

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МАШИНОВЕДЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МАТЕМАТИКО-МЕХАНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТРУДЫ СЕМИНАРА  
«КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»

2021–2022 гг.

Санкт-Петербург  
ПОЛИТЕХ-ПРЕСС  
2022

Редакционная коллегия:

д-р физ.-мат. наук, проф., член-корр. РАН *А. К. Беляев*  
(научн. руковод. семинара) (ИПМаш РАН),  
канд. физ.-мат. наук, доц. *А. Л. Смирнов* (редактор) (СПбГУ),  
канд. физ.-мат. наук, доц. *И. М. Архипова* (отв. секретарь)  
(ВИ(ИТ) ВА МТО),  
PhD, Sr. lecturer *Е. И. Атрощенко*  
(Ун-т Нового Южного Уэльса, Австралия),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. М. Бауэр* (СПбГУ),  
канд. физ.-мат. наук, доц. *Е. Б. Воронкова* (СПбГУ),  
д-р техн. наук, проф. *В. Н. Емельянов* (БГТУ),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е. Ф. Жигалко* (ПГУПС),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. И. Михасев* (БГУ, Беларусь),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. П. Помыткин* (СПб ГУАП),  
д-р техн. наук, проф. *С. В. Сорокин* (Ун-т Ольборга, Дания),  
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Б. Филиппов* (СПбГУ),  
канд. физ.-мат. наук *Д. В. Франус* (Фонд «УниШанс»)

Т78

**Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2021–2022 гг. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. – 136 с.**

ISSN 2218-7421

В сборнике представлены результаты исследований по механике сплошной среды, в основном задач колебаний и устойчивости упругих конструкций. Характерной чертой исследований является использование разнообразных компьютерных методов: методов вычислительной механики сплошной среды, компьютерной алгебры, визуализации и др. Анализ опирается на сопоставление данных, полученных в различных подходах, причем наиболее часто сопоставляются результаты, полученные асимптотическими методами и по методу конечных элементов.

Издание адресовано исследователям, специализирующимся в области применения компьютерных методов в механике сплошной среды. Семинар проводится математико-механическим факультетом Санкт-Петербургского государственного университета совместно с Институтом проблем машиноведения РАН.

ISSN 2218-7421

ISBN 978-5-7422-7849-8

ББК 22.25

- © Институт проблем машиноведения РАН, 2022
- © Редакционно-издательское оформление. Издательство Политех-Пресс, 2022



UNICHANCE

Некоммерческая организация «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс» при финансовой поддержке инвестиционно-строительной группы «МАВИС»



МАВИС

ИНВЕСТИЦИОННО-СТРОИТЕЛЬНАЯ ГРУППА

---

28 июля 2022 г. исполнилось девяносто лет Никите Федоровичу Морозову — выдающемуся российскому ученому, действительному члену Российской академии наук, нашему замечательному Учителю.



Н. Ф. Морозов родился в Ленинграде, и в годы Великой Отечественной войны он остался в блокадном Ленинграде. Его первая правительственная награда: медаль «За оборону Ленинграда» получена в 11 лет — за активное участие в работе пожарных дружин.

В 1949 году Н. Ф. Морозов поступил на математико-механический

факультет Ленинградского государственного университета, после защиты диплома продолжил обучение в аспирантуре и после успешного ее окончания защитил в 1958 кандидатскую диссертацию, а в 1967 году — докторскую диссертацию «Нелинейные задачи теории тонких пластин и оболочек».

Более 50 лет выдающийся ученый и талантливый педагог ведет научную и преподавательскую работу в Санкт-Петербургском государственном университете. Сначала руководителем лабораторией математической физики НИИ математики и механики им. акад. В. И. Смирнова, с 1973 года профессором кафедры математической физики математико-механического факультета, а с 1976 года — заведующим кафедрой теории упругости СПбГУ. Учениками Н. Ф. Морозова защищено более 50 кандидатских и 8 докторских диссертаций.

Никиту Федоровича Морозова отличает энергия, увлеченность наукой, постоянный интерес к новым актуальным проблемам механики, к применению методов механики в смежных дисциплинах, к решению практических задач, способность самозабвенно трудиться и организовывать других, доступность в общении. Н. Ф. Морозов — автор более 450 научных работ, в том числе 8 монографий и 3 учебных пособий. В 1994 году Н. Ф. Морозов стал членом-корреспондентом РАН. В 1995 году Н. Ф. Морозову присвоено звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации». В 2000 году за цикл работ по нелинейным проблемам механики деформируемого твердого тела Н. Ф. Морозову присуждена Государственная премия Российской Федерации в области науки и техники и он избран действительным членом академии наук. В 2006 г. за выдающийся вклад в динамическую теорию разрушения материалов Н. Ф. Морозову присуждена премия Правительства Санкт-Петербурга в области физико-математических наук имени А. Ф. Иоффе.

В 2009 году Н. Ф. Морозов избран членом Европейской академии наук, а в 2017 году награжден медалью Блеза Паскаля, присуждаемой Европейской академией наук в знак признания выдающегося личного вклада ученых в науку и технологии, в развитие исследовательских навыков в образовании.

Н. Ф. Морозов является вице-председателем Национального комитета России по теоретической и прикладной механике, председа-

---

телем Научного Совета РАН по механике деформируемого твердого тела, членом Генеральной ассамблеи IUTAM, членом редколлегии ведущих отечественных и зарубежных журналов по механике. При участии Н. Ф. Морозова создан научный журнал «Успехи механики», соредактором которого он является. Вот уже несколько десятков лет он является членом редколлегии журнала «Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия».

Н. Ф. Морозов награжден «Орденом Почета» (1999), орденом «За заслуги перед Отечеством» IV степени (2003), «Орденом дружбы» (2010). В 2015 году удостоен благодарности Президента Российской Федерации.

Основные научные интересы Н. Ф. Морозова находятся в области применения строгих математических методов к решению задач механики деформирования и разрушения твердых тел. Основные математические интересы связаны с сингулярными интегральными уравнениями, конформными отображениями, теорией бифуркаций, интегральными преобразованиями и др.

Под руководством Н. Ф. Морозова в Институте проблем машиноведения РАН создан и плодотворно работает над решением актуальных задач механики деформируемого твердого тела творческий коллектив, в состав которого входит много талантливой молодежи.

Благодаря усилиям Н.Ф. Морозова в Институте проблем машиноведения РАН созданы и активно развиваются следующие направления: микромеханика материалов, создание и применение углеродных наноструктур, методы молекулярной динамики, механика наноматериалов и теории дефектов и динамика экстремальных состояний и структурных превращений

Никита Федорович встречает свой юбилей в расцвете творческих сил. Желаем нашему любимому Учителю здоровья, радости и дальнейших научных успехов!

# ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ С ДОБАВОЧНЫМ МАЯТНИКОМ

С. Н. БУРЬЯН

Рассматривается модель возникновения точек ветвления (или особых точек) конфигурационного пространства плоского шарнирного механизма. Точки ветвления возникают при добавлении двойного маятника со специальными длинами звеньев, сумма или разность которых равна минимальному или максимальному расстоянию между двумя вершинами шарнирного механизма. В этом случае конфигурационное пространство вблизи точки ветвления представляется как объединение двух гладких кривых, которые могут пересекаться под ненулевым углом или иметь общую касательную. Данный подход рассматривается на примере сингулярного маятника и механизма Дарбу. Также изучаются ускорения сингулярного маятника в точке ветвления для особенности типа касания первого порядка. Показано, что для особенности типа касания первого порядка векторное поле, которое соответствует уравнениям Лагранжа второго рода, является неоднозначным над особенностью.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В задачах синтеза механизмов в конфигурационном пространстве могут возникать особенности типа точек ветвления. В этих особых конфигурациях механическая система может геометрически продолжить движение не одним, а несколькими способами. Уравнения движения в точках ветвления становятся неопределенными, и для задания динамики нужно определить поведение системы в особых точках.

Известным шарнирным механизмом с геометрическими особенностями является «парадоксальный» механизм П. Л. Чебышёва [1]. В конфигурационном пространстве этого механизма есть 6 особых точек, которые последовательно проходятся при полном обороте рукоятки. Этот механизм послужил стимулом для изучения сингулярного маятника автором.

---

Доклад на семинаре 23 ноября 2021 г.

© С. Н. Бурьян, 2021.

В работах В. А. Самсонова и А. А. Михалева [2, 3] рассматриваются некоторые типы особенностей конфигурационного пространства и бифуркации положений равновесия для голономных систем. Динамика с особенностями неголономных связей рассматривается в работах И. В. Закалюкина на примере балки с двумя коньками [4]. Изучаются траектории, которые проходят вблизи особенности.

Общий подход к построению гамильтонова формализма для сингулярных пространств описывается в работах школы Диффеотопии А. М. Виноградова [5]. Другие теории, такие как пространства Сикорского [6] и пространства Фрелихера [7], позволяют построить дифференциальную геометрию для сингулярных пространств. Но применений общей теории к конкретным механизмам в литературе найти не удастся.

Для составления уравнений движения применяются методы голономной механики из [8, 9].

Приведем некоторые сведения по истории задачи исследования динамики механизмов с особенностями. В 1968–1990 годах проходил научный семинар на механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова под руководством А. М. Виноградова. Главной тематикой семинара была геометрия дифференциальных уравнений. В 2000–2010 годах проводилась серия конференций «Современная геометрия» в Италии. В 2007 году была организована совместная итальяно-российская программа «Современная аналитическая механика» на базе математико-механического факультета СПбГУ. Научным руководителем программы стал А. М. Виноградов (институт Леви-Чивита). Куратором программы был назначен В. С. Кальницкий (СПбГУ). На одной из школ А. М. Виноградов и поставил вопрос о построении общей теории дифференциальных уравнений и их решений на многообразиях с особенностями, в первую очередь малой размерности. В. С. Кальницкий предложил начать исследование вопроса с анализа наблюдаемой динамики реальных механических систем, которые имеют особенности конфигурационного пространства малых размерностей. Механико-геометрическая постановка задачи стала основой для исследования механизмов с особенностями в работах автора [10–12].

В данной работе с общей точки зрения анализируется метод возникновения точек ветвления в конфигурационном пространстве

плоского шарнирного механизма. Рассматриваются системы сингулярного маятника [10] и механизма Дарбу [11, 12], которые могут быть получены из шарнирных механизмов без особенностей с помощью добавления двойного маятника. Для сингулярного маятника доказывается неоднозначность векторного поля, которое соответствует уравнениям Лагранжа второго рода. Для механизма Дарбу доказывается трансверсальность особой точки конфигурационного пространства.

## 2. ДОБАВЛЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ДВУХЗВЕННИКА

Рассмотрим плоский шарнирный механизм с цилиндрическими шарнирами  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Часть из шарниров соединена нерастяжимыми стержнями, и некоторые шарниры могут двигаться только по заданным направляющим. Предположим, что шарнирный механизм  $A_1 A_2 \dots A_n$  имеет одну степень свободы и параметризуется углом  $0 \leq u < 2\pi$ . Введем некоторую систему прямоугольных координат с осями  $Ox$  и  $Oy$  в плоскости движения механизма. Пусть координаты вершин  $x_{A_1}, y_{A_1}, \dots, x_{A_n}, y_{A_n}$  являются гладкими функциями угла  $u$ . Далее под «гладкостью» будем подразумевать гладкость типа  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Определение 1.** *Точка  $s$  конфигурационного пространства шарнирного механизма  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называется особой точкой (или точкой ветвления), если в окрестности точки  $s$  конфигурационное пространство представляется как объединение конечного числа  $p > 1$  непрерывных кривых, которые являются гладкими вне точки  $s$ .*

Будем также называть особые точки «точками ветвления».

**Утверждение 1.** *Рассмотрим расстояние  $d = d(u) = |A_1 A_2|(u)$ . Пусть при  $u = u_*$  достигается строгий локальный минимум (или строгий локальный максимум) расстояния  $d_{\min}$  (или  $d_{\max}$ ) между двумя шарнирами  $A_1$  и  $A_2$ . Добавим к шарнирному механизму  $A_1 A_2 \dots A_n$  два звена:  $A_1 B$  и  $A_2 B$ , соединенные шарниром  $B$ . Без ограничения общности пусть  $|A_1 B| \geq |A_2 B|$ . Длины стержней  $A_1 B$  и  $A_2 B$  подбираются из условия, что  $|A_1 B| - |A_2 B| = d_{\min}$  (или*



$|A_1B| + |A_2B| = d_{max}$ ). Тогда в конфигурационном пространстве шарнирного механизма  $A_1A_2 \dots A_nB$  возникает точка ветвления при значении угла  $u = u_*$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случай, когда при  $u = u_*$  достигается строгий минимум расстояния  $d_{min}$  между двумя шарнирами  $A_1$  и  $A_2$ . Движение рассматривается в малой окрестности угла  $u = u_*$ . Рассуждение для строгого максимума аналогично.

При значениях  $u$  из малой окрестности  $u_*$  получаем, что расстояние  $|A_1A_2| > d_{min}$  и треугольник  $A_1BA_2$  невырожденный. Тогда при заданных длинах сторон  $|A_1B|$ ,  $|A_2B|$  и  $|A_1A_2|$  существует два возможных положения треугольника  $A_1BA_2$ : когда стержень  $A_1B$  отклоняется вправо или влево от прямой  $A_1A_2$ . Следовательно, в конфигурационном пространстве шарнирного механизма  $A_1A_2 \dots A_nB$  есть две непрерывные кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которым соответствуют одинаковые положения вершин  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и два возможных положения вершины  $B$ . Вне конфигурации с  $u = u_*$  координаты вершины  $B$  в треугольнике  $A_1BA_2$  определяются по теореме косинусов. Следовательно, координаты  $x_B$  и  $y_B$  являются гладкими функциями вне  $u = u_*$ . Значит, кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  являются гладкими вне точки  $u = u_*$  и при  $u = u_*$  возникает точка ветвления.

**Определение 2.** *Непрерывные кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в конфигурационном пространстве механизма  $A_1, A_2, \dots, A_nB$ , для которых вершина  $B$  находится по одну сторону от прямой  $A_1A_2$  (включая прямую  $A_1A_2$ ), называются ветвями движения.*

С точки зрения конструкции шарнир  $A_1, A_2, \dots, A_nB$  представляет собой шарнирный механизм  $A_1, A_2, \dots, A_n$  с добавленным двойным маятником (двухзвенником)  $A_1BA_2$ , поэтому механизмы данного вида можно как «механизмы с добавочным маятником». Рассмотрим движение вершины  $B$  вблизи особой конфигурации, когда треугольник  $A_1BA_2$  становится вырожденным. Обозначим угол  $A_2A_1B$  как  $\theta_1$ , угол  $A_1BA_2$  как  $\theta_2$ , длины стержней  $A_1B$  и  $A_2B$  как

$l_1$  и  $l_2$ . Тогда по теореме косинусов:

$$\begin{aligned}\theta_1(u) &= \pm \arccos \left( \frac{l_1^2 + d(u)^2 - l_2^2}{2l_1 d(u)} \right); \\ \theta_2(u) &= \pm \arccos \left( \frac{l_1^2 + l_2^2 - d(u)^2}{2l_1 l_2} \right).\end{aligned}\quad (1)$$

Будем считать, что положительный знак перед арккосинусами в формулах (1) соответствует ветви движения  $\Gamma_1$  и отрицательный знак соответствует ветви движения  $\Gamma_2$ . Тогда при движении по ветви  $\Gamma_1$  вершина  $B$  всегда находится справа от прямой  $A_1 A_2$ , а при движении по ветви  $\Gamma_2$  всегда находится слева. Перейти с одной ветви на другую шарнирный механизм  $A_1, A_2, \dots, A_n B$  может только при  $\theta_1 = 0$  или  $\theta_1 = \pi$ .

Пусть угол поворота  $\alpha$  стержня  $A_1 A_2$  относительно оси координат  $Ox$  является гладкой функцией параметра  $u$ . Для дальнейшего анализа необходимы следующие свойства угла  $\theta_1$  (утверждения 2 и 3). Эти свойства получаются при разложении гладкой функции  $d(u)$  в ряд Адамара до первого ненулевого слагаемого в точке  $u = u_*$ . Приведем утверждения из [10].

**Утверждение 2.** Пусть  $d'(u_*) = 0$  и  $d''(u_*) \neq 0$ . Тогда  $\theta_1(u)$  и  $\theta_2(u)$  являются гладкими функциями при  $u \rightarrow u_* + 0$  и  $u \rightarrow u_* - 0$ . Значения производных следующие:  $\theta_1'(u_*) \neq 0$ ,  $\theta_2'(u_*) \neq 0$ . Гладкими продолжениями функций  $\theta_1$  и  $\theta_2$  за точку  $u_*$  являются функции  $-\theta_1$  и  $-\theta_2$  соответственно. Гладкому изменению координаты вершины  $B$  в окрестности  $u = u_*$  соответствует симметричное движение маятника  $A_1 B A_2$  относительно прямой  $A_1 A_2$ .

**Утверждение 3.** Пусть  $d'(u_*) = d''(u_*) = d'''(u_*) = 0$  и четвертая производная  $d^{(4)}(u_*) \neq 0$ . Тогда углы  $\theta_1(u)$  и  $\theta_2(u)$  являются гладкими функциями в окрестности  $u = u_*$ . Значение производных:  $\theta_1'(u_*) = 0$ ,  $\theta_2'(u_*) = 0$ ,  $\theta_1''(u_*) \neq 0$ ,  $\theta_2''(u_*) \neq 0$ . Гладкому изменению координаты вершины  $B$  в окрестности  $u = u_*$  соответствует асимметричное движение маятника  $A_1 B A_2$  относительно прямой  $A_1 A_2$ .

Перейдем к изучению направления скорости вершины  $B$  при

движении в точку ветвления. Под функцией  $\theta_1$  будем подразумевать движение по ветви с положительным знаком в формулах (1). Координаты вершины  $B$  при движении по ветви  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  запишутся в виде

$$\begin{aligned}x_B &= x_{A_1} + l_1 \cos(\alpha \pm \theta_1); \\y_B &= y_{A_1} + l_1 \sin(\alpha \pm \theta_1).\end{aligned}\tag{2}$$

**Утверждение 4.** Пусть  $\theta'_1(u_*) \neq 0$  и вектор скорости точки  $A_1$  не ортогонален вектору  $A_1A_2$  при  $u = u_*$ . Тогда ветви движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют разные направления касательных в точке ветвления при  $u = u_*$ .

*Доказательство.* Направления скоростей вершины  $B$  имеют координаты

$$\begin{aligned}x'_B &= x'_{A_1} - l_1 \sin(\alpha \pm \theta_1)(\alpha' \pm \theta'_1); \\y'_B &= y'_{A_1} + l_1 \cos(\alpha \pm \theta_1)(\alpha' \pm \theta'_1).\end{aligned}\tag{3}$$

В точке ветвления  $\theta_1 = 0$ . Для значения  $\theta'_1 \neq 0$  при  $\theta_1 = 0$  направления векторов скоростей (3) для двух ветвей движения различны тогда и только тогда, когда векторы

$$\begin{pmatrix} x'_{A_1} - l_1 \sin(\alpha)\alpha' \\ y'_{A_1} + l_1 \cos(\alpha)\alpha' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\alpha)\theta'_1 \\ +l_1 \cos(\alpha)\theta'_1 \end{pmatrix}$$

не коллинеарные. Это условие при  $\theta'_1(u_*) \neq 0$  равносильно следующему:

$$\begin{pmatrix} x'_{A_1} \\ y'_{A_1} \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} -l_1 \sin(\alpha) \\ +l_1 \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

где  $k \in \mathbb{R}$  — некоторая константа. Следовательно, скорость точки  $A_1$  не должна быть ортогональна вектору  $A_1A_2$ .

**Утверждение 5.** Пусть  $\theta'_1(u_*) = 0$  при  $u = u_*$ . Тогда ветви движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют одинаковые касательные в точке ветвления, которой соответствует значение  $u = u_*$ .

*Доказательство.* Следует из выражения (3) при подстановке значений  $\theta_1(u_*) = 0$  и  $\theta'_1(u_*) = 0$ .

Из утверждений 2–5 можно получить следствия.

**Следствие 1.** Пусть  $\theta_1^i(u_*) \neq 0$  и вектор скорости точки  $A_1$  не ортогонален вектору  $A_1A_2$  при значении  $u = u_*$ . Тогда ветви движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не являются гладкими кривыми, но конфигурационное пространство  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  является объединением двух гладких кривых.

**Следствие 2.** Пусть  $\theta_1^i(u_*) = 0$  при  $u = u_*$ . Тогда конфигурационное пространство  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  является объединением двух гладких кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которые являются ветвями движения.

Рассмотрим два примера механизмов с особенностью конфигурационного пространства, которая возникает из-за добавленного двойного маятника. Обозначения вершин в параграфах 3 и 4 не связаны с обозначениями в параграфе 2 и взяты из статей автора [10–12].

### 3. СИНГУЛЯРНЫЙ МАЯТНИК

Рассмотрим плоский механизм, состоящий из неподвижного шарнира  $A$  и точечной массы  $C$ , которая движется по заданной кривой  $\gamma$ . В конфигурационном пространстве этого механизма нет особенностей. Введем систему координат  $xOy$  в плоскости движения механизма: ось  $Ox$  направлена вниз параллельно действию силы тяжести, ось  $Oy$  ортогональна оси  $Ox$  (рис. 1). Предположим, что положение массы  $C$  на кривой  $\gamma$  параметризуется углом  $u$  отклонения вершины  $C$  от вертикальной оси  $Ox$ . Кривая  $\gamma(u)$  является гладкой симметричной кривой относительно оси  $Ox$ . При значении  $u = 0$  достигается строгий минимум  $d_{min}$  расстояния  $d(u) = |AC|(u)$  между шарнирами  $A$  и  $C$ .

Добавим к шарнирам  $A$  и  $C$  двухзвенник  $ABC$ , такой что  $|AB| - |BC| = d_{min}$ . Получим «сингулярный маятник», в конфигурационном пространстве которого возникает особая точка, или точка ветвления, по утверждению 1. Конфигурационное пространство сингулярного маятника лежит в множестве  $\mathbb{R}^4 = \{(x_B, y_B, x_C, y_C)\}$ . Ветви движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют трансверсальное пересечение или касание в зависимости от свойств функции  $d(u)$  согласно утверждениям 4 и 5. Введем обозначения углов:  $\theta_1 = \angle CAB$ ,  $\theta_2 = \angle ABC$ .

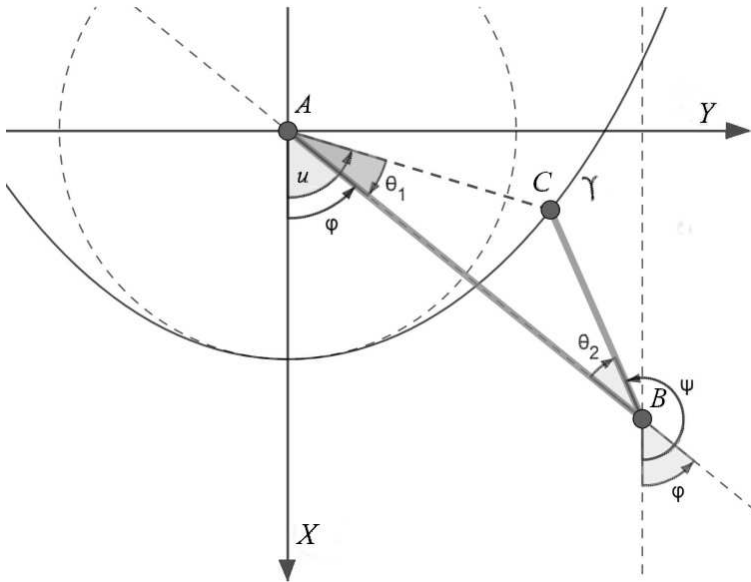


Рис. 1. Сингулярный маятник

Механическую систему сингулярного маятника можно рассматривать как двойной маятник  $ABC$ , на перемещение свободной вершины  $C$  которого наложена голономная связь  $f_3(x_C, y_C) = 0$ : вершина  $C$  движется только по заданной кривой  $\gamma$ . Для двойного маятника стандартно применяются координаты  $\varphi$  и  $\psi$  отклонения стержней  $AB$  и  $BC$  от вертикальной оси  $Ox$ . Двумерный тор  $\mathbb{T}^2$  параметризуется координатами  $\{(\varphi, \psi)\}$ . Точке ветвления соответствуют углы  $(\varphi, \psi) = (0, \pi)$ . Обозначим длины стержней  $AB$  и  $BC$  как  $l_1$  и  $l_2$ . Переход к координатам двойного маятника позволяет понизить размерность задачи с 4 до 2. Угловые координаты  $\varphi$  и  $\psi$  выражаются через углы сингулярного маятника  $u$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ :

$$\varphi(u) = u + \theta_1(u); \quad \psi(u) = \varphi(u) + \pi + \theta_2(u). \quad (4)$$

В формуле (4) для углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  выбирается одна ветвь движения. Свойства конфигурационного пространства сингулярного маятни-

ка в угловых координатах  $\varphi$  и  $\psi$  определяются свойствами углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  как функций переменной  $u$ . Аналогично утверждениям 4 и 5 для ветвей движения в декартовых координатах можно доказать следующие свойства конфигурационного пространства сингулярного маятника в угловых координатах [10]. Движение рассматривается при  $-\pi/2 < u < \pi/2$ .

**Утверждение 6.** *Если  $d(u) > l_1 - l_2$  при  $-\pi/2 < u < \pi/2$ , то ветви движения сингулярного маятника не пересекаются. Каждая ветвь является гладкой кривой на торе  $\mathbb{T}^2$ .*

**Утверждение 7.** *Пусть  $d(0) = l_1 - l_2$ ,  $d'(0) = 0$  и  $d''(0) \neq 0$ . Тогда конфигурационное пространство сингулярного маятника представляет собой две гладкие кривые на торе  $\mathbb{T}^2$ , которые трансверсально пересекаются в общей точке. Гладким кривым соответствуют нечетные функции  $\theta_1(u)$  и  $\theta_2(u)$ . Значение  $\theta'_1(0) \neq 0$ ,  $\theta'_2(0) \neq 0$ ,  $\theta''_1(0) = 0$ ,  $\theta''_2(0) = 0$ .*

**Утверждение 8.** *Пусть  $d(0) = l_1 - l_2$ ,  $d'(0) = d''(0) = d'''(0) = 0$  и  $d^{(4)}(0) \neq 0$ . Тогда конфигурационное пространство сингулярного маятника представляет собой две гладкие кривые (ветви движения)  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , которые имеют касание первого порядка в общей точке. Кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют различные знаки кривизны в особой точке. Гладким кривым соответствуют четные функции  $\theta_1(u)$  и  $\theta_2(u)$ . Значение  $\theta'_1(0) = 0$ ,  $\theta'_2(0) = 0$ ,  $\theta''_1(0) \neq 0$ ,  $\theta''_2(0) \neq 0$ .*

**Утверждение 9.** *Пусть  $d(0) = l_1 - l_2$ . Если радиус кривизны линии связи  $f_3(x_2, y_2)$  при  $u = 0$  равен разности длин стержней  $AB$  и  $BC$ , то в точке пересечения гладких кривых, которые составляют конфигурационное пространство сингулярного маятника, будет особенность типа касания первого порядка. Если радиус кривизны отличен от разности длин стержней, то на двумерном торе будет трансверсальное пересечение двух гладких кривых.*

Типичный вид конфигурационного пространства сингулярного маятника для особой точки типа трансверсального пересечения или касания показан на рис. 2 и 3. Графики ветвей сингулярного маятника построены для значений  $-\pi/2 < u < \pi/2$ .

Для построения уравнений движения сингулярного маятника

рассматривается модель с точечными массами  $m_B$  и  $m_C$  в вершинах  $B$  и  $C$ , когда стержни  $AB$  и  $BC$  считаются невесомыми и нерастяжимыми. Движение сингулярного маятника происходит только под действием силы тяжести. Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

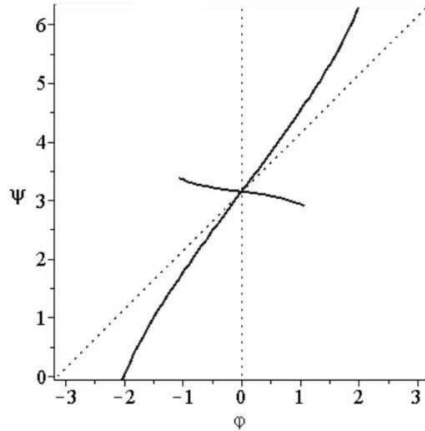


Рис. 2. Особая точка сингулярного маятника типа пересечения

Скорости и ускорения угловых координат:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \dot{u} + \theta'_1(u)\dot{u}; & \dot{\psi} &= \dot{\varphi} + \theta'_2(u)\dot{u}; \\ \ddot{\varphi} &= \ddot{u} + \theta''_1(u)(\dot{u})^2 + \theta'_1(u)\ddot{u}; & \ddot{\psi} &= \ddot{\varphi} + \theta''_2(u)(\dot{u})^2 + \theta'_2(u)\ddot{u}.\end{aligned}\quad (5)$$

Кинетическая и потенциальная энергия:

$$\begin{aligned}T(u, \dot{u}) &= \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 (1 + \theta'_1(u))^2 (\dot{u})^2 + \\ &\quad + m_2 ((d(u))^2 + (d'(u))^2) (\dot{u})^2) = A(u) (\dot{u})^2; \\ V(u) &= -m_1 g l_1 \cos(u + \theta_1(u)) - m_2 g d(u) \cos(u).\end{aligned}\quad (6)$$

Также введем вспомогательные функции:

$$A'(u) = m_1 l_1^2 (1 + \theta'_1(u)) \theta''_1(u) + m_2 (d(u) d'(u) + d'(u) d''(u));$$

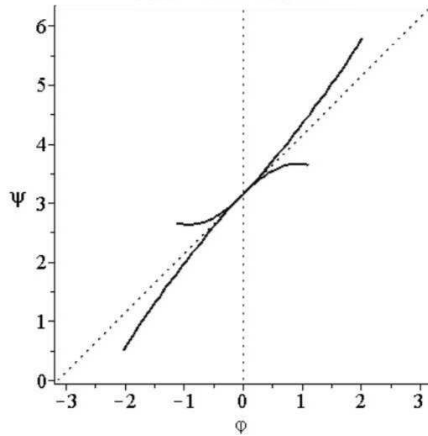


Рис. 3. Особая точка сингулярного маятника типа касания

$$Q_u(u) = -m_1 g l_1 \sin(u + \theta_1(u)) (1 + \theta_1'(u)) + m_2 g (d'(u) \cos(u) - d(u) \sin(u)). \quad (7)$$

Уравнения Лагранжа для движения сингулярного маятника вне особой точки для обобщенной координаты  $u$ :

$$\ddot{u} = \frac{Q_u(u) - A'(u)(\dot{u})^2}{2A(u)}. \quad (8)$$

В выражениях (5)–(8) предполагается, что у функции  $\theta_1$  (формула 1) выбран один из двух возможных знаков, который соответствует гладкой кривой в конфигурационном пространстве  $X$  сингулярного маятника. Для особенности типа трансверсального пересечения у угла  $\theta_1$  выбираются разные знаки при значениях  $-\pi/2 < u < 0$  и при значениях  $0 < u < \pi/2$ . Для особенности типа касания первого порядка у угла  $\theta_1$  выбирается один знак при  $-\pi/2 < u < \pi/2$ . В этом случае угол  $\theta_1$  является гладкой функцией угла  $u$ . Также заметим, что  $A(0) \neq 0$ , поэтому в уравнении (8) нет особенностей в знаменателе при  $u = 0$ . Из уравнения (8) при заданных начальных условиях  $u_0$  и  $\dot{u}_0$  можно найти ускорение в начальный момент времени.



Изучим выражение (8) в особой точке типа касания. Особой точке соответствуют значения  $u = 0$  и  $\theta_1 = 0$ .

**Утверждение 10.** *Для особенности типа касания первого порядка при одинаковых скоростях  $(\dot{\varphi}, \dot{\psi})$  при  $u = 0$  ускорения  $(\ddot{\varphi}, \ddot{\psi})$  при  $u = 0$  отличны от нуля и имеют разные знаки вдоль ветвей движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .*

*Доказательство.* В случае особенности типа касания первого порядка по утверждению 8 получаем:  $\theta'_1(0) = 0$ ,  $\theta'_2(0) = 0$ ,  $\theta''_1(0) \neq 0$ ,  $\theta''_2(0) \neq 0$ . Тогда значение

$$A'(0) = m_1 l_1^2 \theta''_1(0)$$

не равно нулю и имеет разный знак при движении по  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Также по формуле (7) получаем  $Q_u(0) = 0$ . Значение

$$A(0) = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 d^2(0))$$

отлично от нуля и имеет один и тот же знак для двух ветвей движения. По формулам (5) получаем при  $u = 0$  и  $\theta_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \dot{u}; & \dot{\psi} &= \dot{u}; \\ \ddot{\varphi} &= \left( \frac{m_2 d^2(0)}{m_1 l_1^2 + m_2 d^2(0)} \right) \cdot \theta''_1(0) \cdot (\dot{u})^2; \\ \ddot{\psi} &= \ddot{\varphi} + \theta''_2(0) \cdot (\dot{u})^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Из формулы (9) следует, что при одинаковых скоростях  $(\dot{\varphi}, \dot{\psi})$  ускорения  $(\ddot{\varphi}, \ddot{\psi})$  отличны от нуля и имеют разные знаки для ветвей движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , так как знаки  $\theta''_1(0)$  и  $\theta''_2(0)$  различны для ветвей движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

Рассмотрим касательное расслоение  $T\mathbb{R}^2$  двойного маятника с координатами  $(\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$ . Для механических систем без особенностей конфигурационного пространства уравнения Лагранжа второго рода задают гладкое векторное поле на касательном расслоении. Так как для особенности касания первого порядка направления касательных к ветвям  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в особой точке  $s = (\varphi, \psi) = (0, \pi)$

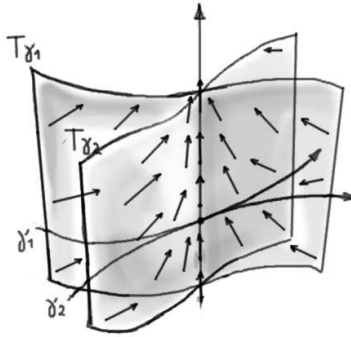


Рис. 4. Гладкое векторное поле для особенности типа касания первого порядка

совпадают, то касательные расслоения  $T\Gamma_1$  и  $T\Gamma_2$  ветвей движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  сингулярного маятника пересекаются по некоторой прямой  $L = T_s\Gamma_1 \cap T_s\Gamma_2$ . Точки на прямой  $L$  соответствуют углам  $(\varphi, \psi) = (0, \pi)$  и заданным скоростям  $(\dot{\varphi}, \dot{\psi}) = (\dot{u}, \dot{u})$ . Общий вид гладкого векторного поля  $V$ , которое касается множества  $T\Gamma = T\Gamma_1 \cup T\Gamma_2$ , показан на рис. 4: в точках прямой  $L$  векторное поле  $V$  должно быть параллельно прямой  $L$ .

Утверждение 10 означает, что в особой точке  $s = (0, \pi)$  при одинаковых скоростях  $(\dot{\varphi}, \dot{\psi})$  ускорения  $(\ddot{\varphi}, \ddot{\psi})$  будут различными при подходе к особой точке по ветви  $\Gamma_1$  и по ветви  $\Gamma_2$ .

**Следствие 3.** Уравнения движения сингулярного маятника с особенностью касания первого порядка задают неоднозначное векторное поле  $V$  на прямой  $L$  в касательном расслоении  $T\mathbb{R}^2$ : при одних и тех же значениях обобщенных координат и скоростей ускорения для двух ветвей движения разные.

#### 4. МЕХАНИЗМ ДАРБУ

Рассмотрим плоский шарнирный механизм, состоящий из трех стержней:  $KB$ ,  $BC$  и  $CM$ . В плоскости движения механизма есть

два неподвижных шарнира:  $A$  и  $D$ , расстояние  $|AD| = 2$ . Неподвижный шарнир  $A$  является серединой отрезка  $KB$ , и неподвижный шарнир  $D$  является серединой отрезка  $CM$ . Длины стержней  $KB$  и  $CM$  равны 2, длина стержня  $BC$  равна  $2\sqrt{2}$ . Введем систему координат в плоскости движения механизма: ось  $Ox$  проходит через вершины  $A$  и  $D$ , ось  $Oy$  проходит через середину отрезка  $AD$  ортогонально оси  $Ox$  (рис. 5).

В качестве обобщенной переменной возьмем угол  $u$ , равный углу поворота стержня  $KB$  относительно оси  $Ox$ . Положение трехзвенника  $KBCM$  однозначно определяется углом  $u$  при

$$-\arccos(1 - \sqrt{2}) < u < \arccos(1 - \sqrt{2}).$$

При  $u = \pm \arccos(1 - \sqrt{2})$  два стержня в трехзвеннике  $KBCM$  становятся параллельными и могут выйти из конфигурации двумя способами. Изучение шарнирного механизма  $KBCM$  будем проводить в окрестности  $u = \pi/2$ , поэтому параметр  $u$  однозначно задает положение вершин  $K, B, C, M$  в окрестности  $u = \pi/2$ .

В конфигурационном пространстве механизма  $KBCM$  нет особенностей. Можно доказать, что максимальное расстояние между шарнирами  $K$  и  $M$  равно  $2\sqrt{2}$  и достигается при  $u = \pm\pi/2$  [12]. Если к трехзвеннику  $KBCM$  добавить два стержня:  $KH$  и  $HM$ , таких что  $|KH| + |HM| = 2\sqrt{2}$ , то получим механизм с точками ветвления  $u = \pm\pi/2$  по утверждению 1. Когда выбраны одинаковые длины стержней:  $|KH| = |HM| = \sqrt{2}$ , то получаем «механизм Дарбу». Особым свойством механизма Дарбу является то, что при одном из двух возможных типов движения через особую точку конфигурационного пространства вершина  $H$  движется строго прямолинейно [11]. На рис. 5 и 6 показаны два типа движения вершины  $H$ : прямолинейное и криволинейное.

Для исследования свойств конфигурационного пространства механизма Дарбу вблизи точки ветвления  $u = \pi/2$  необходимо найти первую и вторую производную функции  $|KM|(u)$  при  $u = \pi/2$ . Для

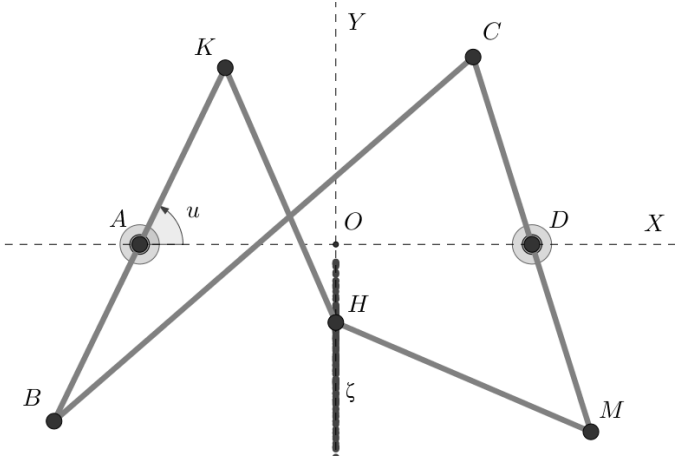


Рис. 5. Прямолинейное движение вершины  $H$  механизма Дарбу

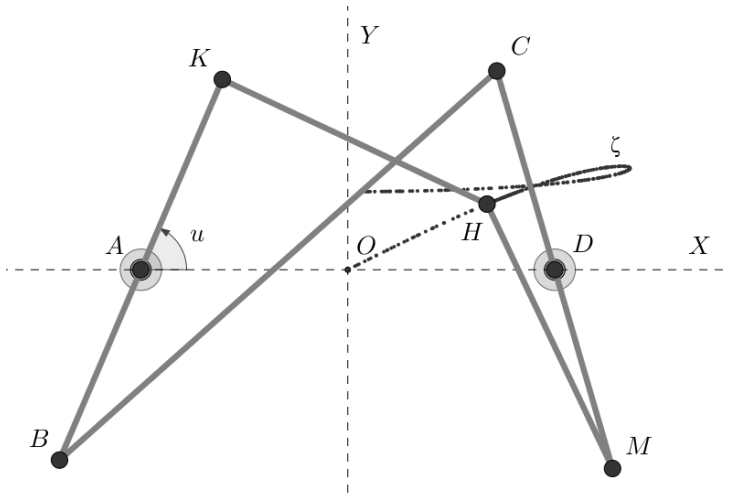


Рис. 6. Криволинейное движение вершины  $H$  механизма Дарбу

этого рассматривается прямая параметризация вершин  $K, B, C, M$ :

$$\begin{aligned}
 x_K &= -1 + \cos u; & y_K &= \sin u; \\
 x_B &= -1 - \cos u; & y_B &= -\sin u; \\
 u_2 &= \arctan \left( \frac{\sin u}{2 + \cos u} \right) + \arccos \left( \frac{3 + \cos u}{\sqrt{2(5 + 4 \cos u)}} \right); \\
 x_C &= x_B + 2\sqrt{2} \cos u_2; & y_C &= y_B + 2\sqrt{2} \sin u_2; \\
 x_M &= x_C + 2(1 - x_C); & y_M &= y_C + 2(0 - y_C).
 \end{aligned} \tag{10}$$

В формуле (10) угол  $u_2$  равен углу поворота стержня  $BC$  относительно горизонтальной оси  $Ox$ . Аналитическое вычисление производных функции  $|KM|(u)$  затруднено, поэтому применялся численный анализ. Графики первой и второй производной функции  $|KM|(u)$  показаны на рис. 7. На рисунке видно, что при  $u = \pi/2$  значение  $|KM|'(\pi/2) = 0$  и  $|KM|''(\pi/2) \neq 0$ . Направление скорости вершины  $K$  в точке ветвления  $u = \pi/2$  не ортогонально вектору  $KM$ . Следовательно, ветви движения механизма Дарбу имеют разные направления касательных в точке ветвления, согласно утверждению 4.

Параметризация вершины  $H$  через углы  $u$  и  $\theta_1 = \angle MKN$ :

$$x_H = x_K + \cos(u_4 \pm \theta_1); \quad y_H = y_K + \sin(u_4 \pm \theta_1). \tag{11}$$

В формуле (11) угол  $u_4$  обозначает отклонение прямой  $MK$  от горизонтальной оси  $Ox$ . Угол  $u_4$  гладко зависит от угла  $u$ , так как вершины  $K$  и  $M$  гладко зависят от угла  $u$  по формулам (10). Ветви движения механизма Дарбу являются гладкими кривыми вне точки ветвления. Таким образом, с помощью свойств функции  $|KM|(u)$  доказано, что конфигурационное пространство механизма Дарбу в окрестности особой точки представляется как две гладкие кривые, которые пересекаются под ненулевым углом.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказаны свойства конфигурационного пространства сингулярного маятника и механизма Дарбу. Для анализа этих си-

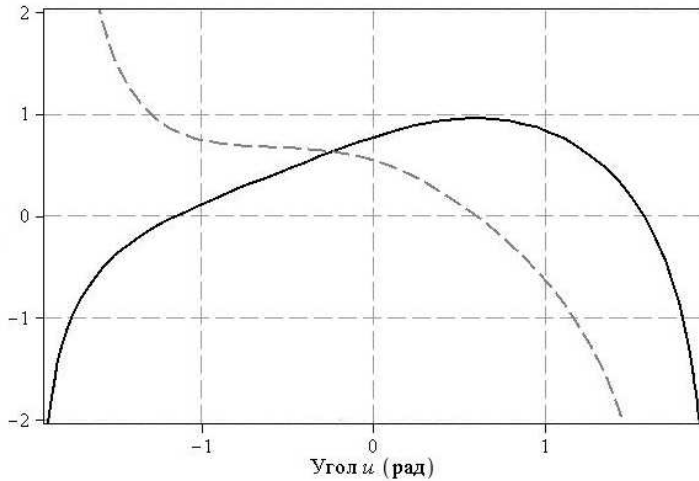


Рис. 7. Первая производная (сплошная линия) и вторая производная (пунктирная линия) функции  $|KM|(u)$

стем применяется следующий метод. Сначала рассматривается механическая система без особенностей конфигурационного пространства, которая определяется одной обобщенной координатой. К этой системе добавляется двухзвенник (двойной маятник) с длинами стержней, сумма или разность которых равна минимальному или максимальному расстоянию между выбранной парой вершин в шарнирном механизме без особенностей. В результате образуется точка ветвления в конфигурационном пространстве шарнирного механизма. Особая точка может иметь тип трансверсального пересечения или касания в зависимости от свойств функции расстояний между выбранной парой вершин. В случае особой точки типа касания векторное поле, которое соответствует уравнениям Лагранжа второго рода вне особенности, может быть определено неоднозначно над особенностью. В дальнейшем предполагается исследование других механизмов с особенностями данным методом.

---

**ЛИТЕРАТУРА**

1. *Чебышёв П. Л.* О простейшей суставочной системе, доставляющей движения симметрические около оси / П. Л. Чебышёв // Приложение к LX-му тому Записок Императорской Академии Наук. № 1. – СПб, 1889.
2. *Самсонов В. А.* Перестройка пространства положений механической системы / В. А. Самсонов, А. А. Михалев // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005, № 4. – С. 13–16.
3. *Михалев А. А.* Особенности бифуркации положений равновесия около критических механизмов / А. А. Михалев // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2008, № 6. – С. 10–14.
4. *Закалюкин И. В.* Особенности вырождения неголономных связей и управляемость / И. В. Закалюкин // Труды МАИ. – 2010. – Т. 39.
5. *Виноградов А. М.* Что такое гамильтонов формализм? / А. М. Виноградов, И. С. Красильщик // Успехи математических наук. – 1975. – Т. 30, № 1(181). – С. 173–198.
6. *Lusala T., Sniatycki J., Watts J.* Regular points of a subcartesian space. Canadian Mathematical Bulletin. 2010. Vol. 53(2). P. 340–346.
7. *Watts J.* Diffeologies, differential spaces, and symplectic geometry. Ph.D. thesis. 2012.
8. *Поляхов Н. Н.* Теоретическая механика / Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков. – Москва : Юрайт, 2012. – 592 с.
9. *Зегжда С. А.* Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. Новый класс задач управления / С. А. Зегжда, Ш. С. Солтаханов, М. П. Юшков. – Москва : Наука, 2005. – 269 с.
10. *Burian S. N., Kalnitsky V. S.* On the motion of one-dimensional double pendulum. AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. No 1. Art. No. 030004.
11. *Бурьян С. Н.* Особенности динамики прямолинейного движения механизма Дарбу / С. Н. Бурьян // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2018. – Т. 5(63), № 4. – С. 658–669.
12. *Бурьян С. Н.* Механизм Дарбу: геометрия и кинематика / С. Н. Бурьян // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып. 11. – С. 12–21.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕПНОЙ ЛИНИИ И ЕЕ МОДИФИКАЦИЙ

Е. А. ДЕГИЛЕВИЧ, А. С. СМИРНОВ

В работе обсуждаются вопросы моделирования обычной цепной линии (ЦЛ), а также двух ее модификаций – растяжимой ЦЛ и ЦЛ в ньютоновом поле тяготения. Создание моделей с сосредоточенными параметрами осуществляется в программном комплексе Adams. Результаты, полученные при проведении серии численных экспериментов, сравниваются с аналитическими решениями для соответствующих исходных моделей ЦЛ, которые обладают распределенными параметрами. В ходе исследования строятся графики силовой характеристики в зависимости от безразмерного параметра, определяющего относительное превышение длины ЦЛ над длиной пролета. Эти графические иллюстрации полностью подтверждают корректность рассмотренных моделей с сосредоточенными параметрами.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Моделирование ЦЛ можно осуществлять различными способами. Так, в работе [1] авторы представляют цепь в виде одинаковых точечных масс, которые соединены между собой нерастяжимыми нитями одной длины, а поиск расположения этих масс в пространстве осуществляется путем минимизации потенциальной энергии с помощью численных процедур в среде MS Excel. Отметим, что в своих исследованиях струны Лагранж представлял ее как предельное состояние нити с бусинками при стремлении количества бусинок к бесконечности [2], что значительно упрощало задачу. Такой подход нашел поддержку среди современников французского ученого и остается востребованным и в настоящее время. В исследованиях [3, 4] для изучения динамики проводов под действием ветровых нагрузок авторы создают конечно-элементную модель ЦЛ с помощью beam-элементов. В статье [5] модель с сосредоточенными параметрами определяется схожим в сравнении с работой [1] образом, однако здесь авторы решают задачу не численно, а приводят



аналитические выкладки для моделей с четным и нечетным количеством звеньев. Наконец в книге [6] предлагается использовать гантельные и стержневые схемы для исследования конечномерных моделей цепных систем, а в статье [7] этот подход применяется для анализа нелинейных колебаний ЦЛ. Именно такие схемы и будут использоваться в данной работе для моделирования как обычной ЦЛ, так и растяжимой ЦЛ, а также ЦЛ в ньютоновом поле тяготения, что будет осуществлено в программном комплексе Adams.

## 2. Обычная ЦЛ

Рассмотрим сначала нерастяжимую ЦЛ в однородном гравитационном поле, точки подвеса которой  $A$  и  $B$  расположены на одинаковой высоте (рис. 1).

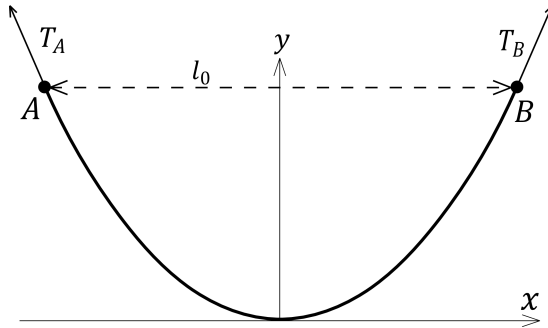


Рис. 1. Обычная ЦЛ

Ее уравнение, которое описывает конфигурацию тяжелой нити или цепи, известно из курса дифференциальной геометрии [6]:

$$y = a \left( \operatorname{ch} \frac{x}{a} - 1 \right),$$

где величина  $a$  выступает в качестве параметра. Запишем формулу для натяжения ЦЛ  $T_{A,B}$  на опорах  $A$  и  $B$  [8]:

$$T_{A,B} = H \operatorname{ch} \frac{l_0}{2a} = \frac{ql_0}{2z} \operatorname{ch} z, \quad a = \frac{H}{q}, \quad z = \frac{ql_0}{2H}, \quad (1)$$

где  $H$  — горизонтальная составляющая силы  $T$  (совпадающая со значением  $T$  в вершине ЦЛ),  $l_0$  — длина пролета,  $q$  — вес единицы длины, а  $z$  — безразмерный параметр, который удобно рассматривать как параметр семейства ЦЛ различной длины, соединяющих точки  $A$  и  $B$ . Для сопоставления результатов, которые мы будем осуществлять в дальнейшем для всех модификаций ЦЛ, целесообразно ввести в рассмотрение безразмерный параметр  $\delta$  по формуле

$$\delta = \frac{L}{l_0} - 1 = \frac{\text{sh } z}{z} - 1. \quad (2)$$

Ясно, что данный параметр показывает, на сколько процентов длина ЦЛ  $L$  превышает длину пролета  $l_0$ .

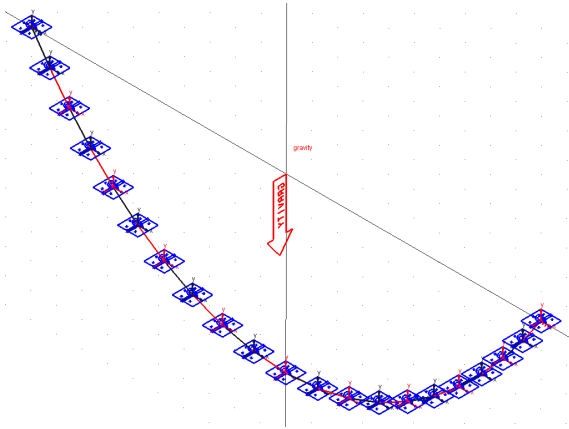


Рис. 2. Конечномерная модель обычной ЦЛ

В программном комплексе Adams была создана параметрическая модель, состоящая из двадцати гантелей (рис. 2). Каждая гантель представляет собой безынерционный стержень с двумя точечными массами  $m/2$  на его концах. Тем самым конечномерная модель обладает следующими характеристиками: в местах шарниров, соединяющих соседние гантели, располагаются точечные массы  $m$  (сумма двух масс  $m/2$  на смежных концах соседних гантелей), которые соединяются безынерционными стержнями. При этом в

местах шарнирного крепления ЦЛ находятся крайние массы  $m/2$ . Данная модель определяется 13 параметрами: длиной пролета  $l_0$ , длиной одной гантели  $l$ , ее массой  $m$ , а также 10 углами  $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ , которые гантели составляют с горизонталью в положении равновесия (рис. 3).

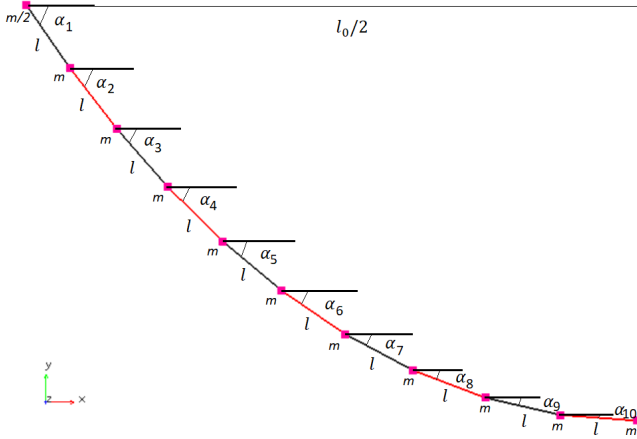


Рис. 3. Задаваемые параметры в конечномерной модели

Чтобы определить указанные углы, получим потенциальную энергию цепи в положении равновесия для модели с сосредоточенными параметрами, состоящей из четного числа гантелей, которое мы примем равным  $2n$ , где  $n$  – натуральное число:

$$\Pi = mgl \sum_{j=0}^{n-1} (1 + 2j) \sin \alpha_{n-j}, \quad (3)$$

а также запишем условие связи в положении равновесия, выражающее равенство суммы проекций всех гантелей на горизонталь длине пролета  $l_0$ :

$$2l \sum_{j=0}^{n-1} \cos \alpha_{n-j} = l_0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \cos \alpha_{n-j} = \frac{l_0}{2l}. \quad (4)$$

Поскольку потенциальная энергия в положении равновесия должна быть минимальной, то мы имеем задачу на условный экстремум. Для ее решения необходимо составить функцию Лагранжа [9] на основе потенциальной энергии (3) и условия связи (4):

$$F = \sum_{j=0}^{n-1} [(1+2j) \sin \alpha_{n-j} + \lambda \cos \alpha_{n-j}],$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа. Приравнивая нулю частные производные функции  $F$  по всем углам  $\alpha_j$ , получим следующие соотношения между углами  $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ , которые отвечают равновесному положению цепи как конечномерной модели с сосредоточенными параметрами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-j}} &= (1+2j) \cos \alpha_{n-j} - \lambda \sin \alpha_{n-j} = 0 \Rightarrow \lambda = (1+2j) \operatorname{ctg} \alpha_{n-j}, \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_n} &= \cos \alpha_n - \lambda \sin \alpha_n = 0 \Rightarrow \lambda = \operatorname{ctg} \alpha_n. \end{aligned}$$

Исключая отсюда  $\lambda$ , находим:

$$(1+2j) \operatorname{tg} \alpha_n = \operatorname{tg} \alpha_{n-j}. \quad (5)$$

Отметим, что формула (5) с точностью до обозначений углов совпадает с формулой, приведенной в статье [5], которую авторы получили без использования функции Лагранжа с помощью уравнений баланса моментов для каждого звена цепи.

Поскольку модель состоит из  $2n$  гантелей длины  $l$ , то параметр  $\delta$  согласно (2) будет определяться следующими соотношениями:

$$\delta = \frac{L}{l_0} - 1 = \frac{2nl}{l_0} - 1 \Rightarrow l = \frac{l_0(1+\delta)}{2n}. \quad (6)$$

Используя далее известную тригонометрическую формулу

$$\cos \alpha_{n-j} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{n-j}}},$$

перепишем условие связи (4) с учетом соотношений (5) и (6) в виде

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + 2j)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha_n}} = \frac{n}{1 + \delta}. \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой неявную зависимость угла  $\alpha_n$  от параметра  $\delta$ . С ее помощью при заданной длине ЦЛ  $L$ , а значит и при заданном значении  $\delta$ , можно определить все остальные углы  $\alpha_j$ , используя соотношения связи между углами (5). Для проверки всех указанных действий в программном комплексе Adams можно зафиксировать длину пролета  $l_0$  и изменять длину гантелей  $l$  согласно (6). Последним неоговоренным параметром остается масса гантели  $m$ , которая должна увеличиваться пропорционально длине гантели так, чтобы погонная плотность ЦЛ  $\rho$  (т. е. масса единицы длины) оставалась постоянной:

$$m = \rho l = m_0(1 + \delta), \quad m_0 = \frac{\rho l_0}{2n}. \quad (8)$$

Остается отметить, что при нечетном числе гантелей  $2n + 1$  проведенные выкладки будут несколько отличаться.

Как было сказано ранее, для численного эксперимента была создана модель, состоящая из 20 гантелей, а значит, все полученные выше формулы использовались при  $n = 10$ . После параметризации всех указанных величин и задания координат всех узлов (маркеров) через параметры модель ЦЛ было удобно перестраивать простым изменением значения величины  $\delta$ .

В результате численного эксперимента была получена зависимость силы натяжения  $T_{A,B}$  от параметра  $\delta$  с ее последующим обезразмериванием путем деления на  $ql_0$  (т. е. на вес цепи, длина которой идентична длине пролета). Эта зависимость сравнивалась с результатом, полученным при аналитическом исследовании, которое определяется формулами (1) и (2). Сравнение аналитического и численного решения представлено на рис. 4, и он отчетливо демонстрирует, что численный эксперимент точно соответствует аналитическим результатам.

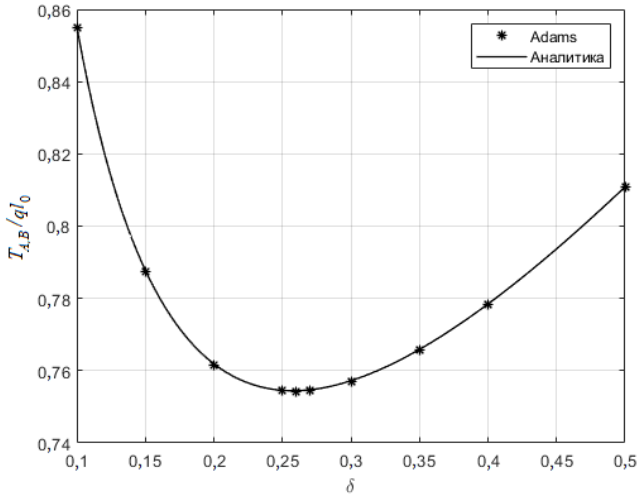


Рис. 4. Зависимость силы натяжения от параметра  $\delta$

### 3. РАСТЯЖИМАЯ ЦЛ

Рассмотрим теперь первую модификацию обычной ЦЛ – растяжимую ЦЛ. В этом случае сила тяжести на единицу длины  $q$  согласно закону Гука будет равна

$$q = \frac{q_0}{1 + \beta T}, \quad \beta = \frac{1}{ES},$$

где  $q_0$  — сила тяжести на единицу длины еще нерастянутой ЦЛ,  $\beta$  — удельное относительное удлинение ЦЛ,  $E$  — модуль упругости материала ЦЛ,  $S$  — ее площадь сечения. Известно, что длина ЦЛ в нерастянутом состоянии  $L_0$  определяется параметрами  $a$ ,  $q_0$ ,  $l_0$  и  $\beta$  и удовлетворяет следующему условию связи [10]:

$$\operatorname{sh} \left( \frac{l_0}{2a} - \frac{\beta}{2} q_0 L_0 \right) = \frac{L_0}{2a}. \quad (9)$$

Что же касается силы натяжения на опорах, то она определяется

формулой

$$T_{A,B} = H \operatorname{ch} \left( \frac{l_0}{2a} - \frac{\beta}{2} q_0 L_0 \right), \quad a = \frac{H}{q_0}, \quad (10)$$

которая в случае  $\beta = 0$  совпадает с (1), как этого и следовало ожидать. Вводя в рассмотрение безразмерные параметры  $z = q_0 l_0 / 2H$ ,  $\varkappa = \beta q_0 l_0 / 2$  и  $\xi = L_0 / l_0$ , перепишем формулу для силы (10) и условие связи (9) в следующем виде:

$$T_{A,B} = \frac{q_0 l_0}{2z} \operatorname{ch}(z - \varkappa \xi), \quad \frac{\operatorname{sh}(z - \varkappa \xi)}{z} - \xi = 0. \quad (11)$$

Кроме того, по аналогии с предыдущим разделом введем величину

$$\delta = \frac{L_0}{l_0} - 1 = \xi - 1. \quad (12)$$

В программном комплексе Adams была создана параметрическая модель, состоящая из двадцати стержней (рис. 5). Поскольку цепь должна быть растяжимой, цилиндрические шарниры, соединяющие соседние стержни между собой, были заменены на упругие связи BUSHING, которые позволили добавить трансляционные смещения звеньев друг относительно друга. Краевые стержни были соединены со средой (ground) цилиндрическими шарнирами.

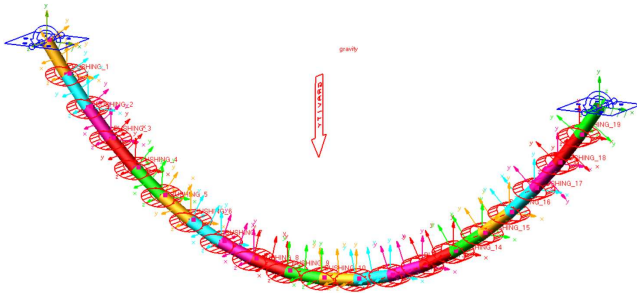


Рис. 5. Конечномерная модель растяжимой ЦЛ

Значения жесткости во всех связях BUSHING в направлениях  $x$  и  $y$  были заданы идентичными. При этом вращательная жесткость была задана нулевой, поскольку звенья должны свободно поворачиваться друг относительно друга. Отметим, что также была задана вязкость, чтобы обеспечить плавный переход от исходного состояния цепи к растянутому.

Исходная конфигурация строилась согласно формулам из предыдущего раздела, в котором рассматривалась нерастяжимая ЦЛ. Углы  $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$  остаются прежними, т. к. в равновесном состоянии положения центра масс и гантели, и стержня совпадают. Для того чтобы модель можно было легко перестраивать, изменяя длину цепи (а значит, и параметр  $\delta$ ), а также жесткость и вязкость связью BUSHING, была проведена параметризация. Координаты узлов (маркеров) были заданы суммами синусов и косинусов с помощью параметров: длин  $l$  и  $l_0$ , а также углов  $\alpha_1, \dots, \alpha_{10}$ . Инерционные свойства цилиндрических звеньев рассчитывались автоматически, поскольку была задана постоянная плотность. В отличие от рассмотренной ранее гантельной модели для нерастяжимой ЦЛ, где безынерционные стержни перестраивались автоматически при смене положения концевых узлов, для стержневой модели было необходимо использовать вспомогательные функции, которые позволили цилиндрическим звеньям менять длину и ориентацию в пространстве. Длина звена определялась функцией DM, которая считала расстояние между концевыми маркерами, а поворот маркера звена, который задавал ориентацию всего цилиндра, осуществлялся с помощью функции ORI ALONG AXIS.

Рассматриваемая конечномерная модель не является однородной, поскольку в ней присутствуют жесткие звенья, которые не удлиняются под действием силы тяжести, и упругие связи, за счет которых и обеспечивается растяжение цепи. Этот факт создает сложности для определения точной связи между жесткостями связью BUSHING с параметром  $\varkappa$ .

Для валидации модели удобно выбрать некоторую геометрическую характеристику, чтобы потом можно было адекватно сравнивать значения силы натяжения цепи в численном и аналитическом решении. В качестве такой характеристики удобно взять стрелу



провисания цепи  $f$ , которая определяется формулой

$$f = \frac{l_0}{2z} \left[ \operatorname{ch}(z - \varkappa\xi) + \frac{\varkappa z \xi^2}{2} - 1 \right]. \quad (13)$$

Благодаря формуле для стрелы провисания (13) становится возможным установление связи между жесткостью и параметром  $\varkappa$  при любой заданной длине цепи. Сравнивая аналитическое значение  $f$  с вертикальной координатой нижнего узла (маркера) цепи, можно установить соответствие или несоответствие выбранного параметра жесткости упругой связи.

Модель, представленная на рис. 5, не подходит для исследования растяжимых цепей с отрицательным параметром  $\delta$ , т. е. для тех случаев, когда исходная длина цепи меньше длины пролета, и необходимо создавать предварительное растяжение. Однако была создана еще одна модель (рис. 6), которая является даже более универсальной в сравнении с предыдущей, поскольку она дает возможность моделировать растяжимую цепь как с положительными, так и отрицательными значениями параметра  $\delta$ .

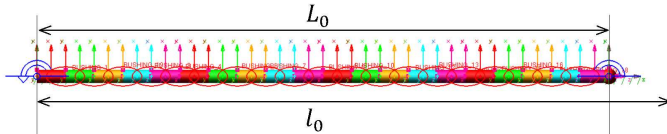


Рис. 6. Другая конечномерная модель растяжимой ЦЛ

В отличие от предыдущей модели, для которой определялись углы и координаты всех звеньев, исходная конфигурация новой модели представляет собой горизонтально расположенную цепь, звенья которой очень легко задавать параметрически, поскольку координаты меняются только вдоль горизонтальной оси. Вторым важным отличием является появление фиктивного безмассового тела, играющего роль подвижной правой опоры. Крайнее правое цилиндрическое звено связано с подвижной опорой цилиндрическим шарниром. Закон перемещения опоры записывался через функцию STEP:

$$u_x = \text{STEP}(\text{TIME}, 0, 0, 1, (l_0 - L_0)). \quad (14)$$

Формула (14) означает, что опора за одну секунду плавно сместится вдоль горизонтальной оси из своего исходного положения  $L_0$  на расстояние  $(l_0 - L_0)$  в конечное положение  $l_0$ , которое обозначено на рис. 6 красной линией. Такая модель дает возможность естественным образом создать предварительную нагрузку в упругих связях, которые возникнут вследствие удлинения от перемещения опоры и растяжения под собственным весом. Определение длины звеньев  $l$  и жесткостей связей BUSHING осуществляется по тем же соображениям, что и для предыдущей модели.

Таблица 1. Жесткости связей (Н/м) в зависимости от  $\delta$  и  $\varkappa$

$\delta$	$\varkappa = 0,05$	$\varkappa = 0,10$	$\varkappa = 0,15$
-0,05	4800	2350	1500
0	4550	2250	1480
0,05	4250	2150	1450
0,10	4100	2100	1400
0,15	4000	1950	1300
0,20	3800	1890	1250
0,25	3600	1800	1200
0,30	3500	1700	1150
0,35	3400	1650	1100
0,40	3250	1600	1050

Таблица 2. Жесткости связей (Н/м) в зависимости от  $\delta$  и  $\varkappa$

$\delta$	$\varkappa = 0,25$	$\varkappa = 0,30$	$\varkappa = 0,35$
0	890	740	645
-0,025	915	760	650
-0,050	940	780	670
-0,075	965	805	690
-0,100	990	825	710
-0,125	1025	850	730
-0,150	1060	875	750
-0,175	1090	905	775
-0,200	1120	930	800

Для моделирования цепи были выбраны следующие параметры и характеристики: длина пролета  $l_0 = 1$  м, радиус цилиндрического звена  $r_c = 1$  см, материал звеньев – сталь (плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>), ускорение свободного падения  $g = 9,8$  Н/кг. Результаты подбора жесткостей приведены в табл. 1 и 2.



Рис. 7. Конечномерная модель при  $\delta = 0,25$ ,  $\varkappa = 0,15$

На рис. 7 и 8 представлены установившиеся конфигурации растянутых ЦЛ при положительном и отрицательном значениях  $\delta$ . В результате симуляций были получены зависимости силы натяжения цепи на опорах, отнесенной к  $q_0 l_0$ , от параметра  $\delta$  при нескольких значениях  $\varkappa$  (рис. 9 и 10). Также на графики были нанесены кривые, построенные по ранее полученным формулам (11) и (12).



Рис. 8. Конечномерная модель при  $\delta = -0,2$ ,  $\varkappa = 0,35$

Из рис. 9 ясно, что результаты численного эксперимента хорошо соотносятся с аналитическими зависимостями, а незначительное отклонение некоторых точек от кривых может быть исправлено путем небольшого уточнения жесткостей в таблицах. При увеличении

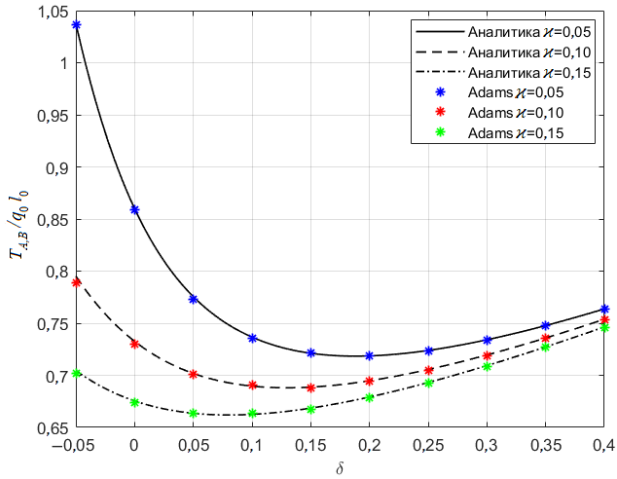


Рис. 9. Зависимость силы натяжения от параметра  $\delta$

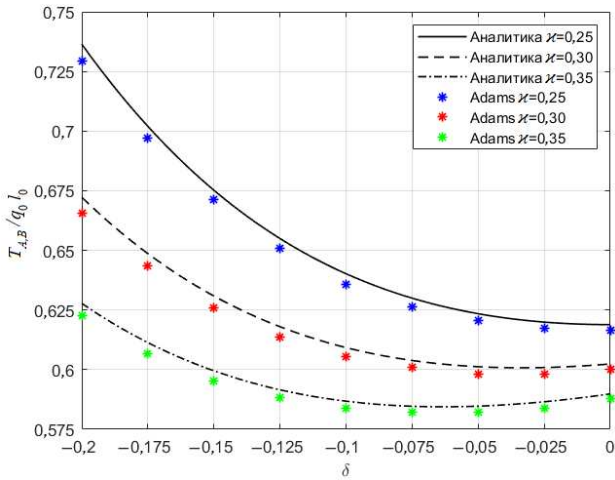


Рис. 10. Зависимость силы натяжения от параметра  $\delta$

податливости цепи значения силы натяжения уменьшаются, а минимум силы на опорах сдвигается левее. По рис. 10 видно, что при данных параметрах совпадение аналитики и симуляций оказывается несколько худшим, однако даже с большими удлинениями и отрицательным  $\delta$  погрешность составляет не более 1 %, что является вполне допустимым результатом.

#### 4. ЦЛ в ньютоновом поле

Рассмотрим теперь ЦЛ длиной  $2l$  с плотностью  $\rho_l$  на единицу длины и площадью поперечного сечения  $S$ , которая подвешена за оба конца в ньютоновом силовом поле в точках  $A$  и  $B$ , расположенных на одинаковом расстоянии  $R$  от притягивающего центра  $O$  и имеющих угловое расстояние  $2\alpha$  между собой (рис. 11).

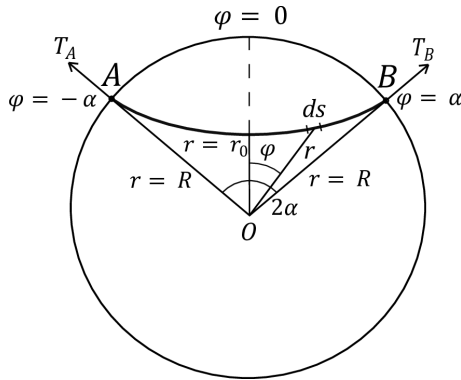


Рис. 11. ЦЛ в ньютоновом поле

Сила натяжения на опорах определяется формулой [11]:

$$T_{A,B} = \frac{q}{\kappa R} \left( \frac{\kappa \operatorname{ch} \sqrt{\kappa^2 - 1} \alpha - 1}{\kappa - \operatorname{ch} \sqrt{\kappa^2 - 1} \alpha} \right), \quad \kappa = \frac{q}{H}, \quad (15)$$

где  $q = \gamma \rho_l S$ ,  $\gamma$  — гравитационный параметр притягивающего центра, а константа  $H = T_0 r_0$  — величина, пропорциональная натяжению  $T_0$  в ее наинизшей точке  $r_0$ , в которой  $r' = 0$ . Параметр  $\delta$

определяется по формуле

$$\delta = \frac{L}{l_0} - 1 = \frac{2l}{l_0} - 1 = \frac{\zeta}{\sin \alpha} - 1, \quad (16)$$

где  $l_0 = 2R \sin \alpha$  — расстояние между точками  $A$  и  $B$ , а безразмерная длина половины ЦЛ  $\zeta = l/R$  определяется из выражений

$$\zeta = \sqrt{(1 - \kappa b)^2 - b^2}, \quad b = \frac{\kappa - \operatorname{ch} \sqrt{\kappa^2 - 1} \alpha}{\kappa^2 - 1}. \quad (17)$$

Задавая параметр  $\delta$ , по формуле (16) можно определить безразмерную длину  $\zeta$ , которая необходима для определения параметра  $\kappa$  из формулы (17), что в свою очередь потребуется для определения силы натяжения  $T_{A,B}$  согласно (15).

При моделировании конечномерной модели ЦЛ в ньютоновом поле за основу была взята модель обычной ЦЛ. Ускорение свободного падения было заменено приложением сил к местам сосредоточенных масс, т. е. к местам их шарнирного крепления. Каждая сила была сделана следящей по направлению к центру притяжения, который был изображен в виде сферы (рис. 12). Величина силы за-

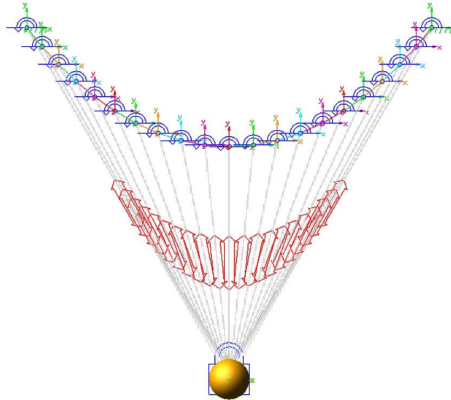


Рис. 12. Конечномерная модель ЦЛ в ньютоновом поле

давалась в виде формулы

$$F_i = -\frac{\gamma m}{DM (\text{MARKER}_i, \text{MARKER}_c)^2}, \quad (18)$$

где  $m$  – масса одной гантели, рассчитанная по формуле (8);  $DM$  – встроенная функция, которая рассчитывает расстояние между двумя маркерами в любой момент времени;  $\text{MARKER}_i$  – маркер  $i$ -й массы;  $\text{MARKER}_c$  – маркер притягивающего центра. В двух опорах были заданы силы

$$F_{A,B} = -\frac{\gamma m}{2R^2},$$

поскольку там располагаются массы  $m/2$ , а расстояние  $R$  остается фиксированным во времени. Для того чтобы рассчитывать модель при разных углах  $\alpha$ , удобнее не перемещать ЦЛ в пространстве, а двигать по вертикали центр притяжения. Пользуясь рис. 11, можно записать выражения для радиуса  $R$  и расстояния  $h$  от уровня опор до центра притяжения:

$$h = \frac{l_0}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad R = \sqrt{h^2 + (l_0/2)^2}. \quad (19)$$

Для того чтобы переход от исходной конфигурации цепи, построенной по аналогии с разделом 2, к конфигурации цепи в ньютоновом поле прошел плавно без возникновения вибраций, было добавлено небольшое демпфирование путем связи гантелей со средой (ground) с помощью инструмента BUSHING.

В результате численного эксперимента были получены зависимости безразмерной силы натяжения нити в опорах от параметра  $\delta$ , причем для обезразмеривания необходимо поделить эту силу на величину  $q/R$ , т. е. на значение  $2n\gamma m_0/R$ , где  $2n$  – число гантелей, из которых состоит модель;  $\gamma$  – параметр из формулы (18);  $m_0$  – масса гантели (8), когда длина цепи совпадает с длиной пролета;  $R$  – расстояние от притягивающего центра до опоры (19), которое будет различным при разных значениях угла  $\alpha$ .

Графическая иллюстрация приведена на рис. 13, по которому видно хорошее согласование аналитических зависимостей с результатами симуляций. Резкое возрастание силовой характеристики происходит при сближении ЦЛ с притягивающим центром. При этом,

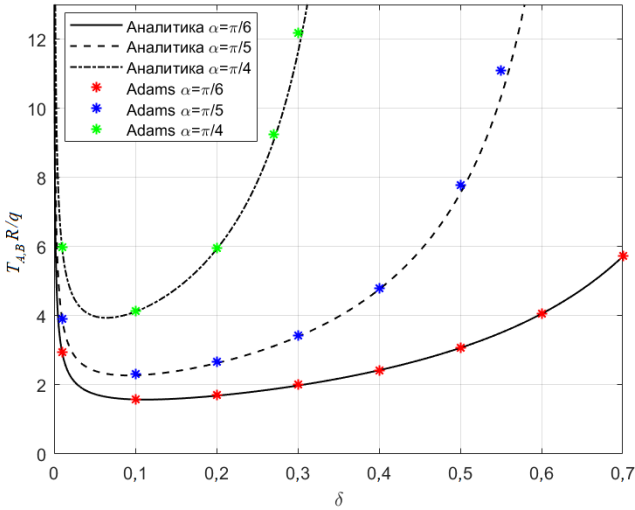


Рис. 13. Зависимость силы натяжения от параметра  $\delta$

чем больше угол  $\alpha$ , тем раньше наступит сильный рост реакции при увеличении провисания. По мере увеличения параметра  $\delta$  и сближения цепи с притягивающим центром начинает нарастать расхождение между аналитикой и симуляцией, что связано с сосредоточенным характером модели. Для более точного результата будет необходимо увеличить число гантелей, что позволит сгладить форму ЦЛ вблизи центра притяжения.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ отчетливо демонстрирует корректность использования представленных в работе схем для моделирования различных модификаций ЦЛ, которые на практике либо состоят из отдельных элементов (цепи из звеньев, веревочные мосты с досками настила, гибкие трубы из шарнирно-соединенных фрагментов), либо представляют собой сплошные конструкции (провода, тросы). Дальнейшее развитие рассмотренной задачи может быть связано



с непосредственным внедрением численных моделей ЦЛ в сборки с другими элементами для последующего анализа конструкции, а также с изучением других модификаций ЦЛ и всевозможных систем с распределенными параметрами (струны, стержни, балки).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Оптимизационная задача о провисании цепной линии / О. В. Аксенова [и др.] // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. – 2018, № 3. – С. 123–130.
2. Смольников Б. А. Механика в истории науки и общества / Б. А. Смольников. – М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2014. – 608 с.
3. Song Y., Zhang M., Øiseth O., Rønnquist A. Wind deflection analysis of railway catenary under crosswind based on nonlinear finite element model and wind tunnel test. *Mechanism and Machine Theory*. 2022. Vol. 168. 104608.
4. Gregori Verdú S., Tur Valiente M., Nadal E., Fuenmayor Fernández F. An approach to geometric optimisation of railway catenaries. *Vehicle System Dynamics*. 2017. P. 1–25.
5. Agmon D., Yizhaq H. A new solution of the discrete catenary problem. *European Journal of Physics*. 2020. 41(2). 025002.
6. Смирнов А. С. Колебания цепных систем / А. С. Смирнов, Е. А. Дегилевич. – СПб.: Политех-пресс, 2021. – 246 с.
7. Дегилевич Е. А. Нелинейные колебания трехгангельной модели цепной линии / Е. А. Дегилевич, А. С. Смирнов // Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований. Материалы IV Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Комсомольск-на-Амуре, 11–15 апреля 2022 г. – 2022. – Ч. 2. – С. 9–12.
8. Смирнов А. С. Оптимизация цепной линии / А. С. Смирнов, Б. А. Смольников // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2019–2020. – 2020. – С. 35–50.
9. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
10. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити / Д. Р. Меркин. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1980. – 240 с.
11. Смирнов А. С. Оптимизация цепной линии и ее модификаций / А. С. Смирнов, Е. А. Дегилевич // Труды МФТИ. – 2022. – Т. 14, № 1. С. – 35–48.

# ДЕФОРМАЦИЯ КРУГЛОЙ, ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОВЕРХНОСТНОГО ЗАРЯДА

Н. В. НАУМОВА, А. Б. ЯКОВЛЕВ, Д. Н. ИВАНОВ, Н. П. ДОРОФЕЕВ

В настоящее время активно исследуется изменение характеристик космического паруса во время эксплуатации. Парус обычно представляется как тонкая пленка, натянутая на каркас. В процессе полета эта пленка претерпевает деформации под действием ряда факторов, что влияет на эффективность и траекторию.

В данной работе предлагается модель паруса в виде круглой пластины радиуса до 50 метров, состоящей из трех слоев (алюминий, майлар, алюминий). Майларовая пленка толщиной 2 мкм заключена между двумя более тонкими алюминиевыми пленками толщиной 0,2 мкм. В результате численных расчетов в конечноэлементном пакете ANSYS получены значения максимальных прогибов пластины в зависимости от ее радиуса. В дальнейшем планируется получить аналитическое решение рассматриваемой задачи и провести сравнение аналитических и численных результатов. Предложенная модель может помочь при прогнозировании движения реальных космических парусов и управления их ориентацией в космическом пространстве.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Развитие космических исследований, особенно при осуществлении полетов вблизи границ Солнечной системы, требует исследования возможностей использования альтернативных двигательных систем. В научной и научно-популярной литературе [8], [4] активно обсуждается применение для таких целей предложенного Фридрихом Артуровичем Цандером солнечного паруса. На данный момент решено большое количество траекторных задач, задач управления и оптимизации движения с учетом множества факторов космического пространства, в частности эффекта тени Земли. Важным направлением исследования возможности использования космических аппаратов (КА) с солнечным парусом является изучение влияния различных факторов космического пространства на работо-

---

Доклад на семинаре 29 марта 2022 г.

© Наумова Н. В., Яковлев А. Б., Иванов Д. Н., Дорофеев Н. П., 2022.

способность указанных КА. В частности, в [9] исследовано влияние деградации и изменения отражательной способности поверхности паруса на его динамику. Известно, что тела, находящиеся в космической плазме, приобретают электрический заряд, зависящий от плотности и температуры плазмы, величины потока солнечного излучения и электрофизических характеристик тела, а, таким образом, от положения и ориентации тела в процессе движения. Однако зарядка тонких пленок в отличие от ранее рассмотренных процессов зарядки тел в космической плазме [1], [12], [6] обладает рядом особенностей. Наиболее важной из них является частичная проницаемость пленки для заряженных частиц космической плазмы [3]. В работе [11] показано, что зарядка поверхности солнечного паруса фактически не влияет на движение КА с парусом при перелетах Земля–Марс и Земля–Юпитер, если поверхность паруса остается плоской в процессе движения. Это связано с крайне малыми величинами напряженности межпланетного магнитного поля. Однако наведенный на поверхности паруса электрический заряд может привести к деформации поверхности, что в свою очередь изменит эффективную площадь его поверхности. Данная работа является попыткой оценить изменение эффективной площади паруса в результате его электризации в космической плазме Солнечной системы.

## **2. МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ЗАРЯДКИ БЕСКОНЕЧНОЙ ДВУХСТОРОННЕЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ**

В действительности для солнечного паруса используется пленка из каптона с алюминиевым покрытием с двух сторон. Отметим, что при движении солнечного паруса с доступными на данный момент толщиной и другими характеристиками, необходимыми для осуществления межпланетных перелетов, в качестве модели паруса можно использовать двухстороннюю, бесконечную, полностью поглощающую частицы пластину из алюминия с заданным коэффициентом отражения солнечного излучения. Алюминий — материал с большим выходом фотоэмиссии, поэтому вблизи освещенной солнцем поверхности образуется двойной слой с немонотонным

распределением потенциала. Так как размеры паруса много больше величин ларморовского и дебаевского радиусов, то при моделировании поверхность можно считать бесконечно большой. Также предполагается, что

- 1) корпус КА не влияет на процесс зарядки паруса;
- 2) процесс расширения коронального газа — адиабатический (предположение используется для вычисления скорости солнечного ветра);
- 3) скорость тела много меньше скорости солнечного ветра, поэтому пластину можно считать неподвижной;
- 4) влияние границ поверхности пленки не учитывается;
- 5) известны функции распределения по скоростям заряженных частиц на бесконечности и фотоэлектронов на поверхности паруса;
- 6) на верхней (со стороны Солнца) стороне пластины распределение электростатического потенциала немонотонное;
- 7) на обратной стороне пластины распределение электростатического потенциала монотонное;
- 8) потенциалы на обеих поверхностях пластины одинаковые.

Как показано в [2], в окрестности Земли функцию распределения фотоэлектронов для алюминиевой пластины можно считать полумаксвелловской с концентрацией  $y$  поверхности  $N_{\nu 0} = 1,891 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}$  и температурой  $T_{\nu} = 0,9 \text{ эВ}$  для случая полного поглощения солнечного излучения.

При этом функции распределения для электронов и ионов солнечного ветра являются максвелловскими с  $T_e = 10 \text{ эВ}$  и  $N_{e0} = 9 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3}$  (спокойный солнечный ветер) [6]. Для других расстояний от Солнца температуры сохраняются, а плотности пересчитываются исходя из:

- 1) обратной пропорциональности квадрату расстояния от Солнца для плотности фотоэлектронов;
- 2) адиабатичности расширения идеального газа и сохранения потока солнечного ветра для плотностей его протонов и ионов [5].

Таким образом, для малых углов падения солнечного излучения  $\theta$  выполняется условие высокой фотоэмиссии  $N_{\nu 0} \gg N_{e0}$ . Поэтому над пластиной можно ожидать существования немонотонного потенциала. Потенциал электрического поля и распределение

частиц в двойном слое определяются системой уравнений Власова–Пуассона с соответствующими граничными условиями. Так как размеры паруса много больше дебаевского радиуса плазмы солнечного ветра, уравнение Пуассона становится одномерным. Для двухсторонней пластины отдельно рассматривается решение системы уравнений Власова–Пуассона в двух областях: над пластиной (зона 1) и под пластиной (зона 2):

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = -\frac{e}{\varepsilon_0}(N_i - N_{e1} - N_\nu) \quad - \quad \text{для зоны 1,} \quad (1)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = \frac{e}{\varepsilon_0}N_{e2} \quad - \quad \text{для зоны 2.} \quad (2)$$

Здесь  $\Phi$  — потенциал электрического поля,  $z$  — высота точки над поверхностью пластины,  $N_i$ ,  $N_{e1}$ ,  $N_{e2}$ ,  $N_\nu$  — концентрации ионов и электронов (в 1 и 2 зонах) солнечного ветра и фотоэлектронов соответственно,  $e$  — заряд протона,  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Как и в работах [1], [12], [6], для определения немонотонного потенциала (в зоне 1) будем использовать четыре параметра:  $\Phi_0$  — потенциал на поверхности пластины,  $\Phi_m$  — минимальное значение  $\Phi$  на высоте  $z_m$ ,  $\Phi_1$  — значение потенциала на внешней границе двойного слоя. Для нахождения указанных величин используются 3 условия:

1) равенство нулю суммарной плотности тока на поверхность:

$$j_i - j_{e1}(\psi_m) - j_{e2}(\psi_m) - j_\nu(\psi_0, \psi_m) = 0;$$

2) квазинейтральность на внешней границе двойного слоя ( $\zeta \ll 1$ ):

$$N_{e1}(\psi_1) + N_\nu(\psi_1) = N_i,$$

3) равенство нулю напряженности электрического поля на внешней границе двойного слоя:

$$\left. \frac{d\psi}{d\zeta} \right|_{\zeta \rightarrow \infty} = -|Z_2(\psi_1)|^{1/2} = 0.$$

Здесь

$$\zeta = \frac{z}{D}, \quad D = \left[ \frac{\varepsilon_0 k T_e}{N_{e0} \exp(2)} \right]^{1/2}, \quad w = \frac{V_0}{V_e} \cos \theta, \quad \zeta_m = \frac{z_m}{D}, \quad \tau = \frac{T_e}{T_\nu},$$

$$V_e = \sqrt{\frac{2kT_e}{m_e}}, \quad \psi = -\frac{e\Phi}{kT_e}, \quad \psi_0 = -\frac{e\Phi_0}{kT_e}, \quad \psi_m = -\frac{e\Phi_m}{kT_e},$$

$$\psi_1 = -\frac{e\Phi_1}{kT_e}, \quad \Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt,$$

$$N_{e1} = \frac{N_{e0}}{2\sqrt{\pi}} \exp(-w^2) \left[ \int_\psi^\infty \frac{\exp(-t + 2w\sqrt{t})}{\sqrt{t - \psi}} dt \mp \int_\psi^{\psi_m} \frac{\exp(-t + 2w\sqrt{t})}{\sqrt{t - \psi}} dt \right],$$

$$N_{e2} = \frac{N_{e0}}{2\sqrt{\pi}} \exp(-w^2) \int_\psi^\infty \frac{\exp(-t - 2w\sqrt{t})}{\sqrt{t - \psi}} dt,$$

$$N_\nu(\psi) = \cos \theta \frac{N_{\nu 0}}{2} \exp(\tau\psi_0 - \tau\psi) \left[ 1 \pm \Psi(\sqrt{\tau\psi_m - \tau\psi}) \right],$$

$$j_{e1}(\psi_m) = N_{e0} \frac{V_e}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \exp\left[-(w - \sqrt{\psi_m})^2\right] + \sqrt{\pi} w \left[ 1 + \Psi(w - \sqrt{\psi_m}) \right] \right\},$$

$$j_{e2}(\psi_m) = N_{e0} \frac{V_e}{2\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \sqrt{\pi} w \right\},$$

$$j_\nu(\psi_0, \psi_m) = -\cos \theta N_{\nu 0} \frac{V_e}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau}} \exp(\tau\psi_0 - \tau\psi_m), \quad j_i = N_i V_0 \cos \theta,$$

$$Z_{1,2}(\psi) = -2(\psi_m - \psi) + \exp(-\psi) \left[ 1 \mp \Psi(\sqrt{\psi_m - \psi}) \right] - \exp(-\psi_m) \times$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{A}{\tau} \exp[(1 - \tau)\psi_m] \right\} + \frac{A}{\tau} \exp[-\tau\psi] \times \left[ 1 \pm \Psi(\sqrt{\tau\psi_m - \tau\psi}) \right] \pm$$

$$\pm \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\psi_m - \psi} \exp(-\psi_m) \times \left\{ 1 - \frac{A}{\sqrt{\tau}} \exp[(1 - \tau)\psi_m] \right\} +$$

$$+ w \int_\psi^{\psi_m} F_{1,2}(\psi, \psi_m) d\psi,$$

$$A = \frac{N_{i0}}{N_{e0}} \cos \theta \exp(\tau\psi_0), \quad F_{1,2}(\psi, \psi_m) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \exp(-\psi) \times \\ \times \left[ \int_0^{\infty} \exp(-x^2) \sqrt{x^2 + \psi} dx \mp \int_0^{\sqrt{\psi_m - \psi}} \exp(-x^2) \sqrt{x^2 + \psi} dx \right].$$

Здесь верхний знак относится к области  $0 \leq \zeta \leq \zeta_m$ , нижний — к области  $\zeta_m < \zeta < \infty$  зоны 1,  $V_0$  скорость солнечного ветра, плотность ионов  $N_{i0} = N_{e0}$ ,  $m_e$  — масса электрона,  $k$  — постоянная Больцмана. В новых переменных решение уравнения 1 находится путем интегрирования:

$$\zeta = \zeta_m \mp \int_{\psi}^{\psi_m} \frac{1}{\sqrt{Z_{1,2}(\psi)}} d\psi,$$

где

$$\zeta_m = \int_{\psi_0}^{\psi_m} \frac{1}{\sqrt{Z_1(\psi)}} d\psi.$$

Аналогично решается уравнение 2. Зная распределение потенциала вблизи каждой из поверхностей пластины, находим напряженность электрического поля вблизи поверхностей. Затем, используя теорему Гаусса, мы определяем плотности электрического заряда на обеих поверхностях.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ ПАРУСА

В программном комплексе ANSYS Academic Research v.14 [7] нами была создана конечно-элементная модель солнечного паруса (см. рис. 1). Использовался трехслойный восьмиузловой элемент SHELL91, предназначенный для моделирования тонких слоистых оболочек. Область, занимаемая пластиной, была разбита более чем на 10 000 элементов. На данном этапе работы, когда нужно было проверить наличие/отсутствие прогибов пластины от действия поверхностного заряда, сетка была выбрана в автоматическом режиме (на усмотрение самой программы ANSYS). Но этот факт, как

известно, не влияет на результат, а позволяет лишь сократить время расчета. В дальнейших исследованиях, при увеличении радиуса пластины, безусловно, будет поставлен вопрос об оптимизации сетки.

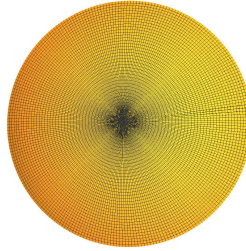


Рис. 1. Разбиение пластины на элементы

Как уже отмечалось, в дальнейших исследованиях солнечный парус аппроксимировался круглой трехслойной пластиной / оболочкой. Внутренний слой пластины — майларовая пленка — имеет толщину  $d$ . Внешние слои являются очень тонкой алюминиевой пленкой, толщиной в одну десятую  $d$ . Свойства материалов, составляющих пластину, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Свойства материалов пластины

Материал	Модуль Юнга, $10^{10}$ Н/м <sup>2</sup>	Коэффициент Пуассона
Алюминий	70,0	0,3
Майлар	0,25	0,3

На нижней и верхней сторонах поверхности паруса равномерно распределен электрический заряд плотности  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , соответственно. Мы считаем, что под действием появившейся поверхностной силы рассматриваемая пластина / оболочка деформируется как часть



поверхности сферы, то есть справедливо следующее выражение для поверхностной силы [10]:

$$T = 2\pi \cdot k_0 \cdot \sigma_i^2 \cdot R, \quad i = 1, 2, \quad (3)$$

где постоянная  $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ м}^2/\text{Кл}^2 \cdot \text{Н}$ , а  $R$  — радиус кривизны поверхности (в метрах).

Для задания граничных условий краев пластины, которые не препятствовали бы деформации пластины, а создавали бы эффект свободных краев паруса, так называемый «эффект невесомости», мы поступили следующим образом: по периметру круглой пластины/оболочки было добавлено «мягкое» кольцо, которое, в свою очередь, по своему внешнему радиусу шарнирно заделывалось. Таким образом, наша исследуемая пластина, сопряженная с круговым кольцом, может свободно изгибаться, внешнее кольцо ей не препятствует и в научное рассмотрение вообще не попадает. В момент написания данной статьи стало известно, что в последних версиях ANSYS уже введен элемент Weak Springs (Слабые пружины), который как раз предназначен для таких целей. В дальнейшем нами планируется попробовать этот способ, задать по периметру нашей пластины множество слабых пружин и сравнить результаты. Внешний радиус (для кольца) в 50 раз больше внутреннего радиуса (для основной рассматриваемой пластины). Как видно из (3), сила  $T$  распределенного заряда зависит от радиуса кривизны поверхности паруса. Поэтому для того, чтобы задать силу, нам необходимо ввести какой-либо начальный радиус кривизны, затем произвести расчет деформации пластины под действием приложенной силы. Получив новую деформационную форму пластины, необходимо вторично рассчитать радиус кривизны ее поверхности. Чтобы определить радиус кривизны деформированной пластины после приложения поверхностных сил, находятся координаты 4 точек пластины. Наконец по этим точкам определяется новый радиус, который сравнивается с тем, что был предположен изначально. Получается итерационный процесс, который останавливается при достижении заданной точности. Окончательная цель расчетов — определить такой радиус кривизны пластины, который сохранялся бы после приложения поверхностной силы. Расчет радиуса кривизны поверхности по координатам четырех ее точек можно найти в любом справочнике по

высшей математике и здесь не приводится. Для этого нужно всего лишь знать координаты точек, что позволит рассчитать соответствующие определители, составленные из коэффициентов первой и второй квадратичной формы поверхности. Авторами статьи была написана отдельная программа в пакете Mathematica, которая работает с результатами Nodes Solution (Coordinates), получаемыми из соответствующей программы ANSYS, написанной на языке APDL.

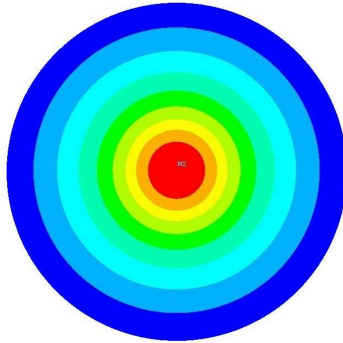


Рис. 2. Деформация пластины под действием заряда (вид сверху)

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчеты проводились для двух наборов поверхностных плотностей в  $\text{Кл}/\text{м}^2$ :  $\sigma_1 = 1,719 \cdot 10^{-10}$  и  $\sigma_2 = 3,41278 \cdot 10^{-13}$  (в окрестности Земли) и  $\sigma_1 = 1,1507 \cdot 10^{-9}$  и  $\sigma_2 = 2,7941 \cdot 10^{-12}$  (в окрестности Солнца). Результаты, полученные для парусов с радиусами до 50 метров при  $d = 2$  мкм, оформлены в таблицу. Анализ результатов расчетов, представленных в табл. 2 и 3, показывает, что при рассмотрении деформированного состояния паруса космического паруса нельзя пренебрегать его прогибом за счет поверхностно распределенного заряда. С увеличением радиуса круглой пластины такая деформация поверхности только увеличивается.

Таблица 2. Деформация пластины в зависимости от радиуса в окрестности Солнца

Радиус пластины, м	Начальный радиус кривизны, м	Конечный радиус кривизны, м	Максимальный прогиб, м
10	120,9	120,99	0,42
20	121,1	121,14	1,65
30	121,1	121,15	3,72
40	121,2	121,19	6,62
50	121,3	121,27	10,34

Таблица 3. Деформация пластины в зависимости от радиуса в окрестности Земли

Радиус пластины, м	Начальный радиус кривизны, м	Конечный радиус кривизны, м	Максимальный прогиб, м
10	809,6	809,63	0,06
20	810,8	810,71	0,25
30	810,7	810,79	0,56
40	811,2	811,22	0,99
50	811,7	811,80	1,55

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные в рамках данной работы расчеты подтверждают наши предположения о деформации пластины за счет поверхностно распределенного заряда. С увеличением радиуса пластины максимальный прогиб пластины также возрастает. Эти деформации, неучтенные ранее в научных исследованиях, способны существенно повлиять на динамику полета космического паруса. Пакет подготовленных нами компьютерных программ может быть применен в военно-космических разработках. Начиная с радиуса 50 м и больше, пластина не держит свою форму, на поверхности появляются вмятины, и радиус кривизны в различных точках поверхности резко

изменяется. Для удержания формы пластины нужны поперечные ребра жесткости.

Авторы выражают благодарность Ресурсному Центру «Вычислительный центр СПбГУ» за предоставленную возможность проведения расчетов с использованием программного комплекса ANSYS Academic Research v.14.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Fu J H M*, Surface potential of a photoemitting plate, *J. Geophys. Res.* 76 10 2506–09, 1971.
2. *Grard R.J.L.*, Properties of the Satellite Photoelectron Sheath Derived from Photo-emission Laboratory Measurements, *J. Geophys. Res.* 1973. V. 78. No. 16. P. 2885–2906.
3. *Kolesnikov E K* and *Yakovlev A B*, Harnessing power from solar wind particles captured in the Van Allen belts, *Acta Futura* 3, 2009, 81–88.
4. *Korolev V. S.*, *Polyakhova E. N.* and *Pototskaya I. Yu.*, Problem of control motion of solar sail spacecraft in the photogravitational fields, *Nonlinear Systems. Teoretical Aspects and Recent Applications* ed W Legnany and T E Moschandreou (London: IntechOpen), 2020, p 205.
5. *Tien J. Y.*, *Akasofu S. I.* and *Chapman S.*, *Solar-Terrestrial Physics*, Oxford: Clarendon Press, 1972.
6. *Москаленко А. М.* Электростатический потенциал у поверхности Луны. *Кинематика и физика небесных тел* 8 5, 1988, 31–40.
7. *Наумова Н. В.* Исследование статических деформаций, колебаний и устойчивости конструкций в пакете ANSYS : учеб. пособие / Н. В. Наумова, Д. Н. Иванов. — СПб., 2007.
8. *Поляхова Е. Н.* Космический полет с солнечным парусом / Е. Н. Поляхова. — М. : Наука, 1988.
9. *Поляхова Е. Н.* Влияние износа зеркальной пленки под действием космических факторов на динамику движения солнечного паруса в цандеровской ориентации по гелиоцентрической орбите, Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации (Москва, 1983–1984), 1985. — 62 с.
10. *Тихонов А. А.* Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на его прочностные характеристики. *Международная научная конференция по механике — Девятые поляховские чтения* (Санкт-Петербург, Март 9–12, 2021) / А. А. Тихонов, А. Б. Яковлев. СПб. : ВВМ. — 172 с.

11. *Яковлев А. Б.* Влияние наводимого на поверхности солнечного паруса электрического заряда на динамику паруса, который движется по цандеровской траектории. Международная научная конференция по механике — Девятыне поляховские чтения (Санкт-Петербург, Март 9–12, 2021) / А. Б. Яковлев. — СПб. : ВВМ. — 180–181 с.
12. *Yakovlev A. B.* The corrected method for calculation of electrostatic potential near to surface of nonatmospheric space body and the analysis of possible modes of dust particles motion, Proc. Int. Conf. on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading (Saint-Petersburg, Febr. 2–6, 2015). (IEEE) doi:10.1109/POLYAKHOV.2015.7106785.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТИТАНОВОГО СПЛАВА Т110 ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ И МОДИФИКАЦИЯ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

ЧЖАО ШИСЯН

Разработана модификация релаксационной модели пластического деформирования, предложенной ранее с целью объяснения и прогноза временных эффектов неустойчивости диаграмм пластического деформирования. Проведен анализ о возможных сценариях в предложенной модифицированной модели. Показано, что модифицированный вариант релаксационной модели позволяет учесть поведение деформационных кривых на длительных временах после наступления текучести и более полно представить соответствующие временные эффекты, такие как появление (или исчезновение) зуба текучести и последующее немонотонное, в том числе осциллирующее, поведение диаграмм деформирования. Проведены сравнения расчетов модифицированного подхода с первоначальной версией подхода релаксационной модели и широко распространенной моделью Джонсона–Кука на примере экспериментально полученных диаграмм деформирования для титанового сплава Т110. Результаты расчетов подтверждают описательную и прогностическую эффективность модифицированного подхода. Важнейшей особенностью развитого подхода является то, что набор фиксированных параметров, применяемый при построении деформационной кривой, не зависит от истории, в частности скорости деформации, и связан только с особенностями развития дефектной структуры материала на микро- и мезоуровнях. Используя этот небольшой набор параметров структурно-временного подхода и релаксационной модели пластичности, можно получать различные типы деформационных кривых, реализующихся на одном материале в широком диапазоне скоростей деформации.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Титановые сплавы являются одним из наиболее важных конструкционных материалов и обладают высокой прочностью, хорошим сопротивлением распространению трещин, коррозионной стойкостью и немагнитностью. Эти сплавы находят все более широкое применение в важных изделиях аэрокосмической и военной тех-

---

Доклад на семинаре 5 марта 2022 г.

© Чжао Шисян, 2022

ники.

Разработка аналитических способов моделирования необратимого деформирования при динамическом нагружении в широком диапазоне скоростей воздействия является актуальной задачей, имеющей принципиальное значение для современных технологий. Одной из наиболее распространенных и часто используемых моделей в вычислительной механике является модель Джонсона–Кука (Johnson–Cook) [1]. Существует множество ее модификаций [2, 3, 4], в которых для достижения лучшего соответствия расчетных кривых с экспериментальными данными в широком диапазоне скоростей деформирования эмпирически вводятся многочисленные подгоночные параметры. В подобных моделях считается, что напряжение явно зависит от деформации, а скорость деформирования может выступать в качестве параметра наряду с другими. Таким образом, неявно предполагается, что диаграмма деформирования является неизменным свойством данного материала, инвариантным по отношению к способу воздействия и иным характеристикам истории нагружения. Однако в действительности необратимое деформирование металлов при динамическом воздействии зависит от способа и истории деформирования, что принципиальным образом влияет на пластические диаграммы, которые в силу этого в динамике оказываются нестабильными и, как показывают эксперименты, могут существенно изменяться при вариации способа приложения нагрузки и многочисленных временных характеристик внешнего воздействия.

По своей природе пластическая деформация является релаксационным процессом, в котором упругие напряжения, возникающие в материале при его нагружении, релаксируют с течением времени за счет перемещения дефектов кристаллической решетки. При феноменологическом подходе в классических моделях часто пренебрегают этим протяженным во временной шкале характером процесса и считают релаксацию напряжений мгновенной [5]. Такой подход приводит к удовлетворительным результатам в квазистатических задачах, но не позволяет моделировать случаи, соответствующие импульсным и высокоскоростным воздействиям [6]. Наблюдаемый в динамических испытаниях одновременный рост со скоростью воздействия как предела текучести, так и всей диаграммы деформи-

рования является типичным свидетельством временного характера пластической деформации. Однако эксперименты для мягких сталей [7] в широком диапазоне скоростей деформации также демонстрируют и аномальное увеличение напряжения с последующим его падением в начале пластического процесса, известное как «эффект падения» (stress drop effect) или зуба текучести. Традиционные модели не способны описывать и предсказывать эти, часто наблюдаемые при динамическом нагружении, эффекты неустойчивого поведения диаграммы деформирования материалов. На основе развитого ранее [8, 9] структурно-временного критерия текучести Ю. В. Петровым, Н. С. Селютиной и Е. Н. Бородином была предложена и развита релаксационная модель необратимого деформирования сред [10, 11], которая дает возможность объяснить и прогнозировать ряд эффектов неустойчивого поведения пластических диаграмм [10, 11, 12]. В данной работе дается дальнейшее развитие релаксационной модели и показана возможность прогнозирования и количественного описания ряда наблюдаемых в динамических режимах принципиальных случаев необратимого деформирования, когда наблюдаемые диаграммы имеют сложный немонотонный и даже осциллирующий характер.

## 2. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрим релаксационную модель пластического деформирования [10, 12], построенную на основе структурно-временного подхода, базирующегося на понятии инкубационного времени текучести материала. Структурно-временной подход для описания процессов текучести позволяет рассчитывать предел текучести в начальный момент пластической деформации при фиксированной скорости деформации. Структурно-временной подход [13] первоначально был предложен для описания процессов разрушения в [14, 15] и в настоящее время является эффективным инструментом для описания временных эффектов динамического разрыва сплошных сред и роста макротрещин [14, 16, 17, 18, 19]. Соответствующее инкубационное время в этих работах интерпретировалось как харак-



терное время релаксации подготовительных процессов на микро- и мезоуровнях, приводящих в конечном счете к макроскопическому разрыву материала. Сформированный на основе аналогичных идей макроскопический интегральный критерий текучести [8, 9, 13, 20, 21, 22] позволил объяснить ряд временных (скоростных) эффектов необратимого деформирования и предсказать динамический предел текучести материалов для широкого класса случаев. Соответствующий критерий текучести в простейшем случае одноосного деформирования определяется неравенством

$$I(t) = \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\Sigma(s)}{\sigma_y} \right)^\alpha ds \leq 1. \quad (1)$$

Здесь  $\Sigma(t) = E\varepsilon(t)$  — функция напряжений от времени;  $E$  — модуль Юнга;  $\tau$  — инкубационное время, характеризующее скоростную (временную) чувствительность материала;  $\sigma_y$  — статический предел текучести;  $\alpha$  — коэффициент чувствительности материала к амплитуде нагрузки. Согласно структурно-временному подходу, момент наступления макроскопической текучести  $t_y$  определяется равенством  $I(t) = 1$ . Параметр  $\tau$ , который является основным свойством материала, инвариантным по отношению к истории деформирования и геометрии образца, позволяет моделировать поведение предела текучести материала при статических и динамических нагрузках [21, 22]. Полагается, что  $\tau$  зависит от температуры и дефектной, в том числе дислокационной, структуры материала [10, 12, 21].

Для моделирования поведения материала после срабатывания критерия (1) и наступления текучести в [10, 12] предложена релаксационная модель пластического деформирования, в которой вводится безразмерная функция «релаксации»  $0 < \gamma(t) < 1$ :

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & I(t) \leq 1, \\ I(t)^{-1/\alpha}, & I(t) > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Равенство  $\gamma(t) = 1$  в уравнении (2) связано с производством упругой деформации до момента начала макроскопической текучести  $t_y$ . Уменьшение функции релаксации в диапазоне  $0 < \gamma(t) < 1$

соответствует переходу материала на стадию пластического деформирования  $t > t_y$ . В течение пластического деформирования предполагается выполнение следующего равенства:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\gamma(t)\Sigma(s)}{\sigma_y} \right)^\alpha ds = 1, \quad (3)$$

которое сохраняется за счет фиксирования состояния в момент текучести  $t = t_y$  и последующей релаксации накопленных упругих напряжений в материале ( $0 < \gamma(t) < 1$ ). Напряжение в деформированном образце определяется соотношением

$$\sigma(t) = \Sigma(t)\gamma^{1-\beta}(t), \quad (4)$$

где  $\Sigma(t) = E\varepsilon(t)$ ;  $\beta$  — скалярный параметр, описывающий степень упрочнения материала. Случай  $\beta = 0$  отвечает отсутствию упрочнения.

Главная особенность описанного феноменологического подхода состоит в том, что в нем явно вводится и учитывается процесс релаксации напряжения при необратимом деформировании и это позволяет не только предсказывать различные, наблюдаемые в опытах, неустойчивости диаграмм деформирования и временные эффекты, такие как эффект зуба текучести [10, 12], но и эффективно прогнозировать и рассчитывать эффект стабилизации пластической деформации при циклическом деформировании [23, 24, 25].

Существует также ряд иных моделей для описания поведения материалов при пластическом деформировании в динамике, например модели, рассматриваемые в [26] (Cowper–Symonds), в [2] (Khan–Huang), а также в [1] (Johnson–Cook). В инженерной практике для анализа пластического поведения различных материалов широко используется модель Джонсона–Кука [1], в которой предполагается выполнение следующего соотношения:

$$\sigma = (A + B\varepsilon_p^n) (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) (1 - T^{*m}), \quad (5)$$

где  $\varepsilon_p$  — эквивалентная пластическая деформация;  $\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0$  безразмерная скорость пластической деформации ( $\dot{\varepsilon}$  — скорость деформации,  $\dot{\varepsilon}_0$  — характерная скорость деформации, отвечающая

за скоростную чувствительность);  $T^* = (T - T_r) / (T_m - T_r)$ ,  $T$  — текущая температура,  $T_r$  — начальная температура,  $T_m$  — температура плавления. Параметры материала  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $n$ ,  $m$  представляют собой предел текучести при эталонной температуре, модуль деформационного упрочнения, коэффициент скоростного упрочнения, показатель деформационного упрочнения и показатель термического размягчения, соответственно. В соотношении (5) три множителя и другие параметры отвечают, соответственно, за процесс упрочнения, временные эффекты и термическое влияние. Однако наблюдаемые в экспериментах эффекты нестабильного и немоного поведения деформационной кривой, в частности временные эффекты типа зуба текучести, оказываются даже качественно непредсказуемыми, т. е. не могут быть получены ни при каких вариантах выбора эмпирических констант.

Сравнение релаксационной теории пластического деформирования с другими моделями, в том числе моделью Джонсона–Кука, подробно обсуждалось в работе [11], где показаны преимущества релаксационной модели при описании и прогнозировании ряда важнейших для динамики временных эффектов.

В дальнейшем здесь будет рассмотрена модификация релаксационной модели пластичности, позволяющая получать наблюдаемые в некоторых экспериментах существенно немоного и даже осциллирующие диаграммы пластического деформирования.

### 3. МОДИФИКАЦИЯ РЕЛАКСАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Несмотря на то что представленная в [10, 12] релаксационная модель способна прогнозировать многие случаи поведения диаграмм деформирования для разных материалов в широком диапазоне скоростей деформации, участвующая в равенстве (3) зависимость функции напряжений  $\Sigma(t)$  от функции деформаций  $\varepsilon(t)$  глобально (в течение всего процесса) считалась линейной, что позволило надежно предсказать динамическую пластическую деформацию лишь на малых временах после наступления текучести или на начальном участке деформационной кривой, не учитывая при этом влияние

уже развитой пластической деформации на дальнейшее напряженно-деформированное состояние материала. Это, для некоторых материалов, является причиной отклонения диаграмм деформирования, построенных согласно «глобальной» релаксационной модели, от экспериментальных кривых на стадии развитой пластической деформации и упрочнения. Поэтому, с целью учета упрочнения и накопленной пластической деформации при моделировании развитого пластического течения, далее предлагается модифицированный вариант релаксационной модели пластичности.

Введем функционал  $M_\alpha(\Sigma, t) = \left( \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \Sigma^\alpha(s) ds \right)^{1/\alpha}$ , являющийся интегральным средним функции  $\Sigma(t)$  в пространстве Лебега  $L_p$  и характеризующий интенсивность напряжений на инкубационном интервале  $[t - \tau, t]$ . Тогда интегральный критерий (1) эквивалентен неравенству

$$M_\alpha(\Sigma, t) \leq \sigma_y. \quad (6)$$

Следовательно, полагается, что текучесть наступает, когда интенсивность напряжений на инкубационном интервале достигает определенного значения. Также введем функцию  $\beta(t)$  в равенстве (3), отвечающую за природу упрочнения материала:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \left( \frac{\Sigma(s)\gamma(t)}{\sigma_y\beta(t)} \right)^\alpha ds = 1. \quad (7)$$

Тогда при пластической деформации функция релаксации  $\gamma(t)$  определяется по формуле

$$\gamma(t) = \frac{\sigma_y\beta(t)}{M_\alpha(\Sigma, t)}.$$

По аналогии с формулой (4) определим истинное напряжение формулой

$$\sigma(t) = \Sigma(t) \cdot \gamma(t) = \Sigma(t) \cdot \frac{\sigma_y\beta(t)}{\tilde{\Sigma}(t)} = \sigma_y\beta(t) \cdot \left( \frac{\Sigma(t)}{\tilde{\Sigma}(t)} \right), \quad (8)$$

где

$$\tilde{\Sigma}(t) = \begin{cases} \sigma_y, & t \leq t_y, \\ M_\alpha(\Sigma, t), & t > t_y, \end{cases}$$

$t_y$  — момент наступления текучести и определяется по критерию (6). Функцию  $\beta(t)$ , характеризующую природу упрочнения материала, согласно модели Johnson–Cook можно записать в виде  $\beta(t) = 1 + K\varepsilon_p^n(t)$ , где  $K$  и  $n$  являются параметрами упрочнения и определяются согласно экспериментальным данным;  $\varepsilon_p(t)$  представляет собой пластическую деформацию.

Одной из важных особенностей модели является возможность одновременно описывать процесс упругой деформации и пластического течения. В случае упругой деформации ( $0 \leq t \leq t_y$ ) имеется  $\beta(t) = 1$ , тогда из формулы (8) следует упругое соотношение  $\sigma(t) = \Sigma(t) = E\varepsilon(t)$ . Также можно отметить, что в отличие от глобальной релаксационной модели (2–5) в инкрементальном подходе предполагается зависимость  $\Sigma(t)$  от текущего уровня напряжения  $\sigma(t)$  в процессе неупругого деформирования с целью учета развития пластического течения. Итак, будем считать, что  $\Sigma(t)$  имеет следующий вид:

$$\Sigma(t) = \begin{cases} \sigma(s), & s \leq t - h \\ \sigma(t - h) + E(\varepsilon(s) - \varepsilon(t - h)), & s \in [t - h, t], \end{cases} \quad (9)$$

где  $h = t_y/m$ ,  $m$  — безразмерный параметр,  $h < \tau$ . Пластическую деформацию  $\varepsilon_p(t)$  можно определить соотношением  $\varepsilon_p(t) = \varepsilon(t) - \frac{\Sigma(t)}{E}$ .

#### 4. ВОЗМОЖНЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ СЦЕНАРИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Предложенный модифицированный вариант релаксационной модели необратимого деформирования позволяет качественно получать различные гипотетические сценарии упруго-пластического поведения материала. Отметим наиболее важные из них. В случае  $\dot{\varepsilon}\tau \ll 1$  множитель  $\Sigma(t)/\tilde{\Sigma}(t)$  практически равен 1, временные эффекты почти отсутствуют и функция  $\beta(t)$  будет давать основной вклад в построении диаграммы деформирования. При достаточно быстрой деформации, возникающей, в частности, при быстром воздействии взрывного типа, диаграмма деформирования может стать немонотонной. А именно, предложенная модель способна предска-

затягивание зуба текучести. Так, в частном случае при  $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}t$  и  $\dot{\varepsilon}\tau \leq \frac{(1+\alpha)^{1/\alpha}\sigma_y}{E}$ , т. е.  $t_y \leq \tau$ , имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}(t_y) &= \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{t_y} \Sigma^\alpha(s) ds\right)^{1/\alpha} = \\ &= \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{t_y} (E\dot{\varepsilon}(s))^\alpha ds\right)^{1/\alpha} = \left(\frac{(E\dot{\varepsilon})^\alpha}{\tau} \frac{(t_y)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)^{1/\alpha}, \\ \tilde{\Sigma}(t_y + h) &= \left(\frac{1}{\tau} \int_0^{t_y+h} \Sigma^\alpha(s) ds\right)^{1/\alpha} = \\ &= \left(\frac{(E\dot{\varepsilon})^\alpha}{\tau} \frac{(t_y+h)^{1+\alpha} - h^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)^{1/\alpha}.\end{aligned}$$

Нетрудно убедиться в выполнении неравенства

$$((t_y + h)^{1+\alpha} - h^{1+\alpha}) t_y^\alpha > t_y^{1+\alpha} (t_y + h)^\alpha.$$

Следовательно, справедливо соотношение

$$\tilde{\Sigma}(t_y + h) \cdot \Sigma(t_y) > \tilde{\Sigma}(t_y) \cdot \Sigma(t_y + h)$$

или же

$$\Sigma(t_y)/\tilde{\Sigma}(t_y) > \Sigma(t_y + h)/\tilde{\Sigma}(t_y + h).$$

Таким образом, значение множителя  $\Sigma(t)/\tilde{\Sigma}(t)$  после наступления текучести уменьшается, это дает возможность моделировать эффект появления зуба текучести при достаточно быстром воздействии, что регистрируется в многочисленных динамических экспериментах.

Функция  $\beta(t)$  в модифицированной модели отвечает за упрочнение материала, а множитель  $\Sigma(t)/\tilde{\Sigma}(t)$  описывает временные эффекты диаграммы деформирования, наблюдаемые в целом ряде экспериментов, такие как зуб текучести и возможный осциллирующий характер напряжения при развитии пластического течения.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ И ДРУГИМИ МОДЕЛЯМИ

Рассмотрим немонотонное поведение диаграммы деформирования титанового сплава Т110 [27]. Эксперименты по быстрому удар-

ному растяжению образцов в работе [27] проводились на разрезном ударном стержне Гопкинсона в диапазоне скоростей деформаций от  $2030s^{-1}$  до  $3520s^{-1}$ . В результате быстрого нагружения обнаруживаются явление зуба текучести и последующее немонотонное поведение кривой напряжений-деформаций. Расчеты с использованием модифицированной релаксационной модели пластического деформирования (IRP model, 8–9) проводились при значениях параметров, представленных в табл. 1.

**Таблица 1** Значение параметров модели IRP для титанового сплава T110

Material	$E$ , GPa	$\sigma_y$ , MPa	$K$	$n$	$\tau$ , s	$\alpha$	$m$
T110 Alloy	300	1015,10	0,80	0,66	$3,52 \times 10^{-6}$	5	3

Также был проведен расчет по модели Джонсона–Кука (JC model) при комнатной температуре ( $T = 20^\circ\text{C}$ ) и релаксационной модели (RP model). Значения параметров проведенного расчета показано в табл. 2 и 3, соответственно.

**Таблица 2** Значение параметров модели Джонсона–Кука (JC) для титанового сплава T110

Material	$A$ , MPa	$B$ , MPa	$C$	$n$	$m$	$\dot{\epsilon}_0$ , $s^{-1}$
T110 Alloy	1015,10	812,08	0,02	0,66	–	0,01

**Таблица 3** Значение параметров RP для титанового сплава T110

Material	$E$ , GPa	$\sigma_y$ , MPa	$\tau$ , s	$\alpha$	$\beta$
T110 Alloy	300	1015,10	$3,52 \cdot 10^{-6}$	5	0,11

Результаты расчетов и соответствующие экспериментальные данные [27] проиллюстрированы на рис. 1, 2 и 3.

По данным, представленным на рис. 1 и 2, видно, что при медленном нагружении модифицированный подход хорошо совпадает

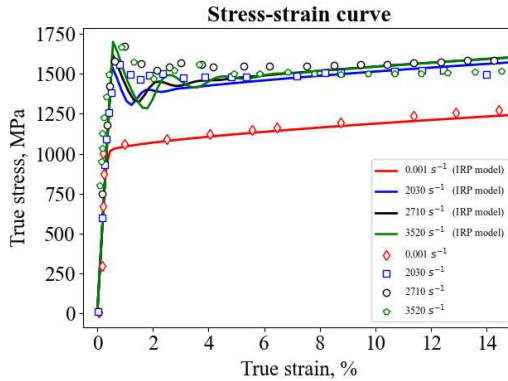


Рис. 1. Зависимость напряжения от деформации для титанового сплава T110 при скоростях деформаций, равных  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , 2030, 2710 и  $3520 \text{ s}^{-1}$ . Сплошные линии — расчеты с использованием модифицированной модели (IRP model). Точки — экспериментальные данные из [27]

с моделью Джонсона–Кука (Johnson–Cook). Это объясняется тем, что при  $\dot{\epsilon} \tau \ll 1$  временной множитель  $\Sigma(t)/\tilde{\Sigma}(t)$  практически равен единице. На рис. 1 и 3 заметим, что модели IRP и RP способны описывать эффект зуба текучести и скоростные зависимости уровня напряжения, но релаксационный подход (RP model) сравнительно хуже моделирует квазистатическую диаграмму. Модель Джонсона–Кука показывает скоростные зависимости уровня напряжения, но не способна моделировать эффект зуба текучести.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана модификация релаксационной модели пластического деформирования, предложенной ранее с целью объяснения и прогноза временных эффектов нестабильности диаграмм пластического деформирования и их возможного немонотонного характера. Модифицированный подход позволяет точнее учесть поведение деформационных кривых на длительных временах после наступления текучести и более полно представить соответствующие временные



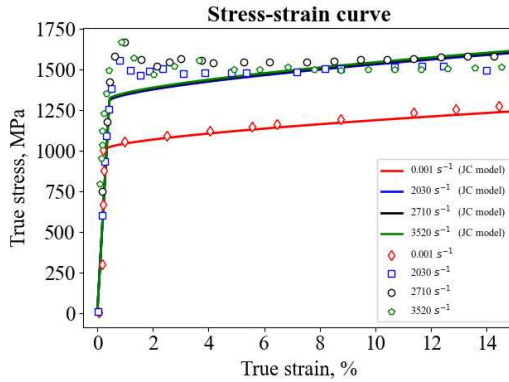


Рис. 2. Зависимость напряжения от деформации для титанового сплава Т110 при скоростях деформаций, равных  $10^{-3} s^{-1}$ , 2030, 2710 и  $3520 s^{-1}$ . Сплошные линии — расчеты с использованием модели Джонсона–Кука (JC model). Точки — экспериментальные данные из [27]

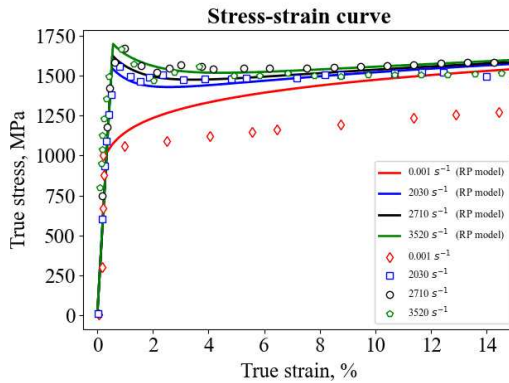


Рис. 3. Зависимость напряжения от деформации для титанового сплава Т110 при скоростях деформаций, равных  $10^{-3} s^{-1}$ , 2030, 2710 и  $3520 s^{-1}$ . Сплошные линии — расчеты с использованием релаксационной модели (RP model). Точки — экспериментальные данные из [27]

эффекты, такие как появление (или исчезновение) зуба текучести и последующее немонотонное, в том числе осциллирующее, поведение диаграмм деформирования. По сравнению с первоначальной версией подхода (RP) вместо постоянного параметра упрочнения в модифицированном варианте (IRP) введена определяемая в процессе необратимого деформирования временная функция, отвечающая за явление упрочнения материала.

Проведено сравнение расчетов разработанной модели с широко применяемой на практике моделью Джонсона–Кука. На примере экспериментально полученных диаграмм деформирования для титанового сплава T110 обе модели показывают хорошее соответствие с экспериментами, но модифицированная модель дополнительно описывает эффект появляющегося с ростом скорости деформации немонотонного поведения диаграммы деформирования, выражаемого в появлении эффекта падения напряжения с пикового значения и последующими наблюдаемыми осцилляциями.

Важнейшей особенностью развитого подхода является то, что набор фиксированных параметров, применяемый при построении деформационной кривой, не зависит от истории, в частности скорости деформации, и связан только с особенностями развития дефектной структуры материала на микро- и мезоуровнях. Используя этот небольшой набор параметров структурно-временного подхода и релаксационной модели пластичности, можно получать различные типы деформационных кривых, реализующихся на одном материале в широком диапазоне скоростей деформации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson G.R., Cook W.H. A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates, and High Temperatures // Proceeding 7th International Symposium on Ballistics. — The Hague: 1983. — P. 541–547.
2. Khan A.S., Huang S. Experimental and theoretical study of mechanical behavior of 1100 aluminum in the strain rate range // International Journal of Plasticity. — 1992. — V. 8. - P. 397–424.
3. Lin Y., Chen X., Liu G. A modified Johnson-Cook model for tensile behaviors of typical high-strength alloy steel // Materials Science and Engineering A. — 2010. — V. 527. — No. 26. — P. 6980–6986.
4. Gambirasio L., Rizzi E. An enhanced Johnson — Cook strength model for

- splitting strain rate and temperature effects on lower yield stress and plastic flow // *Computational Materials Science*. — 2016. — No. 113. — P. 231–265.
5. Meyers M.A., Chawla K.K. *Mechanical behavior of materials*. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — 856 p.
  6. Krasnikov V.S., Mayer A.E., Yalovets A.P. Dislocation based high-rate plasticity model and its application to plate-impact and ultra short electron irradiation simulations // *International Journal of Plasticity*. — 2011. — V. 27. — No. 8. — P. 1294–1308.
  7. Uenishi A., Teodosiu C. Constitutive modelling of the high strain rate behaviour of interstitial-free steel // *International Journal of Plasticity*. — 2004. — V. 20. — No. 4-5. — P. 915–936.
  8. Gruzdkov A.A., Petrov Y.V. On temperature-time correspondence in high-rate deformation of metals // *Doklady Physics*. — 1999. — V. 44. — P. 114–116.
  9. Gruzdkov A.A., Petrov Y.V., Smirnov V.I. An invariant form of the dynamic criterion for yield of metals // *Physics of the Solid State*. — 2002. — V. 44. — P. 2080–2082.
  10. Petrov Y.V., Borodin E.N. Relaxation mechanism of plastic deformation and its justification using the example of the sharp yield point phenomenon in whiskers // *Physics of the Solid State*. — 2015. — V. 57. — No. 2. — P. 353–359.
  11. Selyutina N.S., Petrov Y.V. Comparative analysis of dynamic plasticity models // *Reviews on Advanced Materials Science*. — 2018. — V. 57. — No. 2. — P. 199–211.
  12. Selyutina N., Borodin E.N., Petrov Y.V., Mayer A.E. The definition of characteristic times of plastic relaxation by dislocation slip and grain boundary sliding in copper and nickel // *International Journal of Plasticity*. — 2016. — V. 82. — P. 97–111.
  13. Petrov Y.V. On the incubation stage of fracture and structural transformations in continuous media under pulse energy injection // *Mechanics of Solids*. — 2007. — V. 42. — No. 5. — P. 692–699.
  14. Petrov Y.V., Utkin A.A. Dependence of the dynamic strength on loading rate // *Materials Science*. — 1989. — V. 25. — No. 2. — P. 153–156.
  15. Petrov Y.V., Morozov N.F. On the Modeling of Fracture of Brittle Solids // *The Journal of Applied Mechanics*. — 1994. — V. 61. — No. 3. — P. 710–712.
  16. Petrov Y.V., Gruzdkov A.A., Bratov V.A. Structural-temporal theory of fracture as a multiscale process // *Physical Mesomechanics*. — 2012. V. 15. P. 232–237.
  17. Petrov Y.V., Sitnikova E.V. Dynamic cracking resistance of structural materials predicted from impact fracture of an aircraft alloy // *Technical Physics*. — 2004. — V. 49. — No. 1. — P. 57–60.

18. Petrov Y.V., Smirnov I.V., Utkin A.A. Effect of strain-rate strength dependence in nanosecond load duration range // *Mech. Solids*. — 2010. — V. 45. — No. 3. — P. 476–484.
19. Bragov A.M., Karihaloo B.L., Petrov Y.V., Konstantinov A.Yu., Lamzin D. A., Lomunov A. K., Smirnov I. V. High-rate deformation and fracture of fiber reinforced concrete // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 2012. — V. 53. — P.926–933.
20. Borodin E.N., Mayer A.E., Petrov Y.V., Gruzdkov A.A. Maximum yield strength under quasi-static and high-rate plastic deformation of metals // *Physics of the Solid State*. — 2014. — V. 56. — P. 2470–2479.
21. Petrov Y.V., Sitnikova Y.V. Temperature dependence of spall strength and the effect of anomalous melting temperatures in shock-wave loading // *Technical Physics*. — 2005. — V. 50. — No. 8. — P. 1034–1037.
22. Gruzdkov A.A., Sitnikova E.V., Morozov N.F., Petrov Y.V. Thermal effect in dynamic yielding and fracture of metals and alloys // *Mathematics and Mechanics of Solids*. — 2009. — V. 14. — P. 72–87.
23. Petrov Y.V., Selyutina N.S. Prediction of the Effect of Plastic-Strain Stabilization under Cyclic Deformation Based on the Structural Temporal Approach // *Doklady Physics*. — 2017. — V. 62. — No. 10. — P. 475–477.
24. Selyutina N.S., Smirnov I.V., Petrov Y.V. Stabilisation effect of strain hysteresis loop for steel 45 // *International Journal of Fatigue*. — 2021. — V. 145. — P. 106–133.
25. Petrov Y.V., Selyutina N.S. Effect of Plastic Strain Stabilization under Low-Cycle Deformation // *Physical Mesomechanics*. — 2020. — V. 23. — P. 384–389.
26. Cowper G.R., Symonds P.S. Strain-hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams // *In Technical Report (Division of Applied Mathematics, Brown University)*. — 1957. — No. 28.
27. Markovsky, P.E., Janiszewski, J., Bondarchuk, V.I. et al. Effect of Strain Rate on Mechanical Behavior and Microstructure Evolution of Ti-Based T110 Alloy. *Metallogr. Microstruct. Anal.* 10, 839–861 (2021).  
<https://doi.org/10.1007/s13632-021-00797-9>.

# ДЕФОРМАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

С. М. БАУЭР, А. С. КРЫЛОВА

В работе выведена система уравнений, описывающая деформацию неоднородной круглой ортотропной пластины на основе гипотез С. А. Амбарцумяна. Показано, что прогиб, получаемый по теории Амбарцумяна, имеет большую величину по сравнению с результатом классической теории, а степень анизотропии пластины может значительно увеличивать эту разницу. Проиллюстрирована важность использования нелинейной теории, а также влияние неоднородности, величины давления и степени анизотропии на величину прогиба. Исследована область отрицательных напряжений и влияние степени ортотропии на ее размер.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Круглые пластины и пологие сферические оболочки являются элементами многих конструкций. Деформации этих объектов посвящено множество работ. В большинстве из них описана деформация изотропных и однородных, как правило, металлических пластин в рамках классической теории. В первых работах, посвященных анизотропным пластинам и оболочкам, также за основу бралась классическая теория пластин, но при этом использовались соотношения упругости, учитывающие анизотропию [1]. Эти расчеты давали достаточно хорошие результаты в тех случаях, когда все модули упругости отличались несущественно, то есть имели один порядок.

Дальнейшие исследования показали, что при рассмотрении некоторых прикладных задач классическая теория дает слишком грубые оценки и требует уточнения. Недостаточно точные результаты

---

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации N 14.Z50.31.0046/

Доклад на семинаре 19 апреля 2022 г.

© С. М. Бауэр, А. С. Крылова, 2022

получаются, в частности, при рассмотрении задач о деформировании пластин средней толщины. В связи с этим появилось множество уточненных теорий, которые стали называть неклассическими. Многие неклассические теории построены, как и классическая, методом гипотез о характере распределения перемещений, деформаций или напряжений по толщине оболочки. При этом они свободны от основной гипотезы классической теории — гипотезы недеформируемых нормалей. Все уточненные теории тем или иным способом учитывают деформацию сдвига. Широкое распространение в теории однослойных оболочек получила теория, основанная на гипотезе С. П. Тимошенко — гипотезе прямолинейного элемента [2, 3].

Со временем появлялись более сложные материалы. С развитием математического моделирования в биологии, связанного с мягкими объектами, возникла необходимость определять напряженно-деформированное состояние сильно анизотропных и неоднородных пластин и оболочек. Модули упругости таких объектов могут отличаться друг от друга в несколько раз, а также зависеть от координат.

Описанными свойствами обладает решетчатая пластинка диска зрительного нерва. Такой биологический объект можно моделировать круглой пластиной или пологой сферической оболочкой. Материал решетчатой пластинки можно считать трансверсально изотропным или ортотропным. Модуль упругости материала в направлении толщины пластины на порядок меньше тангенциальных модулей упругости. Известно, что в этом случае более точно состояние пластины при больших деформациях можно описать одной из теорий анизотропных пластин и оболочек С. А. Амбарцумяна [22, 23].

Большие деформации решетчатой пластинки диска зрительного нерва могут приводить к атрофии зрительного нерва, а также вызывать отеки в окрестности края пластинки [4]. Это явление может быть вызвано потерей устойчивости симметричной формы равновесия такой пластины. Известно также, что докритическое состояние пластины может оказывать сильное влияние на величину критической нагрузки, если форма нагруженной конструкции в докритическом состоянии отличается от формы ненагруженной конструкции [5]. Важность этого вопроса проявилась при решении задачи

о неосесимметричных формах равновесия круглых пластин, нагружаемых нормальным давлением.

Впервые вопрос о существовании несимметричных решений у симметрично загруженной круглой пластины был рассмотрен в 1948 г. Д. Ю. Пановым и В. И. Феодосьевым [6]. Методом Галеркина для больших прогибов пластины, загруженной постоянным давлением, авторы искали решение, соответствующее несимметричным формам равновесия, в виде  $w = (1-x^2)^2(A+Bx^4 \cos n\theta)$ . В этом случае осесимметричная часть является функцией, зависящей только от одного параметра  $A$ . В работе [7] для круглой пластины при различных условиях закрепления и нагружения определены значения критической нагрузки, при которой происходит переход от симметричной формы равновесия к неосесимметричной. Величина критической нагрузки, полученная в [7], почти в 3 раза больше нагрузки, определенной Пановым и Феодосьевым. Формы потери устойчивости также различаются. Сравнивая свои решения с результатами, полученными в работе [6], авторы пришли к выводу, что осесимметричное состояние, определенное в [6] и описываемое функцией, зависящей от одного параметра, недостаточно точно описывают докритическое состояние конструкции.

Существование несимметричного решения у симметрично загруженной круглой пластины было доказано Н. Ф. Морозовым еще в 1961 г. В работах [8, 9, 10] доказаны существование, единственность и разрешимость краевых и начально-краевых задач теории пластин и оболочек на основе строгого математического подхода, а также сформулированы достаточные условия неустойчивости симметричных решений.

К задаче о потере устойчивости осесимметричных форм равновесия круглых пластин и пологих сферических сегментов под действием внутреннего давления обращались Коман С. Д. с соавторами (см., например, [11, 12]). Критическая нагрузка и соответствующее ей волновое число были найдены авторами асимптотически. При этом во всех работах рассматривались однородные изотропные пластины и оболочки, а докритическое состояние определялось по классической теории. Задачи об устойчивости неоднородных по радиусу круглых пластин, ортотропных круглых пластин и пологих сферических сегментов под действием внутреннего давления рас-

сма тривались в работах [14, 15, 16, 17]. Для определения докритического состояния также использовалась классическая теория оболочек.

Устойчивость осесимметричного равновесия круглой пластины со свободно смещающимся в радиальном направлении краем под действием распределенной нагрузки в геометрически нелинейной постановке была исследована методом конечных элементов в пакетах NASTRAN и ANSYS в работах [19, 20, 21]. В этих работах авторы также отмечают, что для получения критической нагрузки необходимо достаточно точно описать именно докритическое состояние. В работах обсуждается и форма, и количество элементов, необходимое и достаточное для описания докритического состояния. Сделан вывод о том, что по изменению некоторых параметров в докритическом состоянии можно судить о приближении нагрузки к критическому значению.

Целью работы является описание докритического состояния неоднородной по радиальной координате ортотропной круглой пластины в рамках теории Амбарцумяна. Исследуется влияние степени анизотропии, неоднородности и величины давления на прогиб пластины. Проводится сравнение с результатами, полученными по классической теории.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим круглую пластину постоянной толщины  $h$  и радиуса  $a$ , находящуюся под действием равномерно распределенного нормального давления.

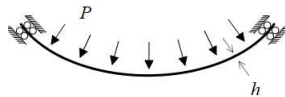


Рис. 1. Геометрия задачи: пластина под действием давления, закрепленная по типу скользящей заделки. Модифицировано из [15]



Предположим, что внешний край пластины защемлен, но его точки могут свободно перемещаться в радиальном направлении пластины, без смещения в окружном направлении (скользящая заделка, рис. 1).

Обобщенный закон Гука для цилиндрически ортотропного тела имеет вид [22]

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{1}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{rz}}{E_z} \sigma_z, & e_{\theta z} &= \frac{1}{G_{\theta z}} \tau_{\theta z}, \\ e_\theta &= -\frac{\nu_{\theta r}}{E_r} \sigma_r + \frac{1}{E_\theta} \sigma_\theta - \frac{\nu_{\theta z}}{E_z} \sigma_z, & e_{rz} &= \frac{1}{G_{rz}} \tau_{rz}, \\ e_z &= -\frac{\nu_{zr}}{E_r} \sigma_r - \frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta} \sigma_\theta + \frac{1}{E_z} \sigma_z, & e_{r\theta} &= \frac{1}{G_{r\theta}} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $E_r, E_\theta, E_z$  — модули Юнга для направлений в трех взаимно перпендикулярных плоскостях упругой симметрии пластины;  $\nu_{r\theta}, \nu_{\theta r}, \nu_{rz}, \nu_{zr}, \nu_{\theta z}, \nu_{z\theta}$  — коэффициенты Пуассона (первый индекс указывает направление растяжения или сжатия, второй — направление приложенной силы);  $G_{\theta z}, G_{rz}, G_{r\theta}$  — модули сдвига, характеризующие изменение угла между направлениями  $\theta$  и  $z$ ,  $r$  и  $z$ ,  $r$  и  $\theta$ . Закон Гука для трансверсально-изотропной пластины можно получить из соотношений (1), если приравнять модули  $E_r$  и  $E_\theta$ ,  $G_{\theta z}$  и  $G_{rz}$  соответственно.

В силу симметрии соотношений (1) справедливы равенства

$$E_r \nu_{\theta} = E_\theta \nu_r, \quad E_r \nu_{rz} = E_z \nu_{zr}, \quad E_\theta \nu_{\theta z} = E_z \nu_{z\theta}, \quad (2)$$

где  $\nu_{r\theta} = \nu_\theta$ ,  $\nu_{\theta r} = \nu_r$ .

Полагается, что модуль упругости в направлении толщины пластины существенно меньше тангенциальных модулей упругости, а модули сдвига, действующие в плоскости, перпендикулярной срединной плоскости, много меньше модуля сдвига в срединной плоскости пластины. Таким образом,  $E_z \ll E_r$ ,  $E_z \ll E_\theta$ ,  $G' \ll G_{r\theta}$ ,  $G_{\theta z} \ll G_{r\theta}$ , где  $G' = G_{rz}$ . Упругие коэффициенты должны удовлетворять условию положительной определенности квадратичной формы

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_r e_r + \sigma_\theta e_\theta + \sigma_z e_z) + \tau_{r\theta} e_{r\theta} + \tau_{rz} e_{rz} + \tau_{\theta z} e_{\theta z},$$

где  $W$  — удельная потенциальная энергия деформации. Из критерия Сильвестра получены следующие ограничения для коэффициентов Пуассона [22]:

$$\begin{aligned} 1 - \nu_r \nu_\theta > 0, \quad 1 - \nu_{rz} \nu_{zr} > 0, \quad 1 - \nu_{\theta z} \nu_{z\theta} > 0, \\ |\nu_r| < (E_r/E_\theta)^{1/2}, \dots, |\nu_{z\theta}| < (E_\theta/E_z)^{1/2}, \\ 1 - \nu_r \nu_\theta - \nu_{rz} \nu_{zr} - \nu_{\theta z} \nu_{z\theta} - 2\nu_\theta \nu_{zr} \nu_{\theta z} > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

### 3. УРАВНЕНИЯ ОБЩЕЙ УТОЧНЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АМБАРЦУМЯНА ИЗГИБА НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Общая уточненная теория С. А. Амбарцумяна строится на следующих предположениях:

1) нормальное к срединной плоскости пластины перемещение не изменяется по толщине:

$$u_z = w(r, \theta), \quad e_z \approx 0; \quad (4)$$

2) касательные напряжения в плоскости, перпендикулярной к срединной плоскости пластины, изменяются по заданному закону

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \varphi(r, \theta), \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \psi(r, \theta), \quad (5)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  являются неизвестными функциями координат.

Таким образом, деформация пластины по теории Амбарцумяна описывается функциями  $u, v, w, \varphi, \psi, F$ , зависящими от координат  $r, \theta$ , где  $u, v, w$  — перемещение точек срединной плоскости, а  $F$  — функция усилий:

$$T_r = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 F}{d\theta^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad T_\theta = \frac{d^2 F}{dr^2}, \quad S_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{dF}{d\theta} - \frac{1}{r} \frac{d^2 F}{dr d\theta}. \quad (6)$$

При гипертензии и глаукоме прогибы решетчатой пластинки диска зрительного нерва имеют порядок толщины пластинки, поэтому представляют интерес результаты расчетов по геометрически

нелинейной теории. В этом случае в выражениях для определения деформаций будут учитываться члены второго порядка малости, но, согласно теории Амбарцумяна, только те, которые связаны с нормальным перемещением  $w$ :

$$\begin{aligned}
 e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2, & e_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2r^2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)^2, \\
 e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2, & e_{r\theta} &= r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \\
 e_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, & e_{rz} &= \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Вывод уравнений, описывающих деформацию однородной ортотропной пластины, приведен в [22]. В нашей работе рассматривается пластина, модули упругости  $E_r$  и  $E_\theta$  которой являются функциями координаты  $r$ . В связи с этим уравнения содержат дополнительные слагаемые, характеризующие неоднородность пластины. Полученная система из четырех уравнений относительно неизвестных функций  $w(r, \theta)$ ,  $F(r, \theta)$ ,  $\varphi(r, \theta)$ ,  $\psi(r, \theta)$  описывает деформацию неоднородной ортотропной пластины под действием нормального давления:

$$\begin{aligned}
 & \frac{h^3}{12} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\varphi r) + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial w}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \right) \right] = -Pr,
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
G_{r\theta} = G, \quad \beta_r = \frac{G(1 - \nu_r \nu_\theta)}{E_r}, \quad \beta_\theta = \frac{G(1 - \nu_r \nu_\theta)}{E_\theta}, \\
\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + (\nu_r + 2\beta_\theta) \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} - \\
- \frac{h^2}{10 G_1} \left[ (\nu_r + \beta_\theta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{(1 + \beta_\theta)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] - \\
- \frac{h^2}{10 G_2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \beta_\theta \left( r \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r} \right) \right] + \frac{r\psi (1 - \nu_r \nu_\theta)}{E_\theta} = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{(\nu_\theta + 2\beta_r)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \\
- \frac{1}{r^2} \frac{E_\theta}{E_r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \\
+ \frac{1}{E_r} \frac{dE_r}{dr} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \\
- \frac{h^2}{10 G_1} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{E_\theta}{E_r} \frac{\varphi}{r^2} + \frac{\beta_r}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \right. \\
\left. + \frac{1}{E_r} \frac{dE_r}{dr} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\nu_\theta \varphi}{r} \right) \right] - \\
- \frac{h^2}{10 G_2} \left[ \frac{(\nu_\theta + \beta_r)}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{(E_\theta + E_r \beta_r)}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \right. \\
\left. + \frac{1}{E_r} \frac{dE_r}{dr} \frac{\nu_\theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] + \frac{\varphi (1 - \nu_r \nu_\theta)}{E_r} = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \left( \frac{E_\theta}{G} - 2\nu_\theta \right) \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \\
& + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{E_\theta} \frac{dE_\theta}{dr} \left( \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\nu_\theta}{r^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{\nu_\theta}{r^2} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} \right) + \\
& + \frac{E_\theta}{E_r} \left[ \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{E_r} \frac{dE_r}{dr} \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \right] + \\
& + E_\theta \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для того чтобы выявить образование складок, будем искать решение системы (8)–(11) в виде

$$\begin{aligned}
w(r, \theta) &= w_0(r) + w_m(r) \cos m\theta, \\
F(r, \theta) &= F_0(r) + F_m(r) \cos m\theta, \\
\varphi(r, \theta) &= \varphi_0(r) + \varphi_m(r) \cos m\theta, \\
\psi(r, \theta) &= \psi_m(r) \sin m\theta,
\end{aligned} \tag{12}$$

где  $m$  — число волн в окружном направлении, функции с индексом 0 представляют собой осесимметричную (докритическую) составляющую решения, а функции с индексом  $m$  — несимметричную.

Введем безразмерные величины по формулам

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad w^* = \frac{w}{h}, \quad F^* = \frac{F}{h^3 E_r}, \quad P^* = \frac{6Pa^2}{h^2 E_r}, \quad h^* = \frac{h}{a}, \tag{13}$$

$$\lambda_1 = \frac{E_r}{G_1}, \quad \lambda_2 = \frac{E_\theta}{G_2}, \quad K = \frac{E_\theta}{E_r}, \tag{14}$$

$$E_r(r) = E_r f\left(\frac{r}{a}\right), \quad E_\theta(r) = E_\theta f\left(\frac{r}{a}\right). \tag{15}$$

Будем опускать символ \* в дальнейшем.

После разделения переменных система (8)–(11) распадается на две системы уравнений. С учетом выражений (13)–(15) система относительно функций  $w_m(r)$ ,  $F_m(r)$ ,  $\varphi_m(r)$ ,  $\psi_m(r)$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \left[ \frac{d}{d\rho} (\rho\varphi_m) + m\psi_m \right] + \frac{d^2 F_0}{d\rho^2} \frac{dw_m}{d\rho} + \frac{dF_0}{d\rho} \frac{d^2 w_m}{d\rho^2} - \\ & - \frac{m^2 w_m}{\rho} \frac{d^2 F_0}{d\rho^2} + \frac{dF_m}{d\rho} \frac{d^2 w_0}{d\rho^2} - \frac{m^2 F_m}{\rho} \frac{d^2 w_0}{d\rho^2} + \frac{dw_0}{d\rho} \frac{d^2 F_m}{d\rho^2} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 w_m}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 w_m}{d\rho^2} + \frac{m^2 (\nu_\theta + 2\beta_r)}{\rho^2} \left( \frac{w_m}{\rho} - \frac{dw_m}{d\rho} \right) - \\ & - \frac{K}{\rho^2} \left( \frac{dw_m}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho} w_m \right) + \frac{1}{f} \frac{df}{d\rho} \left( \frac{d^2 w_m}{d\rho^2} + \frac{\nu_\theta}{\rho} \frac{dw_m}{d\rho} - \frac{m^2 \nu_\theta}{\rho^2} w_m \right) - \\ & - \lambda_1 \frac{h^2}{10} \left[ \frac{d^2 \varphi_m}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi_m}{d\rho} - \frac{K\varphi_m}{\rho^2} - \frac{m^2 \beta_r}{\rho^2} \varphi_m + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{f} \frac{df}{d\rho} \left( \frac{d\varphi_m}{d\rho} + \frac{\nu_\theta \varphi_m}{\rho} \right) \right] + \frac{\varphi_m (1 - \nu_r \nu_\theta)}{f} - \\ & - \lambda_2 \frac{h^2}{10} \left[ \frac{m (\nu_\theta + \beta_r)}{\rho} \frac{d\psi_m}{d\rho} - \frac{m (K + \beta_r)}{\rho^2} \psi_m + \frac{1}{f} \frac{df}{d\rho} \frac{m \nu_\theta}{\rho} \psi_m \right] = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{m^3}{\rho^2} w_m - \frac{m}{\rho} \frac{dw_m}{d\rho} - m (\nu_r + 2\beta_\theta) \frac{d^2 w_m}{d\rho^2} + \frac{\rho \psi_m (1 - \nu_r \nu_\theta)}{f} + \\ & + \lambda_1 \frac{h^2}{10} \left[ m (\nu_r + \beta_\theta) \frac{d\varphi_m}{d\rho} + \frac{m (1 + \beta_\theta)}{\rho} \varphi_m \right] + \\ & + \lambda_2 \frac{h^2}{10} \left[ \frac{m^2}{\rho} \psi_m - \beta_\theta \left( \rho \frac{d^2 \psi_m}{d\rho^2} + \frac{d\psi_m}{d\rho} - \frac{\psi_m}{\rho} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^4 F_m}{d\rho^4} - m^2 \left( \frac{E_\theta f}{G} - 2\nu_\theta \right) \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 F_m}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^3} \frac{dF_m}{d\rho} + \frac{1}{\rho^4} F_m \right) + \\
& + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 F_m}{d\rho^3} - \frac{1}{f} \frac{df}{d\rho} \left( \frac{d^3 F_m}{d\rho^3} - \frac{1}{\rho} \frac{d^2 F_m}{d\rho^2} + \frac{m^2 \nu_\theta}{\rho^2} \frac{dF_m}{d\rho} - \frac{m^2 \nu_\theta}{\rho^3} F_m \right) - \\
& - K \left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 F_m}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^3} \frac{dF_m}{d\rho} - \frac{m^2 (m^2 - 2)}{\rho^4} F_m - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{f} \frac{df}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho^2} \frac{dF_m}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^3} F_m \right) \right] + \\
& + \frac{Kf}{\rho} \left( \frac{dw_0}{d\rho} \frac{d^2 w_m}{d\rho^2} + \frac{dw_m}{d\rho} \frac{d^2 w_0}{d\rho^2} - \frac{m^2}{\rho} \frac{d^2 w_0}{d\rho^2} w_m \right) = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Функции  $w_0$ ,  $F_0$  представляют собой решение осесимметричной задачи, уравнения которой приведены ниже.

Граничные условия для этой системы имеют вид

$$\begin{aligned}
\rho = 1: \quad w_m = 0, \quad w'_m = -\frac{h\varphi_m}{8}, \quad T_{rm} = 0, \quad S_{r\theta m} = 0; \\
\rho = 0: \quad w'_m = 0, \quad F'_m = 0, \quad \varphi'_m = 0, \quad \psi'_m = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Давление, при котором существует нетривиальное решение системы (16)–(19) с граничными условиями (20), является критическим давлением.

Обозначим

$$w = w_0, \quad F = F_0, \quad ( )' = \frac{d}{d\rho} ( ). \tag{21}$$

Безразмерная система, описывающая осесимметричное докритическое состояние неоднородной круглой ортотропной пластины, имеет вид

$$\begin{aligned}
& F''' + \frac{1}{\rho}F'' - \frac{K}{\rho^2}F' - \frac{f'}{f} \left( F'' - \frac{\nu_\theta}{\rho}F' \right) + \frac{Kf}{2\rho} (w')^2 = 0, \\
& w''' + \frac{1}{\rho}w'' - \frac{K}{\rho^2}w' + \frac{f'}{f} \left( w'' + \frac{\nu_\theta}{\rho}w' \right) + \\
& + \lambda \frac{f'}{f} \left[ \frac{6h^2}{5} \left( \frac{1}{\rho}w'F' \right)' + \frac{6h^2}{5} \frac{\nu_\theta}{\rho^2}w'F' + \frac{P(\nu_\theta + 1)}{10} \right] + \\
& + \lambda \frac{6h^2}{5\rho} \left[ \left( \rho \left( \frac{1}{\rho}w'F' \right)' \right)' - \frac{K}{\rho^2}w'F' \right] + \\
& + \frac{\lambda P(1-K)}{\rho} \frac{1}{10} - \frac{(1-\nu_r\nu_\theta)}{f} \left( \frac{P\rho}{h^2} + \frac{12}{\rho}w'F' \right) = 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{E_r}{G'}, \quad K = \frac{E_\theta}{E_r}. \tag{23}$$

Параметры (23) характеризуют степень анизотропии пластины. Влияние значений параметров  $\lambda, K$  на величину прогиба будет исследоваться далее.

Граничные условия для функций  $w(\rho)$  и  $F(\rho)$  соответствуют введенным в постановке задачи предположениям и представляют собой соотношения, полученные в соответствии с [22]:

$$\begin{aligned}
\rho = 1 : \quad & w = 0, \quad w' = -\frac{\lambda P}{8}, \quad F' = 0; \\
\rho = 0 : \quad & w' = 0, \quad F' = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

#### 4. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПО ТЕОРИИ АМБАРЦУМЯНА И ПО КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Система (22) с граничными условиями (24) решалась методом конечных разностей (МКР) средствами пакета Mathematica. Проводится сравнение решений, полученных по нелинейной и линейной теориям Амбарцумяна. Исследуется влияние параметров  $\lambda, K$ ,



величины давления и функции  $f$  на эти решения. Но сначала покажем, как линейная теория Амбарцумяна может уточнять классическую теорию для трансверсально-изотропной пластины. Найденные величины везде являются безразмерными.

Рассмотрим аналитические формулы (25), (26) для прогиба однородной пластины. Формула (25) описывает прогиб согласно классической теории пластин и оболочек, формула (26) получена С. А. Амбарцумяном

$$\frac{w^{cl}}{P} = \frac{(1 - \nu^2)(1 - \rho^2)^2}{32h^2}, \quad h \ll 1, \quad (25)$$

$$\frac{w^A}{P} = \frac{w^{cl}}{P} + \frac{\lambda(1 - \rho^2)}{16}. \quad (26)$$

Дополнительное слагаемое в формуле (26) мало по сравнению с первым слагаемым, но оно увеличивается с ростом  $\lambda$  так, что может стать порядка первого слагаемого и даже больше него. Величина  $\lambda$  определена в (23). В случае сильной анизотропии, который рассматривается в нашей задаче, величина  $G'$  полагается малой, и чем меньше эта величина, тем больше отношение  $\lambda$ .

На рис. 2 построены графики по формулам (25), (26). Видно, что с ростом  $\lambda$  при постоянном давлении  $P$  увеличивается прогиб  $w(\rho)$ , полученный по теории Амбарцумяна, а разница между значением этого прогиба и решением, полученным по классической теории, становится все больше.

Формула (25) показывает, что в классической теории параметр  $\lambda$  не учитывается.

## 5. СРАВНЕНИЕ РЕШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПО ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АМБАРЦУМЯНА. ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ

Будем считать прогиб большим, если его величина имеет порядок толщины пластины, то есть безразмерный прогиб  $w(\rho)$  больше единицы. Расчеты показывают, что при  $P \geq 0,9$  прогиб  $w(0)$  имеет порядок единицы. Рассмотрим трансверсально-изотропную однородную пластину под действием безразмерного давления  $P = 0,9$ . Исследуем влияние параметра  $\lambda$  на  $w(\rho)$ . Как видно из рис. 3, при

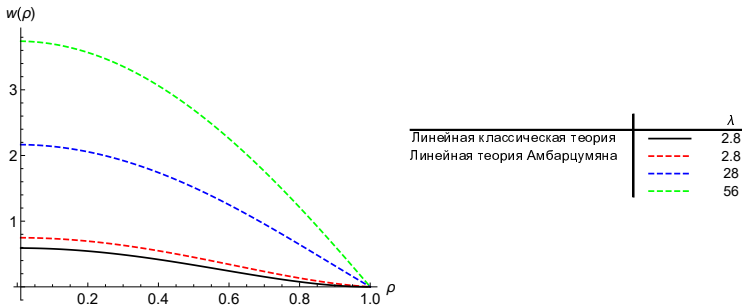


Рис. 2. Сравнение аналитических решений, полученных по линейной классической теории и линейной теории Амбарцумяна при увеличении параметра  $\lambda$

небольшом  $\lambda$  решения, полученные по линейной и нелинейной теории Амбарцумяна, практически совпадают. Но при увеличении  $\lambda$  в 20 раз, то есть при уменьшении модуля  $G'$  в 20 раз, нелинейная теория дает значительно меньшую величину прогиба. Таким образом, становится видно, что при сильной анизотропии пластины и действия большой нагрузки, приводящей к появлению прогиба порядка толщины пластины, линейная теория неприменима для расчета докритического состояния пластины.

Изучим влияние параметра  $K$ , определенного в (23), на прогиб пластины. Исследуем случай, когда пластина является трансверсально изотропной, то есть  $E_\theta = E_r$ ,  $K = 1$ , и случаи, когда  $E_\theta > E_r$ ,  $E_\theta < E_r$ , то есть пластина обладает ортотропией. Рассмотрим также поведение решения при действии безразмерной нагрузки  $P = 0, 2$ , когда выполняется  $w(\rho) < 1$ , а также при  $P = 0, 9$ , когда  $w(\rho)$  становится большим. Пусть  $\lambda$  при этом будет увеличен в 10 раз.

На рис. 4 видно, что при действии меньшего давления прогиб, полученный с помощью линейной и нелинейной теорий, для трансверсально-изотропной пластины почти не отличается, а увеличение  $K$  в два раза дает небольшую разницу между прогибами, посчитанными по линейной и нелинейной теориям. Из графика видно, что при  $P = 0, 9$  прогиб становится большим, и линейная теория

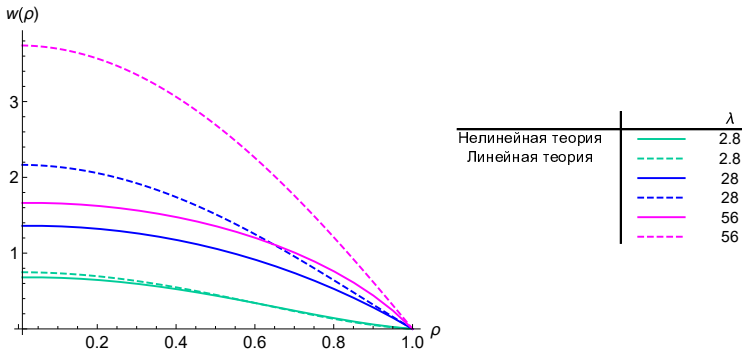


Рис. 3. Сравнение решений по линейной и нелинейной теориям при увеличении параметра  $\lambda$

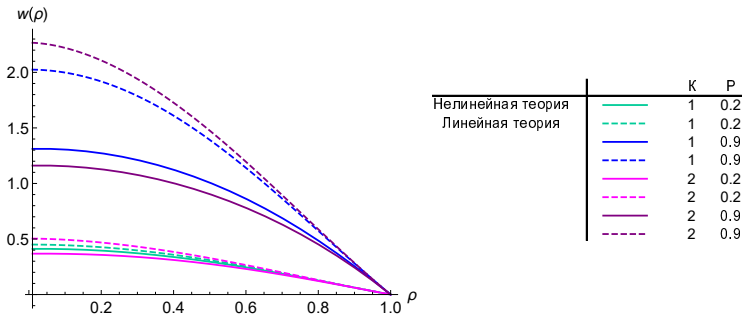


Рис. 4. Сравнение решений по линейной и нелинейной теориям при увеличении параметра  $K$

дает значительно увеличенное значение прогиба. При увеличении  $K$  в два раза нелинейная теория, в отличие от линейной, дает меньшую величину прогиба, чем в случае трансверсально-изотропной пластины.

При уменьшении параметра  $K$  линейная теория также показывает ошибочный результат. Увидеть зависимость решений от параметра  $K$  для случаев, когда  $P = 0,2$  и  $P = 0,9$ , можно на рис. 5.

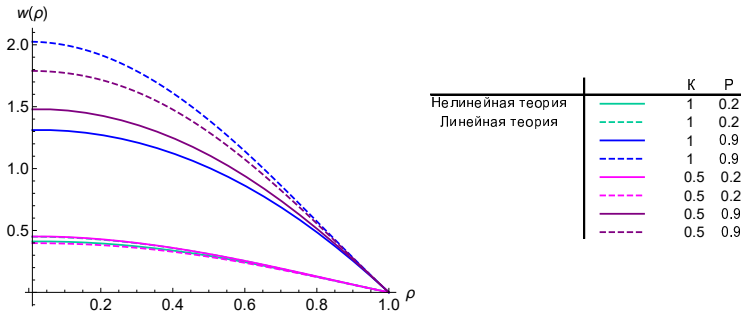


Рис. 5. Сравнение решений по линейной и нелинейной теориям при уменьшении параметра  $K$

## 6. Влияния неоднородности

Известно, что решетчатая пластинка диска зрительного нерва обладает механической неоднородностью [4]. Рассмотрим пластину при  $K = 1$ ,  $\lambda = 28$ . Будем сравнивать решения, полученные по линейной и нелинейной теории для однородной и неоднородной пластины. В случае однородного материала модули упругости  $E_\theta$  и  $E_r$  не зависят от радиальной координаты и  $f(\rho) = 1$ . Для неоднородной пластины зададим модули упругости  $E_\theta$  и  $E_r$  убывающей от центра функцией  $f(\rho) = \exp\{-4\rho\}$ .

Графики на рис. 6 показывают, что при небольшом давлении  $P = 0,1$ , когда выполняется  $w(\rho) < 1$ , решение, полученное по линейной и нелинейной теории для однородной пластины, и решение, полученное по нелинейной теории для неоднородной пластины, практически неразличимы. Линейная же теория в случае неоднородности дает увеличенную величину прогиба. В случае, когда нагрузка  $P = 0,9$ , прогиб значительно увеличивается, при этом учет неоднородности увеличивает погрешность линейной теории.

На рис. 6 также можно заметить, как отличается форма прогиба однородной и неоднородной пластин. С ростом неоднородности форма прогиба пластины начинает походить на перевернутую латинскую букву  $U$ , в связи с чем такую форму в офтальмологии принято называть «U-Shape» (рис. 7).

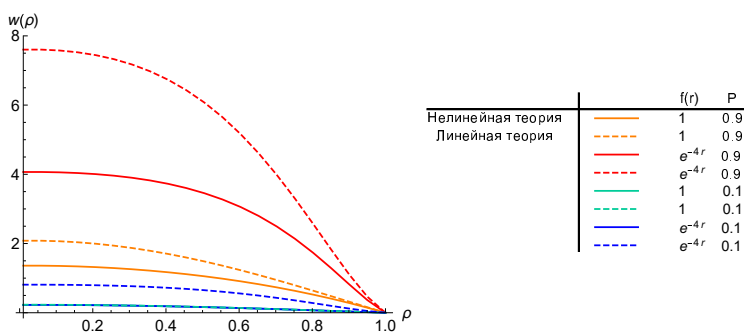


Рис. 6. Влияние неоднородности пластины на величину и форму прогиба, полученного по линейной и нелинейной теориям

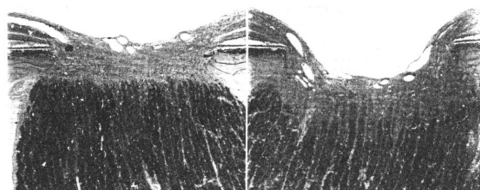


Рис. 7. Решетчатая пластинка диска зрительного нерва под действием давления. Модифицировано из [26]

Далее для анализа возможности перехода пластины в неосесимметричное состояние будет исследована область отрицательных напряжений в окрестности края пластины.

## 7. ОБЛАСТЬ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Возможность потери устойчивости осесимметричной формы равновесия пластины связано с появлением сжимающих напряжений в окрестности края. С увеличением нагрузки растет интенсивность окружных усилий  $T_\theta$ , введенных в (6), и одновременно сужается зона, в которой они появляются и возникают дополнительные предпосылки для перехода в неосесимметричное состояние [7].

В работе [25] исследована область отрицательных напряжений для однородного трансверсально-изотропного пологого сферического сегмента. Показано, что область отрицательных напряжений, посчитанная по теории Амбарцумяна, уже, чем область отрицательных напряжений, полученная по классической теории. Было также выявлено, что с увеличением параметра  $\lambda$  область отрицательных усилий  $T_\theta$  сужается.

Рассмотрим область отрицательных напряжений  $T_\theta$  для однородной ортотропной пластины. Пусть  $\lambda = 28$ ,  $P = 0,9$ . На рис. 8 показано, что область отрицательных напряжений в окрестности края с увеличением  $K$  сужается. Как отмечается в работах [20, 21], это, вероятно, означает, что чем существеннее  $E_\theta$  превосходит  $E_r$ , тем раньше произойдет переход пластины в неосесимметричное состояние.

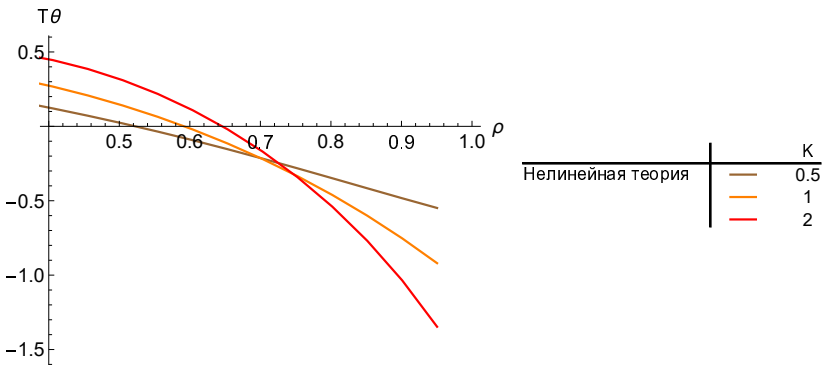


Рис. 8. График окружных усилий в крупном масштабе. Сравнение величины области отрицательных напряжений при увеличении параметра  $K$

## 8. УСТОЙЧИВОСТЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ

Как уже было отмечено, существование, единственность и разрешимость краевых и начально-краевых задач теории пластин и оболочек доказана в работах [8, 9, 10].

Устойчивость неоднородной пластины и устойчивость анизотропной пластины исследована в рамках классической теории. Показано, что однородная пластина переходит в неосесимметричное состояние с образованием 14 волн по краю пластины [7].

В работах [19, 20, 21] исследована устойчивость осесимметричного равновесия круглой пластины, нагруженной распределенной нагрузкой и закрепленной по типу скользящей заделки с помощью метода конечных элементов. В своей работе авторы упоминают только решение задачи о существовании несимметричных решений у симметрично загруженной пластины, полученное в работе [6] и являющееся неточным. Тем не менее в работах [19, 20, 21] авторы показали что бифуркация осесимметричного равновесия происходит с образованием 13 волн по краю пластины. Такое решение очень близко к решению, полученному в работах [7, 15, 16, 17], так как значения критического давления, соответствующие волновым числам 13, 14 и 15, очень близки [18]. В связи с этим можно сделать вывод, что исследуемая задача может быть решена методом конечных элементов достаточно точно. Как показывается в работе [18], решение методом конечных элементов получается более точным, если уже известна аналитическая форма потери устойчивости. На рис. 9 изображена потеря осесимметричной формы равновесия круглой пластины со скользящей заделкой с образованием 14 волн.

В нашей работе получены уравнения, описывающие деформацию неоднородной круглой ортотропной пластины в рамках теории Амбарцумяна. Эти уравнения имеют вид (8)–(11). Полученная система (8)–(11) имеет четыре уравнения и четыре неизвестные функции. После перехода к безразмерным величинам и разделения переменных получены уравнения (16)–(19) относительно несимметричных составляющих решения  $w_m(r)$ ,  $F_m(r)$ ,  $\varphi_m(r)$ ,  $\psi_m(r)$ , описывающие поведение системы после перехода в неосесимметричное состояние.

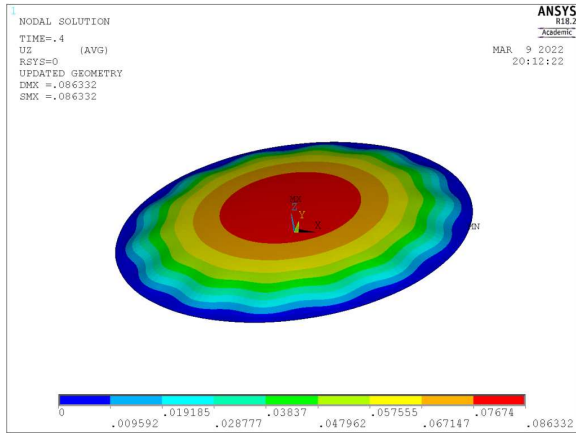


Рис. 9. Потеря осесимметричной формы равновесия круглой пластины со скользящей заделкой ( $m = 14$ ). Модифицировано из [18]

Обозначим за  $P_m$  нагрузку, при которой для заданного числа волн в окружном направлении  $m$  существуют отличные от нуля функции  $w_m(r)$ ,  $F_m(r)$ ,  $\varphi_m(r)$ ,  $\psi_m(r)$ , удовлетворяющие соотношениям (16)–(19). Под критической нагрузкой будем понимать  $P_{cr} = \min_m P_m$ .

Решение уравнений классической теории описанным в нашей работе методом показывает, что при увеличении отношения  $E_\theta/E_r$  число волн при потере устойчивости увеличивается, как и при уменьшении к краю радиального модуля упругости для неоднородной пластины [15, 17].

В дальнейшем предполагается решение задачи устойчивости осесимметричной формы равновесия в рамках теории Амбарцумяна разными методами — численным, асимптотическим, методом конечных элементов. Ожидается, что качественно результаты будут близки к результатам, полученным в описанных выше работах. Как было показано при исследовании докритического состояния, теория Амбарцумяна дает большую величину прогиба в сравнении с классической теорией, а также более узкую область отрицательных



напряжений в окрестности края пластины. В связи с этим величина критической нагрузки, полученная в рамках теории Амбарцумяна, может быть ниже, чем величина нагрузки, посчитанная по классической теории.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выведена система уравнений, описывающая деформацию неоднородной круглой ортотропной пластины на основе гипотез С. А. Амбарцумяна. Показано, что прогиб, получаемый по теории Амбарцумяна, имеет большую величину по сравнению с результатом классической теории, а степень анизотропии пластины может значительно увеличивать эту разницу. Проиллюстрирована важность использования нелинейной теории, а также влияние неоднородности, величины давления и степени анизотропии на величину прогиба. Исследована область отрицательных напряжений и влияние степени ортотропии на ее размер.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М. – Л.: Гостехиздат, 1947.
2. *Тимошенко С.П.* Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко М. – Л.: Гостехиздат, 1948.
3. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б. Л. Пелех. – Киев: Наукова думка, 1973.
4. *Иомдина Е. Н, Бауэр С.М., Котляр К.Е.* Биомеханика глаза: Теоретические аспекты и клинические приложения / Е. Н. Иомдина, С. М. Бауэр, К. Е. Котляр М.: Реал Тайм, 2015.
5. *Бушнелл Д.* Потеря устойчивости и выпучивание оболочек — ловушка для проектировщиков / Д. Бушнелл // Ракетная техника и космонавтика. 1981. Т. 19, № 10. – С. 93-154.
6. *Панов Д.Ю.* О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах / Д. Ю. Панов, В. И. Феодосьев – ПММ, 1948, Т. 12. – С. 389 – 406.
7. *Cheo L.S., Reiss E.L.* Unsymmetric wrinkling of circular plates. Quart. Appl. Math. 1971. № 31. P. 75–91.

8. *Морозов Н. Ф.* Единственность симметричного решения задачи о больших прогибах симметрично нагруженной круглой пластины. Докл. АН СССР, 1958. Т. 123, № 3. С. 417–419.
9. *Морозов Н. Ф.* К вопросу о существовании несимметричного решения в задаче о больших прогибах круглой пластинки, нагруженной симметричной нагрузкой. Изв. вузов. Матем., 1961. № 2 – С. 126–129.
10. *Морозов Н. Ф.* Качественное исследование круглой симметрично сжимаемой пластинки при большой краевой нагрузке (доказательство появления гофра). Докл. АН СССР, 1962. – Т. 147, № 6. – С. 1318–1319.
11. *Coman C.D., Bassom A.P.* Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2016. Vol. 81. P. 8–18.
12. *Coman C.D.* Asymmetric bifurcations in a pressurised circular thin plate under initial tension. Mechanics Research Communications, 2013. Vol. 47. P. 11–17.
13. *Бауэр С. М.* Влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин под действием нормального давления / С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика, 2020, № 1. – С. 38–46.
14. *Bauer S.M., Voronkova E.B.* Unsymmetrical buckling of orthotropic annular plates and spherical caps under internal pressure // Proceedings of the CompDyn 2019, Crete, Greece, 24–26 June 2019. Vol. 2. P. 3556–3562. URL: <https://2019.compdyn.org>
15. *Bauer S.M., Voronkova E.B.* Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. Recent developments in the theory of shells. Advanced structured materials / eds H. Altenbach et al. Cham: Springer, 2019. Vol. 110. P. 79–89.
16. *Бауэр С.М.* О несимметричных формах равновесия круглых пластин под действием нормального давления / С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова, Н. Ф. Морозов // Теоретическая и прикладная механика: международный научно-технический сборник. Вып. 27 / под ред. А. В. Чигарева. Минск: БНТУ, 2012. – С. 31–35.
17. *Bauer S.M., Voronkova E.B.* On Buckling Behavior of Inhomogeneous Shallow Spherical Caps with Elastically Restrained Edge. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Muller W. (eds) Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials, vol 134, 65–74 (2020) Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-14>.
18. *Бауэр С. М.,* К вопросу о несимметричных формах равновесия круглых пластин под действием нормального давления / С. М. Бауэр, Е. Б. Воронкова, Б. Н. Семенов // Вестн. СПб ун-та. Сер. 3., 2022.

19. Мануйлов Г. А. Устойчивость осесимметричного равновесия круглой пластины при больших прогибах. / Г. А. Мануйлов, С. Б. Косицын, М. М. Бегичев // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014. Vol. 10. № 1. P. 111–117.
20. Мануйлов Г. А. О критических и послекритических равновесиях в задачах устойчивости упругих систем / Г. А. Мануйлов, С. Б. Косицын, М. М. Бегичев // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2015. – Т. 5. – С. 47–54.
21. Мануйлов Г.А. О вычислительных признаках различия критических точек на кривой равновесий / Г. А. Мануйлов, С. Б. Косицын, М. М. Бегичев // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017. Vol. 13, № 2, P. 125–135.  
URL: <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-125-135>
22. Ambartsumyan S. A. Theory of Anisotropic Plates. Stamford: Technomic Publishing Co., 1970.
23. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974.
24. Бауэр С.М. Основы теории устойчивости упругих систем./ С. М. Бауэр, Л. А. Венатовская, Е. Б. Воронкова. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2017. С. 30 – 37.
25. Бауэр С. М. Деформация пологих сферических сегментов под действием внутреннего давления / С. М. Бауэр, А. С. Крылова // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2019-2020.– 2020. С. 84–99.
26. Quigley H.A., Addicks E.M. Chronic experimental glaucoma in primates. Effect of extended intraocular pressure elevation on optic nerve head and axional transport. Invest. Ophthalmol. Vis.Sci., 1980. № 2.

# ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ БАЛЛИСТИКИ

Д. А. Пенчиков, А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

В статье рассматривается серия задач оптимизации баллистических траекторий. Приводится изложение классической оптимизационной задачи о попадании в заданную точку с минимальной начальной энергией. Строится двухфакторный критерий, сочетающий в своей структуре энергетические и временные характеристики полета и позволяющий найти наилучший компромисс между ними. Рассматривается критерий оптимизации, связанный с точностью попадания в цель. Для задачи об оптимальном бросании точки в среде с квадратичным сопротивлением по критерию максимальной дальности полета осуществляется сопоставление известного приближенного решения с результатами численного анализа, проведенного на основе точных формул. Кроме того, рассматривается задача о полете на максимальную дальность с циклоидального трамплина, имеющая важное значение для прыжков на лыжах. Полученные в работе результаты приводятся в наглядной графической форме, и они интересны не только в теоретическом отношении, но могут оказаться полезными и при решении различных прикладных задач.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Оптимизации баллистических траекторий по различным критериям посвящены многие труды. Широко известна задача Н. Тартальи о стрельбе на максимальную дальность, решенная еще в середине XVI в. и являющаяся одной из первых оптимизационных задач механики [1]. Ее простейшим обобщением является задача о полете снаряда, при котором достигается максимальная дальность по отношению к наклонной плоскости [2]. В статье [3] рассматривается максимизация дальности полета и минимизация начальной скорости при наличии вязкого трения, а в работе [4] строится приближенное решение для полета на максимальную дальность в среде с квадратичным сопротивлением. Также стоит отметить и задачу оптимизации стрельбы в ньютоновом поле тяготения, где максимизируется дальность, отсчитываемая по поверхности Земли [5].

---

Доклад на семинаре 6 сентября 2022 г.

© Д. А. Пенчиков, А. С. Смирнов, Б. А. Смольников, 2022.

Однако некоторые вопросы, касающиеся оптимизации в задачах баллистики, к настоящему времени рассмотрены еще не в полном объеме. В настоящей статье предлагается восполнить эти пробелы и рассмотреть ряд задач оптимизации баллистических траекторий, которые имеют важное практическое значение.

## 2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим сначала классическую постановку задачи о стрельбе по заданной цели, когда требуется из точки  $A$  попасть в заданную точку  $B$ , расположенную на расстоянии  $h = \text{fix}$  по вертикали и на расстоянии  $l = \text{fix}$  по горизонтали от точки  $A$ . В качестве критерия оптимизации примем минимизацию величины начальной энергии снаряда (моделируемого материальной точкой массы  $m$ ), которая, очевидно, пропорциональна квадрату начальной скорости  $v_0$ , так что  $v_0^2 = \min$ . Варьируемой величиной в этой задаче является угол наклона ствола  $\alpha$  (рис. 1).

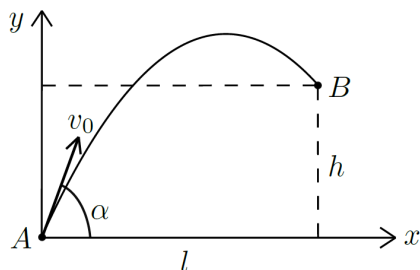


Рис. 1. Траектория полета снаряда

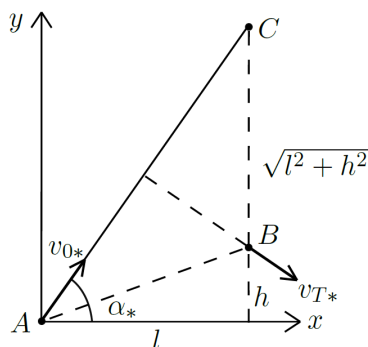


Рис. 2. Геометрическая интерпретация решения

Известно, что траектория материальной точки, брошенной под углом к горизонту в поле силы тяжести, описывается формулами

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

где  $x_0, y_0$  – начальные значения, являющиеся координатами точки  $A$ , а  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$  и  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$  – проекции вектора начальной скорости на координатные оси. Если совместить начало координат с точкой  $A$ , то будем иметь  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Подставляя теперь в формулы (1) координаты конечной точки движения  $B$ , т. е.  $x = l, y = h$ , а также  $t = T$ , где  $T$  – общее время движения снаряда от  $A$  к  $B$ , находим:

$$l = v_{0x}T, \quad h = v_{0y}T - \frac{gT^2}{2}. \quad (2)$$

Определяя отсюда значения  $v_{0x}$  и  $v_{0y}$

$$v_{0x} = \frac{l}{T} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{0y} = \frac{h}{T} + \frac{gT}{2} = v_0 \sin \alpha, \quad (3)$$

запишем выражение для критерия оптимизации:

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \frac{l^2 + h^2}{T^2} + gh + \frac{g^2T^2}{4} = \min. \quad (4)$$

Видно, что  $v_0^2 \rightarrow +\infty$  как при  $T \rightarrow 0$ , так и при  $T \rightarrow \infty$ . Поэтому должна существовать точка минимума функции  $v_0^2$  по  $T$ , которую легко определить:

$$\frac{d(v_0^2)}{dT} = -2\frac{l^2 + h^2}{T^3} + \frac{g^2T}{2} = 0, \quad T_*^2 = \frac{2}{g}\sqrt{h^2 + l^2}. \quad (5)$$

Подставляя значение  $T_*$  в формулы (3) и (4), получим выражения для  $v_{0x*}, v_{0y*}$  и  $v_{0*}$  в оптимальном варианте:

$$v_{0x*}^2 = \frac{gl^2}{2\sqrt{h^2 + l^2}}, \quad v_{0y*}^2 = \frac{g(h + \sqrt{h^2 + l^2})^2}{2\sqrt{h^2 + l^2}}, \quad v_{0*}^2 = g(h + \sqrt{h^2 + l^2}). \quad (6)$$

Наконец оптимальный угол стрельбы  $\alpha_*$  определяется формулой

$$\operatorname{tg} \alpha_* = \frac{v_{0y*}}{v_{0x*}} = \frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{l} = \rho + \sqrt{\rho^2 + 1}, \quad \rho = \frac{h}{l}. \quad (7)$$

При  $\rho = 0$  (т. е. при  $h = 0$ ) отсюда получаем  $\operatorname{tg} \alpha_* = 1$ , т. е.  $\alpha_* = 45^\circ$ . Тот же самый результат был получен Н. Тартальей, который рассматривал задачу максимизации дальности стрельбы при заданной

начальной энергии, т. е.  $l = \max$ ,  $v_0^2 = \text{fix}$ . В самом деле, из формул (3) для случая  $h = 0$  будем иметь [6]:

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad l = v_0 \cos \alpha T = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Отсюда видно, что как задача Тартальи, так и рассмотренная нами задача  $v_0^2 = \min$ ,  $l = \text{fix}$  приводят к требованию  $\sin 2\alpha = \max$ , которое и определяет оптимальное значение  $\alpha_* = 45^\circ$ . В общем же случае в исходной задаче о попадании в заданную точку  $B$  оптимальное значение  $\alpha_*$  согласно (7) зависит от параметра  $\rho$ , и при его росте оно также возрастает, стремясь при  $\rho \rightarrow \infty$  к значению  $90^\circ$ .

Установим геометрический смысл полученного решения (7). Нетрудно видеть, что для попадания в точку  $B$  с наименьшей начальной энергией нужно направить ствол в точку  $C$  так, что треугольник  $ABC$  будет являться равнобедренным:  $AB = BC = \sqrt{h^2 + l^2}$  (рис. 2). При этом конечные значения проекций скорости снаряда  $v_{Tx*}$  и  $v_{Ty*}$  в точке  $B$  будут определяться очевидными соотношениями

$$v_{Tx*} = v_{0x*}, \quad v_{Ty*} = v_{0y*} - gT_* \quad (8)$$

Записывая теперь векторы начальной и конечной скорости

$$\underline{v}_{0*} = v_{0x*}\underline{i} + v_{0y*}\underline{j}, \quad \underline{v}_{T_*} = v_{Tx*}\underline{i} + v_{Ty*}\underline{j},$$

вычислим их скалярное произведение, используя формулы (8):

$$\underline{v}_{0*} \cdot \underline{v}_{T_*} = v_{0x*}v_{Tx*} + v_{0y*}v_{Ty*} = v_{0*}^2 - v_{0y*}gT_*.$$

Подставляя сюда (5) и (6), получим, что  $\underline{v}_{0*} \cdot \underline{v}_{T_*} = 0$ , т. е. векторы начальной и конечной скорости ортогональны. Это интересное свойство проявляется и в более сложных баллистических задачах.

Общей особенностью найденных оптимальных траекторий является то, что точка цели  $B$  всегда оказывается на нисходящем участке траектории. В самом деле, вершина траектории будет располагаться там, где  $v_y = 0$ , и снаряд достигнет ее в момент времени  $t_v = v_{0y*}/g$ . Если вычислить его с учетом (6) и принять во внимание, что  $h < \sqrt{h^2 + l^2}$ , то можно получить следующее неравенство:

$$t_v = \sqrt{\frac{1}{2g} \frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{\sqrt{h^2 + l^2}}} < \sqrt{\frac{2}{g} \sqrt{h^2 + l^2}} = T_*.$$

Оно показывает, что вершину параболы снаряд достигнет раньше, чем точку  $B$ , что и доказывает сделанное утверждение о ее расположении на нисходящем участке траектории.

### 3. ЭНЕРГО-ВРЕМЕННОЙ КРИТЕРИЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотренный выше энергетический критерий  $v_0^2 = \min$  является однофакторным. Однако на практике в задачах баллистики представляется необходимым и уменьшение времени движения снаряда  $T$ . Поскольку  $v_0^2$  согласно (4) зависит от  $T$ , то в этой ситуации целесообразно синтезировать двухфакторный энерго-временной критерий оптимизации  $J$ , который будет отражать взаимосвязь двух указанных факторов и позволит найти наилучший относительный компромисс между ними:

$$J = v_0^2 T = \frac{l^2 + h^2}{T} + ghT + \frac{g^2 T^3}{4} = \min. \quad (9)$$

Подобные мультипликативные критерии уже успешно зарекомендовали себя в различных оптимизационных задачах механики [7, 8]. Нетрудно видеть, что в этом случае вновь  $J \rightarrow +\infty$  как при  $T \rightarrow 0$ , так и при  $T \rightarrow \infty$ , поэтому существует точка минимума критерия  $J$ . Для ее нахождения вычислим производную выражения (9) по  $T$  и, приравняв ее нулю, получим биквадратное уравнение:

$$\frac{dJ}{dT} = -\frac{l^2 + h^2}{T^2} + gh + \frac{3g^2 T^2}{4} = 0, \quad 3g^2 T^4 + 4ghT^2 - 4(l^2 + h^2) = 0.$$

Его положительный корень определяется выражением

$$T_{**}^2 = \frac{2}{3g} \left( \sqrt{4h^2 + 3l^2} - h \right), \quad (10)$$

после чего из (3) и (4) можно получить следующие формулы:

$$v_{0x**}^2 = \frac{3gl^2}{2(\sqrt{4h^2 + 3l^2} - h)}, \quad v_{0y**}^2 = \frac{g(2h + \sqrt{4h^2 + 3l^2})^2}{6(\sqrt{4h^2 + 3l^2} - h)}, \quad (11)$$

$$v_{0**}^2 = \frac{g(12l^2 + 8h^2 + 4h\sqrt{4h^2 + 3l^2})}{6(\sqrt{4h^2 + 3l^2} - h)}.$$



Тогда оптимальный угол стрельбы будет определяться формулой

$$\operatorname{tg} \alpha_{**} = \frac{v_{0y**}}{v_{0x**}} = \frac{2h + \sqrt{4h^2 + 3l^2}}{3l} = \frac{2\rho + \sqrt{4\rho^2 + 3}}{3}, \quad \rho = \frac{h}{l}. \quad (12)$$

При  $\rho = 0$  (т. е. при  $h = 0$ ) будем иметь  $\operatorname{tg} \alpha_{**} = \sqrt{3}/3$ , т. е.  $\alpha_{**} = 30^\circ$ . Таким образом, при использовании энерго-временного критерия оптимальный угол снижается с  $45^\circ$  до  $30^\circ$ . Оценим на этом простом примере эффективность использования двухфакторного критерия. Для этого выпишем оптимальные значения величин  $T$  и  $v_0^2$ , полученные при анализе энергетического критерия согласно (5) и (6) и энерго-временного критерия согласно (10) и (11):

$$T_* = \sqrt{\frac{2l}{g}}, \quad v_{0*}^2 = gl, \quad T_{**} = \sqrt{\frac{2l}{\sqrt{3}g}}, \quad v_{0**}^2 = \frac{2gl}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда можно сделать вывод, что путем увеличения начальной энергии на 15,5 % удастся уменьшить время полета на 24 %, т. е. в большей степени по сравнению с увеличением энергии. Эти результаты демонстрируют искомый наилучший компромисс и подтверждают целесообразность использования двухфакторного критерия оптимизации в задачах о баллистических траекториях.

Переходя теперь к общему случаю, легко показать непосредственно, что угол  $\alpha_{**}$  всегда меньше, чем угол  $\alpha_*$  из формулы (7):

$$\operatorname{tg} \alpha_{**} = \frac{2h + \sqrt{4h^2 + 3l^2}}{3l} < \frac{h + \sqrt{h^2 + l^2}}{l} = \operatorname{tg} \alpha_*.$$

Это объясняется увеличением начальной энергии, за счет чего и возможно уменьшение времени при использовании двухфакторного критерия оптимизации. Действительно, нетрудно видеть, что время  $T_{**}$  всегда оказывается меньше значения  $T_*$  из (5):

$$z_{**} = \frac{gT_{**}^2}{2} = \frac{1}{3} \left( \sqrt{4h^2 + 3l^2} - h \right) < \sqrt{h^2 + l^2} = \frac{gT_*^2}{2} = z_*, \quad (13)$$

где для удобства введен безразмерный параметр  $z = gT^2/2$ .

Графики зависимости оптимального по энергетическому критерию угла  $\alpha_*$  согласно (7) и оптимального по энерго-временному критерию угла  $\alpha_{**}$  согласно (12) от безразмерного параметра  $\rho$  приведены на рис. 3, где углы для наглядности даны в градусах.

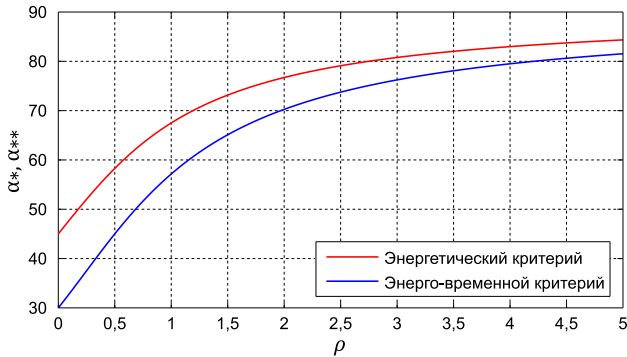


Рис. 3. Зависимость оптимальных значений  $\alpha_*$  и  $\alpha_{**}$  от  $\rho$

Из сказанного выше также возникает вопрос, будет ли точка  $B$  расположена на нисходящем или на восходящем участке параболической траектории снаряда. Чтобы выяснить это, вычислим время прохождения снаряда через вершину параболы:

$$t_v = \frac{v_{0y^{**}}}{g} = \frac{1}{\sqrt{6g}} \frac{2h + \sqrt{4h^2 + 3l^2}}{\sqrt{\sqrt{4h^2 + 3l^2} - h}}. \quad (14)$$

Установим, когда точка  $B$  будет лежать на нисходящем участке, т. е. решим неравенство  $t_v < T_{**}$  с учетом формул (10) и (14). После преобразований оно приводится к простому неравенству  $h < l/2$ , означающему, что только для этого диапазона высот точка  $B$  будет лежать на нисходящем участке параболы. Естественно, в случае  $h > l/2$  она будет лежать на восходящем участке параболы. Наконец если  $h = l/2$ , то точка  $B$  совпадает с вершиной параболы.

#### 4. ТОЧНОСТНОЙ КРИТЕРИЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Обратимся к рассмотрению наиболее важного для практики критерия оптимизации, связанного с точностью стрельбы по цели. Как известно, фактически снаряд никогда не попадает точно в точку  $B$ , имея результирующие погрешности  $\Delta h$  и  $\Delta l$ , обусловленные начальными погрешностями  $\Delta v_{0x}$  и  $\Delta v_{0y}$  или эквивалентными им

первичными погрешностями  $\Delta v_0$  и  $\Delta \alpha$ . Связь между ними можно получить, если принять во внимание формулы  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ , откуда будем иметь следующие выражения:

$$\Delta v_{0x} = \Delta v_0 \cos \alpha - v_0 \sin \alpha \Delta \alpha, \quad \Delta v_{0y} = \Delta v_0 \sin \alpha + v_0 \cos \alpha \Delta \alpha. \quad (15)$$

Однако этих двух погрешностей недостаточно для полного описания результирующих погрешностей, поскольку необходимо задать еще и погрешность  $\Delta T$ . Тогда согласно (2) имеем:

$$\Delta l = \Delta v_{0x} T + v_{0x} \Delta T, \quad \Delta h = \Delta v_{0y} T + v_{0y} \Delta T - g T \Delta T,$$

или, принимая во внимание выражения (15):

$$\begin{aligned} \Delta l &= T \cos \alpha \Delta v_0 - T v_0 \sin \alpha \Delta \alpha + v_0 \cos \alpha \Delta T, \\ \Delta h &= T \sin \alpha \Delta v_0 + T v_0 \cos \alpha \Delta \alpha + (v_0 \sin \alpha - g T) \Delta T. \end{aligned}$$

Эти два соотношения удобно записать в матричной форме:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{q},$$

где введены обозначения:  $\Delta \mathbf{q} = [\Delta v_0, \Delta \alpha, \Delta T]^T$  – столбец начальных погрешностей,  $\Delta \mathbf{r} = [\Delta l, \Delta h]^T$  – столбец результирующих погрешностей, а матрица  $\mathbf{A}$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} T \cos \alpha & -T v_0 \sin \alpha & v_0 \cos \alpha \\ T \sin \alpha & T v_0 \cos \alpha & v_0 \sin \alpha - g T \end{bmatrix}.$$

Запишем теперь квадрат модуля результирующей погрешности:

$$\rho^2 = \Delta l^2 + \Delta h^2 = \Delta \mathbf{r}^T \Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{q}, \quad (16)$$

где матрица  $\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  имеет вид:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} T^2 & 0 & T v_0 - g T^2 \sin \alpha \\ 0 & T^2 v_0^2 & -g T^2 v_0 \cos \alpha \\ T v_0 - g T^2 \sin \alpha & -g T^2 v_0 \cos \alpha & v_0^2 + g^2 T^2 - 2g T v_0 \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

Предположим теперь, что первичные погрешности  $\Delta \mathbf{q}$  нормированы некоторым ограничительным условием. Таким условием может быть ограничение вида  $|\Delta q_i| \leq \Delta q_{i \max}$ , когда зоной первичных

ошибок является некоторый параллелепипед (рис. 4). В этом случае все ошибки являются независимыми. Далее следует воспользоваться принципом гарантированного успеха, т. е. найти наихудшую комбинацию погрешностей  $\Delta \mathbf{q}$  (такую, для которой выражение (16) будет принимать максимальное значение при принятых ограничениях), после чего определить для нее наилучшие параметры задачи. Ясно, что в указанном случае максимум результирующей погрешности будет достигаться в одной из вершин параллелепипеда, и для ее отыскания необходимо решить задачу квадратичного программирования о максимизации функции (16) на поверхности параллелепипеда. По существу, эта задача является численной.

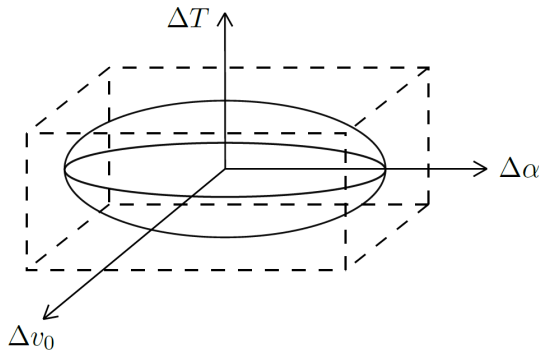


Рис. 4. Пространство начальных ошибок

Для того чтобы можно было решить задачу аналитически, обратимся к более гладкому ограничению, используя вместо параллелепипеда эллипсоид первичных ошибок. Зададим его поверхность, на которой и следует искать максимальные значения, уравнением

$$a\Delta v_0^2 + b\Delta\alpha^2 + c\Delta T^2 = \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{q} = \text{const}, \quad (17)$$

где матрица  $\mathbf{R} = \text{diag}\{a, b, c\}$  – диагональная матрица, элементы которой  $a, b, c$  являются заданными. Таким образом, мы приходим к задаче на условный экстремум. Для поиска экстремальных значений  $\rho^2$  из (16) при условии связи (17) составим функцию Лагранжа:

$$F = \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{q} - \lambda \Delta \mathbf{q}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{q}, \quad (18)$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа. Из условия экстремума полученной функции (18) можно получить линейную систему:

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta \mathbf{q}} = 0, \quad (\mathbf{M} - \lambda \mathbf{R}) \Delta \mathbf{q} = 0. \quad (19)$$

Как известно, для существования нетривиального решения этой системы следует потребовать, чтобы

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{R}) = 0.$$

Раскрывая полученный определитель, приходим после ряда упрощений к следующему кубическому уравнению:

$$\begin{aligned} \lambda^3 abc - \lambda^2 [T^2(acv_0^2 + abg^2 + bc) - 2abgTv_0 \sin \alpha + abv_0^2] + \\ + \lambda T^2 [(cv_0^2 + bg^2 \cos^2 \alpha + ag^2v_0^2 \sin^2 \alpha) T^2 - \\ - 2Tgv_0^3 a \sin \alpha + av_0^4] = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Существование корня  $\lambda = 0$  у этого уравнения формально объясняется тем, что  $\text{rank } \mathbf{M} = 2$ , а не 3, поскольку  $\text{rank } \mathbf{A} = 2$ , а, как известно из линейной алгебры, ранг произведения матриц не превышает ранга каждого из сомножителей. Фактически же этому корню отвечает такой собственный вектор  $\Delta \mathbf{q}$ , что согласно (19)  $\mathbf{M} \Delta \mathbf{q} = 0$ , а потому, исходя из (16), в этом случае будем иметь  $\rho = 0$ . Это означает, что существует такая комбинация начальных ошибок  $\Delta v_0$ ,  $\Delta \alpha$ ,  $\Delta T$  при условии (17), для которой отсутствует результирующая погрешность, т. е. даже при ошибочном запуске будет иметь место попадание точно в цель.

Что же касается ненулевых корней уравнения (20), анализ которых и является основной целью поставленной задачи, то они находятся из следующего квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda \left[ T^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{v_0^2}{b} + \frac{g^2}{c} \right) - \frac{2gT}{c} v_0 \sin \alpha + \frac{v_0^2}{c} \right] + \\ + T^2 \left[ \left( \frac{v_0^2}{ab} + \frac{g^2 \cos^2 \alpha}{ac} \right) T^2 + \frac{v_0^2}{bc} (v_0 - gT \sin \alpha)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Нетрудно понять, что для повышения точности стрельбы его корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  желательно минимизировать, варьируя такие параметры,

как  $v_0$ ,  $\alpha$ ,  $T$ . При этом следует помнить, что согласно (3) и (4) они связаны между собой соотношениями

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{l} \left( h + \frac{gT^2}{2} \right), \quad v_0^2 = \frac{1}{T^2} \left[ l^2 + \left( h + \frac{gT^2}{2} \right)^2 \right]. \quad (22)$$

Эти выражения показывают, что  $\alpha$  и  $v_0$  зависят от времени  $T$ , поэтому коэффициенты уравнения (21) есть функции  $T$ , а следовательно, и его корни  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  также являются функциями  $T$ . Отсюда и возникает возможность оптимизации этих корней посредством варьирования времени  $T$ . Поскольку оба корня следует минимизировать, то здесь естественно вновь сформировать двухфакторный мультипликативный критерий оптимизации  $S = \lambda_1 \lambda_2 = \min$ . Согласно теореме Виета, свободный член уравнения (21) равен именно этому произведению. В результате получим для критерия оптимизации  $S$  следующее выражение:

$$S = T^2 \left[ \left( \frac{v_0^2}{ab} + \frac{g^2 \cos^2 \alpha}{ac} \right) T^2 + \frac{v_0^2}{bc} (v_0 - gT \sin \alpha)^2 \right] = \min. \quad (23)$$

Используя далее прежнее обозначение  $z = gT^2/2$  вместо  $T$ , выразим  $S$  через  $z$ , принимая во внимание формулы (22). Выпишем сначала для удобства промежуточные выражения, присутствующие в формуле (23):

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{l}{\sqrt{l^2 + (h+z)^2}}, & \sin \alpha &= \frac{h+z}{\sqrt{l^2 + (h+z)^2}}, \\ v_0 - gT \sin \alpha &= \sqrt{\frac{g}{2z}} \frac{l^2 + h^2 - z^2}{\sqrt{l^2 + (h+z)^2}}. \end{aligned}$$

В результате формула для критерия оптимизации  $S$  примет вид

$$S = \frac{2}{gab} z [l^2 + (h+z)^2] + \frac{4l^2}{ac} \frac{z^2}{l^2 + (h+z)^2} + \frac{g}{2bc} \frac{(z^2 - l^2 - h^2)^2}{z}. \quad (24)$$

Нетрудно видеть, что как при  $z \rightarrow 0$ , так и при  $z \rightarrow \infty$  будем иметь  $S \rightarrow +\infty$ , поэтому существует точка минимума функции  $S$

на интервале  $0 < z < \infty$ . Она определяется из уравнения  $dS/dz = 0$ , которое с учетом (24) после преобразований принимает вид

$$\frac{2}{gab} [l^2 + (h+z)(h+3z)] + \frac{8l^2 z [l^2 + h(h+z)]}{ac [l^2 + (h+z)^2]^2} + \frac{g}{2bc} \frac{(z^2 - l^2 - h^2)(3z^2 + l^2 + h^2)}{z^2} = 0. \quad (25)$$

Анализируя это уравнение, видим, что при  $z \rightarrow 0$  его левая часть стремится к  $-\infty$ , тогда как при  $z = \sqrt{l^2 + h^2}$  она положительна. Следовательно, искомый корень  $z_{***}$  будет располагаться в диапазоне  $0 < z_{***} < \sqrt{l^2 + h^2}$ , т. е. с учетом (13) получаем, что  $z_{***} < z_*$ . Остается отметить, что конкретное значение этого корня будет зависеть от параметров задачи, представленных в уравнении (25).

### 5. ПОЛЕТ НА МАКСИМАЛЬНУЮ ДАЛЬНОСТЬ В СРЕДЕ С КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Перейдем теперь к еще одной важной с практической точки зрения задаче о полете снаряда на максимальную дальность с учетом квадратичного сопротивления. Для ее решения удобно перейти от декартовых координат снаряда  $x$  и  $y$  к переменным  $v$  (скорость снаряда) и  $\theta$  (угол наклона траектории к оси  $x$ ) по формулам

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta. \quad (26)$$

Будем считать, что сила сопротивления задается выражением  $F(v) = bv^2$  (где  $b$  – диссипативный коэффициент) и направлена по касательной к траектории снаряда в сторону, противоположную его движению. В этом случае уравнения движения имеют вид [9]:

$$\dot{v} = -\frac{F(v)}{m} - g \sin \theta = -\beta v^2 - g \sin \theta, \quad \dot{\theta} = -\frac{g \cos \theta}{v}, \quad (27)$$

где  $\beta = b/m$  – приведенный диссипативный коэффициент. Для получения квадратур разделим первое уравнение (27) на второе и получим формулу для  $dv/d\theta$ , при помощи которой вычислим необходимое для дальнейших действий выражение  $d(v \cos \theta)/d\theta$ :

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\beta v^3}{g \cos \theta} + v \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{dv}{d\theta} \cos \theta - v \sin \theta = \frac{\beta v^3}{g}.$$

Отсюда можно получить уравнение с разделяющимися переменными и сразу проинтегрировать его [10]:

$$\frac{d(v \cos \theta)}{(v \cos \theta)^3} = \frac{\beta}{g} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}, \quad -\frac{1}{2v^2 \cos^2 \theta} + C_1 = \frac{\beta}{2g} \left( \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \ln \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \right),$$

где константу  $C_1$  следует определить из условия  $v = v_0$  при  $\theta = \alpha$ :

$$C_1 = \frac{1}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + \frac{\beta}{2g} \left( \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \ln \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \right).$$

Вводя безразмерный диссипативный коэффициент  $\nu = \beta v_0^2 / g$ , получим окончательное выражение для  $v(\theta)$  в виде

$$v^2 = v_0^2 f(\theta),$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \alpha} + \nu \left[ \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \cos^2 \theta - \sin \theta + \cos^2 \theta \ln \frac{(1 + \sin \alpha) \cos \theta}{(1 + \sin \theta) \cos \alpha} \right]}.$$
(28)

Теперь из формул (26) можно получить декартовы координаты

$$x = \int_0^t v \cos \theta dt, \quad y = \int_0^t v \sin \theta dt, \quad (29)$$

где остается выразить  $dt$  через  $d\theta$  посредством второго уравнения (27), а именно:  $dt = -v d\theta / (g \cos \theta)$ . В результате из (29) находим

$$x = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} v^2 d\theta, \quad y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta} v^2 \operatorname{tg} \theta d\theta. \quad (30)$$

Если подставить сюда явную зависимость  $v(\theta)$  согласно (28), то получим интегралы, которые не берутся в конечном виде, поэтому их необходимо вычислять при помощи численных методов. Полагая, что конечной точке траектории полета  $x = l$ ,  $y = 0$  отвечает значение угла  $\theta_f$ , получим из (30) следующие выражения:

$$l = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta_f} v^2 d\theta, \quad 0 = -\frac{1}{g} \int_{\alpha}^{\theta_f} v^2 \operatorname{tg} \theta d\theta. \quad (31)$$



Второе из полученных соотношений и является уравнением для определения угла  $\theta_f$  при заданных значениях  $\alpha$  и  $\nu$ . После нахождения зависимости  $\theta_f = \theta_f(\alpha, \nu)$  следует максимизировать дальность полета  $l$  из первого выражения (31), которое удобно переписать, вводя в рассмотрение безразмерную дальность  $\delta = gl/v_0^2$ . Таким образом, приходим к следующей задаче:

$$\int_{\theta_f}^{\alpha} f(\theta) \operatorname{tg} \theta d\theta = 0, \quad \delta = \int_{\theta_f}^{\alpha} f(\theta) d\theta = \max, \quad (32)$$

которую необходимо решать численными методами. В конечном счете можно получить для любого заданного значения безразмерного диссипативного параметра  $\nu$  оптимальное значение угла  $\alpha_*$ .

Отметим, что в статье [4] для задачи о полете на максимальную дальность в среде с квадратичным сопротивлением было построено приближенное аналитическое решение путем вычисления приведенных выше интегралов на достаточно малом интервале. Это позволило после ряда преобразований получить довольно несложную приближенную зависимость оптимального угла  $\alpha_*$  от коэффициента  $\nu$  в следующем неявном виде:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_* + \frac{\nu \sin \alpha_*}{4(1 + \nu \sin \alpha_*)} = \frac{1 + \nu \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_*}{2} \right)}{1 + \nu \left( \sin \alpha_* + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_*}{2} \right) \cos^2 \alpha_* \right)}. \quad (33)$$

Представляет интерес выяснить, насколько это приближенное решение соответствует численному решению, проведенному на основе точных формул (28) и (32). Сопоставление указанных результатов дано на рис. 5, причем для наглядности углы приведены в градусах. Видно, что при достаточно небольших значениях  $\nu$  эти результаты хорошо согласуются друг с другом, что определяет ценность приближенного решения (33). Однако при постепенном увеличении  $\nu$  начинает ощущаться расхождение между решениями, что обусловлено приближенным характером зависимости (33). В этом случае для получения корректных результатов следует обращаться к численному анализу на базе приведенных выше точных формул.

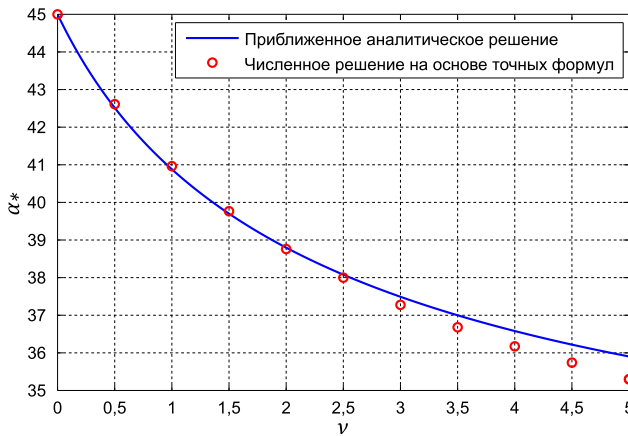


Рис. 5. Зависимость оптимального значения  $\alpha_*$  от  $\nu$

## 6. ЗАДАЧА О ЦИКЛОИДАЛЬНОМ ТРАМПЛИНЕ

В завершение рассмотрим задачу, более сложную в плане расчетной схемы, а именно полет лыжника (моделируемого материальной точкой) с циклоидального трамплина. Как известно, циклоида представляет собой кривую наискорейшего спуска [11]. Полагая, что лыжник начинает движение из точки  $A$  без начальной скорости, определим такую точку  $B$  на циклоидальном трамплине, сход с которой обеспечивает лыжнику полет на максимальную дальность (рис. 6). Эта задача интересна тем, что точка  $B$  будет достигнута лыжником за кратчайшее время, а затем он перейдет в режим полета на наиболее длинную дистанцию, т. е. в рамках рассматриваемой задачи фактически стыкуются две оптимизационные задачи.

Запишем уравнение циклоиды в параметрической форме:

$$x = a(\varphi - \sin \varphi), \quad y = a(\cos \varphi - 1),$$

где  $\varphi$  — параметр, в качестве которого выступает угол поворота производящего круга, а  $a$  — радиус этого круга. Определим проекции скорости материальной точки при ее попадании в точку  $B$ :

$$\dot{x}_B = \sqrt{ag}(1 - \cos \varphi_B), \quad \dot{y}_B = -\sqrt{ag} \sin \varphi_B, \quad (34)$$

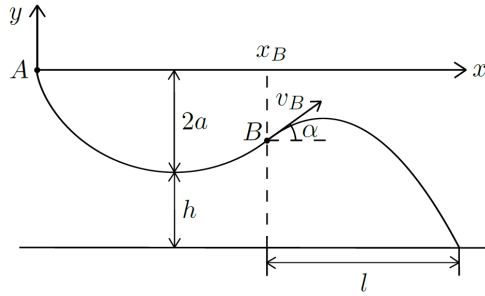


Рис. 6. Полет лыжника с циклоидального трамплина

причем здесь учтено, что в рассматриваемом движении из интеграла энергии вытекает  $\dot{\varphi} = \sqrt{g/a}$ . Отметим, что дальность полета  $l$  в данной задаче отсчитывается от точки схода  $B$  с циклоиды до места приземления, уровень которого располагается под наименьшей точкой циклоиды на расстоянии  $h$  от нее. Пользуясь стандартными уравнениями из задачи о баллистических траекториях, получим:

$$\dot{x}_B T = l, \quad \dot{y}_B T - \frac{gT^2}{2} = -y_B - 2a - h,$$

где  $T$  – время полета. Исключая его из этих уравнений и подставляя вместо  $\dot{x}_B$  и  $\dot{y}_B$  их выражения согласно (34), а также учитывая, что  $y_B = a(\cos \varphi_B - 1)$ , придем после преобразований к следующему уравнению относительно безразмерной дальности полета  $\delta = l/a$ :

$$\delta^2 + 2\delta \sin \varphi_B (1 - \cos \varphi_B) - 2(1 - \cos \varphi_B)^2 (\cos \varphi_B + 1 + \beta) = 0,$$

где также введен безразмерный параметр  $\beta = h/a$ . Ясно, что целью задачи является максимизация по  $\varphi_B$  большего корня полученного квадратного уравнения. Запишем далее этот корень:

$$\delta = \left[ -\sin \varphi_B + \sqrt{\sin^2 \varphi_B + 2(\cos \varphi_B + 1 + \beta)} \right] (1 - \cos \varphi_B). \quad (35)$$

Для простого случая  $\beta = 0$  можно получить несложное аналитическое решение данной задачи. В этой ситуации будем иметь:

$$\delta = 4u\sqrt{1-u}(\sqrt{u} + \sqrt{1+u}), \quad u = \sin^2 \frac{\varphi_B}{2}, \quad (36)$$

где учтено, что  $\cos \varphi_B/2 < 0$ , т. к.  $180^\circ < \varphi_B < 360^\circ$ . Приравняв нулю производную выражения (36) по  $u$ , получим иррациональное уравнение, которое сводится к кубическому уравнению, а именно:

$$(3 - 4u)\sqrt{u + u^2} = 2(2u^2 - 1), \quad 8u^3 - u^2 - 9u + 4 = 0.$$

Единственный положительный корень представленного кубического уравнения, отвечающий области определения исходного иррационального уравнения, есть  $u_* = 0,7259$ , откуда  $\varphi_{B*} = 243^\circ$ .

В общем случае точку максимума функции  $\delta$  из (35) в диапазоне  $180^\circ < \varphi_B < 360^\circ$  следует определить при помощи численных методов исследования. В результате получим искомое решение в виде графика зависимости оптимального значения  $\varphi_{B*}$  от безразмерного параметра  $\beta$ , который представлен на рис. 7, где углы приведены в градусах. Видно, что с увеличением  $\beta$  оптимальное значение  $\varphi_{B*}$  постепенно понижается, причем при  $\beta \rightarrow \infty$  имеем  $\varphi_{B*} \rightarrow 180^\circ$ .

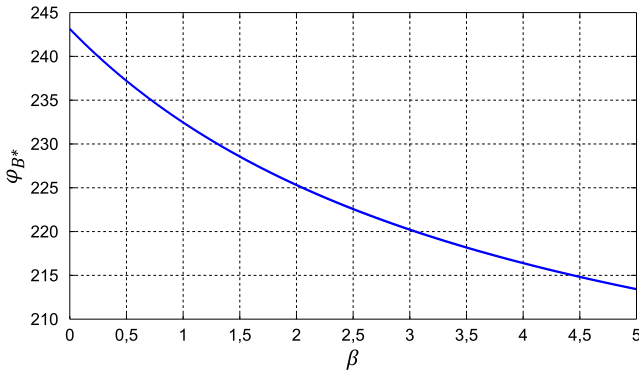


Рис. 7. Зависимость оптимального значения  $\varphi_{B*}$  от  $\beta$

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье был поставлен и решен ряд достаточно разнообразных задач оптимизации баллистических траекторий. При этом были использованы критерии, связанные с дальностью полета,

начальной энергией и точностью, а также был построен двухфакторный критерий. Для решения всех задач были проделаны трудоемкие математические расчеты, которые привели к конкретным конечным результатам, представленным также в графической форме. Сделанные в работе выводы имеют фундаментальное значение и полезны при решении более сложных оптимизационных задач в баллистике, а также они важны и для практического применения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Соломатин В. А.* История науки / В. А. Соломатин. – М.: ПЕР СЭ, 2002. – 352 с.
2. *Тимошенко С.* Инженерная механика / С. Тимошенко, Д. Юнг. – М.: Машгиз, 1960. – 508 с.
3. *Пенчиков Д. А.* Оптимизация баллистических траекторий с учетом вязкого сопротивления / Д. А. Пенчиков, А. С. Смирнов // Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: материалы V Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – Комсомольск-на-Амуре, 11–15 апреля 2022 г. – 2022. Ч. 2. – С. 393–395.
4. *Chudinov P. S.* An optimal angle of launching a point mass in a medium with quadratic drag force. *Indian J. Phys.* 2003. 77B (4). P. 465–468.
5. *Охоцимский Д. Е.* Основы механики космического полета / Д. Е. Охоцимский, Ю. Г. Сихарулидзе. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1990. – 448 с.
6. *Березкин Е. Н.* Курс теоретической механики / Е. Н. Березкин. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 647 с.
7. *Смирнов А. С.* Энерго-временной критерий оптимизации в задаче Гомана / А. С. Смирнов, Б. А. Смольников // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды» 2018–2019. – 2019. – С. 6–20.
8. *Смирнов А. С.* Двухфакторная оптимизация в задаче о брахистохроне / А. С. Смирнов, С. В. Суворов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2022. – Т. 15, № 2. – С. 124–139.
9. *Лойцянский Л. Г.* Теоретическая механика. Т. 2. Динамика / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1983. – 640 с.
10. *Карман Т.* Математические методы в инженерном деле / Т. Карман, М. Био. – М.: ОГИЗ, 1948. – 424 с.
11. *Ахизер Н. И.* Лекции по вариационному исчислению / Н. И. Ахизер. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 248 с.

## РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, НЕ ВОШЕДШИХ В СБОРНИК

### **Пластическая анизотропия при изгибе балок и пластин за пределом упругости**

Е. А. Иванов, Г. В. Павилайнен

Доклад на семинаре 22 марта 2022 г.

Анализируется возможность численного и аналитического решения задач изгиба горизонтальных и вертикальных балок, а также круговых пластин из современных конструкционных материалов, обладающих эффектом пластической анизотропии (эффектом SD). Балки и пластины находятся под действием гидростатического давления и сосредоточенных сил. Показано влияние эффекта SD на нарушение симметрии в развитии пластичности при изгибе за пределом упругости и проведена оценка искривления нейтральной оси балки и нейтральной поверхности пластины. Проведено сравнение аналитических решений и численных решений, полученных с помощью МКЭ в пакетах ANSYS и COMSOL.

### **Бесконтактный захват и удаление объекта космического мусора с помощью электромагнитной индукции**

И. К. Патель

Доклад на семинаре 1 марта 2022 г.

Анализируется возможность бесконтактного захвата электропроводящего объекта космического мусора (ОКМ) с использованием электромагнитной индукции на основе закона индукции Фарадея и закона Ленца. Рассмотрена возможность очистки околоземного космического пространства от миллионов металлических ОКМ с помощью космических аппаратов с магнитной катушкой (также называемых коллекторов). Предлагаемый метод активного удаления мусора относится к категории бесконтактных. Для захвата тяжелого спутника с высокой околоземной орбиты и последующего увода его в заданную точку на низкой околоземной орбите, где он может быть безопасно удален в атмосферу Земли, его движение должно быть точно предсказано. Следовательно, необходимо учитывать влияние возмущающих сил, таких как сжатие Земли. В рассматриваемой модели учитывается возмущение, вызванное второй зональной гармоникой геопотенциала  $J_2$ . Реализуемость метода обсуждается на осно-

ве результатов моделирования. Определяются направления совершенствования и развития метода.

### **ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ**

А. Х. Габриелян

Доклад на семинаре 22 февраля 2022 г.

В докладе рассматриваются особенности деформационного поведения сплавов с памятью формы. Целью работы является изучение эффекта псевдоупругости при изотермической выдержке под нагрузкой, а также эффекта стабилизации мартенсита в закаленных образцах сплава Ti49Ni51. Получен ряд экспериментальных данных по изменению деформации и температур переходов в исследуемом сплаве. Показано, что деформация увеличивается в ходе изотермической выдержки, и изменение этой деформации достигает насыщения с циклами. Выдвинута гипотеза о влиянии поврежденности границ на эффект стабилизации мартенсита.

### **РАСЧЕТ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЧЛЕНОВ В ЗАДАЧАХ ПОУРОВНЕВОЙ КИНЕТИКИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ**

М. А. Бушмакова

Доклад на семинаре 9 ноября 2021 г.

Релаксационные члены характеризуют изменение заселенностей колебательных уровней молекул и концентраций атомов в результате различных видов энергообмена и химических реакций. Они являются правыми частями системы дифференциальных уравнений для макроскопических параметров газа, описывающих течения многокомпонентных реагирующих смесей газов в условиях сильной колебательной и химической неравновесности. Обычные методы вычисления релаксационных членов являются вычислительно трудоемкими, поскольку они предполагают многократное суммирование, а также вычисление большого числа коэффициентов скорости переходов колебательной энергии и химических реакций. В этой работе оценивается возможность оценки релаксационных членов методами машинного обучения и сравнивается эффективность двух моделей, обученных на выборках, посчитанных с помощью методов SSH и FHO, для случая релаксации  $VT$  и  $VV$  в смеси  $O_2 - O$ . Затем решение нульмерной задачи, полученное с помощью алгоритмов ML, сравнивается с решением с помощью методов SSH и FHO. Показано, что алгоритм  $k$ -ближайших соседей обеспечивает наилучшее соотношение точность/эффективность и может быть рекомендован для дальнейших исследований. Кроме того, используя алгоритмы машинного обучения, можно уменьшить время вычислений.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЛУЧЕВЫМ МЕТОДОМ  
НА ПРИМЕРЕ ОТРАЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ  
ОТ ПАРАВОЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Е. П. Носов

Доклад на семинаре 12 октября 2021 г.

Одним из способов решения задачи дифракции является лучевой метод, сформировавшийся в текущем представлении в конце прошлого века. На данный момент нет общей формулы, описывающей отражение волны от произвольной поверхности, поэтому рассматриваются частные случаи, одним из которых является задача внешнего отражения от параболической поверхности. Целью данной работы является подробное исследование этой задачи. В результате найдены первые два члена формального асимптотического ряда для отраженной плоской монохроматической волны, обладающей постоянной скоростью, найдены асимптотики и невязка. Делается вывод о том, что для многих задач достаточную точность дает первый член формального разложения.

**Движение динамически несбалансированного  
горизонтального ротора в гравитационном поле**

С. О. Бондаренко

Доклад на семинаре 5 октября 2021 г.

В докладе рассматривается движение динамически несбалансированного ротора в горизонтальном положении. Получены уравнения движения для двух моделей ротора: одна с двухплоскостным шаровым автобалансирующим устройством, другая без него. По упрощенным уравнениям движения построены две модели роторов в MATLAB Simulink для численного решения. Выведены аналитические формулы для амплитуд прецессий с учетом силы тяжести при постоянной угловой скорости вращения ротора. Проведено сравнение численных и аналитических результатов.



## ОБ АВТОРАХ

**Бауэр Светлана Михайловна** — доктор физ.-мат. наук, профессор математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: биомеханика, механика тонкостенных конструкций, математическое моделирование. E-mail: s\_bauer@mail.ru.

**Бондаренко Сергей Олегович** — студент магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: динамика неуравновешенного ротора, шаровое автобалансирующее устройство. Научный руководитель — доц. А. С. Ковачев. E-mail: st062459@student.spbu.ru.

**Бурьян Сергей Николаевич** — аспирант кафедры высшей геометрии математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: аналитическая механика, дифференциальная геометрия, многообразия с особенностями. Научный руководитель — доц. В. С. Кальницкий. E-mail: burianserg@yandex.ru.

**Бушмакова Мария Андреевна** — студентка магистратуры кафедры гидроаэромеханики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Научный руководитель — проф. Е. В. Кустова. E-mail: st063874@student.spbu.ru.

**Габриелян Артур Хачатурович** — студент магистратуры кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: деформационное поведение сплавов с памятью формы. Научный руководитель — д.ф.-м.н С. П. Беляев. E-mail: st063878@student.spbu.ru.

**Дегилевич Егор Алексеевич** — студент второго курса магистратуры Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: аналитическая механика, теория колебаний, теория устойчивости, оптимизация в механике, компьютерный инжиниринг. Научный руководитель — асс. А. С. Смирнов. E-mail: DegilevichEgor@gmail.com.

**Дорофеев Никита Павлович** — студент 4 курса кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — деформация многослойных пластин. Научный руководитель — доц. Н. В. Наумова. E-mail: nickdorof60@gmail.com.

**Иванов Денис Николаевич** — кандидат физико-математических наук, ведущий инженер отдела сопровождения учебного процесса Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: механика и математическое моделирование. E-mail: denisiv3@rambler.ru.

**Иванов Евгений Александрович** — студент 2 курса магистратуры кафедры теоретической механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: исследования напряженно-деформированного состояния балок и пластин при изгибе за пределами упругости. E-mail: st085155@student.spbu.ru.

**Крылова Алиса Сергеевна** — студентка 2 курса магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: биомеханика, механика тонкостенных конструкций, математическое моделирование. E-mail: krylovaalice@gmail.com.

**Наумова Наталья Владимировна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — механика деформируемого твердого тела, колебания и устойчивость конструкций, асимптотические методы решения систем дифференциальных уравнений. E-mail: n.v.naumova@spbu.ru.

**Носов Евгений Павлович** — студент магистратуры кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Руководитель проекта — проф. И. В. Андронов.  
E-mail: st054881@student.spbu.ru.

**Павилайнен Галина Вольдемаровна** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедр теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов — гидроупругость, нелинейные задачи изгиба балок и пластин из материалов с эффектом SD, влияние льда на прочность опор гидротехнических сооружений.  
E-mail: g\_v\_pavilaynen@mail.ru.

**Патель Ишан Киранкумар** — аспирант кафедры теоретической механики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: методы активного удаления космического мусора. Научный руководитель — проф. А. А. Тихонов.  
E-mail: st083917@student.spbu.ru.

**Пенчиков Даниил Александрович** — студент второго курса магистратуры Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Область научных интересов: аналитическая механика, баллистика, оптимизация в механике. Научный руководитель — асс. А. С. Смирнов. E-mail: penchikov.da@edu.spbstu.ru.

**Смирнов Алексей Сергеевич** — ассистент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН. Область научных интересов: аналитическая механика, теория механических колебаний, динамика твердого тела, устойчивость равновесия и движения, оптимизация механических систем.  
E-mail: smirnov.alexey.1994@gmail.com.

**Смольников Борис Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, старший научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН. Область научных интересов: общая механика

ка, биомеханика и робототехника, движение космических объектов, теория управления. Автор пяти книг и многочисленных статей по вопросам динамики твердого тела, робототехники и механики управляемых космических объектов. E-mail: smolnikovba@yandex.ru.

**Чжао Шисян (Zhao Shixiang)** — аспирант кафедры теории упругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: пластическое деформирование материалов при динамическом нагружении. Научный руководитель — проф. Ю. В. Петров. E-mail: zhaoshixiang@yandex.ru.

**Яковлев Андрей Борисович** — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры физической механики Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: физика, математика и математическое моделирование. E-mail: andy\_yakovlev@rambler.ru.

**УЧАСТНИКИ СЕМИНАРА,  
ЗАЩИТИВШИЕ ДИССЕРТАЦИИ в 2021–2022 гг.**

**Бурьян Сергей Николаевич** — канд. физ.-мат. наук, СПбГУ, 2022. Научный руководитель — доц. В. С. Кальницкий.

## SUMMARIES

### *Burian S. N.* **Branch points of hinge mechanisms with an added pendulum.**

A model of the occurrence of branch points (or singular points) in the configuration space of a flat hinge mechanism is considered. The branch points occur by adding a double pendulum with special rod lengths. The difference of lengths is equal to the minimum or maximum distance between the two vertices of the hinge mechanism without singularities. In this case, the configuration space near the branch point could be represented as a union of two smooth curves which can intersect with the non-zero angle or have tangency. This approach is considered on the examples of singular pendulum and Darboux mechanism. In addition, the accelerations of the singular pendulum with first-order tangency singularity are studied. It is shown that in the case of first-order singularity a vector field which corresponds to Lagrange equations of the second kind is not clearly defined under the singular point.

MSC class: 70G45, 58K45.

Keywords: double pendulum, singular point, manifolds with singularities, hinge mechanism.

### REFERENCES

1. *Chebyshev P. L.* On the simplest articular system that delivers motion symmetrical about the axis. Supplement to the LXth Volume of the Notes Imperial Academy of Sciences. No. 1. St. Petersburg, 1889. [in Russian].
2. *Samsonov V. A., Mikhalev A. A.* Position space rearrangement of the mechanical system // Problems of mechanical engineering and reliability of machines. 2005. No. 4. P. 13–16. [in Russian].
3. *Mikhalev A. A.* Peculiarities of bifurcation of equilibrium points of near critical mechanisms // Problems of mechanical engineering and reliability machines. 2008. No. 6. P. 10–14. [in Russian].
4. *Zakalyukin I. V.* Special features of the degeneration of nonholonomic constraints and control susceptibility // Electronic journal “Proceedings of the MAI”. 2010. Vol. 39. [in Russian].

5. *Vinogradov A. M., Krasil'shchik I. S.* What is the Hamiltonian formalism? // Russian mathematical surveys. 1975. Vol. 30(1). P. 177.
6. *Lusala T., Sniatycki J., Watts J.* Regular points of a subcartesian space // Canadian Mathematical Bulletin. 2010 Vol. 53(2). P. 340–346.
7. *Watts J.* Diffeologies, differential spaces, and symplectic geometry. Ph. D. thesis. 2012.
8. *Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P., Tovstik P. E.* Rational and Applied Mechanics. Springer Nature, 2021. 520 P.
9. *Zegzhda S. A., Soltakhanov Sh. S., Yushkov M. P.* Mechanics of non-holonomic systems: A New Class of control systems. Springer Science & Business Media, 2009. 330 P.
10. *Burian S. N., Kalnitsky V. S.* On the motion of one-dimensional double pendulum // AIP Conference Proceedings. 2018 Vol. 1959. No 1. 030004.
11. *Burian S. N.* Specificity of the Darboux mechanism rectilinear motion. Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. 2018. Vol. 5(63). Issue 4. P. 658–669 [in Russian].
12. *Burian S. N.* Darboux Mechanism: Geometry and Kinematics // Mechanics. Research and innovation. 2018. Issue. 11. P. 12–21. [in Russian].

*Naumova N. V., Yakovlev A. B., Ivanov D. N., Dorofeev N. P.* **Deformation of a circular three-layer plate with a surface charge.**

Currently, the change in the characteristics of the Solar sail is being actively investigated. The sail is usually presented as a thin film stretched over the frame. During the flight, this film undergoes deformation under the influence of a number of factors, which affects the efficiency and trajectory. In the report, a model of the Solar sail is proposed in the form of a circular plate with a radius of 50 meters, consisting of three layers (aluminum, mylar, aluminum). A  $2\ \mu\text{m}$  thick Mylar film is enclosed between two thinner aluminum films,  $0.2\ \mu\text{m}$  thick. As a result of numerical calculations in the FEM package ANSYS, the values of the maximum deflections of the plate depending on its radius were obtained. In the future, it is planned to obtain an analytical solution of the problem and to compare analytical and numerical results. The proposed model can help in predicting the motion of real Solar sails and controlling their orientation in space.

MSC class: 74K20, 74H45

Keywords: three-layer plate, deformation, solar sail.

#### REFERENCES

1. *Fu J. H. M.* Surface potential of a photoemitting plate, *J. Geophys. Res.* 76 10 2506–09, 1971.
2. *Grard R. J. L.* Properties of the Satellite Photoelectron Sheath Derived from Photo-emission Laboratory Measurements, *J. Geophys. Res.* 1973. V. 78. No. 16. P. 2885–2906.
3. *Kolesnikov E. K.* and *Yakovlev A. B.* Harnessing power from solar wind particles captured in the Van Allen belts, *Acta Futura* 3, 2009, 81–88.
4. *Korolev V. S.*, *Polyakhova E. N.* and *Pototskaya I. Yu.*, Problem of control motion of solar sail spacecraft in the photogravitational fields , *Nonlinear Systems. Theoretical Aspects and Recent Applications* ed W Legnany and T E Moschandreou (London: IntechOpen), 2020, p 205.
5. *Moskalenko A. M.* The electrostatic potential near the lunar surface , *Kinematics and Physics of Heavenly Bodies* 8 5, 1988, 31–40.
6. *Naumova N. V.* and *Ivanov D. N.* Investigations of static deformations, vibrations and buckling of structures in ANSYS. Tutorial. S. -Petersburg, 2007 (in Russian).
7. *Polyakhova E. N.* *Cosmic Flight with Solar Sail* , Moscow: Nauka, 1988.
8. *Polyakhova E. N.* Influence of a wear of a mirror film under the action of space factors on dynamics of the motion of a solar sail in Tsander's orientations along a heliocentric orbit , *Proc. Gagarinsky scientific Readings on astronautics and aircraft* (Moscow, 1983–1984) (Moscow), 1985, p 62.
9. *Tikhonov A. A.* and *Yakovlev A. B.* The influence of an electric charge induced on the surfaces of the solar sail on its durability characteristics, *Proc. Int. Conf. on Mechanics — Ninth Polyakhov's Reading* (Saint-Petersburg, March 9–12, 2021) (Saint-Petersburg: VVM) p 172.
10. *Yakovlev A. B.* Influence of electric charge on surface of a solar sail on dynamics of the sail which moves along Tsander's trajectories, *J. Phys. : Conf. Ser.* 1959 012052, 2021.
11. *Yakovlev A. B.* The corrected method for calculation of electrostatic potential near to surface of nonatmospheric space body and the analysis of possible modes of dust particles motion , *Proc. Int. Conf. on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading* (Saint-Petersburg, Febr. 2–6, 2015). (IEEE) doi:10. 1109/POLYAKHOV. 2015. 7106785.

*Degilevich E. A., Smirnov A. S.* **Modeling of the catenary and its modifications.**

The paper discusses the issues of modeling an ordinary catenary as well as its two modifications — a stretchable catenary and catenary in a Newtonian gravitational field. The creation of models with concentrated parameters is carried out in the Adams software package. The results obtained during a series of numerical experiments are compared with analytical solutions for the corresponding initial catenary models, which have distributed parameters. In the course of the study, graphs of the force characteristic are constructed depending on the dimensionless parameter that determines the relative excess of the length of the catenary over the span length. These graphic illustrations fully confirm the correctness of the considered models with concentrated parameters.

MSC class: 70C20

Keywords: catenary, finite-dimensional modeling, tension in suspension points, extensible catenary, Newtonian field.

**REFERENCES**

1. *Aksenova O. V., Bodryakov V. Yu., Bykov A. A., Toporova N. V.* Optimization problem of catenary sagging // Current issues of teaching mathematics, computer science and information technology. 2018. № 3. P. 123–130 [in Russian].
2. *Smolnikov B. A.* Mechanics in the History of Science and Society. Moscow, Izhevsk, Regular and chaotic dynamics, 2014. 608 P. [in Russian].
3. *Song<sup>†</sup>Y., Zhang M., Øiseth O., Rønquist A.* Wind deflection analysis of railway catenary under crosswind based on nonlinear finite element model and wind tunnel test // Mechanism and Machine Theory. 2022. Vol. 168. 104608.
4. *Gregori Verdú S., Tur Valiente M., Nadal E., Fuenmayor Fernández F.* An approach to geometric optimisation of railway catenaries // Vehicle System Dynamics. 2017. P. 1–25.
5. *Agmon D., Yizhaq H.* A new solution of the discrete catenary problem // European Journal of Physics. 2020. 41(2). 025002.
6. *Smirnov A. S., Degilevich E. A.* Oscillations of chain systems. St. Petersburg, Polytech-press, 2021. 246 P. [in Russian].



7. *Degilevich E. A., Smirnov A. S.* Nonlinear oscillations of three-dumbbell model of catenary // Youth and Science: actual problems of fundamental and applied research. Materials of the V All-Russian scientific conference of students, postgraduates and young scientists. Komsomolsk-on-Amur, April 12–16. 2022. Vol. 2. P. 9–12 [in Russian].
8. *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Optimization of the catenary // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics» 2019–2020. 2020. P. 35–50 [in Russian].
9. *Akulich I. L.* Mathematical programming in examples and problems. Moscow, Vyshaya shkola, 1986. 319 P. [in Russian].
10. *Merkin D. R.* Introduction to the mechanics of flexible thread. Moscow, Nauka, GRFML, 1980. 240 P. [in Russian].
11. *Smirnov A. S., Degilevich E. A.* Optimization of the catenary and its modifications // Trudy MFTI. 2022. 14 (1). P. 35–48 [in Russian].

*Zhao Shixiang.* **Modeling of the deformation diagram of titanium alloy T110 under dynamic loading and modification of the relaxation plastic model.**

A modification of the relaxation model of plastic deformation proposed earlier for the purpose of explaining and predicting the temporal effects of instability of plastic deformation diagrams has been developed. An analysis was made of possible scenarios in the proposed modified model. It is shown that a modified version of the relaxation model allows one to take into account the behavior of deformation curves for long periods after the onset of yield and to more fully represent the corresponding temporal effects, such as the appearance (or disappearance) of the yield drop phenomenon and subsequent non-monotonic behavior, including oscillating, behavior of strain diagrams. The calculations of the modified approach are compared with the initial version of the relaxation model approach and the widely used Johnson–Cook model using the experimentally obtained strain diagrams for the T110 titanium alloy as an example. The calculation results confirm the descriptive and predictive efficiency of the modified approach. The most important feature of the developed approach is that the set of fixed parameters used in constructing the deformation curve does not depend on the history, in particular, the strain rate, and is associated only with the features of the development of the defect structure of the material

at the micro- and mesolevels. Using this small set of parameters of the structural-temporal approach and the relaxation plasticity model, it is possible to obtain various types of deformation curves that are realized on the same material in a wide range of strain rates.

MSC class: 74C10

Keywords: modification of the relaxation plasticity model, deformation diagram, titanium alloy, dynamic plasticity.

#### REFERENCES

1. Johnson G. R., Cook W. H. A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates, and High Temperatures // Proceeding 7th International Symposium on Ballistics. — The Hague: 1983. — P. 541–547.
2. Khan A. S., Huang S. Experimental and theoretical study of mechanical behavior of 1100 aluminum in the strain rate range // International Journal of Plasticity. — 1992. — V. 8. — P. 397 — 424.
3. Lin Y., Chen X., Liu G. A modified Johnson–Cook model for tensile behaviors of typical high-strength alloy steel // Materials Science and Engineering A. — 2010. — V. 527. — No. 26. — P. 6980–6986.
4. Gambirasio L., Rizzi E. An enhanced Johnson–Cook strength model for splitting strain rate and temperature effects on lower yield stress and plastic flow // Computational Materials Science. — 2016. — No. 113. — P. 231–265.
5. Meyers M. A., Chawla K. K. Mechanical behavior of materials. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — 856 P.
6. Krasnikov V. S., Mayer A. E., Yalovets A. P. Dislocation based high-rate plasticity model and its application to plate-impact and ultra short electron irradiation simulations // International Journal of Plasticity. — 2011. — V. 27. — No. 8. — P. 1294–1308.
7. Uenishi A., Teodosiu C. Constitutive modelling of the high strain rate behaviour of interstitial-free steel // International Journal of Plasticity. — 2004. — V. 20. — No. 4-5. — P. 915–936.
8. Gruzdkov A. A., Petrov Y. V. On temperature-time correspondence in high-rate deformation of metals // Doklady Physics. — 1999. — V. 44. — P. 114–116.
9. Gruzdkov A. A., Petrov Y. V., Smirnov V. I. An invariant form of the dynamic criterion for yield of metals // Physics of the Solid State. — 2002. — V. 44. — P. 2080–2082.

10. Petrov Y. V., Borodin E. N. Relaxation mechanism of plastic deformation and its justification using the example of the sharp yield point phenomenon in whiskers // *Physics of the Solid State*. — 2015. — V. 57. — No. 2. — P. 353–359.
11. Selyutina N. S, Petrov Y. V. Comparative analysis of dynamic plasticity models // *Reviews on Advanced Materials Science*. — 2018. — V. 57. — No. 2. — P. 199–211.
12. Selyutina N., Borodin E. N., Petrov Y. V., Mayer A. E. The definition of characteristic times of plastic relaxation by dislocation slip and grain boundary sliding in copper and nickel // *International Journal of Plasticity*. — 2016. — V. 82. — P. 97–111.
13. Petrov Y. V. On the incubation stage of fracture and structural transformations in continuous media under pulse energy injection // *Mechanics of Solids*. — 2007. — V. 42. — No. 5. — P. 692–699.
14. Petrov Y. V., Utkin A. A. Dependence of the dynamic strength on loading rate // *Materials Science*. — 1989. — V. 25. — No. 2. — P. 153–156.
15. Petrov Y. V., Morozov N. F. On the Modeling of Fracture of Brittle Solids // *The Journal of Applied Mechanics*. — 1994. — V. 61. — No. 3. — P. 710–712.
16. Petrov Y. V., Gruzdkov A. A., Bratov V. A. Structural-temporal theory of fracture as a multiscale process // *Physical Mesomechanics*. — 2012. V. 15. P. 232–237.
17. Petrov Y. V., Sitnikova E. V. Dynamic cracking resistance of structural materials predicted from impact fracture of an aircraft alloy // *Technical Physics*. — 2004. — V. 49. — No. 1. — P. 57–60.
18. Petrov Y. V., Smirnov I. V., Utkin A. A. Effect of strain-rate strength dependence in nanosecond load duration range // *Mech. Solids*. — 2010. — V. 45. — No. 3. — P. 476–484.
19. Bragov A. M., Karihaloo B. L., Petrov Y. V., Konstantinov A. Yu., Lamzin D. A., Lomunov A. K., Smirnov I. V. High-rate deformation and fracture of fiber reinforced concrete // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. — 2012. — V. 53. — P. 926–933.
20. Borodin E. N., Mayer A. E., Petrov Y. V., Gruzdkov A. A. Maximum yield strength under quasi-static and high-rate plastic deformation of metals // *Physics of the Solid State*. — 2014. — V. 56. — P. 2470–2479.
21. Petrov Y. V., Sitnikova Y. V. Temperature dependence of spall strength and the effect of anomalous melting temperatures in shock-wave loading // *Technical Physics*. — 2005. — V. 50. — No. 8. — P. 1034–1037.
22. Gruzdkov A. A., Sitnikova E. V., Morozov N. F., Petrov Y. V. Thermal effect in dynamic yielding and fracture of metals and alloys // *Mathematics and Mechanics of Solids*. — 2009. — V. 14. — P. 72–87.

23. Petrov Y. V., Selyutina N. S. Prediction of the Effect of Plastic-Strain Stabilization under Cyclic Deformation Based on the Structural Temporal Approach // Doklady Physics. — 2017. — V. 62. — No. 10. — P. 475–477.
24. Selyutina N. S., Smirnov I. V., Petrov Y. V. Stabilisation effect of strain hysteresis loop for steel 45 // International Journal of Fatigue. — 2021. — V. 145. — P. 106–133.
25. Petrov Y. V., Selyutina N. S. Effect of Plastic Strain Stabilization under Low-Cycle Deformation // Physical Mesomechanics. — 2020. — V. 23. — P. 384–389.
26. Cowper G. R., Symonds P. S. Strain-hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams // In Technical Report (Division of Applied Mathematics, Brown University). — 1957. — No. 28.
27. Markovsky, P. E., Janiszewski, J., Bondarchuk, V. I. et al. Effect of Strain Rate on Mechanical Behavior and Microstructure Evolution of Ti-Based T110 Alloy. *Metallogr. Microstruct. Anal.* 10, 839–861 (2021).  
<https://doi.org/10.1007/s13632-021-00797-9>

***Bauer S. M., Krylova A. S. Deformation and stability of axisymmetric equilibrium state of inhomogeneous orthotropic circular plates under normal pressure.***

The system of equations describing the deformation of an inhomogeneous circular orthotropic plate based on the S. A. Ambartsumyan hypotheses is derived. The prebuckling state of the plate is studied. It is shown that the deflection obtained by the Ambartsumyan theory has a larger value compared to the result of the classical theory, and the plate anisotropy degree can significantly increase this difference. The negative stresses area and the influence of the orthotropy degree on its size are investigated.

MSC class: 74A10, 74B20

Keywords: circular plate, orthotropic plate, Ambartsumyan theory, prebuckling state.

**REFERENCES**

1. *Lekhnitskii S. G.* Anisotropic Plates, Moscow-Leningrad, Gostekhizdat, 1947.
2. *Timoshenko S. P.*, Theory of Plates and Shells, Moscow-Leningrad, Gostekhizdat, 1948.

3. *Pelekh B. L.* Theory of Shells with Finite Shear Stiffness, Kiev, Naukova Dumka, 1973. (in Russian).
4. *Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotliar K. E.* , Eye Biomechanics: Theoretical Aspects and Clinical Applications, Moscow, Real Time, 2015. 208 P., illustrations. (in Russian).
5. *Bushnell D.* Buckling of shells — Pitfall for designers, AIAA Journal, 1981. Vol. 19, No. 9, P. 1183–1226.
6. *Panov D. Y., Feodosiev V. I.* On the equilibrium and loss of stability of shallow shells in the case of large displacement, Prikladnaya Matematika Mekhanika, 1948. Vol. 12, P. 389–406. (in Russian).
7. *Cheo L. S., Reiss E. L.* Unsymmetric wrinkling of circular plates, Quart. Appl. Math., N 31, 1971. P. 75–91.
8. *Morozov N. F.* The Uniqueness of the Symmetric Solution of the Large Deflection Problem for a Symmetrically Loaded Circular Plate, Dokl. AS USSR, 1958. Vol. 123, No. 3, P. 417–419. (in Russian).
9. *Morozov N. F.* On the Existence of a Non-Symmetric Solution to the Problem on Large Deflections of a Round Plate Loaded by a Symmetrical Load, Izv. Vuzov. Matem., 1961. No. 2, P. 126–129. (in Russian).
10. *Morozov N. F.* A Qualitative Investigation of a Round Symmetrically Compressed Plate under Large Marginal Load (Proof of Corrugation), Dokl. AS USSR, 1962. Vol. 147, No. 6, P. 1318–1319. (in Russian).
11. *Coman C. D., Bassom A. P.* , Asymptotic limits and wrinkling patterns in a pressurised shallow spherical cap, International Journal of Non-Linear Mechanics, 2016. Vol. 81, P. 8–18.
12. *Coman C. D.* Asymmetric bifurcations in a pressurised circular thin plate under initial tension, Mechanics Research Communications, 2013. Vol. 47, P. 11–17.
13. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Influence of boundary constraints on the appearance of asymmetrical equilibrium states in circular plates under normal pressure, Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics, 2020. P. 38–46. (in Russian).
14. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Unsymmetrical buckling of orthotropic annular plates and spherical caps under internal pressure, In Proceedings of the CompDyn 2019, Crete, Greece, 24–26 June 2019.  
URL: <https://2019.compdyn.orghttps://2019.compdyn.org>. Vol. 2, P. 3556–3562.
15. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure, In: Altenbach H, Chroscielowski J, Eremeyev V, Wisniewski K, editors. Recent developments in the theory of shells. Advanced structured materials. Cham: Springer, 2019. Vol. 110, P. 79–89.

16. *Bauer S. M., Voronkova E. B., Morozov N. F.* On unsymmetrical equilibrium states of circular plates under normal pressure, In: Chigarev, A. B. (ed.) Theoretical and Applied Mechanics: International Scientific and Technical Collection, Minsk, 2012. P. 31–35. (in Russian).
17. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* On Buckling Behavior of Inhomogeneous Shallow Spherical Caps with Elastically Restrained Edge. In: Altenbach H., Chinchaladze N., Kienzler R., Muller W. (eds) Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials. Cham: Springer, 2020. Vol 134, 65–74. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-14>.
18. *Bauer S. M., Voronkova E. B., Semenov B. N.* On non-axisymmetrical buckling modes of circular plates under normal pressure, St. Petersburg, Vestnik St. Petersburg University, 2022. Ser. 3. (in Russian).
19. *Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Begichev M. M.* About Initial Imperfection Sensitivity of Some Thin-Walled Structures, International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2014. Vol. 10, N 1, P. 111–117. (in Russian).
20. *Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Begichev M. M.* Critical and Postcritical Equilibria in Stability Problems of Elastic Systems, Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings, 2015. Vol. 5, P. 47–54. (in Russian).
21. *Manuylov G. A., Kosytsyn S. B., Begichev M. M.* On Computational Differences of Critical Points on Equilibrium Curve, International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017. Vol. 13, N 2, P. 125–135. (in Russian). <https://doi.org/10.22337/2587-9618-2017-13-2-125-135>
22. *Ambartsumyan S. A.* Theory of anisotropic plates, transl. from the first Russian Ed. by T. Cheron, Newport Beach, California; Stamford: TECHNOMIC Publishing Co., 1970. 255 P.
23. *Ambartsumyan S. A.* Theory of anisotropic shells, Moscow, 1961; English translation, NASA TT F-118, May 1964.
24. *Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B.* Fundamentals of theory of stability of elastic systems, Saint Petersburg, St. Petersburg University Press, 2017. P. 30–37. (in Russian).
25. *Bauer S. M., Krylova A. S.* Deformation of shallow spherical caps under internal pressure, Transactions of Seminar "Computer methods in continuum mechanics". St. Petersburg, St. Petersburg University Press, 2020. P. 84–99. (in Russian).
26. *Quigley H. A., Addicks E. M.* Chronic experimental glaucoma in primates. Effect of extended intraocular pressure elevation on optic nerve head and axonal transport, Invest. Ophthalmol. Vis. Sci., 1980. N. 2.

---

*Penchikov D. A., Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* **Optimization issues in ballistics problems**

The article considers a series of ballistic trajectory optimization problems. A presentation of the classical optimization problem of hitting a given point with a minimum initial energy is given. A two-factor criterion is constructed that combines in its structure the energy and time characteristics of the flight and allows to find the best compromise between them. An optimization criterion related to the accuracy of hitting the target is considered. For the problem of the optimal throwing of a point in a medium with a quadratic resistance according to the criterion of the maximum flight range, the known approximate solution is compared with the results of a numerical analysis based on exact formulas. In addition, the problem of maximum range flight from a cycloidal springboard is considered, which is important for ski jumping. The results obtained in the work are presented in a visual graphical form, and they are interesting not only from a theoretical point of view, but may also be useful in solving various applied problems.

MSC class: 70G60

Keywords: ballistics, optimization criterion, two-factor criterion, initial energy, flight range, shooting accuracy, quadratic resistance, cycloid springboard.

#### REFERENCES

1. *Solomatina V. A.* History of science. Moscow, PER SE, 2002. 352 P. [in Russian].
2. *Timoshenko S., Young D.* Engineering Mechanics. New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, 1956. 529 P.
3. *Penchikov D. A., Smirnov A. S.* Optimization of ballistic trajectories taking into account viscous resistance // Youth and Science: actual problems of fundamental and applied research. Materials of the V All-Russian scientific conference of students, postgraduates and young scientists. Komsomolsk-on-Amur, April 12-16. 2022. Vol. 2. P. 393–395. [in Russian].
4. *Chudinov P. S.* An optimal angle of launching a point mass in a medium with quadratic drag force // Indian J. Phys. 2003. 77B (4). P. 465–468.
5. *Okhotsimsky D. E., Sikharulidze Yu. G.* Fundamentals of space flight mechanics. Moscow, Nauka, GRFML, 1990. 448 P. [in Russian].

6. *Berezkin E. N.* Course of Theoretical Mechanics. Moscow, Moscow State University, 1974. 647 P. [in Russian].
7. *Smirnov A. S., Smolnikov B. A.* Energy-time criterion in the Homan problem // Transactions of seminar «Computer methods in continuum mechanics» 2018–2019. 2019. P. 6–20 [in Russian].
8. *Smirnov A. S., Suworov S. V.* Two-factor optimization in the brachistochrone problem // St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 2022. 15 (2). P. 124–139 [in Russian].
9. *Loitsyansky L. G., Lurie A. I.* Theoretical mechanics. Vol. 2. Dynamics. Moscow, Nauka, GRFML, 1983. 640 P. [in Russian].
10. *Karman von T., Biot M. A.* Mathematical Methods in Engineering. McGraw, Hill Publishing Co., 1940. 505 P.
11. *Akhiezer N. I.* Lectures on the calculus of variations. Moscow, GITTL, 1955. 248 P. [in Russian].



## РЕФЕРАТЫ

УДК 514.853, 531.5

*Бурьян С. Н.* **Точки ветвления шарнирных механизмов с добавочным маятником** / С. Н. Бурьян // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2021–2022 гг. С. 6–23.

В работе изучаются особые точки конфигурационных пространств шарнирных механизмов. Предложена общая схема возникновения особенностей, когда к механизму без особенностей конфигурационного пространства добавляется двойной маятник со специальными длинами звеньев. В результате образуется точка ветвления и имеются два разных типа движения через особую точку. Кривые, которые образуют конфигурационное пространство вблизи особенности, могут пересекаться под ненулевым углом или иметь общую касательную. Данный подход использовался на примерах сингулярного маятника и механизма Дарбу. Доказана трансверсальность особой точки механизма Дарбу. Также исследовались ускорения сингулярного маятника в точке ветвления для особенности типа касания первого порядка. Показано, что для таких особенностей векторное поле, которое соответствует уравнениям Лагранжа второго рода, является неоднозначным над особенностью.

Библиогр. 12 назв. Ил. 7.

*Ключевые слова:* двойной маятник, особая точка, многообразия с особенностями, шарнирный механизм.

УДК 624.04

*Дегилевич Е. А., Смирнов А. С.* **Моделирование цепной линии и ее модификаций** / Е. А. Дегилевич, А. С. Смирнов // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2021–2022 гг. С. 24–41.

В работе обсуждаются вопросы моделирования обычной цепной линии (ЦЛ), а также двух ее модификаций — растяжимой ЦЛ и ЦЛ в ньютоновом поле тяготения. Создание моделей с сосредоточенными параметрами осуществляется в программном комплексе Adams. Результаты, полученные при проведении серии числен-

ных экспериментов, сравниваются с аналитическими решениями для соответствующих исходных моделей ЦЛ с распределенными параметрами. В ходе исследования строятся графики силовой характеристики в зависимости от безразмерного параметра, определяющего относительное превышение длины ЦЛ над длиной пролета. Эти графические иллюстрации полностью подтверждают корректность рассмотренных моделей с сосредоточенными параметрами.

Библиогр. 11 назв. Ил. 13. Табл. 2.

*Ключевые слова:* цепная линия, конечномерное моделирование, натяжение на опорах, растяжимая цепная линия, ньютоново поле.

УДК 539.3

*Наумова Н. В., Яковлев А. Б., Иванов Д. Н., Дорофеев Н. П.* **Деформация круглой, трехслойной пластины под действием заряда** / Н. В. Наумова [и др.] // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2021–2022 гг. С. 42–53.

В настоящее время активно исследуется изменение характеристик космического паруса во время эксплуатации. Парус обычно представляется как тонкая пленка, натянутая на каркас. В процессе полета эта пленка претерпевает деформации под действием ряда факторов, что влияет на эффективность и траекторию.

В данной работе предлагается модель паруса в виде круглой пластины радиуса до 50 метров, состоящей из трех слоев (алюминий, майлар, алюминий). Майларовая пленка толщиной 2 мкм заключена между двумя более тонкими алюминиевыми пленками, толщиной 0,2 мкм. В результате численных расчетов в конечно-элементном пакете ANSYS получены значения максимальных прогибов пластины в зависимости от ее радиуса. В дальнейшем планируется получить аналитическое решение рассматриваемой задачи и провести сравнение аналитических и численных результатов. Предложенная модель может помочь при прогнозировании движения реальных космических парусов и управления их ориентацией в космическом пространстве.

Библиогр. 12 назв. Ил. 2. Табл. 3.

*Ключевые слова:* трехслойная пластина, деформация, космический парус.

УДК 531.32

*Шисян Чжао* Моделирование диаграммы деформирования титанового сплава Т110 при динамическом нагружении и модификация релаксационной пластической модели / Чжао Шисян // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2021–2022 гг. С. 54–68.

Разработана модификация релаксационной модели пластического деформирования, предложенной ранее с целью объяснения и прогноза временных эффектов нестабильности диаграмм пластического деформирования. Проведен анализ о возможных сценариях в предложенной модифицированной модели. Показано, что модифицированный вариант релаксационной модели позволяет учесть поведение деформационных кривых на длительных временах после наступления текучести и более полно представить соответствующие временные эффекты, такие как появление (или исчезновение) зуба текучести и последующее немонотонное, в том числе осциллирующее, поведение диаграмм деформирования. Проведены сравнения расчетов модифицированного подхода с первоначальной версией подхода, релаксационной модели, и с широко распространенной моделью Джонсона–Кука на примере экспериментально полученных диаграмм деформирования для титанового сплава Т110. Результаты расчетов подтверждают описательную и прогностическую эффективность модифицированного подхода. Важнейшей особенностью развитого подхода является то, что набор фиксированных параметров, применяемый при построении деформационной кривой, не зависит от истории, в частности скорости деформации, и связан только с особенностями развития дефектной структуры материала на микро- и мезоуровнях. Используя этот небольшой набор параметров структурно-временного подхода и релаксационной модели пластичности, можно получать различные типы деформационных кривых, реализующихся на одном материале в широком диапазоне скоростей деформации.

Библиогр. 27 назв. Ил. 3. Табл. 3.

*Ключевые слова:* модификация релаксационной модели пластичности, диаграмма деформирования, титановый сплав, динамическая пластичность.

УДК 539.32, 539.384.6

*Бауэр С. М., Крылова А. С. Деформация и устойчивость осесимметричной формы равновесия неоднородных ортотропных круглых пластин под действием нормального давления / С. М. Бауэр, А. С. Крылова // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2021–2022 гг. С. 69–91.*

В работе выведена система уравнений, описывающая деформацию неоднородной круглой ортотропной пластины на основе гипотез С. А. Амбарцумяна. Показано, что прогиб, получаемый по теории Амбарцумяна, имеет большую величину по сравнению с результатом классической теории, а степень анизотропии пластины может значительно увеличивать эту разницу. Проиллюстрирована важность использования нелинейной теории, а также влияние неоднородности, величины давления и степени анизотропии на величину прогиба. Исследована область отрицательных напряжений и влияние степени ортотропии на ее размер.

Библиогр. 26 назв. Ил. 9

*Ключевые слова:* круглая пластина, анизотропная пластина, теория Амбарцумяна, докритическое состояние.

УДК 531.32

*Пенчиков Д. А. Вопросы оптимизации в задачах баллистики / Д. А. Пенчиков, А. С. Смирнов, Б. А. Смольников // Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды». 2021–2022 гг. С. 92–109.*

В статье рассматривается серия задач оптимизации баллистических траекторий. Приводится изложение классической оптимизационной задачи о попадании в заданную точку с минимальной начальной энергией. Строится двухфакторный критерий, сочетающий в своей структуре энергетические и временные характеристики полета и позволяющий найти наилучший компромисс между ними. Рассматривается критерий оптимизации, связанный с точностью попадания в цель. Для задачи об оптимальном бросании точки в среде с квадратичным сопротивлением по критерию максимальной дальности полета осуществляется сопоставление известного приближенного решения с результатами численного анализа,

---

проведенного на основе точных формул. Кроме того, рассматривается задача о полете на максимальную дальность с циклоидально-го трамплина, имеющая важное значение для прыжков на лыжах. Полученные в работе результаты приводятся в наглядной графической форме, и они интересны не только в теоретическом отношении, но могут оказаться полезными и при решении различных прикладных задач.

Библиогр. 11 назв. Ил. 7.

*Ключевые слова:* баллистика, критерий оптимизации, дальность полета, начальная энергия, двухфакторный критерий, квадратичное сопротивление, точность стрельбы, циклоидальный трамплин.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>С. Н. Бурьян. Точки ветвления шарнирных механизмов с добавочным маятником</i> .....	6
1. Введение .....	6
2. Добавление специального двухзвенника .....	8
3. Сингулярный маятник .....	12
4. Механизм Дарбу .....	18
5. Заключение .....	21
<i>Е. А. Дегилевич, А. С. Смирнов. Моделирование цепной линии и ее модификаций</i> .....	24
1. Введение .....	24
2. Обычная ЦЛ .....	25
3. Растяжимая ЦЛ .....	30
4. ЦЛ в ньютоновом поле .....	37
5. Заключение .....	40
<i>Н. В. Наумова, А. Б. Яковлев, Д. Н. Иванов, Н. П. Дорофеев. Деформация круглой, трехслойной пластины под действием поверхностного заряда</i> .....	42
1. Введение .....	42
2. Модель процесса зарядки бесконечной двухсторонней тонкой пластины .....	43
3. Моделирование процесса деформации паруса .....	47
4. Результаты расчетов .....	50
5. Заключение .....	51
<i>Чжао Шисян. Моделирование диаграммы деформирования титанового сплава Т110 при динамическом нагружении и модификация релаксационной пластической модели</i> .....	54
1. Введение .....	54
2. Модели динамической пластичности материалов .....	56
3. Модификация релаксационной модели пластичности .....	59
4. Возможные модельные сценарии упруго-пластического деформирования .....	61
5. Результаты моделирования. Сравнение с экспериментальными данными и другими моделями .....	62
6. Заключение .....	64

<i>С. М. Бауэр, А. С. Крылова. Деформация и устойчивость осесимметричной формы равновесия неоднородных ортотропных круглых пластин под действием нормального давления</i> .....	69
1. Введение .....	69
2. Постановка задачи .....	72
3. Уравнения общей уточненной нелинейной теории Амбарцумяна изгиба неоднородной ортотропной круглой пластины .....	74
4. Сравнение результатов, полученных по теории Амбарцумяна и по классической теории .....	80
5. Сравнение решений, полученных по линейной и нелинейной теориям Амбарцумяна. Влияние анизотропии .....	81
6. Влияния неоднородности .....	84
7. Область отрицательных напряжений .....	85
8. Устойчивость осесимметричной формы равновесия .....	87
9. Заключение .....	89
<i>Д. А. Пенчиков, А. С. Смирнов, Б. А. Смольников. Вопросы оптимизации в задачах баллистики</i> .....	92
1. Введение .....	92
2. Энергетический критерий оптимизации .....	93
3. Энерго-временной критерий оптимизации .....	96
4. Точностной критерий оптимизации .....	98
5. Полет на максимальную дальность в среде с квадратичным сопротивлением .....	103
6. Задача о циклоидальном трамплине .....	106
7. Заключение .....	109
<b>Резюме докладов, не вошедших в сборник</b> .....	110
<b>Об авторах</b> .....	113
<b>Summaries</b> .....	117
<b>Рефераты</b> .....	129

*Научное издание*

**ТРУДЫ СЕМИНАРА «КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ  
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ»**

**2021–2022 гг.**

*Утверждено к печати*

*Редакционно-издательским советом  
Математико-механического факультета  
Санкт-Петербургского государственного университета  
и Ученым советом Института проблем машиноведения  
Российской академии наук*

Корректор *Н. Б. Цветкова*

Отпечатано с готового оригинал-макета

---

Подписано в печать 27.09.2022. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ . Печать офсетная.

Усл.-печ. л. 8,5.

Тираж 110. Заказ № 3506.