнении состояния реального газа в рамках квазихимической кластерной модели .....	252
И.А. Эндер, А.Я. Эндер, А.Б. Герасименко. Эволюция нестационарной функции распределения ионов при включении высокочастотного электрического поля. Различные модели взаимодействий.....	253
Е.Г. Kolesnichenko, Yu.E. Gorbachev. Gas-Dynamic Equations for Reactive Gas Mixtures: Problems And Solutions .....	254
Ю.Ф. Гунько, Н.А. Гунько. Движение заряженных нано- и микрочастиц вблизи эмиттирующей поверхности .....	255
Н.А. Гунько, Ю.Ф. Гунько, О.К. Зайченко, А.А. Лукин, В.А. Морозов. Деформирование и разрушение тонких кольцевых образцов из меди и алюминия магнитно-импульсным методом .....	256
А.В. Дементьев. О влиянии вращательных движений в системе «компактный источник – сферический отражатель» на свойства отражаемого сигнала.....	257
Е.К. Колесников, А.Г. Зеленский, А.С. Мануйлов. О некоторых особенностях влияния параметров плазменного канала на динамику ионной шланговой неустойчивости релятивистского электронного пучка .....	258
Е.К. Колесников, Г.Н. Ключников. Об областях применимости дрейфового	

приближения в задаче о динамике заряженной частицы в суперпозиции дипольного и однородного магнитных полей .....	259
Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов. Влияние временной зависимости радиуса релятивистского электронного пучка на динамику ионной шланговой неустойчивости при транспортировке пучка в режиме ионной фокусировки .....	260
В.А. Морозов, Г.Г.Савенков, А.А. Лукин. Исследование инициирования энергонасыщенных материалов продуктами электрического взрыва проводника.....	261
Г.В. Моллесон, А.Л. Стасенко. Физическая механика и теплофизика взаимодействия газодисперсной струи с твердым телом.....	262
К.А. Никифоров. Моделирование структуры образца в атомной зондовой томографии и полевой электронной микроскопии .....	263
Э.В. Прозорова. Роль дисперсионных эффектов и запаздывания в механике сплошной среды .....	264
С.А. Сошников. Геометрогидродинамика .....	265
А.Б. Яковлев. Исправленный метод расчета электростатического потенциала вблизи поверхности безатмосферного небесного тела и анализ возможных в этом случае режимов движения пылевых частиц .....	266
<b>ИСТОРИЯ МЕХАНИКИ .....</b>	<b>267</b>
Г.А. Акимов. Развитие исследований сверхзвуковых струйных течений в БГТУ – «Военмех»: Исследования ударно-волновых взаимодействий.....	268
О.В. Газиева. Санкт-Петербург – три века науки.....	269
И.И. Демидова, П.Ф. Лесгафт - один из основоположников экспериментальной биомеханики в России .....	270
В.В. Иванова. Обучение учащихся начальной школы основам механики в рамках внеурочной деятельности .....	271
Г.А. Кутеева, Б.А. Ершов. Модели механизмов Чебышёва в механическом кабинете Санкт-Петербургского Университета .....	272
Г.А. Кутеева, М.П. Юшков. О работах по механике Пафнутия Львовича Чебышёва .....	273
Д.А. Лисаченко. Механика в высшей школе на этапе сближения естественных и гуманитарных наук.....	274
И.Е. Лопатухина, А.Л. Лопатухин. Педагогическая деятельность академика А. Н. Крылова .....	275
С.В. Пасынкова. Из истории преподавания механики в Петровской Императорской коммерческой школе.....	276
Ш.Х. Солтаханов. О значимости оператора Поляхова в неголономной механике.....	277
О.А. Шаркова. Адрес Леонарда Эйлера на Васильевском острове.....	278
<b>ПЕРЕЧЕНЬ АВТОРОВ .....</b>	<b>284</b>
<b>СОДЕРЖАНИЕ .....</b>	<b>297</b>

**Международная научная конференция по механике  
СЕДЬМЫЕ ПОЛЯХОВСКИЕ ЧТЕНИЯ**

Конференция посвящается  
110-летию со дня рождения К.И. Страховича

Тезисы докладов Международной научной конференции по механике,  
Санкт-Петербург, 2 – 6 февраля 2015 г.

Ответственный редактор В.Г. Быков

Санкт-Петербург  
2015

---

Подписано в печать 19.01.2015.  
Формат бумаги 60 × 90 1/8. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 304. Тираж 300 экз. Заказ №УП1.  
Отпечатано на оборудовании ООО «Пантон»  
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр., д.28