

УДК 517.95:656.15

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОД

© А.М. Камачкин, В.Н. Старков, Н.А. Степенко

Ключевые слова: математическое моделирование; уравнение диффузии; загрязнение океанических вод. Математическая модель, описывающая загрязнение океанических вод и поверхности океана от источников, находящихся на дне, предложена и реализована в данной статье. Загрязнение нефтью океанических вод приобрело угрожающие размеры, что подтверждает космический мониторинг. Надо развивать систему космического мониторинга таких процессов и искать технологические способы ликвидации их последствий. Нефтяное загрязнение может вызвать существенные нарушения газо- и водообмена между гидросферой и атмосферой. Смешиваясь с водой, нефть образует эмульсию двух типов: «нефть в воде» и «вода в нефти», которые могут сохраняться на поверхности, переноситься течениями, выбрасываться на берег и оседать на дно. Такое загрязнение отрицательно сказывается на планктоне океана. Математическая модель основана на уравнении диффузии, в котором учтены движение частиц от дна и поперечная диффузия. Представлено решение уравнения диффузии, выраженное через интеграл вероятности. Начальное условие для уравнения диффузии представлено в виде двумерной функции Хевисайда. Эта модель позволяет описывать распределение частиц примеси как по всей толще воды, так и на поверхности океана. Примесь распределена на поверхности океана в виде пятен. Форма пятен и их взаимодействие зависит от величины коэффициента диффузии. Графики для формы таких пятен при различных значениях коэффициента диффузии были представлены. Данная математическая модель отражает некоторые стороны реального процесса распространения примеси в океане.

Проблема загрязнения океана весьма актуальна.

Целью работы является построение математической модели, описывающей загрязнение толщи океанических вод и поверхностного слоя океана источниками, находящимися на дне.

ВВЕДЕНИЕ

Различают природное и антропогенное загрязнения [1–2]. Природное загрязнение возникает в результате естественных причин – извержения вулканов, землетрясений, катастрофических наводнений и т. п. Подробное изучение океанического дна показало, что на дне океанов имеется огромное количество крупных вулканических кратеров, особенно на дне Тихого океана (рис. 1) [3].

В качестве других источников появления частиц примеси в слое океана назовем «черные курильщики», причудливо распределенные по дну океана. На дне Мирового океана встречаются горячие подводные источники, или гидротермы, около которых воды содержат железо, марганец, медь и другие химические элементы в аномально больших количествах, в тысячи и десятки тысяч раз превышающих их содержание в океанской воде. Вокруг устья источников вырастают массивные постройки из рудных отложений, а над ними вздымаются «столбы» густой черной взвеси. Она создает у наблюдателя иллюзию выходящего из-под дна дыма, и потому эти подводные источники назвали «черными курильщиками» [4].

Антропогенное загрязнение Мирового океана – результат деятельности человека.

У экологов вызывает тревогу продолжающееся загрязнение Мирового океана нефтью и нефтепродуктами. Нефтяное загрязнение таких размеров может вызвать

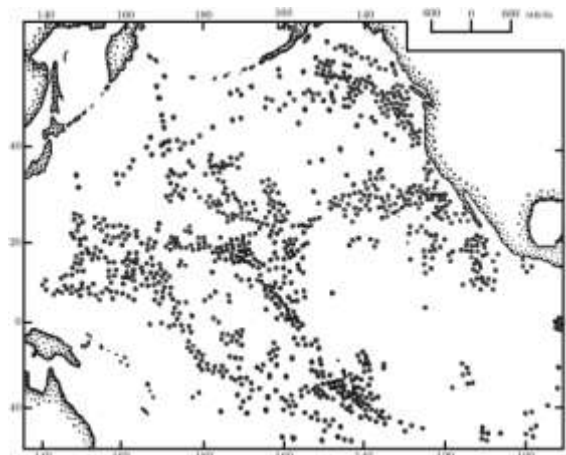


Рис. 1. Вулканы на дне Тихого океана

существенные нарушения газо- и водообмена между гидросферой и атмосферой. Пленка толщиной 30–40 мкм полностью поглощает инфракрасное излучение. Смешиваясь с водой, нефть образует эмульсию двух типов: «нефть в воде» и «вода в нефти», которые могут сохраняться на поверхности, переноситься течением, выбрасываться на берег и оседать на дно. Такое загрязнение отрицательно сказывается на планктоне океана [5]. При сильном загрязнении образуются зоны, практически лишенные жизни, если не считать развивающихся здесь в большом количестве нефтеокисляющих бактерий [6–8].

Хотя в открытых районах морей и океанов фактическое содержание загрязнителей пока остается ниже



Рис. 2. Глобальное распространение мест нефтяных загрязнений Мирового океана, вызванных крупными авариями танкеров (свыше 10 тыс. баррелей) за период 1974–1989 гг. [9]

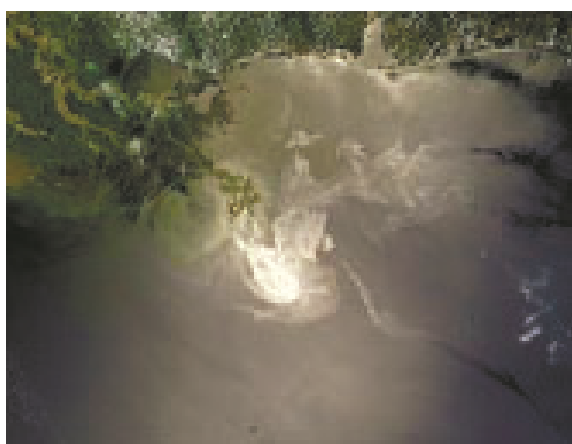


Рис. 3. Нефтяное пятно, вид из космоса (24 мая 2010 г.)

критического, продолжающееся увеличение антропогенной нагрузки заставляет принимать решительные природоохранные меры и внимательно следить за развитием процессов воздействия человека на океан. Реализация такой задачи возможна только на основе развитой системы геоэкологического мониторинга Мирового океана в целом, отдельных его морей и районов интенсивной антропогенной нагрузки, в частности [10–12]. Для организации систематических наблюдений должны быть использованы все современные средства, включая дистанционные измерения с самолетов и спутников [13]. Полученная информация должна быть использована в различных математических моделях геоэкологических процессов.

Взрыв нефтяной платформы Deepwater Horizon – авария (взрыв и пожар), произошедшая 20 апреля 2010 г. в 80 километрах от побережья штата Луизиана (США) в Мексиканском заливе на нефтяной платформе Deepwater Horizon на месторождении Макондо. Последовавший после аварии разлив нефти стал крупнейшим в истории США и превратил аварию в одну из крупнейших техногенных катастроф по негативному влиянию на экологическую обстановку. Через повреждения труб скважины на глубине 1500 м в Мексиканский залив за 152 дня вылилось около 5 млн баррелей нефти (14000 т в день), нефтяное пятно достигло площади 75 тысяч квадратных километров (рис. 3).

Конечно, картина течений в океане весьма сложна [14]. Поле скоростей связано с рельефом и температурой, что является предметом особого исследования [15–16]. Подобные задачи о распределении вещества в слое океана рассматривались в [17–18].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим поведение в толще воды мелких частиц, всплывающих со дна. Известно, что частицы, взвешенные в неподвижной среде (жидкой или газообразной), медленно оседают под действием силы тяжести или всплывают под действием силы Архимеда. Будем считать, что коагуляция отсутствует, но имеет место диффузия в направлении, перпендикулярном всплытию. Если размеры частицы велики по сравнению с длиной свободного пробега молекул среды, но не настолько велики, чтобы могли проявиться эффекты инерции среды, то применяется закон Стокса [19].

Частица примеси всплывает с постоянной скоростью v , которую можно найти, если приравнять силу Стокса сопротивления силе притяжения Земли:

$$v = \frac{d^2 g (\rho - \rho_c)}{18\mu},$$

где d – диаметр частицы; g – ускорение силы тяжести; ρ – плотность вещества частицы; ρ_c – плотность воды; μ – вязкость воды.

Концентрацию частиц примеси в слое воды, заполняющем область $G: \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, 0 \leq z \leq h\}$, обозначим $C(x, y, z)$, здесь плоскость (x, y) декартовых координат параллельна дну океана, а z – направлена по вертикали от дна ($z = 0$).

Будем решать стационарную задачу диффузии, учитывая только всплытие частиц v вдоль оси z и диффузию в направлениях, перпендикулярных всплытию.

Уравнение диффузии, описывающее изменение концентрации частиц примеси, имеет вид [20]

$$v \frac{\partial c}{\partial z} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где D – коэффициент диффузии частиц примеси в воде; V – скорость всплытия ($V > 0$) в спокойной воде.

В качестве начальных условий для уравнения (1) примем значение концентрации при $z = 0$ (на дне частицы примеси сконцентрированы в виде трех источников определенного объема).

Пусть имеются три источника загрязнения, расположенных на дне и представляющих собой прямоугольники S_1, S_2, S_3 со сторонами, параллельными осям координат. Будем считать, что $S_1 = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$, $S_2 = (x_4 - x_3)(y_4 - y_3)$, $S_3 = (x_6 - x_5)(y_6 - y_5)$, где $x_1, \dots, x_6, y_1, \dots, y_6$ – границы прямоугольников по осям.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Обозначим через C_1, C_2, C_3 мощности источников. Тогда распределение вещества на дне удобно описывать с помощью двумерной функции Хевисайда.

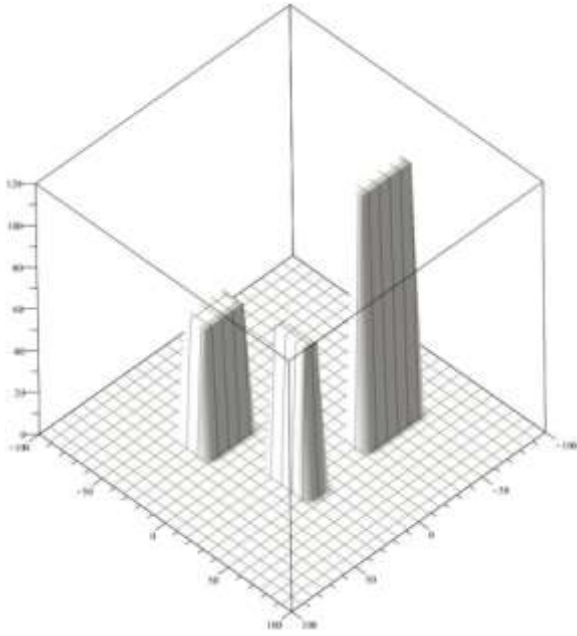


Рис. 4. Распределение трех источников вещества на дне водоема

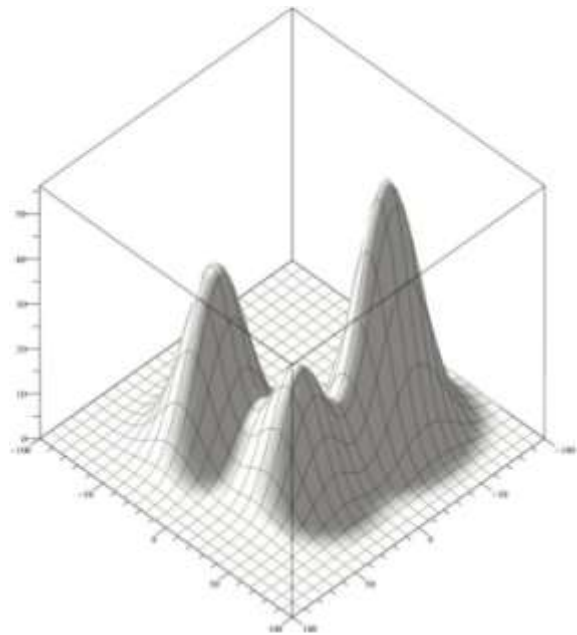
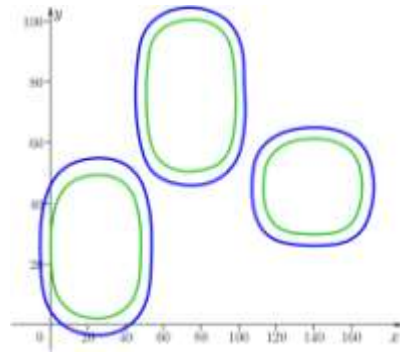


Рис. 5. Распределение примеси на глубине $h/2$ при трех источниках разной мощности

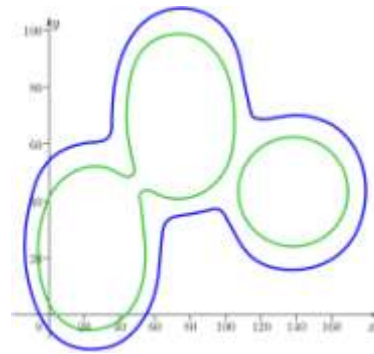
В случае трех источников их распределение на дне имеет вид

$$C(x, y, 0) = C_1(\eta(x-x_1) - \eta(x-x_2)) \cdot (\eta(y-y_1) - \eta(y-y_2)) + C_2(\eta(x-x_3) - \eta(x-x_4)) \cdot (\eta(y-y_3) - \eta(y-y_4)) + C_3(\eta(x-x_5) - \eta(x-x_6)) \cdot (\eta(y-y_5) - \eta(y-y_6)),$$

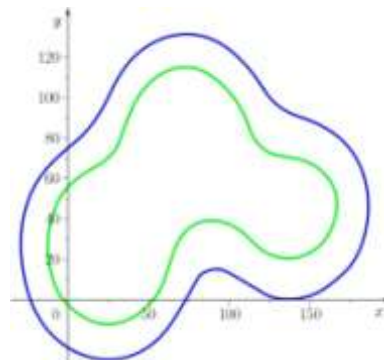
где $\eta(o)$ – единичная функция Хевисайда.



а)



б)



в)

Рис. 6. Изменение линий уровней функции $C(x, y, h)$ при меньшем значении коэффициента диффузии (а) и при увеличении коэффициента диффузии (б, в)

На рис. 4 приведен график функции $C(x, y, 0)$ для некоторого модельного набора параметров [21].

Решение уравнения диффузии имеет вид [20]

$$C(x, y, z) = \frac{C_1}{2} \left[\Phi \left(\frac{x-x_1}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) - \Phi \left(\frac{x-x_2}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) \right] \left[\Phi \left(\frac{y-y_1}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) - \Phi \left(\frac{y-y_2}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) \right] + \frac{C_2}{2} \left[\Phi \left(\frac{x-x_3}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) - \Phi \left(\frac{x-x_4}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) \right] \left[\Phi \left(\frac{y-y_3}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) - \Phi \left(\frac{y-y_4}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) \right] + \frac{C_3}{2} \left[\Phi \left(\frac{x-x_5}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) - \Phi \left(\frac{x-x_6}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) \right] \left[\Phi \left(\frac{y-y_5}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) - \Phi \left(\frac{y-y_6}{2\sqrt{D\frac{z}{v}}} \right) \right]$$

Здесь $\Phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-\xi^2} d\xi$ – интеграл вероятности.

Функция $C(x, y, z)$ дает значения концентрации примеси по всей толще воды.

На рис. 5 приведено распределение примеси на глубине $h/2$ [21].

Анализ влияния диффузии. Покажем влияние коэффициента диффузии на форму пятен на поверхности океана, $z = h$. Для этого построим графики уровней постоянной концентрации на поверхности $C(x, y, h) = \text{const}$ [22–23].

На рис. 6 показано изменение линий уровней функции $C(x, y, h)$ (для внутренней кривой $C(x, y, h) = 25$, для внешней – $C(x, y, h) = 5$) при различных значениях коэффициента диффузии. Видим, что коэффициент диффузии влияет на форму пятен и их взаимодействие. При меньшем значении коэффициента диффузии на поверхности наблюдаются три пятна (рис. 6а), с увеличением коэффициента диффузии эти пятна сливаются (рис. 6б, 6в).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемая модель позволяет рассчитать концентрацию загрязнения как по всей толще океанических вод, так и на поверхности океана. Целью авторов является получение простым способом информации об объеме произошедшей катастрофы. Это может быть использовано для экспресс-анализа и мониторинга загрязнения поверхности океана. Решение этой задачи показывает, что модель отражает некоторые стороны реального процесса распространения примеси в океане. Продолжением этой проблемы является обратная задача: по площади пятен определить распределение вещества по высоте толщи океана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров А.М., Ляхиц Ю.И., Матвеев Л.Т., Орлов В.Г.* Охрана окружающей среды. Л.: Гидрометеониздат, 1991. 424 с.
2. *Протасов В.Ф., Молчанов А.В.* Экология, здоровье и природопользование в России. М.: Финансы и статистика, 1995. 528 с.
3. *Резанов И.А.* Великие катастрофы в истории Земли. М.: Наука, 1980. 176 с.
4. *Богданов Ю.А.* Экспедиции к «черным курильщикам» // Земля и Вселенная. 1991. № 2. С. 3–10.
5. *Дудолова М.И., Старков В.Н.* Исследование модели Стила динамики численности морского планктона // Тезисы докладов Всероссийской конференции, посвященной 80-летию В.И. Зубова СПб.: ВВМ, 2010. С. 279–280.
6. *Зайцев Ю.П.* Жизнь морской поверхности. Киев: Наукова думка, 1974. 112 с.
7. *Константинов А.С.* Общая гидробиология. Изд. 4-е перераб. и дополн. М.: Высшая школа, 1986. 472 с.
8. *Мионов О.Г.* Взаимодействие морских организмов с нефтяными углеводородами. Л.: Гидрометеониздат, 1985. 128 с.
9. *Григорьев А.А., Кондратьев К.Я.* Экодинамика и геополитика. Т. 2. Экологические катастрофы. СПб.: НИЦ экологической безопасности РАН, 2001. 687 с.
10. *Израэль Ю.А., Цыбань А.В.* Антропогенная экология океана. М.: Наука, 2009. 520 с.

11. *Моисеев П.А.* Биологические ресурсы Мирового океана. М.: Агропромиздат, 1989. 368 с.
12. *Патин С.А.* Влияние загрязнения на биологические ресурсы и продуктивность Мирового океана. М.: Пищевая промышленность, 1979. 304 с.
13. *Григорьев А.А.* Антропогенные воздействия на природную среду по наблюдениям из космоса. Л.: Наука. 1985. 240 с.
14. *Кочергин В.П.* Теория и методы расчета океанических течений. М.: Наука, 1978. 128 с.
15. *Потапов Д.К.* Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. 2004. Т. 8. № 3–4. С. 163–170.
16. *Потапов Д.К.* О решениях задачи Гольдштика // Сиб. журн. вычисл. матем. 2012. Т. 15. № 4. С. 409–415.
17. *Дудолова М.И., Старков В.Н.* Математическая модель загрязнения верхнего слоя океана // Процессы управления и устойчивость: труды 40 Междунар. науч. конф. аспирантов и студентов / под ред. Н.В. Смирнова, Т.Е. Смирновой. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. С. 155–159.
18. *Старков В.Н.* Постановка задачи о влиянии термической конвекции на поле солености в приповерхностном слое океана // Математическое и информационное моделирование: сборник научных трудов Тюменского государственного университета. Тюмень: Изд-во ТюмГУ, 2009. Вып. 11. С. 124–130.
19. *Скорер Р.* Аэрогидродинамика окружающей среды. М.: Мир, 1980. 550 с.
20. *Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.
21. *Дьяконов В.* Maple 10, 11, 12, 13, 14 в математических расчетах. СПб.: Питер, 2011. 800 с.
22. *Volkova A.S., Gnilitkaya Yu.A., Provotorov V.V.* On the Solvability of Boundary-Value Problems for Parabolic and Hyperbolic Equations on Geometrical Graphs // Automation and Remote Control. 2014. Т. 75. № 2. С. 405–412.
23. *Provotorov V.V.* Boundary control of a parabolic system with distributed parameters on a graph in the class of summable functions // Automation and Remote Control. 2015. Т. 76. № 2. С. 318–322.

Поступила в редакцию 6 апреля 2015 г.

Kamachkin A.M., Starkov V.N., Stepenko N.A. MATHEMATICAL MODEL OF DIRTYING OCEANIC WATERS

A mathematical model describing the dirtying of ocean waters and ocean surface from sources located on the bottom, proposed and implemented in this paper. Oil dirtying of ocean waters have acquired looming, which confirms space monitoring. We need to develop a system of space monitoring such processes and look for technological ways of mitigation. Oil dirtying can cause significant violations of gas and water exchange between the hydrosphere and atmosphere. Mixing with water, oil forms an emulsion of two types: “oil in water” and “water-in-oil” that can be stored on the surface, transported by currents, beaching and settle to the bottom. Such pollution adversely affects the ocean plankton. The mathematical model is based on the diffusion equation, which takes into account the movement of particles from the bottom and transverse diffusion. The solution of the diffusion equation, expressed in terms of the probability integral. The initial condition for the diffusion equation is presented in the form of two-dimensional Heaviside function. This model allows us to describe the distribution of impurity particles as throughout the water column and at the surface of the ocean. Impurity is distributed on the surface of the ocean in the form of spots. Form spots and their interaction depends on the diffusion coefficient. Graphics for the shape of the spots at different values of the diffusion coefficient were presented. This mathematical model reflects some aspects of the real process of impurity propagation in the ocean.

Key words: mathematical modeling; diffusion equation; dirtying of oceanic waters.

Камачкин Александр Михайлович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой высшей математики, e-mail: akamachkin@mail.ru

Kamachkin Aleksander Mikhailovich, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of Higher Mathematics Department, e-mail: akamachkin@mail.ru

Старков Владимир Николаевич, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры космических технологий и прикладной астродинамики, e-mail: vlad.star@yandex.ru

Starkov Vladimir Nikolaevich, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Space Technologies and Applied Astrodynamics Department, e-mail: vlad.star@yandex.ru

Степенко Николай Анатольевич, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры космических технологий и прикладной астродинамики, e-mail: nick_st@mail.ru

Stepenko Nikolai Analotyevich, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Space Technologies and Applied Astrodynamics Department, e-mail: nick_st@mail.ru