

# УЧЕТ ЭФФЕКТА РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ ИЗГИБЕ ПЛАСТИН.

Е. В. Матвеева, Г. В. Павилайнен

Санкт-Петербургский государственный университет

## 1. О возможности учета эффекта SD трансверсально-изотропного материала.

Рассмотрим задачу упругопластического изгиба круглой тонкой трансверсально-изотропной пластины, свободно опертой по контуру и находящейся под действием равномерного давления, учитывая различие между пределами текучести материала при сжатии и растяжении.

В отечественной и зарубежной литературе [1, 2] этот эффект встречается под названием эффекта SD (strength-different). Мы будем использовать определение Друкера [2] и под эффектом SD будем понимать изменение абсолютных значений компонент напряжений, соответствующих поверхности текучести, при замене знаков всех компонент на противоположные.

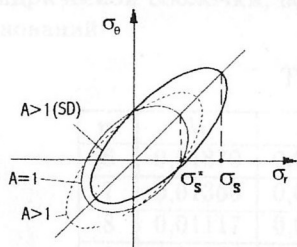


Рис. 1.

На рис. 1 схематично изображены поверхности текучести:

- изотропной тонкой пластины;
- - - трансверсально-изотропной пластины;
- трансверсально-изотропной SD-пластины.

В [1] предложен критерий текучести ортотропного материала, учитывающий влияние среднего нормального напряжения, а именно

$$\sqrt{F(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + G(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + H(\sigma_1 - \sigma_2)^2} + \frac{\alpha_1}{3}\sigma_1 + \frac{\alpha_2}{3}\sigma_2 + \frac{\alpha_3}{3}\sigma_3 = 1. \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные нормальные напряжения;  $F, G, H, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — постоянные.

Для трансверсально-изотропной пластины выполняется

© Е. В. Матвеева, Г. В. Павилайнен, 2000

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{(\sigma_s^*)^p} - \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right); \quad \sigma_3 = 0;$$

$$F = G = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{(\sigma_s)^p} + \frac{1}{(\sigma_s)^c} \right)^2;$$

$$H = \frac{A}{8} \left( \frac{1}{(\sigma_s^*)^p} + \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right)^2;$$

$$A = 2 - \left( \frac{1}{(\sigma_s)^p} + \frac{1}{(\sigma_s)^c} \right)^2 \left( \frac{1}{(\sigma_s^*)^p} + \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right)^{-2}. \quad (1.20)$$

Здесь через  $(\sigma_s)^p$ ,  $(\sigma_s^*)^p$ - обозначены пределы текучести при одноосном растяжении в направлении, перпендикулярном плоскости пластины, и в направлении плоскости пластины соответственно, а через  $(\sigma_s)^c$ ,  $(\sigma_s^*)^c$ - аналогичные пределы текучести при одноосном сжатии. Таким образом критерий (1.1) приобретает вид

$$\sqrt{\sigma_r^2 - A\sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2} + \beta\sigma = k, \quad (1.3)$$

Здесь  $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta)$ - среднее напряжение,

$$\beta = 3 \frac{\left( \frac{1}{(\sigma_s^*)^p} - \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right)}{\left( \frac{1}{(\sigma_s^*)^p} + \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right)};$$

$$k = \frac{2}{\left( \frac{1}{(\sigma_s^*)^p} + \frac{1}{(\sigma_s^*)^c} \right)}. \quad (1.4)$$

При  $(\sigma_s)^p = (\sigma_s^*)^p = (\sigma_s)^c = (\sigma_s^*)^c$  имеем  $\beta = 0$ ,  $A = 1$  и критерий (1.1) переходит в известное соотношение Мизеса-Губера.

Рассмотрим пластину в упругопластическом состоянии, вертикальное сечение которой изображено на рисунке 2. Как и в случае изгиба балок [5], учет среднего нормального напряжения приводит к нарушению симметричного развития пластических областей сверху и снизу пластины. Нейтральная поверхность, т.е. та, на которой напряжения обращаются в ноль, в этом случае уже не совпадает со срединной.

Введем на нейтральной поверхности цилиндрическую систему координат  $r\theta z$ . Неизвестными функциями  $r$  становятся  $\eta_1(r)$ ,  $\eta_2(r)$ ,  $\eta_3(r)$ ,  $\eta_4(r)$ . Как видно, неизвестных функций стало значительно больше, чем в случае  $\beta = 0$ .

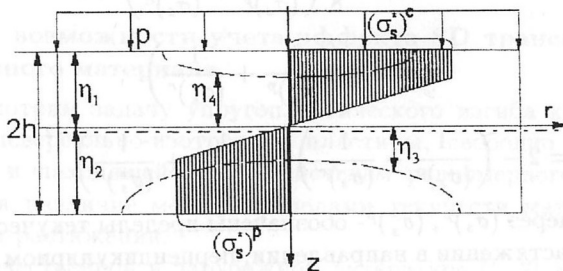


Рис.2.

Рассмотрим вопрос о распределении напряжений по толщине в центре пластины при условии, что и на верхней грани, и на нижней имеются пластические **области**.

Пластические деформации в этом случае развиваются сначала внизу в центре пластины, а потом появляются наверху в центре пластины. По-прежнему ограничимся теми случаями, когда пластичность от края вообще не появляется.

Отметим, что как и в случае балок [5], при изгибе пластины выполняются соотношения

$$\begin{cases} \eta_1 + \eta_2 = 2h, \\ (\eta_1 - \eta_4)(\sigma_s^*)^c + \frac{1}{2}\eta_4(\sigma_s^*)^c = (\eta_2 - \eta_3)(\sigma_s^*)^p + \frac{1}{2}\eta_3(\sigma_s^*)^p. \end{cases} \quad (1.5)$$

Второе соотношение (1.5) представляет собой требование равенства площадей заштрихованной фигуры над нейтральной осью и под ней (рис.2).

Перейдем к выяснению зависимости между напряжениями и деформациями в упругой и пластической областях пластины.

В упругой области по-прежнему справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_r^e &= \frac{2G}{(1-\nu)} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta^e &= \frac{2G}{(1-\nu)} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В пластических областях выполняются основные соотношения теории течения

$$d\varepsilon_r^p = d\lambda \frac{\partial f^2}{\partial \sigma_r}, \quad d\varepsilon_\theta^p = d\lambda \frac{\partial f^2}{\partial \sigma_\theta}. \quad (1.7)$$

В дальнейшем, во всех соотношениях мы будем пренебрегать членами порядка  $\beta^2$  по сравнению с единицей.

Продифференцируем (1.3), имея в виду

$$\sqrt{\sigma_r^2 - A\sigma_r\sigma_\theta^2 + \sigma_\theta^2} = k - \beta\sigma. \quad (1.8)$$

По аналогии с [3, 4] будем считать, что в пластине с достаточной степенью точности реализуется условие простого нагружения, следовательно результаты теории течения и теории малых упруго-пластических деформаций совпадают.

Получаем после преобразований

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k - \beta\sigma}{3(2 - A)} \left[ \frac{1}{\Phi} (2\varepsilon_r + A\varepsilon_\theta) - 2\beta \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{k - \beta\sigma}{3(2 - A)} \left[ \frac{1}{\Phi} (2\varepsilon_\theta + A\varepsilon_r) - 2\beta \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $\Phi = (2 + A)\lambda k/3$ .

Найдем  $\Phi$ . Подставим (1.9) в (1.3) и приведем уравнение к виду

$$N_1\Phi^2 + N_2\Phi + N_3 = 0, \quad (1.10)$$

где

$$N_1 = 9(2 - A),$$

$$N_2 = 2\beta(2 + A)(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta),$$

$$N_3 = -(2 + A)(2 - A)(\varepsilon_r^2 + A\varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2).$$

Пренебрегая членами более высокого порядка, чем  $\beta^2$ , имеем решение квадратного уравнения

$$\Phi_{1,2} = -\frac{\beta(2 + A)}{9(2 - A)}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \pm \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2 + A}{2 - A}(\varepsilon_r^2 + A\varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2)}. \quad (1.11)$$

Знак перед корнем выбираем из тех соображений, что  $\Phi$  является аналогом интенсивности деформаций в пластической области и должна быть положительной величиной. При выборе знака "+" это условие выполняется.

Переходим к исследованию напряженного состояния и условия равновесия трансверсально-изотропной пластины при учете эффекта SD.

## 2. Вывод системы уравнений.

В отличие от предыдущих случаев, срединная поверхность пластины не совпадает с нейтральной, поэтому систему координат  $r\theta z$  вводим не на срединной поверхности, как раньше, а на нейтральной.

Напряженное состояние пластины можно определить двумя моментами

$$M_r = \int_{-\eta_1}^{\eta_2} \sigma_r z dz, \quad M_\theta = \int_{-\eta_1}^{\eta_2} \sigma_\theta z dz \quad (2.1)$$

и поперечной силой

$$Q = -\frac{1}{2}pr. \quad (2.2)$$

Уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = Q. \quad (2.3)$$

Преобразуем соотношения (2.1). Разобьем интегрирование по схеме

$$M_l = \int_{-\eta_1}^{-\eta_4} \sigma_l^p z dz + \int_{-\eta_4}^0 \sigma_r^e z dz + \int_0^{\eta_3} \sigma_r^e z dz + \int_{\eta_3}^{\eta_2} \sigma_r^p z dz; \quad l = r, \theta. \quad (2.4)$$

В первый и четвертый интегралы подставляем соотношения (1.9), а во второй и третий – соотношения (1.6), причем воспользуемся гипотезой Кирхгофа-Лява

$$\varepsilon_r = \xi_r z, \quad \varepsilon_\theta = \xi_\theta z. \quad (2.5)$$

и имеем ввиду переменную  $\text{sign } z$  при переходе через  $z=0$ . Запишем все соотношения относительно нейтральной поверхности. Моменты

приобретут вид

$$M_{r,\theta} = \frac{B_{r,\theta} h^2}{2} (\chi_3^3 + \chi_4^3) + \frac{C_{r,\theta}^p h^2}{2} (\chi_2^2 - \chi_3^2) + \frac{C_{r,\theta}^c h^2}{2} (\chi_4^2 - \chi_1^2),$$

$$B_r = \frac{2G}{1-\nu} (\xi_r + \nu \xi_\theta), \quad B_\theta = \frac{2G}{1-\nu} (\nu \xi_r + \xi_\theta),$$

$$C_r^{p,c} = \frac{3k \left( \frac{\text{sign} z}{\xi^{p,c}} (2\xi_r + A\xi_\theta)^{p,c} - 2\beta \right)}{9(2-A) + \beta \left( \frac{\text{sign} z}{\xi^{p,c}} (\xi_r + \xi_\theta)^{p,c} (2+A) - 4\beta \right)};$$

$$C_\theta^{p,c} = \frac{3k \left( \frac{\text{sign} z}{\xi^{p,c}} (2\xi_\theta + A\xi_r)^{p,c} - 2\beta \right)}{9(2-A) + \beta \left( \frac{\text{sign} z}{\xi^{p,c}} (\xi_r + \xi_\theta)^{p,c} (2+A) - 4\beta \right)};$$

$$\xi^{p,c} = \frac{\Phi}{|z|} = -\frac{\beta}{9} \frac{2+A}{2-A} (\xi_r + \xi_\theta) \text{sign} z + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2+A}{2-A} (\xi_r^2 + A\xi_r \xi_\theta + \xi_\theta^2)}. \quad (2.6)$$

Через  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  обозначены величины

$$\chi_1 = \frac{\eta_1}{h}, \quad \chi_2 = \frac{\eta_2}{h}, \quad \chi_3 = \frac{\eta_3}{h}, \quad \chi_4 = \frac{\eta_4}{h}. \quad (2.7)$$

Введем в рассмотрение величину  $\Phi_0$ , равную

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{2+A}{12 \cos^2 \mu_0} (\varepsilon_r^2 - 2 \cos 2\mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2)}, \quad (2.8)$$

где  $\mu_0$  определяется соотношениями

$$\sin \mu_0 = \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\frac{2-A}{1-A\nu+\nu^2}}, \quad \cos \mu_0 = \frac{1-\nu}{2} \sqrt{\frac{2+A}{1-A\nu+\nu^2}}. \quad (2.9)$$

Введем величину  $\xi_0 = \Phi_0/|z|$ . Очевидно, выполнено равенство

$$2\sqrt{3} G \Phi_0 = 2\sqrt{3} G \xi_0 |z| = k - \beta \sigma. \quad (2.10)$$

Воспользуемся далее методом решения, предложенным В.В.Соколовским для изотропной пластины [4], и представим параметры искривления нейтральной поверхности в двух видах: через

$\xi$  и  $\omega$ , а также через  $\xi_0$  и  $\psi$

$$\left. \begin{matrix} \xi_r \\ \xi_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{\xi \cos(\omega \pm \alpha)}{\frac{2+A}{6} - \frac{2\beta}{9} \frac{2+A}{2-A} \cos \omega \cos \alpha \operatorname{sign} z} = \frac{\sqrt{3} \xi_0 \cos(\psi \pm \mu_0)}{\sqrt{2+A} \sin \mu_0}, \quad (2.11)$$

где  $\mu_0$  определяется соотношениями (2.11),  $\alpha$  определяется

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2+A}}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2-A}}{2},$$

а между  $\omega$  и  $\xi$  имеет место зависимость

$$\operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \mu_0. \quad (2.12)$$

Остановимся особо на определении  $\xi_0$ . Эту величину нужно определить из условия (1.3) на границе между упругой и пластической областями. На основании (2.10) имеем

$$\xi_0 = \frac{k - \beta \sigma}{2\sqrt{3} G |z|}. \quad (2.13)$$

Подставим сюда соотношения закона Гука. На границе упругой и пластической областей в верхней части выполнено  $|z| = h\chi_4$ ,  $\operatorname{sign} z = -1$ , тогда

$$\xi_0 = \frac{k}{2Gh\chi_4} \frac{1}{1 - \frac{2\beta \cos \psi}{3\sqrt{2-A}}}. \quad (2.14)$$

Для нижней части пластины, рассуждая аналогичным образом и используя условия  $|z| = h\chi_3$ ,  $\operatorname{sign} z = 1$ , получаем

$$\xi_0 = \frac{k}{2Gh\chi_3} \frac{1}{1 + \frac{2\beta \cos \psi}{3\sqrt{2-A}}}. \quad (2.15)$$

Теперь подставим полученные соотношения в выражения для моментов (2.6). Получаем

$$\begin{aligned} M_{r,\theta} = & \frac{kh^2}{3\sqrt{2-A}} (\cos \psi \mp F \sin \psi) \cdot \left( \frac{\chi_3^2}{1 + M \cos \psi} + \frac{\chi_4^2}{1 - M \cos \psi} \right) + \\ & + \frac{kh^2}{2\sqrt{2-A}} \frac{(\cos \omega \mp F \sin \omega) - M(1 - M \cos \omega)}{1 - M^2(1 - M \cos \omega)} (\chi_2^2 - \chi_3^2) - \\ & - \frac{kh^2}{2\sqrt{2-A}} \frac{(\cos \omega \mp F \sin \omega) + M(1 + M \cos \omega)}{1 - M^2(1 + M \cos \omega)} (\chi_4^2 - \chi_1^2), \end{aligned} \quad (2.16)$$

*можно  
пренебречь*

$$\text{где } M = \frac{2\beta}{3\sqrt{2-A}}, \quad F = \sqrt{\frac{2-A}{2+A}}.$$

Вспомним, что для пластины выполнены соотношения (1.5), подставим туда выражения (2.7) и приведем (1.5) к виду

$$\begin{cases} \chi_1 + \chi_2 = 2, \\ \frac{\chi_1 - \frac{1}{2}\chi_4}{1 - \beta/3} = \frac{\chi_2 - \frac{1}{2}\chi_3}{1 + \beta/3}. \end{cases} \quad (2.17)$$

Используя (2.17), выразим  $\chi_1$  и  $\chi_2$  через  $\chi_3$  и  $\chi_4$ , т.е.

$$\begin{cases} \chi_1 = 1 - \beta/3 - \frac{1}{4}\chi_3(1 - \beta/3) + \frac{1}{4}(1 + \beta/3), \\ \chi_2 = 1 + \beta/3 + \frac{1}{4}\chi_3(1 - \beta/3) - \frac{1}{4}(1 + \beta/3). \end{cases} \quad (2.18).$$

Подставим (2.18) в выражения для моментов (2.16), а затем полученные выражения в уравнения равновесия (2.3) и приведем уравнения равновесия к следующему виду, используя новую безразмерную переменную  $\rho$

$$A_0 \frac{d\chi_3}{d\rho} + A_1 \frac{d\chi_4}{d\rho} + A_2 \frac{d\omega}{d\rho} + A_3 = 0, \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2\rho}{3} \frac{\chi_3(\cos\psi - F \sin\psi)}{1 + M \cos\psi} + \frac{\rho \cos\omega(1 + M^2) - F \sin\omega - M}{2} \frac{1 - M^2 + M^3 \cos\omega}{1 - M^2 + M^3 \cos\omega} X_3 - \\ &\quad - \frac{\rho \cos\omega(1 + M^2) - F \sin\omega + M}{2} \frac{1 - M^2 - M^3 \cos\omega}{1 - M^2 - M^3 \cos\omega} X_1, \\ A_1 &= \frac{2\rho}{3} \frac{\chi_4(\cos\psi - F \sin\psi)}{1 - M \cos\psi} + \frac{\rho \cos\omega(1 + M^2) - F \sin\omega - M}{2} \frac{1 - M^2 + M^3 \cos\omega}{1 - M^2 + M^3 \cos\omega} X_4 - \\ &\quad - \frac{\rho \cos\omega(1 + M^2) - F \sin\omega + M}{2} \frac{1 - M^2 - M^3 \cos\omega}{1 - M^2 - M^3 \cos\omega} X_2, \\ A_2 &= \frac{B\rho}{3} \left( \frac{\chi_3^2}{(1 + M \cos\psi)^2} - \frac{\chi_4^2}{(1 - M \cos\psi)^2} \right) (\cos\psi - F \sin\psi) M \sin\psi - \\ &\quad - \frac{B\rho}{3} \left( \frac{\chi_3^2}{1 + M \cos\psi} + \frac{\chi_4^2}{1 - M \cos\psi} \right) (\sin\psi - F \cos\psi) - \\ &\quad - \frac{\rho}{2} (\chi_3^2 - \chi_4^2) \left( \frac{\sin\omega(1 + M^2) + F \cos\omega}{1 - M^2 + M^3 \cos\omega} - \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{\cos \omega(1 + M^2) - F \sin \omega - M}{(1 - M^2 + M^3 \cos \omega)^2} M^3 \sin \omega \Big) - \\
& - \frac{\rho}{2} (\chi_1^2 - \chi_4^2) \left( \frac{\sin \omega(1 + M^2) + F \cos \omega}{1 - M^2 - M^3 \cos \omega} + \right. \\
& \left. + \frac{\cos \omega(1 + M^2) - F \sin \omega + M}{(1 - M^2 - M^3 \cos \omega)^2} M^3 \sin \omega \right), \\
A_3 = & 2\rho^2 - \frac{2}{3} F \sin \psi \left( \frac{\chi_3^2}{1 + M \cos \psi} + \frac{\chi_4^2}{1 - M \cos \psi} \right) - \\
& - F \sin \omega \left( \frac{\chi_2^2 - \chi_3^2}{1 - M^2 + M^3 \cos \omega} + \frac{\chi_1^2 - \chi_4^2}{1 - M^2 - M^3 \cos \omega} \right), \\
\rho^2 = & \frac{p\sqrt{2-A}}{4kh^2} r^2,
\end{aligned}$$

$$X_1 = -\frac{1}{8}\chi_3(1 - \beta/3)^2 + \frac{1}{8}\chi_4(1 - \beta^2/9) + \frac{1}{2}(1 - \beta/3)^2,$$

$$X_2 = \frac{1}{8}\chi_3(1 - \beta^2/9) - \frac{1}{8}\chi_4(1 + \beta/3)^2 - \frac{1}{2}(1 - \beta^2/9) + 2\chi_4,$$

$$X_3 = \frac{1}{8}\chi_3(1 - \beta/3)^2 - \frac{1}{8}\chi_4(1 - \beta^2/9) + \frac{1}{2}(1 - \beta^2/9) - 2\chi_3,$$

$$X_4 = -\frac{1}{8}\chi_3(1 - \beta^2/9) + \frac{1}{8}\chi_4(1 + \beta/3)^2 - \frac{1}{2}(1 + \beta/3)^2.$$

Перейдем к выводу уравнения совместности деформаций. Вспомним, что для верхней части пластины выполняется

$$\left. \begin{array}{l} \xi_r \\ \xi_\theta \end{array} \right\} = \frac{\cos(\psi \pm \mu)}{\sqrt{2+A} \sin \mu_0} \frac{k}{2Gh\chi_4} \frac{1}{1 - M \cos \psi}, \quad (2.20)$$

а для нижней

$$\left. \begin{array}{l} \xi_r \\ \xi_\theta \end{array} \right\} = \frac{\cos(\psi \pm \mu)}{\sqrt{2+A} \sin \mu_0} \frac{k}{2Gh\chi_3} \frac{1}{1 + M \cos \psi}. \quad (2.21)$$

Подставим (2.20) и (2.21) в уравнение совместности, которое в данном случае распадается на два уравнения, а именно

$$A_4 \frac{d\chi_4}{d\rho} + A_5 \frac{d\omega}{d\rho} + A_6 = 0,$$

$$A_7 \frac{d\chi_3}{d\rho} + A_8 \frac{d\omega}{d\rho} + A_9 = 0, \quad (2.22)$$

где

$$A_4 = \rho \cos(\psi - \mu)(1 - M \cos \psi),$$

$$A_5 = \rho B \chi_4 (\sin(\psi - \mu) + M \cos \psi),$$

$$A_6 = -2\chi_4 \sin \psi \sin \mu (1 - M \cos \psi),$$

$$A_7 = \rho \cos(\psi - \mu)(1 + M \cos \psi),$$

$$A_8 = \rho B \chi_3 (\sin(\psi - \mu) - M \cos \psi),$$

$$A_9 = -2\chi_3 \sin \psi \sin \mu (1 + M \cos \psi).$$

$$M = \frac{2\beta}{3\sqrt{2-A}}$$

Если теперь объединить (2.19) и (2.22), то получаем систему дифференциальных уравнений, содержащую три уравнения и три неизвестные функции  $\chi_3(\rho)$ ,  $\chi_4(\rho)$  и  $\omega(\rho)$ . При  $A = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\chi_3 = \chi_4$  система совпадает с системой Соколовского [4], при  $A \neq 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\chi_3 = \chi_4$  с системой [3]. Система нелинейна и имеет особую точку  $\rho = 0$ . Полученная система может быть реализована численно.

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. О.Г.Рыбакина Критерий текучести анизотропного материала, обладающего эффектом SD. // Исследования по упругости и пластичности. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1982, N 14, с.132-142.
2. Druker D.C., Stockton F.D. Instrumentation and fundamental experiments in plasticity. // J. Proc. of the Soc. for Experim. Stress Analysis, 1953, v.10, N 2.
3. Г.В.Павилайнен. Исследование упругопластического изгиба трансверсально-изотропных круглых пластинок. // В кн. Проблемы теории трещин и механика разрушения.- Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1986, с.146-158.
4. В.В.Соколовский. Теория пластичности. М.1969, 608 с.
5. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. М., ИЛ, 1954, 647 с.