УДК 512.6, 512.7, 512.8 Вестник СПбГУ. Математика. Механика, Астрономия. 2023. Т. X (XX). Вып X
MSC 01, 08, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22

Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. I. Предыстория*

Н. А. Вавилов

С.-Петербургский государственный университет, Факультет Математики и Компьютерных Наук,
14-ая линия Васильевского острова, дом 29, Санкт-Петербург 199178, Россия

Для цитирования: *Вавилов Н. А.* Санкт-Петербургская школа теории линейных групп. I. Предыстория // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. X (XX). Вып. X. С. XX–XX. https://doi.org/XXXXXXXXX

Настоящий обзор описывает вклад петербургских математиков в теорию линейных, классических и алгебраических групп. Первая часть посвящена предыстории исследований по теории линейных групп в Петербурге, генезису петербургских алгебраических школ Тартаковского и Фаддеева и общей характеризации работ Боревича и Суслина середины 1975 годов, с которых начались систематические исследования в области теории классических групп и алгебраической K-теории в Петербурге.

Ключевые слова: линейные группы, классические группы, алгебриические группы, группы Шевалле, алгебраическая K-теория

Посвящается 100-летию моего учителя
Зенона Ивановича Боревича

В своей статье "У нас была великая эпоха" Алексей Николаевич Паршин сказал: "...главное, что было в советской математике — это **школы**. Школа это сообщество людей, которые занимаются одной областью науки, тесно общаются друг с другом, имеют лидера-учителя, одни поколения передают другим поколениям непрерывную эстафету и все это образует целостный организм" [42]. Алексей Николаевич писал это про Москву, но, разумеется, это *по крайней мере* в той же степени применимо к Санкт-Петербургу.

Генетически, алгебра в Петербурге возникла из теории чисел и довольно долго развивалась именно как *часть* теории чисел, *под огромным влиянием* теории чисел, или *для приложений* в теории чисел. Первыми собственно алгебраическими школами, возникшими в нашем Городе, были школа Тартаковского (которая, к *огромному* сожалению, не продолжилась) и школа Фаддеева, от которой и произошла основная часть сегодняшней петербургской алгебры.

Тем не менее, до второй половины 1970-х годов даже те из учеников Фаддеева, кто потом занимался чистой алгеброй, защищали докторские диссертации по тематике,

---

* Исследования, отраженные в дальнейших частях этого обзора, были поддержаны большим количеством грантов и проектов, среди которых следует особо упомянуть закончившиеся 1) проект РНФ 14-11-00335 "Разложение унипотентов в редуктивных группах", 2) проект РНФ "Расщепимые редуктивные группы над кольцами и близкие к ним" и текущие 3) проект фонда "Базис" 20-7-1-27-1 "Высшие символы в алгебраической K-теории", 4) проект РНФ 22-21-00257 "Алгебраические группы над кольцами и группы Стейнберга".

связанной с теорией чисел (алгебраическая теория чисел, теория Галуа, локальные поля, арифметическая алгебраическая геометрия, …) В конечном счете даже исследования по гомологической алгебре и теории целочисленных представлений были изначально мотивированы именно приложениями в алгебраической теории чисел (обратная задача теории Галуа, задача погружения и т.д.)[1].

Однако во второй половине 1970-х годов тематика школы *невероятно* расширилась, включив в себя новую на тот момент алгебраическую K-теорию, алгебраическую теорию квадратичных форм, теорию линейных групп — и, вскоре, теорию классических групп, теорию алгебраических групп — изначально групп Шевалле, потом и более общих классов редуктивных групп и групповых схем, причем как *классических* так и, в особенности, *исключительных* — конечные группы, комбинаторную теорию групп, алгебры Ли, и, в последние годы, теорию мотивов, теорию неассоциативных алгебр, теорию однородных пространств и так далее. Вплоть до того, что сегодня именно эти направления воспринимаются как точка силы петербургской алгебраической школы, где она занимает лидирующие позиции в мире.

Огромную роль в этом переходе сыграли два человека, Зенон Иванович Боревич и Андрей Александрович Суслин. В настоящем обзоре мы обсуждаем *ранние* работы Андрея Суслина, посвященные классической K-теории, работы Зенона Ивановича Боревича, посвященные описанию подгрупп в классических группах над кольцами, направление в структурной теории, которое возникло в результате совмещения двух этих крупных продвижений, и дальнейшие приложения в арифметической теории и геометрии алгебраических групп, теории конечных групп типа Ли, комбинаторной и асимптотической теории групп, которые явились следствием этого.

Ранние работы Андрея Суслина выпукло представлены в его обзорах того времени [50, 51, 52]. Обсуждению структурных теорем для групп Шевалле посвящен мой обзор [99], а для классических групп (в связи с работами Энтони Бака, но в более широком контексте) — наш совместный обзор с Рузби Хазратом [84]. Расположению подгрупп в классических группах и группах Шевалле посвящены мои обзоры [12, 13, 100], наш обзор с Лешей Степановым [16], и, с точки зрения абстрактной теории групп, обзор самого Боревича и Курта Розенбаума [70].

Однако все эти тексты упоминают огромное количество деталей, интересных только специалисту, требуют технические пререквизиты различной степени серьезности, содержат [слишком!] детальные библиографии. Цель настоящего текста совершенно в другом:

- Описать общий идейный и исторический контекст этого развития и дать возможность любому математику, независимо от специальности, ощутить дух этого направления и стилистику нескольких центральных результатов.

- Задокументировать state-of-the-art и привлечь внимание специалистов к нескольким ключевым моментам, которые *полностью* сохраняют свою актуальность. Многие *центральные* задачи теории, оставшиеся нерешенными тогда, находятся в том же состоянии и сегодня, спустя 40 лет[2].

---

[1] Вот спецкурсы, которые фигурируют в моем дипломе 1974 года: “Теория полей классов”, “Адели и алгебраические группы”, “Коммутативная алгебра”, “Теория Г-расширений”. Вот, для разнообразия, типичные названия спецкурсов по кафедре высшей алгебры и теории чисел, которые я слушал, но не сдавал: “Теория Галуа колец”, “Целочисленные представления”, “Модулярные формы”, “Квадратичные поля”, “Арифметическая теория квадратичных форм”, … Ясно, что это подготовка именно специалиста по алгебраической теории чисел, а не алгебраиста в каком-либо общем понимании.

[2] Например, результат Суслина и Туленбаева 1976 года [53] об инъективной стабилизации функ-

По техническим причинам обзор разбит на четыре части. Часть I общая, здесь мы обсуждаем предысторию и генезис нашей школы. Часть II посвящена пионерским работам Андрея Суслина и его учеников 1974–1982 годов по структурной теории классических групп над кольцами и их роли в формировании общего контекста этой области. В части III обсуждаются работы Зенона Ивановича Боревича и его учеников того же периода, посвященные расположению подгрупп в классических группах и близким вопросам. Наконец, в части IV совсем конспективно обрисовывается последующее развитие и формулируются *некоторые* наиболее яркие результаты в этой области полученные в Петербурге в последние десятилетия.

1. Предыстория. Разумеется, большинство вещей, не исключая и теорию линейных групп, существуют — или предсуществуют? — задолго до того как начинают восприниматься как отдельные сущности и получают имя: “what’s in a name? That which we call a rose by any other name would smell as sweet.”

3.1. Углы Эйлера. Слегка перефразируя знаменитый диктум, можно утверждать, что “except the blind forces of Nature, nothing moves in this world which is not suggested by Euler.” В любом случае, это верно по отношению к математике в Санкт-Петербурге.

Среди прочего, Леонарду Эйлеру (1707–1783) принадлежит множество результатов, которые *с современной точки зрения* относятся к линейным группам. Например **теорема Эйлера** о классах сопряженности компактной формы специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ и построенная им в 1776 году **факторизация** $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ как трех копий $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ — то, что механики, астрономы и авиаторы называют **углами Эйлера**, [78].

В авиации эти углы известны как **крен** = **roll** ψ, **тангаж** = **pitch** θ и **рыскание** = **yaw** φ и соответствуют возможности представить любой элемент $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ как произведение

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ 0 & -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}.$$

Впрочем, в астрономии и космонавтике предпочитают пользоваться факторизацией

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тем, что называется *классическими* углами Эйлера. Ясно, что с *математической* точки зрения это различие не имеет большого значения.

С топологической точки зрения группа $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ устроена как *трехмерное вещественное проективное пространство* $\mathbb{P}^3$. Разумеется, как алгебраисту мне гораздо приятнее иметь дело не с классической механикой, а с квантовой и, таким образом, не с самой этой группой, а с ее односвязной накрывающей $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$, которая топологически устроена как *трехмерная сфера* $\mathbb{S}^3$,

$$\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid z\overline{z}+w\overline{w}=1\} = \left\{ g=\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \,\middle|\, z,w\in\mathbb{C}, \det(g)=1 \right\},$$

тора K_2 не перенесен до сих пор в полном объеме *ни на одну другую группу*!

и которую естественнее всего истолковывать как мультипликативную группу кватернионов нормы 1. (Напомним, что в связи с задачей Диофанта о представлении натуральных чисел суммами четырех квадратов Эйлер определил умножение кватернионов еще в 1748 году, примерно за век до Гамильтона. Но реализацию кватернионов как комплексных 2×2 матриц все же предложил только Кэли в 1843 году.)

Параметризацию группы $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ в терминах [классических] углов Эйлера (φ, θ, ψ) можно теперь записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2) \\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix},$$

что и выглядит проще и эффективнее с вычислительной точки зрения. (Двойка в знаменателе введена для согласованности с определением углов Эйлера в классической механике и появляется из-за двулистности накрытия $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$.)

3.2. Решетка Коркина—Золотарёва. Одним из самых замечательных открытий Коркина—Золотарёва было построение ими в 1873 году (в связи с задачей Эрмита о минимумах квадратичных форм) решетки типа E_8 — плотнейшей решеточной упаковки шаров в 8-мерном пространстве, в которой каждого шара касаются 240 шаров того же диаметра [86] [3] и современное изложение в [41, 34] [4]. Любопытно, что спустя век это стало одной из центральных тем всей Петербургской алгебры. Уже в XX веке работы Коркина и Золотарёва были блистательно продолжены Борисом Борисовичем Венковым, [19] и т.д.

Существование экстремальной решетки такой плотности в размерности 8 было предсказано ирландским математиком Генри Смитом в 1867 году [95]. Много позже, уже в связи с построением полуправильных многогранников, она возникла у Торольда Госсета [82] и поэтому в англоязычной литературе часто называется **решеткой Госсета**. Апостериори, в интерпретации Гарольда Кокстера [75], решетка Коркина—Золотарёва, это в точности решетка **целых октав Кэли**, см. [34].

Сегодня E_8 разумеется, проще всего представлять себе как **решетку корней** = **решетку весов** $Q(\mathrm{E}_8) = P(\mathrm{E}_8)$ системы корней типа E_8, [11]. (Соответствующие решетки корней $Q(\mathrm{E}_6)$ и $Q(\mathrm{E}_7)$ в пространствах размерностей 6 и 7 не являются унимодулярными и имеют индекс 3 и 2, соответственно, в двойственных решетках весов $P(\mathrm{E}_6)$ и $P(\mathrm{E}_7)$).

Воспроизведем замечательную конструкцию этой решетки из книги Юрия Ивановича Манина [38]. Все коэффициенты здесь целые, поэтому эта реализация E_8 много удобнее для любых серьезных вычислений, чем обычная полуцелая реализация в терминах полуспиноров для D_8, см. [11].

Рассмотрим пространство Минковского $U = \mathbb{R}^{8,1}$, т.е. 9-мерное вещественное векторное пространство с невырожденным симметрическим скалярным произведением $(\ ,\ ) \colon U \times U \to \mathbb{R}$ сигнатуры $(8, 1)$. Зафиксируем в нем ортонормированный базис

---

[3] Русские переводы всех работ Коркина и Золотарёва можно найти в полном собрании сочинений Золотарёва [29], опубликованном в 1931–1932 годах под редакцией Б. А. Венкова, Я. В. Успенского и Н. Г. Чеботарёва, с комментариями Б. Н. Делоне, В. А. Тартаковского и Н. И. Ахиезера. Во втором томе воспроизведена также очаровательная переписка Коркина и Золотарёва, из которой видно, как возникали эти результаты. Кроме того, там содержится множество забавных бытовых, исторических и общекультурных наблюдений об условиях жизни ученых, интересных и сегодня: “Вы справедливо говорите, что в Берлине много мазуриков, даже в ресторанах обсчитывают”.

[4] Картинку взаимного расположения 120 из этих шаров, лежащих в положительном полупространстве, можно найти, например, в [93] или в моих работах [99, 14].

$e_0, e_1, \ldots, e_8$ такой, что

$$(e_0, e_0) = -1, \qquad (e_i, e_i) = 1, \quad \text{для всех} \quad 1 \leq i \leq 8.$$

Обозначим через $L \leq \mathbb{R}^{8,1}$ решетку, состоящую из всех векторов $v \in \mathbb{R}^{8,1}$, все координаты которых $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_8$ в разложении по базису $e_0, e_1, \ldots, e_8$ целые,

$$v = \lambda e_0 + \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_8 e_8, \qquad \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_8 \in \mathbb{Z}.$$

Тогда решетка Коркина—Золотарёва $Q(\mathrm{E}_8)$ — это восьмимерная решетка $L \cap V$, где V — гиперплоскость в U, определенная уравнением

$$3\lambda - (\mu_1 + \ldots + \mu_8) = 0$$

При этом сама система корней E_8 состоит из 240 векторов нормы 2 в $Q(\mathrm{E}_8)$.

Сами Коркин и Золотарёв [85, 87] доказали, что решетки D_4 и D_5 являются плотнейшими в размерностях 4 и 5. Только в 1934 году Блихфельд [69] доказал аналогичный результат для решеток E_6, E_7 и E_8 в пространствах размерностей 6, 7 и 8. Однако доказательства Блихфельда носили вычислительный характер и много деталей там было опущено. Позже Барнс [67] другим методом передоказал этот результат для E_6. Уотсон [102] анонсировал, что он перепроверил вычисления Блихфельда для E_7 и E_8, однако первое полное доказательство содержалось, насколько мне известно, в диссертации Ветчинкина [20]. В частности, решетка Коркина—Золотарёва является плотнейшей упаковкой шаров в 8-мерном пространстве среди *решеточных* упаковок.

Филдсовская медаль 2022 года была присуждена Марине Сергеевне Вязовской, в частности, за доказательство того, что решетка Коркина—Золотарёва E_8 является плотнейшей упаковкой шаров в 8-мерном пространстве — среди *всех* упаковок, а не только среди решеточных [101]. Увлекательный рассказ об этом результате в более широком контексте можно найти в статье Андрея Окунькова [92].

Исторически сложилось, что в одном байте восемь битов, поэтому решетка Коркина—Золотарёва E_8 и сегодня используется в кодировании и передаче информации, в том числе в большинстве модемов [72]. Если бы математические результаты патентовались, то сегодня, я думаю, royalties на это открытие превышали бы весь бюджет Санкт-Петербургского университета.

На мой вкус, выросшая из E_8 **октонионная математика**, связанная с исключительными группами [65, 81], являет гораздо более изысканную симметрию и, поэтому, более интересна, чем вся классическая **вещественная математика** (= ортогональная группа), **комплексная математика** (= унитарная группа) и **кватернионная математика** (= симплектическая группа), о которых, как о трех независимых искусствах, говорит Владимир Игоревич Арнольд [64][5].

3.3. Фёдоровские группы. Еще один полученный в Петербурге абсолютно классический результат, относящийся как к теории групп вообще, так и к теории линейных групп в особенности, это классификация кристаллографических групп в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$, завершенная в 1890–1891 годах Евграфом Степановичем Фёдоровым (1853–1919).

---

[5] “All mathematics is divided into three parts: cryptography (paid for by CIA, KGB and the like), hydrodynamics (supported by manufacturers of atomic submarines) and celestial mechanics (financed by military and by other institutions dealing with missiles, such as NASA.).”

С современной точки зрения **кристаллографическая группа**, это дискретная подгруппа группы эвклидовых движений

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} g & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, g \in O(n, \mathbb{R}),\ v \in \mathbb{R}^n \right\},$$

с ограниченной фундаментальной областью. Под $O(n, \mathbb{R})$ здесь понимается *компактная* форма ортогональной группы (сохраняющая положительно определенное скалярное произведение).

В случае $n = 3$ все 230 таких групп[6] были полностью перечислены Фёдоровым в 1890 году и Артуром Шёнфлисом в 1891 году. Поэтому кристаллографические группы в эвклидовых пространствах (в особенности в случае $n = 3$) часто называются также **фёдоровскими группами**.

Здесь нет, разумеется никакой возможности обсуждать ни предысторию этого замечательного результата, ни предыдущие работы самого Фёдорова, ни, наконец, драматическую борьбу за окончательное согласование списков Фёдорова и Шёнфлиса [57].

Что еще интереснее, первое доказательство того, что существует только 17 возможных кристаллографических групп на плоскости (= wallpaper groups) тоже впервые провел Фёдоров в 1891 году [56], причем как побочный продукт своей классификации в размерности 3. Хотя в огромном количестве источников этот результат *ошибочно* приписывется Дьердю Пойа [94], который лишь повторил его в 1924 году.

Забавно, что полное перечисление всех 4894 кристаллографических групп в $\mathbb{R}^4$ заняло после этого еще больше века, даже с использованием компьютера[7]. Ошибка в первоначальном списке [71] состояла именно в неправильном отождествлении энантиоморфных групп[8].

Разумеется, *сегодня* естественнее всего воспринимать классификацию фёдоровских групп не геометрически или алгебраически, а *топологически*, в терминах орбифолдов, получающихся склейками границы фундаментальной области: turnover, pillowcase,… — вот это все. Конечно, введенные Уильямом Терстоном орбифолдные обозначения не различают энантиоморфные пары, но они впервые объяснили, что здесь *на самом деле* происходит[9], см. [74, 73].

В 1920-е годы математической кристаллографией увлекся Делоне. Книга [24] была одним из первых изложений классификации фёдоровских групп с точки зрения математика, а не кристаллографа. Позже геометрическая кристаллография стала основным направлением его работы. Очевидна связь классификации кристаллографических групп с геометрией чисел и теорией целочисленных представлений, что объясняет интерес Фаддеева к этой теме [54]. Это еще один небесный мост от петербургских классиков XIX века к тому, чем наша алгебраическая школа занимается сегодня.

---

[6] Или 219, если мы отождествляем *энантиоморфные группы*, т.е. разрешаем менять ориентацию.

[7] Последовательность `https://oeis.org/A006227` доведена в настоящее время до $n = 5$, следующее значение 222097.

[8] Без сохранения ориентации кристаллографических групп в $\mathbb{R}^4$ должно быть 4783, см. [90]. Последовательность `https://oeis.org/A004029` доведена в настоящее время до $n = 6$, следующие значения 222018, 28927915.

[9] Джон Конвей рассказывал об этом на конференции по группам и геометриям в Брессаноне в 2004 году. У меня до сих пор сохранилась упаковка от пиццы, на которой он нарисовал 17 обойных групп в орбифолдных обозначениях и потом всю дорогу на свой доклад экзаменовал меня по ним. К сожалению, запомнить все 219 трехмерных Фёдоровских групп мне не удалось даже в этих обозначениях.

2. Генезис Петербургской алгебраической школы. Здесь мы совсем коротко обрисуем происхождение сегодняшней петербургской алгебраической школы.

2.1. Чебышёв. Генетически петербургская алгебраическая школа восходит к Пафнутию Львовичу Чебышёву (1821–1894), которому, в частности, принадлежат *выдающиеся* результаты в теории чисел. В 1847 году Чебышёв переехал в Петербург из Москвы и стал адъюнкт-профессором (доцентом) Санкт-Петербургского университета. В частности, именно он читал с 1847 года в нашем университете курс высшей алгебры. В 1856–1857 учебном году этот курс слушало три студента, из которых двое (Коркин и Авенариус) впоследствии сами стали профессорами Санкт-Петербургского Императорского Университета, а третий был уволен. Конспект Авенариуса был потом опубликован[10] [59].

2.2. Коркин и Золотарёв. Непосредственными учениками Чебышёва в Петербургском университете были, в частности, Александр Николаевич Коркин (1837–1908) и Егор Иванович Золотарёв (1847–1878), тоже весьма сильные и интересные математики, основные работы которых связаны с теорией чисел. К сожалению, Золотарёв погиб совсем молодым, попав под поезд[11]. С другой стороны, непосредственными учениками Коркина были, в частности Иван Иванович Иванов (1862—1939), Дмитрий Александрович Граве (1863–1939), Алексей Николаевич Крылов (1863–1945) и Николай Максимович Гюнтер (1871–1941).

Разумеется, здесь нет никакой необходимости обсуждать подробнее труды и дни этих великих людей, которые исчерпывающим образом отражены в литературе, достаточно сослаться на книгу Делоне [23], содержащую подробное описание их работ, и на пронзительные по своей откровенности автобиографические записки Граве [22].

Еще раз замечу, впрочем, что в техническом смысле все работы Петербургской школы (до возвращения в Петербург из Киева представителей школы Граве) вообще не учитывали ничего из того, что происходило в алгебре после Лагранжа и Гаусса. Вот с чего *начинает* свою статью по истории алгебры в Петербурге Фаддеев: “Общие тенденции развития алгебры во второй половине XIX и начале XX столетия мало коснулись деятельности петербургской математической школы. Ей были чужды теория групп и ее приложений к теории алгебраических уравнений,. . . теории функций и геометрии” [55].

2.3. Граве. Следующий *абсолютно* ключевой для нашей истории человек — это Дмитрий Александрович Граве, прямой ученик Коркина, который стал одним из первых в России чистых *алгебраистов*. От Граве пошли большинство основных работающих сегодня в России алгебраических школ. Дмитрий Александрович был выдающимся педагогом и автором чуть ли не 40 учебников для школ и университетов[12]. Заведомо неполная Математическая Генеалогия указывает 3659 научных потомков Граве, то есть его учеников, учеников его учеников и т.д.

В связи с финансовыми, бюрократическими и медицинскими причинами в 1897 году Дмитрий Александрович уехал на Украину и работал вначале в Харькове, а по-

---

[10] По инициативе А. Н. Крылова, который сам издал в том же 1936 году курс Чебышёва по теории вероятностей: “лекции, читанные в 1879-80 гг. по записи А. М. Ляпунова”.

[11] Студентам я обычно говорил, что это произошло во время его поездки на мат-мех в Петергоф. Но, на самом деле, все-таки при поездке на дачу в Царском Селе.

[12] Кстати, *весьма* продвинутых для того времени. Достаточно сказать, что его гимназический курс алгебры *начинался* с определения поля и комплексных чисел, а университетский курс — с теории Галуа!

том в Киеве, где фактически с нуля создал активную математическую школу, причем не только в области алгебры, но и в области геометрии и анализа[13].

Непосредственными учениками Граве были, *в частности*, Борис Николаевич Делоне (1890–1980), от которого пошли Петербургская алгебраическая и геометрическая школы, значительная часть Московской алгебраической школы (МИАН) и так далее, Отто Юльевич Шмидт (1891–1956), который породил еще одну важную компоненту Московской алгебраической школы (МГУ)[14], один из классиков Советской алгебры Николай Григорьевич Чеботарёв (1894–1947), Александр Маркович Островский (1893–1986) и другие замечательные математики.

2.4. Делоне. Следующая ключевая фигура — это Борис Николаевич Делоне (1890–1980). Борис Николаевич тоже легендарная личность, геометр, алгебраист, кристаллограф, знаменитый и успешный альпинист и т.д. Учениками Делоне были в частности, Владимир Абрамович Тартаковский (1900–1973), о котором мы сейчас поговорим чуть подробнее, основатель нашей алгебраической школы Дмитрий Константинович Фаддеев (1907–1989), знаменитый геометр, академик Александр Данилович Александров (1912–1999, в 1950-х и начале 1960-х годов ректор Ленинградского Университета), и основатель Московской школы алгебры, алгебраической геометрии и алгебраической теории чисел, академик Игорь Ростиславович Шафаревич (1923—2017).

2.5. Фаддеев. Центральная часть сегодняшней петербургской алгебры восходит к еще одному абсолютно легендарному математику, Дмитрию Константиновичу Фаддееву. Опять же, нет никакой необходимости обсуждать здесь вклад Д. К. в алгебраическую теорию чисел, алгебру и алгебраическую геометрию, все это прекрасно отражено в литературе [60, 62, 21].

Позволю себе одно замечание чуть в сторону, которое иллюстрирует класс этого человека. На конгрессе по научным вычислениям в Линце, узнав, что я происхожу из школы Фаддеева, Хенк ван дер Форст тут же заметил, что до сих пор в огромной части *практических* вычислений, связанных с задачами гидроаэродинамики[15], в которых приходится решать *большие* системы линейных уравнений — миллионы уравнений от миллионов неизвестных — используются методы, предложенные Д. К. в начале 1960-х годов, и что он сам писал соответствующие алгоритмы для Боинга и НАСА. Я тут же подумал, *насколько* мы ленивы и нелюбопытны — в любом другом университете красочные плакаты об этом висели бы на всех стенах, а я, научный внук Д. К., впервые узнаю об этом от голландского коллеги. И ведь это далеко не центральный предмет размышлений Д. К., а лишь одна из многочисленных побочных тем, которыми он интересовался. Ну, про royalties и то, окупает ли себя чистая математика, отдельный вопрос.

Непосредственными учениками Д. К. в Петербурге были, в частности, Дмитрий

---

[13] Вот как это комментирует Сергей Сергеевич Демидов: "Kiev University had very moderate mathematical achievements in the XIX century, but thanks to the endeavors of a remarkable representative of the St. Petersburg school D.A. Grave, who moved there in 1901, it sharply raised its mathematical level", [76]. Фаддеев в [55] характеризует киевскую школу Граве того периода как "блестящую".

[14] Впрочем, Александр Геннадьевич Курош (1908–1971) был учеником Павла Сергеевича Александрова, а Анатолий Иванович Мальцев (1909–1967) — учеником Андрея Николаевича Колмогорова, так что остальная часть советской алгебры восходит все-таки не к петербургской школе Чебышёва, а к московской школе теории функций.

[15] Полет самолета или ракеты, движение корабля, океанские течения, прогноз погоды, предсказание климата, и т.д.

Сергеевич Горшков (1916–1978), Зенон Иванович Боревич (1922–1995), Александр Иванович Скопин (1927–2003), Борис Борисович Венков (1934–2011), Марк Иванович Башмаков (1937–2022), Борис Бениаминович Лурье (1940–2020), Анатолий Владимирович Яковлев (1940–2022) и Владимир Ваганович Ишханов (??) — ну и, кроме того, конечно, много других математиков, которые потом работали в других городах.

Чингиз Айтматов констатировал "у собаки есть Хозяин, но у волка есть Бог", к чему Андрей Суслин добавил "а у человека есть Учитель". Несомненно, не только для непосредственных учеников, но и для моего поколения петербургских алгебраистов, а возможно и для следующего поколения, которое его застало, Д. К. и был Учителем именно в этом смысле.

2.6. Линия Маркова. Выше мы обсуждали только линию Коркина, в действительности еще несколько крупных теоретико-числовиков были учениками и учениками учеников Андрея Андреевича Маркова старшего (1856–1922). В первую очередь это непосредственные ученики самого Маркова Георгий Феодосьевич Вороной (1868–1908) и Яков Викторович Успенский (1883–1947).

В свою очередь учениками Успенского были, *в частности*, Иван Матвееевич Виноградов (1891–1983), Родион Осиевич Кузьмин (1891—1949) и Борис Алексеевич Венков (1900–1962). Впрочем, этот факт не слишком пропагандировался. Дело в том, что после эмиграции в США Успенский был в 1930 году исключен из состава РАН. Например, в книге Делоне [23] подробнейшим образом излагаются биографии Чебышёва, Коркина, Золотарёва, Маркова, Вороного, но при этом вообще не упоминается, кто был руководителем Виноградова[16]. Непросто найти и информацию о том, кто был руководителем Кузьмина.

3. Школа Тартаковского. Серьезные систематические исследования по теории групп в Петербурге начал Владимир Абрамович Тартаковский в 1930-е годы.

3.1. Тартаковский. Еще одним знаменитым учеником Делоне был Владимир Абрамович Тартаковский, который заведовал нашей кафедрой в предвоенные и первые послевоенные годы. И учениками которого, в свою очередь, были великий теоретико-числовик академик Юрий Владимирович Линник (1914–1972), основатель алгебраической школы в Педагогическом Институте Евгений Сергеевич Ляпин (1914–2005) и один из классиков теории групп Иван Николаевич Санов (1919–1968).

Тартаковский, насколько я могу судить, был весьма глубоким и разносторонним математиком, занимавшимся, в разные периоды своей жизни, теорией чисел, комбинаторной теорией групп, теорией дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрией и еще несколькими разделами математики.

Кстати, еще один выдающийся математик, который тесно взаимодействовал в те годы с Тартаковским по науке, это Андрей Андреевич Марков младший (1903—1979), занимавшийся в те годы топологической алгеброй и вопросами алгоритмической разрешимости задач комбинаторной теории групп и других алгебраических систем. Именно от него, через Николая Александровича Шанина (1919—2011), пошла, кроме логической школы, еще одна важная ветвь петербурских алгебраистов.

3.2. Школа комбинаторной теории групп. Вот что писали по поводу шко-

---

[16] Перси Диаконис и Сэнди Забелл пишут: "Despite his wide range of mathematical interests, Uspensky was first and foremost a number theorist. Of the five leading number theorists in Leningrad in the 1920s who did not leave Russia—Delone, Ivanov, Kuzmin, Venkov, and Vinogradov ([76], p. 89)—three were students of Uspensky" [77].

лы Тартаковского Линник, Ляпин и Якубович: “В начале тридцатых годов В. А. Тартаковский начал интересоваться теорией групп. Надо сказать, что в тот период в Ленинграде никто не только не вел исследовательской работы в этой важной отрасли алгебры, но даже никто не был достаточно полно осведомлен в ней. Это делало проникновение в глубины этой теории весьма непростым делом. Тем большей заслугой В. А. является то, что к концу тридцатых годов в Ленинграде под его руководством сформировалась целая группа молодых алгебраистов, не только хорошо осведомленных в этой теории, но и внесших свой вклад в ее развитие… Все ленинградские групповики: И. А. Грушко, Х. А. Донияхи, Е. С. Ляпин, И. Н. Санов, П. В. Стендер, Д. И. Фукс-Рабинович, Г. М. Хейсин и др. — ученики В. А. Тартаковского” [35].

Все эти молодые математики уже опубликовали к 1940–1941 годам первые существенные работы по комбинаторной теории групп (но также по теории конечных групп, теоретико-групповым конструкциям, абелевым группам,…). Снова процитирую Фаддеева: “В 1934/35 уч. г. В. А. Тартаковский организовал семинар по теории дискретных групп. Этот круг вопросов в Ленинграде ранее не разрабатывался. Семинар привлек много сильных участников и в скором времени дал ряд блестящих результатов, сравнимых с результатами значительно более “старого” московского семинара О. Ю. Шмидта—А. Г. Куроша”, [55].

К сожалению, золотому веку теории групп в Ленинграде не суждено было тогда реализоваться — Грушко, Фукс-Рабинович, Донияхи, Хейсин погибли во время войны и блокады:

- Игорь Александрович Грушко (1912–1941), младший лейтенант, командир взвода 270 отдельного зенитного артдивизиона. Пропал без вести осенью 1941 года.
- Давид Израилевич Фукс-Рабинович (1913–1942), младший лейтенант, умер в военном госпитале в Ленинграде весной 1942 года.
- Хаим Аронович Донияхи (1917–1941) младший лейтенант, командир взвода 574 отдельного зенитного артдивизиона 272-й стрелковой дивизии. Убит 14 августа 1941.
- Георгий Минеевич Хейсин (1918–1941) также погиб на фронте в первые месяцы войны.

Все быть могло иначе, но не было иначе. Единственным, кто после войны на какое-то время вернулся к исследованиям по теории групп, был Иван Николаевич Санов.

3.3. Санов. Иван Николаевич Санов (1919–1968) упоминается на сайте матобщества[17] как самый молодой на тот момент *двукратный* (вместе с Бениамином Львовичем Минцбергом) победитель Ленинградской математической олимпиады.

В 1935 году Санов поступил на математико-механический факультет, который окончил в 1940 г. После этого он один год проучился в аспирантуре, но с самого начала войны до демобилизации в 1946 (sic!) году находился в действующей армии в качестве командира взвода, а потом командира роты зенитного артиллерийского полка.

Санов работал на кафедре высшей алгебры и теории чисел с 1946 по 1952 год с перерывом на год. В 1953 году он "переехал на работу в Москву”, где был награжден орденом Ленина "За успешное решение ряда математических проблем прикладного характера".

В действительности все последующие годы он работал как криптограф в Комитете государственной безопасности. Интересно, что, насколько можно судить по отдель-

---

[17] `https://www.pdmi.ras.ru/~olymp/lmo_history_1.pdf`

ным замечаниям в [10], в криптографии он пользовался *вероятностными* соображениями, и самые цитируемые его работы относятся именно к теории вероятностей (большие уклонения случайных величин).

Основные работы Санова в области теории групп связаны с проблемой Бернсайда и здесь нет никакой возможности их обсуждать. Сформулируем поэтому его простой, но важный и изящный результат [44], который также можно отнести к предыстории нашей школы линейных групп.

Теорема Санова. *Подгруппа*

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

изоморфна свободной группе с двумя образующими F_2.

На самом деле Санов задает условие принадлежности матрицы этой группе в терминах сравнений: матрица $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ в том и только том случае принадлежит G, когда $b \equiv c \equiv 0 \pmod 2$ и $a \equiv d \equiv 1 \pmod 4$. (Часто эту теорему формулируют в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ вместо $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ заменяя при этом сами матрицы g на их классы $[g] = \{\pm g\}$, но в действительности, так как $2 \notin \mathbb{Z}^*$, это не имеет значения).

3.4. Школы Линника и Андрианова. В действительности с конца 1940-х до начала 1960-х Юрий Владимирович Линник создал в Ленинграде мощнейшую школу *аналитической* теории чисел, от которой, к сожалению, к настоящему времени именно в нашем Городе мало что осталось. Среди непосредственных учеников Линника того периода, работавших в ПОМИ, Александр Васильевич Малышев (1928–1993), Борис Фаддеевич Скубенко (1929–1993), Аскольд Иванович Виноградов (1929–2005), Олег Мстиславович Фоменко (1936–2017) и Анатолий Николаевич Андрианов (1936–2020). Кроме того, в 1962–1972 годах[18] в ПОМИ работал Николай Григорьевич Чудаков (1904–1986). Разумеется, все они прекрасно знали модулярные формы и группу $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, на что произойдет ссылка и в следующем параграфе.

Более того, в конце 1960-х годов Анатолий Николаевич начал активно интересоваться более общими классами автоморфных форм и именно в то время писал свои великие работы про $\mathrm{Sp}(2l, \mathbb{Z})$ и зигелевы модулярные формы [1]. Справедливости ради, он был первым, кто читал у нас в начале 1970-х годов спецкурсы по группам Ли, алгебраическим группам, арифметическим группам и автоморфным формам, и я тоже успел у него поучиться. Кроме Гены Малолеткина (1946–2007) его ученики в области зигелевых модулярных форм — Наташа Жарковская, Сережа Евдокимов (1950–2016), Владимир Калинин, Валера Гриценко — защищались примерно в те же годы, что первые аспиранты Боревича и Суслина по классическим группам и алгебраической K-теории. Это хотя и близкое, но все же отчетливо другое направление, связанное с теорией чисел, комплексным и гармоническим анализом, и рассказывать о нем здесь подробнее нет, разумеется, никакой возможности.

4. Как все начиналось: Боревич. Зенон Иванович занялся линейными группами в значительной степени случайно весной 1975 года. До этого его основные работы шли в русле интересов самого Д. К. и были посвящены алгебраической теории чисел, преимущественно локальным полям, и гомологической алгебре. В 1960-е годы, тоже под влиянием Д. К., Боревич занялся теорией целочисленных представлений. Очень

---

[18] Т. е. до смерти Линника, о чем я подробнее пишу в [15].

выпуклое описание этих ранних работ можно найти в [61]. Особо выделю [8], ставшую абсолютной классикой.

В 1964 году было опубликовано первое издание *великой*[19] книги Боревича—Шафаревича "Теория чисел" [9], которое было сразу переведено на английский, немецкий и французский (а потом и на много других языков и выдержало два радикально обновленных переиздания в 1972 и в 1985 годах). В 1965 году вышли основные работы Боревича о строении мультипликативной группы локального поля как модуля Галуа, составившие в 1967 содержание его докторской диссертации.

После этого Зенон Иванович стал заместителем декана, а потом и деканом матмеха, и лет пять практически ничего не публиковал (его совместные работы с аспирантами, Востоковым и Али Мусой, были фактически прямым продолжением работ середины 1960-х годов). Когда я начинал с ним работать, зимой 1974/75 годов, З. И.[20] уже довольно долго находился в активном поиске. Первоначально он планировал переключаться на теорию Галуа колец, но именно в то время больше всего интересовался теорией квадратичных и эрмитовых форм.

В 1975 году З. И. выступал оппонентом по докторской диссертации львовского математика Петра Степановича Казимирского, посвященной факторизации **матричных многочленов** [30]. Защита состоялась в Киеве весной 1975 года, но сама диссертация датирована 1974 годом и, если мне не изменяет память, З. И. начал активно интересоваться матричными факторизациями не позже зимы 1974 года.

К этому был и еще один стимул. Дело в том, что факторизации **полиномиальных матриц**[21] вовсю возникали тогда в связи с задачами теории управления и дифференциальных игр. Владимир Андреевич Якубович и сам опубликовал в те годы несколько работ в таком духе и предложил это в качестве темы своему ученику Борису Дмитриевичу Любачевскому, см., в частности, [63, 36]. Собственно, первая задача, которую мне ставил З. И. в январе 1975 года, как раз и состояла в том, чтобы обобщить результаты Любачевского и применить их к теории квадратичных форм над кольцами многочленов.

В диссертации Казимирского содержались ссылки на книгу Морриса Ньюмена "Integral matrices" [91]. З. И., который ко всему относился с исключительной добросовестностью и вникал во все детали, взял у Александра Васильевича Малышева эту книгу и стал, руководствуясь методом бесконечного спуска, смотреть цитировавшиеся там работы. В частности, работы самого Ньюмена, Свифта и Райнера о подгруппах в $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, заданных сравнениями на матричные элементы.

Дальше все происходило очень быстро и как-то само собой. З. И. заметил, что можно определять группы сравнениями не по одному идеалу, а по системе согласованных идеалов, то что он назвал **сетью идеалов**. Потом тут же, что **разложение Гаусса** обобщается с полей на полулокальные кольца[22]. Это сразу дало ему возможность

---

[19] Потом, когда я начал много общаться с коллегами из разных стран, я обнаружил, что Боревича знали все, не только алгебраисты и числовики, а вообще все, причем в первую очередь именно как автора этой книги.

[20] Тут я немного отступаю от исторической правды. В отличие от Д. К., которого все так и называли "Д. К." ("Д. К. так бы не поступил"), Зенона Ивановича в те годы сотрудники его кафедры называли за глаза не "З. И.", просто "Зенон". Однако эта форма кажется мне неуместной для публичного употребления, а полное написание "Зенон Иванович" — слишком длинным.

[21] Но, конечно, для алгебраиста $M(n, K[t]) = M(n, K)[t]$. На самом деле в теории оптимального управления важны "квазиполиномиальные" матрицы, т.е. матрицы с коэффициентами в кольце **многочленов Лорана** $M(n, K[t, t^{-1}])$.

[22] Разные авторы называют разложением Гаусса три–четыре абсолютно разные вещи, обычно,

обобщить **теорему Титса** об описании надгрупп группы B верхних треугольных матриц в $\mathrm{GL}(n, R)$ и $\mathrm{SL}(n, R)$ с полей на полулокальные кольца [3, 4].

После этого я заметил, что примерно в таком же духе можно описать надгруппы группы D диагональных матриц, но смог доказать это только для группы $\mathrm{GL}(2, R)$. З. И. придумал свой замечательный трюк **извлечения трансвекций** при помощи псевдоотражений [5], используя который смог описать надгруппы D в $\mathrm{GL}(n, K)$ для поля K, $|K| \geq 7$. За несколько месяцев мы смогли доказать такой же результат и в общем случае [6].

Еще через пару лет я заметил, что такой же трюк извлечения трансвекций можно реализовать при помощи унипотентных, а не полупростых элементов. При этом не нужно требовать наличия в кольце большого количества обратимых элементов, достаточно иметь нетривиальные линейные зависимости, как, например, $ab - ba = 0$ для коммутативных колец. Это позволило получить описание важных классов подгрупп в $\mathrm{GL}(n, R)$ не над полулокальными а над *произвольными* коммутативными кольцами [7] (и, в действительности, дальнейшими классами колец).

Созданная в этих работах технология (вычисление уровня, извлечение трансвекций, включение в нормализатор и т.д.) была в дальнейшем использована, по *самой* консервативной оценке, во *многих* десятках работ. Мы расскажем о некоторых основных идеях в третьей части настоящего обзора.

В 1975 году, когда были написаны и/или задуманы наши первые основные работы, мы не знали о линейных группах практически ничего. В этом смысле мне чрезвычайно повезло. Обычно, или по крайней мере довольно часто, руководитель занимается какой-то темой несколько десятилетий и у ученика долгое время нет никаких шансов работать с ним на равных. Здесь же мы учили все это одновременно, книги [68, 25, 40, 47] были тогда совсем свежими[23]

Кроме того, что было упомянуто выше, нам были известны буквально две работы — статья Жака Титса [98] о параболических подгруппах и статья Хаймана Басса [68] о нормальных делителях $\mathrm{GL}(n, R)$. Что кстати, сыграло нам на руку. Если бы в тот момент мы знали *что-то* об алгебраических группах, то считали бы, что нужно начинать с группы $\mathrm{SL}(2, K)$. В действительности этот случай оказался с *огромным* отрывом самым трудным из всех и был рассмотрен последним. Собственно, именно это объясняет, почему результаты работы [5] не были доказаны специалистами за несколько десятилетий до этого.

Если говорить непосредственно о группах, определенных сравнениями, то работа Юрия Ивановича Мерзлякова [39] не была нам известна, а в книгу [31] “ковры” попали позже, уже после работ З. И. Сыгравшая впоследствии большую роль работа Николая Семеновича Романовского [43] тоже стала нам известна уже после того, как З. И. определил “сети идеалов” в общем случае.

Конечно, мы тогда сразу начали детально обсуждать весь этот круг идей с коллегами, в первую очередь из Москвы и Минска, которые были на тот момент гораздо

пользуясь жаргоном вычислительной линейной алгебры, $G = \overline{LU}$ или $G = LUP$, но здесь имеется в виду $G = ULU$.

[23] Через пару лет после этого, в 1977, кажется, году, Д. К., которому тогда только что исполнилось 70 лет, устроил семинар по группам Шевалле, где мы читали тоже совсем свежие тогда [45, 46]. На меня произвело огромное впечатление, с каким энтузиазмом он разбирал вместе с аспирантами все технические детали построения целочисленных базисов в универсальных обертывающих алгебрах и представлениях. Ровно в это время произошел квантовый переход от состояния, когда классификацию простых алгебр Ли в Петербурге не понимал практически никто, к состоянию, когда она внезапно стала общим знанием, которым владели все.

лучше осведомлены о состоянии теории линейных и классических групп. Отдельно нужно с благодарностью вспомнить Александра Васильевича Михалёва (1940–2022), ученики которого, в первую очередь Игорь Голубчик, работали над близкими задачами.

Еще один человек, который сразу оценил важность работ Андрея Суслина, наших результатов, и начал их пропагандировать, это Александр Ефимович Залесский. Его обзоры [26, 27, 28] сыграли тогда огромную роль.

5. Как все начиналось: Суслин. Андрей Александрович Суслин (1950–2018) тоже занялся линейными группами в 1973–1975 годах, но уже совершенно не случайно. Дело в том, что для своего диплома он выбрал проблему Серра о проективных модулях над кольцами многочленов[24]. Но, как известно, изучение алгебраических объектов теснейшим образом связано с изучением их групп автоморфизмов, а $\mathrm{GL}(n,R)$ как раз и является группой автоморфизмов свободного [правого] модуля R^n ранга n. И действительно, проблема Серра допускает элементарную переформулировку в терминах дополняемости унимодулярных строк до обратимой матрицы, см. [89].

Инженеры и большинство математиков-неспециалистов работают с матрицами над *классическими* полями такими, как $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{F}_q$. Но алгебраисты всегда знали, что все результаты (в том числе и те, которые *якобы* носят топологический характер) правильно формулировать над *произвольными* полями. Уже довольно давно в связи с потребностями теории чисел было замечено, что многие из них обобщаются на *маломерные* кольца, такие как локальные или дедекиндовы.

С работы Хаймана Басса [68] началась первая революция общности, когда выяснилось, что огромная часть[25] структурных результатов о группе $\mathrm{GL}(n,R)$ в действительности верны [в подходящей формулировке] для произвольных *конечномерных* колец, по крайней мере когда n достаточно велико по сравнению с размерностью R. Собственно говоря, алгебраическая K-теория это и есть современная инкарнация линейной алгебры, при этом значения K-функторов измеряют отклонение ответов от классических.

В 1970-е годы началась следующая такая революция (не завершенная и сегодня!), в ходе которой обнаружилось, что основная часть структурных результатов[26] не зависит и от конечномерности основного кольца, а сохраняется для произвольного *коммутативного* кольца, по крайней мере при $n \geq 3$ или $n \geq 4$.

Предвестником этой революции послужили работы Джона Уилсона и Игоря Голубчика о нормальном строении группы $\mathrm{GL}(n,R)$. Но полное осознание пришло в 1976–1977 годах, после работ Суслина. Даже после теоремы Уилсона—Голубчика полным шоком для всех была **теорема нормальности** Суслина утверждающая, что при

---

[24] Саша Меркурьев [80] вспоминает, как это произошло. Дело в том, что до этого Андрей пытался доказать несуществование конечных **проективных плоскостей** порядка 10, но это у него сразу не получилось — и, кстати, еще довольно долго не получалось ни у кого даже с использованием компьютера [88]. Тогда Андрей решил доказать несуществование нетривиальных **проективных модулей** конечного ранга. Насколько я помню, Андрей, который был тогда учеником Марка Ивановича Башмакова, узнал о проблеме Серра из лекций Юрия Ивановича Манина [37].

[25] Речь здесь идет об общих структурных теоремах *качественного* характера. Есть много явных классификаций и оценок, которые вообще невозможно сдвинуть никуда с класса полей, этот вопрос подробно обсуждается в [17]. Так, например, задача описания классов сопряженности в $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ — и даже $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ — является **дикой**, т.е включает в себя задачу о **паре матриц**. Иными словами, не существует и не может существовать никакого целочисленного аналога жордановой формы. Недавно выяснилось, что и многие теоремы конечности не обобщаются за пределы нульмерных и *некоторых* одномерных колец, но это, конечно, уже не так удивительно.

[26] Ну, конечно, снова кроме явных изоморфизмов и теорем стабилизации.

$n \geq 3$ элементарная группа $E(n, R)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n, R)$ для *произвольного* коммутативного кольца R. Иными словами, $E(n, R)$ не зависит от выбора базиса.

Почти сразу после этого Александр Васильевич Михалёв и Игорь Голубчик — и независимо от них Ефим Зельманов — доказали стандартность автоморфизмов в общем случае. Вильберд ван дер Каллен и ученик Андрея Марат Туленбаев доказали центральность линейного K_2. Сам Андрей вместе с другим своим учеником Славой Копейко начал перенос структурных теорем на другие классические группы.

Эти работы запустили то, что Бернард МакДональд окрестил "русской революцией" в теории линейных групп над кольцами, когда несколько лет математики из Петербурга, Москвы и Новосибирска — ну, плюс приравненные к ним Леонид Васерштейн и Вильберд ван дер Каллен[27] — соревновались только между собой в смысле общности результатов [83].

Наследие Андрея столь удивительно, монументально и разнообразно, что в своей статье о его математике [79] Эрик Фридландер и Саша Меркурьев переходят сразу от K_0 к K_2, минуя K_1 и вообще не упоминая его статью [48]. Между тем, работа Андрея [48] является, вне всякого сомнения, одной из трех–пяти самых важных работ о линейных группах над кольцами за всю историю этой области.

В этой работе Андрей впервые применил то, что сегодня известно как **метод Квиллена—Суслина**, на уровне K_1, т.е. непосредственно для изучения $\mathrm{GL}(n, R)$ сведением к локальному случаю. В дальнейшем этот метод был использован [со ссылками и без], снова по *самой* консервативной оценке, во многих *сотнях* работ.

Сегодня в нашем распоряжении имеются более мощные варианты локализации такие, как метод **локализации-пополнения** Бака [66] и метод **универсальной локализации** Степанова [96], позволяющие доказать вещи, которые не получались с использованием исходного метода. Ясно, однако, что они могли возникнуть только в мире, который создал нам Андрей.

Кстати, и геометрические методы структурной теории такие, как метод **разложения унипотентов** [97], тоже возникли в результате обдумывания работ Андрея. Не говоря о большом количестве совершенно удивительных изобретений и трюков, придуманных им в то время, таких как **матрицы Суслина**, [49][28]. В следующей части обзора[29] я как раз и планирую сформулировать несколько наиболее ярких и неожиданных результатов Суслина и его школы того времени и дать общее представление об их контексте и основных идеях.

Вот что пишет Саша Меркурьев: "Andrei's impact on mathematicians has been tremendous, not only on his own graduate students but on many others fortunate to be around him", [80]. Я готов полностью подтвердить обе части этого высказывания, и в том, что касается влияния, и в том, что близкое общение с математиком такой силы воспринималось как счастье. Его интуиция и понимание математики были гениальны, а техническая мощь подавляюща[30]. Но вспоминая общение с ним сего-

---

[27] Которые оба тесно сотрудничали с Андреем, [18].

[28] Сегодня я понимаю, как такую вещь можно было *придумать* и более-менее понимаю даже, как такого рода вычисление можно было довести до конца. Но я по-прежнему не могу представить, чтобы кто-то, кроме Андрея, мог это сделать на 3–4 страницах!

[29] Которая имеет практически нулевое пересечение с [79]!

[30] При этом он никогда не демонстрировал свое превосходство. В качестве анекдота упомяну, что в [48] передоказывается **разложение Брюа**. С его пониманием математической реальности и техническим мастерством Андрею просто не нужно было знать такие мелочи. Но молодым не обязательно брать с него пример в этом.

дня, я думаю, что главными компонентами его силы были *увлеченность*[31] и умение полностью сконцентрироваться на задаче. Не говори с тоской: *их нет*; Но с благодарностию: *были*.

Литература

[1] Андрианов А. Н. Эйлеровы произведения, отвечающие модулярным формам Зигеля рода 2, *Успехи Мат. Наук* **29**, no. 3, 43–110 (1974).

[2] Басс Х. *Алгебраическая K-теория* Издательство: Москва, Мир (1973).

[3] Боревич З. И. О параболических подгруппах в линейных группах над полулокальным кольцом, *Вестн. ЛГУ*, no. 13, 16–24 (1976).

[4] Боревич З. И. О параболических подгруппах в специальной линейной группе над полулокальным кольцом, *Вестн. ЛГУ*, no. 19, 29–34 (1976).

[5] Боревич З. И. Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц, *Зап. научн. семин. ЛОМИ* **64**, 12–29 (1976).

[6] Боревич З. И., Вавилов Н. А. Подгруппы полной линейной группы над полулокальным кольцом, содержащие группу диагональных матриц, *Тр. Мат. ин-та АН СССР* **148**, 43–57 (1978).

[7] Боревич З. И., Вавилов Н. А. Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом, *Тр. Мат. ин-та АН СССР* **165**, 24–42 (1984).

[8] Боревич З. И., Фаддеев Д. К. Теория гомологий в группах. *Вестник ЛГУ*, I. **11**, no 7, 3–39 (1956); II. **14**, no. 7, 72–87 (1959).

[9] Боревич З. И., Шафаревич И. Р. *Теория чисел.* Москва, Наука. 3-е изд. (1985).

[10] Боровков А. А., Голованов П. Н., Козлов В. Я., Кострикин А. И., Линник Ю. В., Новиков П. С., Фаддеев Д. К., Ченцов Н. Н. Иван Николаевич Санов (некролог), *Успехи Мат. Наук* **24**, no. 4, 177–179 (1969).

[11] Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли. Гл.* IV–VI. *Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней.* Москва, Мир (1972).

[12] Вавилов Н. А. О подгруппах расщепимых классических групп, *Тр. Мат. ин-та АН СССР* **183**, 29–41 (1990).

[13] Вавилов Н. А. Подгруппы групп Шевалле, содержащие максимальный тор, *Тр. Ленингр. Мат. Об-ва* **1**, 64–109 (1990).

[14] Вавилов Н. А. Как увидеть знаки структурных констант? *Алгебра и анализ* **19**, no. 4, 34–68 (2007).

[15] Вавилов Н. А. Компьютер как новая реальность математики: IV. Гипотеза Гольдбаха. *Компьютерные инструменты в Образовании* no. 4, 5–72 (2021).

[16] Вавилов Н. А., Степанов А. В. Надгруппы полупростых групп, *Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер.* no. 3, 51–95 (2008).

[17] Вавилов Н. А., Степанов А. В. Линейные группы над общими кольцами I. Общие места, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **394**, 33–139 (2011).

[18] Васерштейн Л. Н., Суслин А. А. Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая K-теория, *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **40**, no. 5, 993–1054, (1976).

[19] Венков Б. Б. О классификации целочисленных четных унимодулярных 24-мерных квадратичных форм, *Тр. Мат. ин-та АН СССР* **148**, 65–76 (1978).

---

[31] Ваня Панин напомнил мне, что в 1978–1979 учебном году Андрей читал *пять* спецкурсов: “Алгебраическая геометрия”, “Гомологическая алгебра”, “Топологии Гротендика”, “Конструкции Квиллена высшей K-теории”, “Вычисление K-теории конечных полей”, а в 1979–1980 учебном году — всего два спецкурса: “Теорема Римана–Роха–Хирцебруха в форме Гротендика” и “Этальные когомологии”, но зато вел три спецсеминара: “Абелевы многообразия”, “Алгебраические поверхности” и “Двойственность Серра”. Это и к вопросу о влиянии и к вопросу об увлеченности и в пандан к первому примечанию, как иллюстрация изменения содержания алгебраического образования в СПбГУ между началом и концом 1970-х годов.

[20] Ветчинкин Н. М. Единственность классов положительных квадратичных форм, на которых достигаются значения постоянных Эрмита при $6 \leq n \leq 8$, *Тр. Мат. ин-та АН СССР* **152**, 34–86 (1980).

[21] Востоков С. В., Шафаревич И. Р. Гармония в Алгебре (к столетию со дня рождения члена-корреспондента АН СССР Дмитрия Константиновича Фаддеева), *Владикавк. матем. журн.*, **10**, no 1, 3–9 (2008).

[22] Граве Д. А. Автобиографические записки [Публикация А. Н. Боголюбова], *Историко-математические исследования* **34**, 219–246 (1993).

[23] Делоне Б. Н., *Петербургская школа теории чисел*, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947.

[24] Делоне Б. Н., Падуров Н. Н., Александров А. Д. *Математические основы структурного анализа кристаллов и определение основного параллелепипеда повторяемости при помощи рентгеновских лучей*, Ленинград–Москва, ОНТИ–ГТТИ (1934).

[25] Дьёдонне Ж. *Геометрия классических групп.* Москва, Мир, (1974).

[26] Залесский А. Е. Линейные группы, *Успехи Мат. Наук* **36**, no. 5, 57–107 (1981).

[27] Залесский А. Е. Линейные группы, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.* **21**, 135–182 (1983).

[28] Залесский А. Е. Линейные группы, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления* 37, 114–228 (1989).

[29] Золотарёв Е. И. *Полное собрание сочинений.* Ленинград, Изд-во АН СССР, вып. 1 (1931), вып. 2 (1932).

[30] Казимирский П. С. *Разложение матричных многочленов на множители.* Докт. диссертация, Львов, 1–289 (1974).

[31] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. *Основы теории групп*, 3-е изд. Москва, Наука (1982).

[32] Конвей Дж. *Квадратичные формы, данные нам в ощущениях*, Москва, МЦНМО (2008).

[33] Конвей Дж., Слоэн Н. *Упаковки шаров, решетки и группы.* Том 1–2, Москва, Мир (1990).

[34] Конвей Дж., Смит Д. *О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях*, Москва, МЦНМО (2009).

[35] Линник Ю. В., Ляпин Е. С., Якубович В. А. Владимир Абрамович Тартаковский (к шестидесятилетию со дня рождения), *Успехи Мат. Наук* **16**, no. 5, 225–230 (1961).

[36] Любачевский Б. Д. Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. *Сиб. матем. журн.* I **14**, no. 2, 337–356 (1973); II, **14**, no. 3, 609–623 (1973).

[37] Манин Ю. И. *Лекции по алгебраической геометрии.* I. *Аффинные схемы.* Изд-во Моск. Ун-та (1970).

[38] Манин Ю. И. *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика.* Москва, Наука (1972).

[39] Мерзляков Ю. И. Центральные ряды и ряды коммутантов матричных групп, *Алгебра и Логика* **3**, no. 4, 49–53 (1964).

[40] Милнор Дж. *Введение в алгебраическую K-теорию.* Москва, Мир, (1974).

[41] Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. *Симметрические билинейные формы.* Москва, Мир, (1986).

[42] Паршин А. Н. Математика в Москве: у нас была великая эпоха, *Историко-математические исследования* **49**, 11–25 (2011).

[43] Романовский Н. С. О подгруппах общей и специальной линейных группах над кольцом, *Мат. Заметки* **9**, no. 6, 699–708 (1971).

[44] Санов И. Н. Свойство одного представления свободной группы, *Докл. АН СССР* **57**, no. 7, 657–659 (1947).

[45] *Семинар по алгебраическим группам* Москва, Мир, (1973).

[46] Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле.* Москва, Мир, (1975).

[47] Супруненко Д. А. *Группы матриц*, Москва, Наука (1973).

[48] Суслин А. А. О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**, no. 2, 235–252 (1977).

[49] Суслин А. А. О стабильно свободных модулях, *Матем. сб.* **102** no. 4, 537–550 (1977).

[50] Суслин А. А. Алгебраическая K-теория, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.* **20**, 71–152 (1982).

[51] Суслин А. А. Алгебраическая K-теория (в МИАНе), *Тр. Мат. ин-та АН СССР* **168**, 155–170 (1984).

[52] Суслин А. А. Алгебраическая K-теория и гомоморфизм норменного вычета, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.* **25**, 115–207 (1984).

[53] Суслин А. А., Туленбаев М. С. Теорема о стабилизации для K_2-функтора Милнора, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **64**, 131–152, (1976).

[54] Фаддеев Д. К. Таблицы основных унитарных представлений Фёдоровских групп, *Тр. Мат. ин-та АН СССР* **56**, 3–174 (1961).

[55] Фаддеев Д. К. Алгебра и теория чисел. В кн. *Математика в Петербургском-Ленинградском университете.* Изд-во Ленингр. ун-та, 7–36 (1970).

[56] Фёдоров Е. С. Симметрия на плоскости. *Записки Импер. Санкт-Петербургского Минералог. Об-ва* **28**, 345—390 (1891).

[57] Фёдоров Е. С. *Симметрия и структура кристаллов. Основные работы.* Редакция А. В. Шубникова и И. И. Шафрановского. Москва, Издательство Академии Наук СССР, (1949).

[58] Фёдоров Е. С. *Правильное деление плоскости и пространства.* (Классики науки). Пер. с нем. А. В. Нардовой, подготовка и ред. Б. Н. Делоне. В. А. Франк-Каменецкий, И. И. Шафрановский, К. П. Янулов. Ленинград: Наука. Ленингр. отд-ние, (1979).

[59] Чебышёв П. Л. *Высшая алгебра. Лекции* 1856–1857 *гг. по записям М. П. Авенариуса и неизвестного слушателя.* Редакция записок и дополнения проф. М. К. Куренского. Москва–Ленинград, Изд-во АН СССР (1936).

[60] Шафаревич И. Р. Дмитрий Костантинович Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **2**, no. 6, 3–9 (1990).

[61] Яковлев А. В. Зенон Иванович Боревич, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **236**, 9–12 (1997).

[62] Яковлев А. В. Д. К. Фаддеев и Петербургская алгебраическая школа. *Вестник СПбГУ, Сер. мат., мех., астр.*, no. 1, 1–4 (2008).

[63] Якубович В. А. Факторизация симметричных матричных многочленов, Докл. АН СССР, **194**, no. 3, 532–535 (1970).

[64] Arnold V. I. Polymathematics, is Mathematics a single Science or a set of Arts? 1–15 (2000).

[65] Baez J. C. The octonions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, no. 2, 145–205 (2002).

[66] Bak A. Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability. *K-Theory* **4**, no. 4, 363–397 (1991).

[67] Barnes E. S. The complete enumeration of extreme senary forms. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **249**, 461–506 (1957).

[68] Bass H. K-theory and stable algebra. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **22**, 489–544 (1964).

[69] Blichfeldt H. F. The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables. *Math. Z.* **39**, 1–15 (1934–1935).

[70] Borewicz Z. I., Rosenbaum K. Zwischengruppenverbände, *Sitzungber. Akad. gemein. Wiss. Erfurt, Math.–Natur. Kl.* no. 11, 1–80 (2001).

[71] Brown H., Bülow R., Neubüser J., Wondratschek H., Zassenhaus H. *Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space.* New York, Wiley and Sons. (1978).

[72] Calderbank A. R. The mathematics of modems. *Math. Intell.* **13**, no. 3, 56–65 (1991).

[73] Conway J. H., Burgiel H., Goodman-Strauss Ch. *The symmetries of things.* Wellesley, MA: A. K. Peters (2008).

[74] Conway J., Doyle P., Gilman J., Thurston B. *Geometry and the imagination.* `https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/gi/gi.pdf`, 1–68 (2010)

[75] Coxeter H. S. M., Integral Cayley numbers, *Duke Math. J.* **13**, 561–578 (1946).

[76] Demidov S. S. World War I and mathematics in “the Russian world”. *Czasopismo Techniczne* **112**, 77–92 (2015).

[77] Diaconis P., Zabell S. In praise (and search) of J. V. Uspensky. arXiv:2201.13417v1[math.HO] 31 Jan 2022, 49p.

[78] Euler L. Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. *Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanae*, **20**, 189–207 (1776).

[79] Friedlander E. M., Merkurjev A. S. The mathematics of Andrei Suslin. *Bull. Amer. Math. Soc., New Ser.* **57**, no. 1, 1–22 (2020).

[80] Friedlander E. M., Merkurjev A., Beilinson A., Haesemeyer Ch., Levine M., Panin I., Parimala R. Soulé Ch., Weibel Ch., Yagunov S. In memoriam: Andrei Suslin. *Notices Amer. Math. Soc.* **67**, no. 6, 832–841, (2020).

[81] Garibaldi S. E_8, the most exceptional group. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, no. 4, 643–671 (2016).

[82] Gosset Th. On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions. *Messenger Math.* **29**, 43–48 (1900).

[83] Hahn A., O'Meara O. T. *The classical groups and K-theory.* Foreword by J. Dieudonné. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 291. Berlin etc.: Springer-Verlag. (1989).

[84] Hazrat R., Vavilov N. Bak's work on K-theory of rings (with an appendix by M. Karoubi), *J. K-Theory* **4**, no. 1, 1–65 (2009).

[85] Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives quaternaires, *Math. Ann.* **5** , no. 4, 581–583 (1872).

[86] Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques. *Math. Ann.* **6**, 366–389 (1873).

[87] Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives, *Math. Ann.* **11**, no. 2, 242–292 (1877).

[88] Lam C. W. H., Thiel L., Swiercz S. The non-existence of finite projective planes of order 10. *Can. J. Math.* **41**, no. 6, 1117–1123 (1989).

[89] Lam T. Y. *Serre's problem on projective modules.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, (2006).

[90] Neubüser J., Souvignier B., Wondratschek H. Corrections to Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space by Brown et al. (1978), *Acta Crystallographica* **58**, no. 3, 301 (2002).

[91] Newman M. *Integral matrices.* Pure and Applied Mathematics, 45. New York-London: Academic Press (1972).

[92] Okounkov A. The magic of 8 and 24. ICM 2022, International Mathematical Union Preliminary version, to appear in *Proc. Int. Cong. Math. 2022*, Vol. 1, 53p.

[93] Plotkin E., Semenov A., Vavilov N. Visual basic representations: An atlas. *Int. J. Algebra Comput.* **8**, no. 1, 61–95 (1998).

[94] Pólya G. Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene, *Zeitschrift für Kristallographie* **60**, no. 1, 278–282 (1924).

[95] Smith H. J. S. On the orders and genera of quadratic forms containing more than three indeterminates. *Proc. Royal Soc.* **16**, 197–208 (1867).

[96] Stepanov A. Structure of Chevalley groups over rings via universal localization. *J. Algebra* **450**, 522–548 (2016).

[97] Stepanov A., Vavilov N. Decomposition of transvections: A theme with variations, *K-Theory* **19**, no. 2, 109–153 (2000).

[98] Tits J., Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **254**, 2910–2912 (1962).

[99] Vavilov N. Structure of Chevalley groups over commutative rings. *International symposium on nonassociative algebras and related topics*, Hiroshima, Japan, 30 August – 1 September 1990. London etc.: World Scientific Publishing. 219–335 (1991).

[100] Vavilov N. Intermediate subgroups in Chevalley groups, *Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries* (Como, 1993), Cambridge Univ. Press, 233–280 (1995).

[101] Viazovska M. S. The sphere packing problem in dimension 8, *Ann. Math.* (2) **185**, no. 3, 991–1015 (2017).

[102] Watson G. L. On the minimum of a positive quadratic form in n (≤ 8) variables (verification of Blichfeldt's calculations). *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **62**, 719 (1966).

контактная информация:

Вавилов Николай Александрович — доктор физ.мат. наук, профессор; nikolai-vavilov@yandex.ru

St Petersburg school of linear groups. I. Prehistorical period*

N. A. Vavilov

St Petersburg State University, Department of Mathematics and Computer Science
29 Line 14th (Vasilyevsky Island), 199178 Saint Petersburg, Russia

For citation: Vavilov N. A. St Petersburg school of linear groups. I. Prehistorical period *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 20XX, vol. X (XX), issue X, pp. XX–XX. https://doi.org/XXXX

The present survey describes the contribution of St Petersburg mathematicians to the theory of linear, classical and algebraic groups. The first part is dedicated to the prehistorical period, the historical genesis of Tartakowski and Faddeev algebra schools, and to the general outline of the works by Borewicz and Suslin of the mid-1970-ies that initiated systematical research in the fields of classical groups and algebraic K-theory in St Petersburg.

Keywords: linera groups, classical groups, algebraic groups, Chevalley groups, algebraic K-theory.

References

[1] Andrianov A. N. Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2, *Russian Math. Surveys* **29**, no. 3, 45–116 (1974).

[2] Bass H. Algebraic K-theory. Mathematics Lecture Note Series. New York–Amsterdam: W. A. Benjamin, (1968).

[3] Borewicz Z. I. On parabolic subgroups in linear groups over a semilocal ring. *Vestn. Leningr. Univ., Math.* no. 9, 187–196 (1981) [32].

[4] Borewicz Z. I. On the parabolic subgroups in the special linear group over a semilocal ring. *Vestn. Leningr. Univ., Math.* no. 9, 245–251 (1981).

[5] Borewicz Z. I. A description of the subgroups of the complete linear group that contain the group of diagonal matrices. *J. Sov. Math.* **17**, 1718–1730 (1981).

[6] Borewicz Z. I., Vavilov N. A. Subgroups of the general linear group over a semilocal ring, containing the group of diagonal matrices. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **148**, 41–54 (1980).

[7] Borewicz Z. I., Vavilov N. A. Arrangement of subgroups in the general linear group over a commutative ring. *Proc. Steklov Inst. Math.*, **165**, 27–46 (1985).

---

[*] The works reflected in the subsequent parts of this survey were supported by a number of grants and projects. Of those, one should specially mention 1) RSF Project 14-11-00335 "'Decomposition of unipotents in reductive groups", 2) RSF Project "Split reductive groups over rings and their relatives" (both terminated) and the current ones 3) "Basis" Foundation Project 20-7-1-27-1 "Higher symbols in algebraic K-theory", 4) RSF Project 22-21-00257 "Algebraic groups over rings and Steinberg groups".

[32] Below I use the Polish spelling "Borewicz", which is the only correct spelling, used by Zenon Borewicz himself, rather than the ridiculous English transliteration "Borevich". The same applies to other names that have original spellings, such as Šafarevič. Another aspect one should bear in mind when comparing English bibliography with the attributions in the main text is that English translations of the original Russian papers were published with a delay of 1–2 years, or, like in this case and the next two, of 5 years.

[8] Borewicz Z. I., Faddeev D. K. Homology theory in groups. *Vestn. Leningr. Univ., Ser. Mat. Mekh. Astron.*, I. **11**, no 7, 3–39 (1956); II. **14**, no. 7, 72–87 (1959).

[9] Borewicz S. I., Šafarevič I. R. *Zahlentheorie* (Aus dem Russischen übersetzt von H. Koch.) Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Math. Reihe. **32**. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag (1966).

[10] Borovkov A. A., Golovanov P. P., Kozlov V. Ya., Kostrikin A. I., Linnik Yu. V., Novikov P. S., Faddeev D. K., Chentsov N. N. Ivan Nikolaevich Sanov. *Russ. Math. Surv.* **24**, no. 4, 159–161 (1969).

[11] Bourbaki N. *Éléments de mathématique. Fasc.* XXXIV. *Groupes et algèbres de Lie. Chapitres* IV, V *et* VI: *Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Groupes engendrés par des réflexions. Systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles. **1337**. Paris: Hermann & Cie. (1968).

[12] Vavilov N. A., On subgroups of split classical groups. *Proc. Steklov Inst. Math* **183**, 27–41 (1991).

[13] Vavilov N. A., Subgroups of Chevalley groups containing a maximal torus. *Transl., Ser.* 2*, Amer. Math. Soc.* **155**, 59–100 (1993).

[14] Vavilov N. A. Can one see the signs of structure constants? *St Petersburg Math. J.*, **19**, no. 4, 519–543, (2008).

[15] Vavilov N. A. Computers as novel mathematical reality: IV. Goldbach problem. *Computer Tools in Education* no. 4, 5–72 (2021) (Russian, English translation pending).

[16] Vavilov N. A., Stepanov A. V. Overgroups of semisimple groups, *Vestnik Samara Univ. Natural Sci.* no. 3, 51–95 (2008) (in Russian).

[17] Vavilov N. A., Stepanov A. V. Linear groups over general rings. I. Generalities, *J. Math. Sci. (N. Y.)* **188**, no. 5, 490–550 (2013).

[18] Vaserstein L. N., Suslin A. A. Serre's problem on projective modules over polynomial rings, and algebraic K-theory, *Math. USSR-Izv.*, **10**, no. 5, 937–1001 (1976).

[19] Venkov B. B. On the classification of integral even unimodular 24-dimensional quadratic forms. *Proc. Steklov Inst. Math.* **148**, 63–74 (1980).

[20] Vetchinkin N. M. Uniqueness of classes of positive quadratic forms, on which values of Hermite constants are reached for $6 \leq n \leq 8$, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **152**, 37–95 (1982).

[21] Vostokov S. V., Šafarevič I. R. Harmony in algebra (on the centenary of the birth of Dmitriĭ Konstantinovich Faddeev, Corresponding Member of the Academy of Sciences of the USSR). *Vladikavkaz. Mat. Zh.* **10**, no 1, 3–9 (2008) (in Russian).

[22] Autobiographical memoirs of D. A. Grave. Publication and notes of A. N. Bogolyubov. *Istor.-Mat. Issled.* **34**, 219–246 (1993) (in Russian).

[23] Delaunay B. N. *The St. Petersburg School of Number Theory.* Transl. from the Russian by R. Burns, foreword by M. Rosen History of Mathematics **26**. Providence, RI: Amer. Math. Soc. (2005)[33].

[24] Delaunay B. N., Padurov N. N., Alexandrov A. D. *Mathematical foundations of crystal structure analysis and the determination of the elementary parallelepiped using X-rays.* Leningrad–Moscow, ONTI-GTTI (1934).

[25] Dieudonné J. A. *La géométrie des groupes classiques.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. **5.** Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag (1971).

[26] Zalesskij A. E. Linear groups. *Russ. Math. Surv.* **36**, no. 5, 63–128 (1981).

[27] Zalesskij A. E. Linear groups. *J. Soviet Math.* **31**. no. 3, 2974–3004 (1985).

[28] Zalesskij A. E. Linear groups. In *Algebra.* IV*: Infinite groups, linear groups*, Encycl. Math. Sci. **37**, 97–196 (1993).

[29] Zolotarev E. I. *Collected works.* Leningrad: Publishing House of the USSR Acad. Sci. **1** (1931), **2** (1932) (in Russian)

[30] Kazimirsky P. S. *Factorisation of matrix polynomials.* Habilitation, Lvov, 1–289 (1974) (in Russian).

[31] Kargapolov M. I., Merzljakov Ju. I. *Fundamentals of the theory of groups.* Transl. from the 2nd Russian ed. by R. G. Burns. Graduate Texts in Mathematics. **62**. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag. (1979).

---

[33] Here for conformity with the next item I also use the correct spelling "Delaunay", and not the actual AMS spelling "Delone".

[32] Conway J. H. *The sensual (quadratic) form.* Reprint of the 1997 hardback ed. The Carus Mathematical Monographs **26.** Washington, DC: Math. Assoc. of America (2015).

[33] Conway J. H., Sloane N. J. A. *Sphere packings, lattices and groups.* With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov. 3rd ed. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. **290**. New York, NY: Springer. (1999).

[34] Conway J. H., Smith D. A. *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry.* Natick, MA: A K Peters (2003).

[35] Linnik Yu. V., Lyapin E. S., Yakubovich V. A. Vladimir Abramovich Tartakovskiĭ (on his 60th birthday). *Usp. Mat. Nauk* **16**, no. 5, 225–230 (1961). (in Russian).

[36] Lyubachevskii B. D. Factorization of symmetric matrices with elements belonging to a ring with involution. *Siberian Math. J.* I **14**, no. 2, 233–246 (1973); II, **14**, no. 3, 423–433 (1973).

[37] Manin Yu. I. *Lectires in algebraic geometry* I. *Affine schemes.* Moscow Univ. Press (1970) (in Russian).

[38] Manin Yu. I. *Cubic forms. Algebra, geometry, arithmetic.* Transl. from the Russian by M. Hazewinkel. 2nd ed. North-Holland Mathematical Library, **4**. Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland. (1986).

[39] Merzlyakov Yu. I. Central series and derived series of matrix groups. *Algebra and Logic* **3**, no. 4, 49–53 (1964) (in Russian).

[40] Milnor J. W. *Introduction to algebraic K-theory.* Ann. Math. Studies. **72**. Princeton, N. J.: Princeton University Press and University of Tokyo Press. (1971).

[41] Milnor J. W., Husemoller D. H. *Symmetric bilinear forms.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. **73**. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag. (1973).

[42] Parshin A. N. Mathematics in Moscow: we had a great epoque once. *Eur. Math. Soc. Newsl.* **88**, 42–49 (2013).

[43] Romanovskij N. S. On subgroups of the general an special linear groups over a ring. *Math. Notes.* **9**, 405–409 (1971).

[44] Sanov I. N. A property of one representation of the free group. *Doklady Acad. Sci. USSR* **57**, no. 7, 657–659 (1947) (in Russian).

[45] Borel A., Carter R., Curtis C. W., Iwahori N., Springer T. A., Steinberg R. *Seminar on algebraic groups and related finite groups.* Held at the Institute for Advanced Study, Princeton/N.J., 1968/69. Lecture Notes in Mathematics. **131.** Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag. (1970).

[46] Steinberg R. *Lectures on Chevalley groups.* University Lecture Series **66** Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (2016).

[47] Suprunenko D. A. *Matrix groups.* Translated from the Russian by Israel Program for Scientific Translations. Translation edited by K. A. Hirsch. Translations of Math. Monographs. **45**. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc. (1976).

[48] Suslin A. A. On the structure of the special linear group over polynomial rings, *Math. USSR-Izv.* **11** no. 2, 221–238 (1977).

[49] Suslin A. A. On stably free modules, *Math. USSR-Sb.* **31**, no. 4, 479–491 (1977).

[50] Suslin A. A. Algebraic K-theory, *J. Soviet Math.* **28** no. 6, 870–923 (1985).

[51] Suslin A. A. Algebraic K-theory, *Proc. Steklov Inst. Math.* **168**, 161–177 (1986).

[52] Suslin A. A. Algebraic K-theory and the norm residue homomorphism, *J. Soviet Math.* **30**, no. 6, 2556–2611 (1985).

[53] Suslin A. A., Tulenbaev M. S. Stabilization theorem for the Milnor K_2-functor, *J. Soviet Math.*, **17**, no. 2, 1804–1819 (1981).

[54] Faddeev D. K. *Tables of the principal unitary representations of Fedorov groups.* Translated by Prasenjit Basu. Math. Tables Series. **34**. Oxford–London–New York: Pergamon Press. (1964).

[55] Faddeev D. K. Algebra and number theory. In *Mathematics at the St Petersburg—Leningrad University.* Leningr. Univ. Press, 7–36 (1970).

[56] Fedorov E. S. Symmetry on the plane. *Zapiski Imperial St Petersburg Mineralogical Soc.* **28**, 345—390 (1891) (in Russian).

[57] Fedorov E. S. *Symmetry and structure of crystals. Principal works.* Edited by A. V. Shubnikov and I. I. Shafranovsky, Moscow, Publishing House of the USSR Acad. Sci. (1949) (in Russian).

[58] Fedorov E. S. *Regular partition of the plane and the space.* (Classics o Science). Translation from the German by A. V. Nardova, edited by B. N. Delaunay, V. A. Frank-Kamenetsky, I. I. Sharanovsky, K. P. Yanulov. Leningrad: Science Publishers (1979) (in Russian).

[59] Chebyshev P. L. *Higher algebra.* 1856–1857 *lectures according to the notes of M. P. Avenarius and an unknown student.* Edited and supplemented by prof. M. K. Kurensky. Moscow–Leningrad, Publishing House USSR Acad. Sci. (1936).

[60] Šafarevič I. R. Dmitry Konstantinovich Faddeev, *Leningrad Math. J.*, **2**, no. 6, 1159–1164 (1991).

[61] Yakovlev A. V. Zenon Ivanovich Borevich *J. Math. Sci. (New York)* **95**, no. 2, 2049–2050 (1999).

[62] Yakovlev A. V. D. K. Faddeev and St. Petersburg algebraic school. *Vestn. St. Petersbg. Univ., Math.* **41**, no. 1, 1–4 (2008).

[63] Yakubovich V. A. Factorization of symmetric matrix polynomials. *Sov. Math., Dokl.* **11**, 1261–1264 (1970).

[64] Arnold V. I. Polymathematics, is Mathematics a single Science or a set of Arts? 1–15 (2000).

[65] Baez J. C. The octonions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **39**, no. 2, 145–205 (2002).

[66] Bak A. Nonabelian K-theory: The nilpotent class of K_1 and general stability. *K-Theory* **4**, no. 4, 363–397 (1991).

[67] Barnes E. S. The complete enumeration of extreme senary forms. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **249**, 461–506 (1957).

[68] Bass H. K-theory and stable algebra. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **22**, 489–544 (1964).

[69] Blichfeldt H. F. The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables. *Math. Z.* **39**, 1–15 (1934–1935).

[70] Borewicz Z. I., Rosenbaum K. Zwischengruppenverbände, *Sitzungber. Akad. gemein. Wiss. Erfurt, Math.–Natur. Kl.* no. 11, 1–80 (2001).

[71] Brown H., Bülow R., Neubüser J., Wondratschek H., Zassenhaus H. *Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space.* New York, Wiley and Sons. (1978).

[72] Calderbank A. R. The mathematics of modems. *Math. Intell.* **13**, no. 3, 56–65 (1991).

[73] Conway J. H., Burgiel H., Goodman-Strauss Ch. *The symmetries of things.* Wellesley, MA: A. K. Peters (2008).

[74] Conway J., Doyle P., Gilman J., Thurston B. *Geometry and the imagination.* `https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/gi/gi.pdf`, 1–68 (2010)

[75] Coxeter H. S. M., Integral Cayley numbers, *Duke Math. J.* **13**, 561–578 (1946).

[76] Demidov S. S. World War I and mathematics in “the Russian world”. *Czasopismo Techniczne* **112**, 77–92 (2015).

[77] Diaconis P., Zabell S. In praise (and search) of J. V. Uspensky. arXiv:2201.13417v1[math.HO] 31 Jan 2022, 49p.

[78] Euler L. Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. *Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanae*, **20**, 189–207 (1776).

[79] Friedlander E. M., Merkurjev A. S. The mathematics of Andrei Suslin. *Bull. Amer. Math. Soc., New Ser.* **57**, no. 1, 1–22 (2020).

[80] Friedlander E. M., Merkurjev A., Beilinson A., Haesemeyer Ch., Levine M., Panin I., Parimala R. Soulé Ch., Weibel Ch., Yagunov S. In memoriam: Andrei Suslin. *Notices Amer. Math. Soc.* **67**, no. 6, 832–841, (2020).

[81] Garibaldi S. E_8, the most exceptional group. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, no. 4, 643–671 (2016).

[82] Gosset Th. On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions. *Messenger Math.* **29**, 43–48 (1900).

[83] Hahn A., O'Meara O. T. *The classical groups and K-theory.* Foreword by J. Dieudonné. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 291. Berlin etc.: Springer-Verlag. (1989).

[84] Hazrat R., Vavilov N. Bak's work on K-theory of rings (with an appendix by M. Karoubi), *J. K-Theory* **4**, no. 1, 1–65 (2009).

[85] Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives quaternaires, *Math. Ann.* **5** , no. 4, 581–583 (1872).

[86] Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques. *Math. Ann.* **6**, 366–389 (1873).

[87] Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques positives, *Math. Ann.* **11**, no. 2, 242–292 (1877).

[88] Lam C. W. H., Thiel L., Swiercz S. The non-existence of finite projective planes of order 10. *Can. J. Math.* **41**, no. 6, 1117–1123 (1989).

[89] Lam T. Y. *Serre's problem on projective modules.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, (2006).

[90] Neubüser J., Souvignier B., Wondratschek H. Corrections to Crystallographic Groups of Four-Dimensional Space by Brown et al. (1978), *Acta Crystallographica* **58**, no. 3, 301 (2002).

[91] Newman M. *Integral matrices.* Pure and Applied Mathematics, **45**. New York–London: Academic Press (1972).

[92] Okounkov A. The magic of 8 and 24. ICM 2022, International Mathematical Union Preliminary version, to appear in *Proc. Int. Cong. Math. 2022*, Vol. 1, 53p.

[93] Plotkin E., Semenov A., Vavilov N. Visual basic representations: An atlas. *Int. J. Algebra Comput.* **8**, no. 1, 61–95 (1998).

[94] Pólya G. Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene, *Zeitschrift für Kristallographie* **60**, no. 1, 278–282 (1924).

[95] Smith H. J. S. On the orders and genera of quadratic forms containing more than three indeterminates. *Proc. Royal Soc.* **16**, 197–208 (1867).

[96] Stepanov A. Structure of Chevalley groups over rings via universal localization. *J. Algebra* **450**, 522–548 (2016).

[97] Stepanov A., Vavilov N. Decomposition of transvections: A theme with variations, *K-Theory* **19**, no. 2, 109–153 (2000).

[98] Tits J., Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris* **254**, 2910–2912 (1962).

[99] Vavilov N. Structure of Chevalley groups over commutative rings. *International symposium on nonassociative algebras and related topics*, Hiroshima, Japan, 30 August – 1 September 1990. London etc.: World Scientific Publishing. 219–335 (1991).

[100] Vavilov N. Intermediate subgroups in Chevalley groups, *Proc. Conf. Groups of Lie Type and their Geometries* (Como, 1993), Cambridge Univ. Press, 233–280 (1995).

[101] Viazovska M. S. The sphere packing problem in dimension 8, *Ann. Math.* (2) **185**, no. 3, 991–1015 (2017).

[102] Watson G. L. On the minimum of a positive quadratic form in n (≤ 8) variables (verification of Blichfeldt's calculations). *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **62**, 719 (1966).

Received: февраля XX, 2023
Revised: февраля XX, 2023
Accepted: февраля XX, 2023

Author's information:

Nikolai Vavilov — nikolai-vavilov@yandex.ru