Близкие точки поворота и оператор Харпера

А. А. Федотов

Ключевые слова: оператор Харпера, близкие точки поворота, комплексный метод ВКБ, геометрия спектра.

DOI: https://doi.org/??

1. Введение. Мы будем обсуждаем спектр оператора Харпера в квазиклассическом приближении. Этот оператор – разностный оператор Шрёдингера, действующий в $L^2(\mathbb{Z})$ по правилу

$$Hf(x) = \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2} + \cos(x)f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$ {eq1}

где $0 < h < 2\pi$ – параметр. Оператор (1) возникает при исследовании электрона в кристалле в постоянном магнитном поле, см., например, [1]. При $\omega = h/(2\pi) \notin \mathbb{Q}$ спектр оператора $2H$ как множество совпадает со спектром оператора почти-Матье с частотой ω, см., например, [2; с. 4, 5]. Исследование спектра последнего привлекает внимание и математиков, и физиков. После почти 30 лет усилий ряда известных ученых было доказано, что при $\omega \notin \mathbb{Q}$ он является абстрактным канторовым множеством [3].

В [4] Вилкинсон описал подход, позволивший эвристически изучить спектр H в квазиклассическом приближении. При условии, что $\omega = h/(2\pi)$ раскладывается в бесконечную цепную дробь с большими натуральными элементами (квазиклассическая частота), он "показал", что спектр расположен на конечном наборе интервалов – зон первого поколения, на каждой из которых с точностью до растяжения он устроен также, как спектр оператора Харпера с новыми параметрами. На каждом из этих интервалов спектр содержится на конечном наборе подинтервалов – зон второго поколения – и т.д. Подход Вилкинсона, таким образом описывающий спектр, называют перенормировочным. Используя аппарат квазиклассических ПДО, Элффер и Шостранд развили строгий перенормировочный подход и превратили результаты Вилкинсона в теоремы, см., например, [2]. Оператор H коммутирует с оператором сдвига на 2π, и для его исследования можно попытаться применить идеи теории Блоха–Флоке. Этот путь привел В. Буслаева и А. Федотова к еще одному перенормировочному подходу – методу монодромизации. В [5] описано его применение для изучения геометрии спектра для квазиклассических частот.

Спектр исследовался и с помощью компьютера, см., например, [6]. Анализ результатов показывает, что для квазиклассических частот интервалы первого поколения длиннее и ближе друг к другу в особой области у центра отрезка $[-2, 2]$, содержащего весь спектр, на каждом из них интервалы второго поколения длиннее и ближе друг к другу в особой области, расположенной в его центральной части и т.д. Устройство спектра в особых областях определяет его глобальные геометрические характеристики (дробные размерности, распределение длин лакун и т.д.). Для доказательства канторовости всего спектра для квазиклассических частот спектр в особых областях частично исследовался в [7]. Но авторы не описали асимптотическую структуру спектра в них, считая ее сложной.

В рамках метода монодромизации устройство спектра в каждой особой области описывается разностным уравнением с близкими точками поворота. Для квазиклассической частоты все эти уравнения содержат квазиклассические параметры. Задача о близких точках поворота – классическая (для случая дифференциальных уравнений см., например, [8] и одну из последних работ [9], для разностных [10]). В этой заметке мы показываем как квазиклассические эффекты, связанные с близкими точками поворота,

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-01-00451 А.

определяют структуру спектра в особых зонах. Рекуррентное описание спектра довольно громоздко, и здесь мы ограничимся обсуждением зон первого и второго поколений, что уже даст хорошее представление о рекуррентном описании.

2. Матрица монодромии. Вместе с H рассмотрим разностное уравнение Шрёдингера

$$\frac{\psi(x+h)+\psi(x-h)}{2}+\cos(x)\psi(x)=E\psi(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

в котором $E\in\mathbb{C}$ – спектральный параметр. Множество решений (2) инвариантно относительно оператора сдвига на 2π – период потенциала (косинуса), и как и для дифференциального уравнения Шрёдингера

$$-\psi''(x)+v(x)\psi(x)=E\psi(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

с периодическим потенциалом v, матрица монодромии изображает ограничение оператора сдвига на период на множество решений в заданном базисе во множестве решений. Множество решений (3) – двумерное линейное пространство, и матрица монодромии – матрица 2×2, не зависящая от x. Множество решений (2) – двумерный модуль над кольцом h-периодических функций, см., например, [11; § 2.1]. Это означает, что есть таких два решения, что любое другое является их линейной комбинацией с h-периодическими коэффициентами. Поэтому для (2) матрица монодромии оказывается матрицей 2×2 с коэффициентами, периодическими по x с периодом h. Удобно представить ее в виде $M_1(2\pi x/h)$, где M_1 – 2π-периодическая матрица-функция, и называть M_1 матрицей монодромии. Чтобы описать одну из матриц монодромии, положим

$$\mathcal{M}(x,s,t)=\begin{pmatrix} a-2\cos x & s+te^{-ix} \\ -s-te^{ix} & st \end{pmatrix}, \qquad a=\frac{1-s^2-t^2}{st}.$$

Теорема 1. *При $E\geqslant -2$ в множестве решений (2) есть такой базис из решений, целых по x, что $M_1(x)=\mathcal{M}(x,s_1,t_1)$, s_1 и t_1 не зависят от x,*

$$t_1\in i\mathbb{R}, \quad |s_1|=1, \qquad \text{и} \qquad t_1(-E)=-\frac{1}{t_1(E)}, \quad s_1(-E)=-\frac{e^{2i\pi^2/h}}{s_1(E)}.$$

Базисные решения и s_1 и t_1 аналитичны по $E\in[-2,2]$.

Больше подробностей имеется в обзоре [5; раздел 2.3.1]. Отметим, что базис состоит из двух минимальных целых решений (решений, растущих наиболее медленно при $|\operatorname{Im}x|\to\infty$). При этом t_1 и s_1 выражаются через постоянные коэффициенты в асимптотиках одного из них при $\operatorname{Im}x\to\pm\infty$, см. [12; раздел 7.1].

3. Первая перенормировка. Важным объектом теории Блоха–Флоке для (3) являются блоховские решения – решения (3), инвариантные с точностью до постоянного множителя относительно сдвига на период v. Их построение сводится к диагонализации матрицы монодромии. Если v – вещественнозначная непрерывная функция, то E принадлежит резольвентному множеству тогда и только тогда, когда существуют два линейно независимых блоховских решения, экспоненциально убывающие в разные стороны. Они существуют тогда и только тогда, когда половина следа матрицы монодромии по модулю больше единицы. Попытка построить блоховские решения (2) ведет к уравнению монодромии [5; раздел 2.1.4]

$$\psi_1(x+h_1)=M_1(x)\psi_1(x), \tag{4}$$

где M_1 – матрица монодромии для (2), $h_1=2\pi\{2\pi/h\}$, а $\{\cdot\}$ – дробная часть. Отметим связь между цепными дробями для $h/(2\pi)$ и $h_1/(2\pi)$:

$$\frac{h}{2\pi}=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cdots}} \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{h_1}{2\pi}=\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\cdots}}.$$

Переход от (2) к (4) называется *перенормировкой.*

В качестве M_1 выберем в (4) матрицу монодромии из теоремы 1. Пусть

$$\mathcal{E}(t,s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right)\left(\frac{1}{s} - s\right).$$

Очевидно,

$$\mathcal{E}(t_1,s_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{Tr} M_1(x)\,dx,$$

и $\mathcal{E}(t_1,s_1) \in \mathbb{R}$ при $E \in \mathbb{R}$.

Для (4) линейно независимые блоховские решения, экспоненциально убывающие в разные стороны можно построить ~~при $|E| > 2$~~ с помощью теоремы 4.1 из [13]. Используя ее, конструкции из [13; раздел 3.6] и теорему 1 из [11], мы доказали утверждение:

Теорема 2. *Число $E \in \mathbb{R}$ находится вне спектра оператора H, если*

$$|t_1| < 1 \qquad \text{и} \qquad |\mathcal{E}(t_1,s_1)| > 2 + \frac{h_1}{|\,|1/t_1| - 1|}. \tag{5}$$ {eq5}

4. Квазиклассические асимптотики t_1 и s_1. Ниже мы считаем, что $0 \leqslant E < 2$, а элементы $n_1, n_2, \dots$ цепной дроби числа $h/(2\pi)$ достаточно велики. Тогда, в частности, h мало. Вычисление асимптотик t_1 и s_1 при $h \to 0$ сводится к исследованию некоторого минимального целого решения ψ_0 уравнения (2).

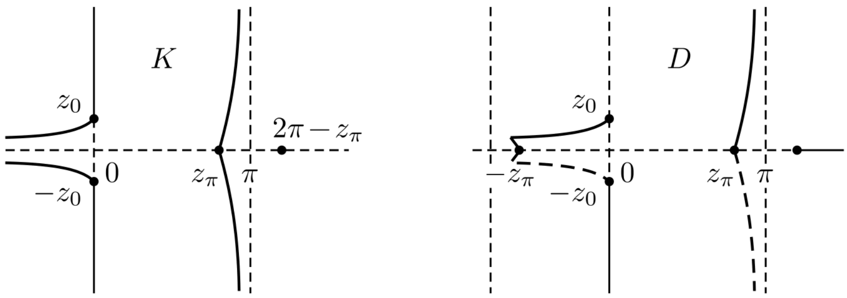

Рис. 1

Асимптотики ψ_0 получаются с помощью варианта комплексного метода ВКБ для разностных уравнений из [14], [15]. Определим многозначную аналитическую функцию p переменной $x \in \mathbb{C}$ уравнением $\cos p + \cos x = E$. В ее точках ветвления $E - \cos x \in \{\pm 1\}$. Точки, где $E - \cos x \in \{\pm 1\}$, называются точками поворота и играют такую же роль, что и точки поворота для (3). Для (2) их множество 2π-периодично и симметрично относительно нуля, $x = \pi$ и $\mathbb{R}$. При малых E они группируются парами около точек $\pi\mathbb{Z}$ и их расположение соответствует рис. 1, где они изображены маленькими кружочками. При $h \to 0$ решение ψ_0 допускает стандартное квазиклассическое асимптотическое представление вида

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin p(x)}} \exp\left(\frac{i}{h}\int_{x_0}^{x} p\,dx + O(h)\right)$$

в области $K \subset \mathbb{C}$, изображенной слева на рис. 1. Ее граница изображена непрерывной линией и состоит из линий Стокса. Асимптотики ψ_0 в K при $h \to 0$ позволяют вычислить лишь t_1. С помощью методов, аналогичных развитым в [16; раздел 5], устанавливается, что решение ψ_0 сохраняет стандартное асимптотическое представление в более широкой области D, изображенной справа на рис. 1. Это позволяет вычислить s_1. При малых E часть "проходов" из K в D закрывается, и для вычисления s_1 асимптотики ψ_0 за пределами K описываются с помощью [10], где вычислены матрицы перехода между базисами из решений, имеющих стандартное асимптотическое представление в областях, разделенных близкими точками поворота. Опишем результаты. Положим

$$\Phi_0(E)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_\Phi} p\,dx,\quad S_0(E)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_S} p\,dx,\qquad 0<E<2,$$

где γ_Φ (γ_S) – замкнутая кривая, обходящая отрезок прямой, соединяющий точки поворота $-z_\pi$ и z_π ($-z_0$ и z_0 соответственно). Интегрируются непрерывные ветви p, выбранные так, что $\Phi_0(E)>0$ и $S_0(E)>0$. Функции S_0 и $2S_0\ln S_0-\pi\Phi_0$ аналитичны в окрестности нуля, $S_0(0)=0$, $S_0'(0)=1$, $\Phi_0(0)=\pi$, а Φ_0 и $-S_0$ монотонно убывают с ростом E.

Теорема 3. *Пусть C_0 достаточно мало, а $|E|\leqslant C_0$. При достаточно малом h*

$$t_1=i\exp\biggl(-\pi\biggl(\frac{S_0}{h}+g_S\biggr)\biggr),$$
$$s_1=-iU\biggl(\frac{S_0}{h}+g_S\biggr)\exp\biggl(-\frac{2iS_0}{h}\biggl(\ln\frac{S_0}{h}-1\biggr)+i\pi\biggl(\frac{\Phi_0}{h}+g_\Phi\biggr)\biggr),$$
$$U(\xi)=\frac{\Gamma(i\xi+1/2)}{\Gamma(-i\xi+1/2)}.$$

где g_S и g_Φ – вещественно аналитические функции E, допускающие равномерные оценки: $g_S(E)=O(h)$, $g_\Phi(E)=O(h\ln h)$. *Кроме того*, $g_S(0)=g_\Phi(0)=0$.

5. Информация о спектре после первой перенормировки. Благодаря инвариантности множества решений уравнения Харпера относительно преобразования $\psi(x,E)\mapsto e^{i\pi x/h}\psi(x+\pi,-E)$, спектр симметричен относительно нуля. Ниже $E\geqslant 0$. Из теоремы 3 следует, что график $E_1=\mathcal{E}(t_1,s_1)$ как функции E соответствует рис. 2. При удалении от нуля E_1 осциллирует с амплитудой

$$2\operatorname{ch}\biggl(\frac{\pi}{h}(S_0+hg_S)\biggr),$$

возрастающей с ростом E от двух до экспоненциально большой по h величины. На этом же рисунке мы изобразили графики функции ρ, равной правой части неравенства (5), и функции $-\rho$. Интервалы, где $|E_1|>\rho$, содержатся в лакунах. На рисунке мы изобразили один такой интервал. Теоремы 2 и 3 позволяют детально описать асимптотики центров и длин серии интервалов, содержащихся в лакунах. Мы обсудим два случая.

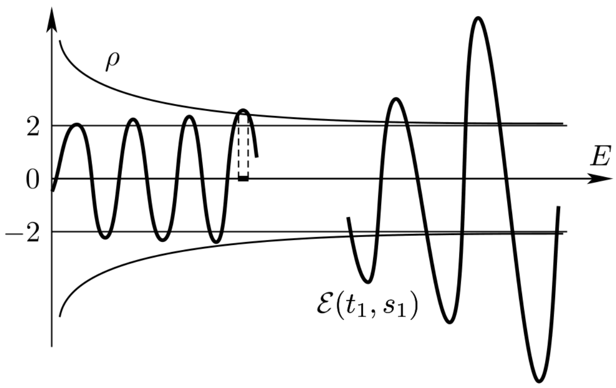

Рис. 2. График $\mathcal{E}(t_1,s_1)$.

Начнем со случая, когда влияние близких точек поворота пропадает. Фиксируем $C_1\in(0,C_0)$, где C_0 – константа из теоремы 3. Пусть $C_1\leqslant E\leqslant C_0$. Для таких E $S_0(E)\geqslant$

$S_0(C_1) > 0$, Г-функция в определении U заменяется асимптотикой, и оказывается, что

$$E_1 = \exp\left(\frac{\pi}{h}S_0 + O(h\ln h)\right)\cos\left(\cancel{\frac{\pi}{h}(\Phi_0 + hg_\Phi)}\right), \qquad \frac{\pi}{h}\,\Phi_0 + O(h\ln h)$$

поправки

где ~~выражение $O(h\ln h)$~~ вещественно аналитичны.

Теорема 4. *Пусть $\{E_k\} \subset [C_1, C_0]$ – последовательность точек, удовлетворяющих условиям $(1/h)\Phi_0(E) = 1/2 + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Расстояние ними имеет порядок h, а спектр на отрезке $[C_1, C_0]$ содержится на таких интервалах I_k, что I_k находится в $o(h)$ окрестности точки E_k, а длина I_k в старшем порядке равна*

$$\frac{4h}{\pi|\Phi_0'(E_k)|}\exp\left(-\frac{\pi}{h}S_0(E_k)\right).$$

Этот результат согласуется с хорошо известными [2; теорема 1] (см. также [17]).

Вычисляя приращение интегрированной плотности состояний на интервалах I_k как в [18; раздел 4.3.3], мы доказываем, что на каждом из них есть спектр (см. также [19]).

Обсудим область, где влияние близких точек поворота особенно сильно. Фиксируем $c_0 > 1$. Пусть $\epsilon = E/h \in [0, c_0]$. Из теоремы 3 вытекает, что

$$t_1 = i e^{-\pi\epsilon + O(\epsilon^2 h)}, \qquad E_1 = 2\,\mathrm{ch}(\pi\epsilon + O(\epsilon^2 h))\cdot\cos\left(\frac{\pi^2}{h} - 2\epsilon\left(\ln\frac{1}{h} + g\right)\right), \qquad g = O(1),$$

с аналитическими по ϵ поправками. Заметим, что при нашем условии на цепную дробь для $h/(2\pi)$, число h_1 мало. Справедлива

Теорема 5. *Рассмотрим множество таких точек ϵ на интервале $[0, c_0]$, что*

$$\frac{\pi^2}{h} - 2\epsilon\left(\ln\frac{1}{h} + g\right) \in \pi\mathbb{Z}.$$

В старшем порядке расстояние между ними равно $\pi/(2\ln(1/h))$. Пронумеруем эти точки слева направо номером $k \geqslant 1$, если $[2\pi/h]$ – нечетное число, и $k \geqslant 0$, если оно четное. Если произведение $h_1|\ln h|^3$ мало, то каждая из точек $h\epsilon_k$ с $k \geqslant 1$ находится лакуне длины как минимум порядка $hk/(\ln h)^2$. Если мало лишь h_1, то это верно для таких k, что $\epsilon_k \geqslant 1$.

6. Коротко о спектре после второй перенормировки. Пусть I – интервал значений, которые принимает E_1 между двумя своими соседними экстремумами или на зонах первого поколения, найденными после первой перенормировки. Для исследования спектра на I выполняют перенормировку уравнения (4). Так как матрица M_1 является 2π-периодической, для (4) тоже можно ввести матрицу монодромии. Вместо теоремы 2 используется следующая теорема [5; теорема 2.6]

Теорема 6. *Рассмотрим уравнение (4) с $M_1(x) = \mathcal{M}(x, s, t)$, где $s, t \in \mathbb{C}$, $|s| = 1$, $t \in i\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Фиксируем $C > 0$ и предположим, что $|t| \leqslant C$ и $0 \leqslant \mathcal{E}(t, s) \leqslant C$. При достаточно малом h во множестве решений (4) есть такой базис из решений, целых по x, что соответствующая матрица монодромии имеет вид $\mathcal{M}(x, \mathbb{S}, \mathbb{T})$, где $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ не зависят от x, $\mathbb{T} \in i\mathbb{R}$ и $|\mathbb{S}| = 1$. Базисные решения, $\mathbb{S}$ и аналитичны по s и t.*

Далее рассматривается уравнение (4) с заменой h_1 на $h_2 = \{1/h_1\}$ и M_1 на $\mathcal{M}(x, s_2, t_2)$, где $s_2 = \mathbb{S}(s_1, t_1)$ и $t_2 = \mathbb{T}(s_1, t_1)$, и доказывается Теорема 2 с заменой индекса 1 на 2.

Вернемся к первому уравнению монодромии. Так как параметр h_1 мал, то можно получить квазиклассические асимптотики для s_2 и t_2. Существенной разницей оказывается вхождение в асимптотические формулы фазы Берри, аналога хорошо известной для дифференциальных уравнений, см. [20]. Описание спектра после второй перенормировки в целом следует тому же пути, что и после первой. Мы обнаруживаем новую

Давайте для $\mathbb{T}$ и $\mathbb{S}$ используем команды \mathbb T и \mathbb S коллекцию лакун на интервале I (лакуны второго поколения). Ниже мы остановимся на описании спектра расположенного около точки, где $E_1 = 2$, а E удовлетворяет условию $E/h \in [0, c_0]$. теоремы 5. Это позволит нам обсудить концы лакун из теоремы 5. Для уравнения (4) комплексный импульс определяется соотношением $\operatorname{Tr} M_1(x) = 2\cos p$ или, эквивалентно, $\cos p + \cos x = E_1$. При E_1 близком к 2 около $x = 0$ возникают две близкие точки поворота. Получаются асимптотические формулы

$$\begin{aligned} s_2 &= i \exp\left(\frac{i\pi\Phi}{h_1}\right), \\ t_2 &= \frac{\sqrt{2\pi} i}{\Gamma(\Phi/h_1 + 1/2)} \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\Phi}{h_1}\ln\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_1}(\Phi_0(\ln\Phi_0 - 1) - \pi S_0) + (\Phi_1 \ln \Phi_0 - \pi S_1) + O(h_1 \ln h_1)\right), \end{aligned} \tag{6}$$ {eq6}

где $\Phi = \Phi_0(E_1) + h_1\Phi_1(s_1, t_1) + O(h_1^2)$, а $\Phi_1 = \Phi_1(s_1, t_1)$ и $S_1 = S_1(s_1, t_1)$ – фазы Берри "подправляющие" $\Phi_0 = \Phi_0(E_1)$ и $S_0 = S_0(E_1)$ и равные контурным интегралам от некоторого мероморфного дифференциала по γ_Φ и γ_S. Функции Φ_0 и $\Phi_0 \ln \Phi_0 - \pi S_0$ аналитичны по E_1, а Φ_1 и $\Phi_1 \ln \Phi_0 - \pi S_1$ аналитичны по t_1 и s_1.

Обсудим лакуны "спрятанные" у точек $E = h\epsilon_k$ с $\epsilon_k < 1$, когда произведение $h_1 |\ln h|^3$ не мало, см. теорему 5. Около каждой такой точки есть две точки, где E_1 принимает одинаковые значения, равные либо 2, либо -2, см. рис. 2. Рассмотрим первый случай. Для того, чтобы понять, есть ли около $E = h\epsilon_k$ лакуна, мы вычисляем значения E_2 в этих двух точках. Для этого нужны значения Φ из (6) в этих точках. Так как $\Phi_0(2) = 0$, то они определяются значениями Φ_1. Последние вычисляется явно, и оказывается, что всегда в одной из двух обсуждаемых точек величина E_2 экспоненциально велика. Отсюда и вытекает, что около $E = h\epsilon_k$ действительно есть "спрятанная" лакуна. Это отражает свойство перенормировочной процедуры "раскрывать" (т.е. делать возможным обнаружить) новые лакуны при новых перенормировках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. Wilkinson, *J. Phys. A*, **20**:13 (1987), 4337–4354. **[2]** B. Helffer, J. Sjöstrand, *Mem. Soc. Math. France (N.S.)*, **34** (1988), 1–113. **[3]** A. Avila, S. Jitomirskaya, *Ann. of Math. (2)*, **170**:1 :305-350 (2009), 303–342. **[4]** M. Wilkinson, Proc. Royal Soc. London, A, 391 (1984) **[5]** А. А. Федотов, *Алгебра и анализ*, **25**:2 (2013), 203–235. **[6]** J. P. Guillement, B. Helffer, P. Treton, *J. de Phys.*, **50** (1989), 2019–2058. **[7]** B. Helffer, J. Sjöstrand, *Mem. Soc. Math. France (N.S.)*, **39** (1989), 1–125. **[8]** М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1983. **[9]** А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, А. В. Цветкова, *ТМФ*, **204**:2 (2020), 171–180. **[10]** A. A. Fedotov, *Russ. J. Math. Phys.*, **29**:4 (2022), 467–493. **[11]** Д. И. Борисов, А. А. Федотов, *Функц. анализ и его прил.*, **56**:4 (2022), 3–16. **[12]** V. Buslaev, A. Fedotov, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **5**:6 (2001), 1105–1168. **[13]** В. С. Буслаев, А. А. Федотов, *Алгебра и анализ*, **7**:4 (1995), 74–122. **[14]** В. С. Буслаев, А. А. Федотов, *Алгебра и анализ*, **6**:3 (1994), 59–83. **[15]** А. А. Федотов, Е. В. Щетка, *Алгебра и анализ*, **29**:2 (2017), 193–219. **[16]** A. Fedotov, F. Klopp, *Asymptot. Anal.*, **39**:3–4 (2004), 309–357. **[17]** А. А. Федотов, Е. В. Щетка ~~jour~~ Матем. заметки, **104**:6 (2018), 948–952. **[18]** A. Fedotov and F. Klopp, *Comm. Math. Phys.*, **227**:1 (2002), 1–92. **[19]** А. А. Федотов, Е. В. Щетка, *Матем. заметки*, **107**:6 (2020), 948–953. **[20]** A. Fedotov, E. Shchetka, *Appl. Anal.*, **101**:1 (2022), 274–296.

А. А. Федотов
Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: a.fedotov@spbu.ru

Поступило
17.01.2023
Принято к публикации
25.01.2023