Буре В.М., Давыдова Е.А.
Санкт-Петербургский государственный университет

Теоретико-игровая модель системы обслуживания с тремя обслуживающими устройствами

В работе рассматривается модель оптимального поведения заявок в системе обслуживания с тремя устройствами. Задача подобного типа была изучена в работе [1].

Пусть система обслуживания состоит из трех обслуживающих устройств A_1, A_2, и A_3. Поступающие требования направляются в накопитель C_1, C_2, или в накопитель C_3. Все требования из накопителя C_i обслуживаются устройством A_i, $i = 1,2,3$. Устройства A_1 и A_2 обслуживают требования из накопителей C_1 и C_2 соответственно по очереди. Устройство A_3 обслуживает все требования из накопителя C_3 одновременно, после освобождения. Каждое требование стремится минимизировать время ожидания обслуживания, с этой целью оно может выбрать накопитель, в который поступит. Количества требований в накопителях C_1, C_2 известны. Количество требований в накопителе C_3 не имеет значения. Предположим, что требования поступают партиями, после чего распределяются по накопителям.

Длительности обслуживания требований устройствами A_1, A_2 и A_3 являются независимыми случайными величинами с экспоненциальными распределениями с параметрами λ_i, $i = 1,2,3$, соответственно. Предположим, что в некоторый момент времени в систему обслуживания поступает партия из n требований. На обслуживании в устройстве A_i и в накопителе C_i в этот момент находится k_i требований, i=1,2.

Пусть $p_i^{(1)}$ — вероятность того, что требование i выберет накопитель C_1, тогда требование i выберет накопитель C_2 с вероятностью $p_i^{(2)}$, а накопитель C_3 с вероятностью $p_i^{(3)}$, где $p_i^{(1)} + p_i^{(2)} + p_i^{(3)} = 1$. Пусть $P_r^{(j)}(l)$ — вероятность того, что в совокупности, содержащей l требований, r требований выберут накопитель C_j. Вероятность $P_r^{(j)}(l)$

определяется через вероятности $p_i^{(s)}$, $i=1,\ldots,n$, $s=1,2,3$. Время ожидания начала обслуживания τ_i требования i представляет собой случайную величину. Среднее время начала обслуживания $t_i\left(p_1^{(1)},\ldots,p_n^{(3)}\right)=E\tau_i$.

Сформулированная модель приводит к игре n лиц, в которой каждое требование является игроком, $h_i\left(p_1^{(1)},\ldots,p_n^{(3)}\right)=-t_i\left(p_1^{(1)},\ldots,p_n^{(3)}\right)$ — функция выигрыша игрока i, $p_i^{(s)}\in[0,1]$ — стратегия игрока i, $s=1,2,3$.

Учитывая свойства экспоненциального распределения [2], можно показать, что среднее время ожидания начала обслуживания i-ой заявки в первом устройстве рассчитывается по формуле:

$$t_{1i}=k_1\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1\sum_{m=1}^{n}(m-1)P_{m-1}^{(1)}(n-1)=k_1\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1\sum_{l=0}^{n-1}lP_l^{(1)}(n-1),$$

во втором: $t_{2i}=k_2\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2\sum_{r=1}^{n}(r-1)P_{r-1}^{(2)}(n-1)=k_2\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2\sum_{s=0}^{n-1}sP_s^{(2)}(n-1)$,

в третьем: $t_{3i}=\lambda_3$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Точкой равновесия $\left(p^{(1)},p^{(2,)}p^{(3)}\right)$ является:

1) (0, 1, 0), если выполняются неравенства: $k_2\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2(n-1)\le k_1\lambda_1$ и $k_2\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2(n-1)\le\lambda_3$;

2) (1, 0, 0), если: $k_1\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1(n-1)\le k_2\lambda_2$ и $k_1\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1(n-1)\le\lambda_3$;

3) (0, 0, 1), если: $\lambda_3\le k_1\lambda_1$ и $\lambda_3\le k_2\lambda_2$;

4) $\left(0,\ \dfrac{\lambda_3-k_2\lambda_2}{\frac{1}{2}\lambda_1(n-1)},\ 1-\dfrac{\lambda_3-k_2\lambda_2}{\frac{1}{2}\lambda_1(n-1)}\right)$, если: $k_2\lambda_2<\lambda_3<k_2\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2(n-1)$,

$k_2\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2(n-1)\le k_1\lambda_1$;

5) $\left(\frac{\lambda_3 - k_1\lambda_1}{\frac{1}{2}\lambda_1(n-1)}, 0, 1 - \frac{\lambda_3 - k_1\lambda_1}{\frac{1}{2}\lambda_1(n-1)}\right)$, если: $k_1\lambda_1 < \lambda_3 < k_1\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1(n-1)$,

$k_1\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1(n-1) \le k_2\lambda_2$;

6) $\left(\frac{k_2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2(n-1) - k_1\lambda_1}{\frac{1}{2}(n-1)(\lambda_1 + \lambda_2)}, 1 - \frac{k_2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2(n-1) - k_1\lambda_1}{\frac{1}{2}(n-1)(\lambda_1 + \lambda_2)}, 0\right)$, если:

$\left(k_2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2(n-1) \le \lambda_3 \text{ или } k_1\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1(n-1) \le \lambda_3\right)$,

$k_2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2(n-1) > k_1\lambda_1$, $k_1\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1(n-1) > k_2\lambda_2$;

7) $\left(\frac{\lambda_3 - k_1\lambda_1}{\frac{1}{2}\lambda_1(n-1)}, \frac{\lambda_3 - k_2\lambda_2}{\frac{1}{2}\lambda_2(n-1)}, 1 - \frac{\lambda_3 - k_1\lambda_1}{\frac{1}{2}\lambda_1(n-1)} - \frac{\lambda_3 - k_2\lambda_2}{\frac{1}{2}\lambda_2(n-1)}\right)$, если:

$k_1\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1(n-1) > \lambda_3$, $k_2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2(n-1) > \lambda_3$, $\lambda_3 > k_2\lambda_2$, $\lambda_3 > k_1\lambda_1$,

$k_2\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2(n-1) > k_1\lambda_1$, $k_1\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1(n-1) > k_2\lambda_2$.

Литература

1. Буре В.М. Теоретико-игровая модель одной системы массового обслуживания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Вып. 2 (№9), СПб., 2001.

2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т.2. М., 1998.

УДК 517.51:517.9:518.9

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *Г. С. Осипенко* (С.-Петерб. гос. политехн. ун-т), д-р физ.-мат. наук, проф. *В. Ф. Зайцев* (Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена)

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного университета

П84 **Процессы управления и устойчивость**: Труды 34-й научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, В. Н. Старкова. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003, 626 с.
ISBN 5-288-03264-5

В сборник включены работы студентов, аспирантов и сотрудников факультета прикладной математики – процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета и других высших учебных заведений по математической теории процессов управления, математическим методам в механике и физике, математическому моделированию в медико-биологических системах, технологиям программирования, теории управления социально-экономическими системами.

Все материалы докладывались на ежегодной 34-й научной конференции студентов и аспирантов факультета прикладной математики – процессов управления "Процессы управления и устойчивость" 21–24 апреля 2003 года.

Сборник предназначен для студентов старших курсов физико-математических факультетов, научных работников и аспирантов.

ISBN 5-288-03264-5