Санкт-Петербургский
государственный университет

Т.А. Ефимова

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методическое пособие

Санкт-Петербург
2009

Утверждено на заседании кафедры общей математики и информатики
математико-механического факультета СПбГУ

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доц. Т.А Ефимова
Рецензент: доктор физ.-мат. наук, проф. М.А Нарбут (СПбГУ)

Пособие состоит из трех глав. Главы 1 и 2 разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, подробно разбираются решения типовых примеров. Предлагаются примеры для самостоятельного решения и ответы к ним. В главе 3 приводятся варианты контрольных работ.

Пособие предназначено для студентов очного и заочного отделений нематематических факультетов университетов. С помощью пособия студенты смогут самостоятельно изучить тему “Определенный интеграл”.

Введение

Методическое пособие предназначено для студентов нематематических факультетов университетов (дневного, вечернего и заочного отделений), изучающих тему “Определенный интеграл”. Оно составлено на основе опыта автора чтения лекций и проведения практических занятий на географическом факультете СПбГУ.

При составлении пособия были учтены программы курсов высшей математики для студентов биолого-почвенного, геологического, химического и экономического факультетов СПбГУ. Включенный в пособие материал рассчитан на наиболее насыщенную программу курса. В конкретных случаях отдельные вопросы могут быть исключены преподавателем из курса, особенно при малом количестве академических часов или при недостаточной математической подготовке студентов.

Пособие состоит из трех основных глав: определенный интеграл- глава 1, геометрические приложения определенного интеграла- глава 2, варианты контрольных работ- глава 3. Кроме того, пособие содержит приложение: неопределенный интеграл. Главы разделены на параграфы. В каждом параграфе приводятся определения, формулировки основных теоретических вопросов и необходимые формулы (доказательства теоретических вопросов не приводятся, их можно найти в одном из учебников [1]-[3]), подробно разбираются решения типовых примеров, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения, даются ответы и указания к ним. Нумерация формул и рисунков сквозная. В каждой главе примеры нумеруются двумя цифрами: первая-номер параграфа, вторая-номер примера. В приложении дается определение неопределенного интеграла, приводится таблица интегралов и основные формулы для их вычисления. Нумерация формул в приложении собственная.

С помощью пособия студенты могут самостоятельно усвоить основные теоретические вопросы, стандартные приемы решения задач по теории определенных интегралов, а также проверить свои знания, решая контрольные работы из главы 3.

Глава 1. Определенный интеграл и методы его вычисления

§ 1. Определение определенного интеграла

Функция *f(x)* задана на промежутке $[a,b]$. Разделим промежуток $[a,b]$ на n частей (необязательно одинаковых) точками $a = x_0 < x_1 ... < x_n = b$. Положим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ($k = 0,\ 1...n-1$), $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$. Выберем в каждом из промежутков $[x_k, x_{k+1}]$ точку c_k $(c_k \in [x_k, x_{k+1}])$. Выражение вида

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

называется *интегральной суммой функции f(x) на промежутке* $[a,b]$.

Функция *f(x)* называется *интегрируемой на промежутке* $[a,b]$, если существует конечный предел интегральной суммы при $\lambda \to 0$, который не зависит от способа разбиения $[a,b]$ на части и от выбора точек c_k. Этот предел называется *определенным интегралом и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читается интеграл от *a* до *b* *f(x) dx*).

Итак,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k \qquad (2)$$

f(x)- подынтегральная функция

f(x)dx- подынтегральное выражение

Числа *a,b* – пределы интегрирования (*a*- нижний предел, *b*- верхний предел).

Операция нахождения определенного интеграла называется *интегрированием.*

Необходимое условие интегрируемости функции. Если функция *f(x)* интегрируема, то она ограничена.

Достаточное условие интегрируемости функции. Если функция *f(x)* непрерывна на промежутке $[a,b]$, то она интегрируема. Если функция кусочно-непрерывна на промежутке $[a,b]$ (то есть имеет на этом промежутке конечное число точек разрыва первого рода), то она интегрируема.

Механическое истолкование определенного интеграла. Тело движется прямолинейно со скоростью $V(t)$. Путь, пройденный за время от момента t_1 до момента t_2 , вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt$. Путь равен интегралу от скорости - это механическое истолкование определенного интеграла.

Геометрическое истолкование определенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a,b]$. Фигура *AabB*, ограниченная осью *X*, графиком функции *f(x)*, прямыми *x=a, x=b* называется криволинейной трапецией (рис.1). Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле $S_{к.тр.} = \int_a^b f(x)dx$. Площадь криволинейной трапеции равна значению определенного интеграла- это геометрическое истолкование определенного интеграла.

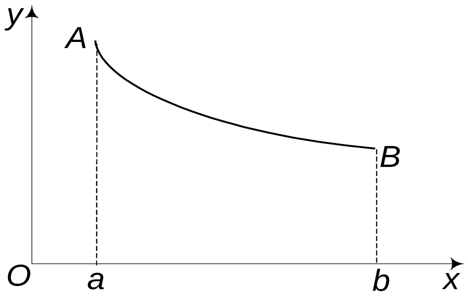

Рис.1

Пример 1.1

Пользуясь определением, вычислить определенные интегралы

а. $\int_a^b C dx$, **б.** $\int_1^{10} (1+x) dx$, **в.** $\int_1^2 x^3 dx$.

Отметим, что подынтегральные функции непрерывны, поэтому соответствующие интегралы существуют.

Решение

а. $\int_a^b C dx$

Разделим промежуток $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $a = x_0 < x_1 ... < x_n = b$. Положим $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ ($k = 0,\ 1 ... n-1$), $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$. Выберем в каждом из промежутков $[x_k, x_{k+1}]$ точку c_k $(c_k \in [x_k, x_{k+1}])$, тогда $f(c_k) = C$. Интегральная сумма имеет вид

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} C \Delta x_k = C \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k =$$

$= C(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + ... x_n - x_{n-1}) = C(x_n - x_0) = C(b-a)$, для любого разбиения $[a,b]$ на части и при любом выборе точек c_k. Следовательно, $\int_a^b C dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} C(b-a) = C(b-a)$.

Геометрически: интеграл равен площади прямоугольника *AabB* со сторонами *C* и $(b-a)$ (рис.2)

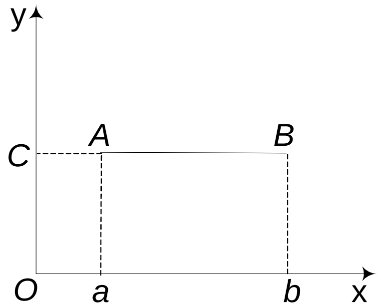

Рис.2

б. $\int_1^{10} (1+x)dx$

Разделим промежуток $[1, 10]$ на *n* равных частей точками $1 = x_0 < x_1 ... < x_n = 10$. Положим $\Delta x = \Delta x_k = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$,

$\lambda = \max\{\Delta x_k\} = \Delta x = \frac{9}{n}$. Ясно, что $\lambda \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть $c_k = x_k \in [x_k, \ x_{k+1}]$, тогда

$f(c_k) = 1 + c_k = 1 + x_k = 1 + 1 + k\frac{9}{n} = 2 + k\frac{9}{n}$.

Интегральная сумма примет вид

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(2+k\frac{9}{n}\right)\left(\frac{9}{n}\right) = \frac{9}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(2+k\frac{9}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{9}{n}\left(2+\left(2+\frac{9}{n}\right)+\ldots\left(2+(n-1)\frac{9}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{9}{n}\left(2+\ldots+2+\frac{9}{n}(1+..(.n-1))\right)$$

Слагаемое 2 встречается в сумме n раз,

$1+\ldots+(n-1) = \dfrac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \dfrac{(n-1)n}{2}$ (сумма $n-1$ члена арифметической прогрессии). Следовательно,

$$\sigma_n = \frac{9}{n}\left(2n+\frac{9}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right) = 18+\frac{81(n-1)}{2n},$$

Тогда $\displaystyle\int_1^{10}(1+x)dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\left(18+\frac{81}{2}\frac{n-1}{n}\right) =$

$$= 18+\frac{81}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 18+\frac{81}{2} = \frac{117}{2}$$

Геометрически: интеграл $\displaystyle\int_1^{10}(1+x)dx$ равен площади трапеции *ABCD* (рис.3).

$$S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}\cdot AC = \frac{2+11}{2}\cdot 9 = \frac{13\cdot 9}{2} = \frac{117}{2}$$

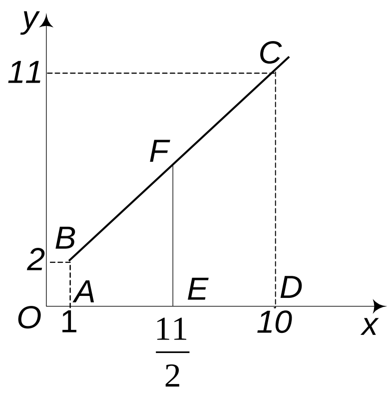

Рис.3

в. $\int\limits_1^2 x^3 dx$

Разделим промежуток $[1,\ 2]$ на *n* частей $1 = x_0 < x_1 ... < x_n = 2$, выбрав точки деления x_k , так чтобы числа x_k образовывали геометрическую прогрессию со знаменателем *q*. Тогда

$x_0 = 1, x_1 = q, ... x_n = q^n = 2$. Отсюда следует, что $q = 2^{\frac{1}{n}}$ и $q \to 1$ при $n \to \infty$. $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = q^{k+1} - q^k = q^k (q-1)$.

$\lambda = \max\{\Delta x_k\} = 2(q-1) \to 0$ при $n \to \infty$

Выберем точку $c_k = x_k = q^k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Тогда $f(c_k) = c_k^3 = (q^k)^3 = q^{3k}$ и

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} q^{3k} q^k (q-1) = (q-1)\sum_{k=0}^{n-1} q^{4k} =$$

$$= (q-1)\left(1 + q^4 + ... + q^{4(n-1)}\right)$$

$\left(1 + q^4 + ... + q^{4(n-1)}\right)$- сумма *n* членов геометрической прогрессии со знаменателем q^4. Эта сумма равна

$\frac{1-\left(q^4\right)^n}{1-q^4}=\frac{q^{4n}-1}{q^4-1}$, тогда $\sigma_n=(q-1)\frac{q^{4n}-1}{q^4-1}$. Поскольку $q=2^{\frac{1}{n}}$,

то $\sigma_n=\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\frac{\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^{4n}-1}{\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^4-1}=\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\frac{2^4-1}{2^{\frac{4}{n}}-1}=15\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{4}{n}}-1}$ и

$\int\limits_1^2 x^3dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to\infty}15\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{4}{n}}-1}$. При вычислении предела воспользуемся тем, что $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha-1}{\alpha}=1$, то есть бесконечно малая $a^\alpha-1$ эквивалентна $\alpha\ln a$ при $\alpha\to 0$ ($a^\alpha-1\sim a^\alpha\ln a$), и тем, что
в произведении и в частном бесконечно малые можно заменять на эквивалентные. Поскольку $2^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\ln 2$ и $2^{\frac{4}{n}}-1\sim\frac{4}{n}\ln 2$, то

$$\int\limits_1^2 x^3dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\lim\limits_{n\to\infty}15\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{4}{n}}-1}=\lim\limits_{n\to\infty}15\frac{\frac{1}{n}\ln 2}{\frac{4}{n}\ln 2}=\frac{15}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь определением, вычислить определенные интегралы

1. $\int\limits_1^2 xdx$ **2.** $\int\limits_1^3 x^4dx$

3. $\int\limits_0^T (V_0 + gt)dt$ **4.** $\int\limits_0^2 3^x dx$

Ответы

1. $\dfrac{3}{2}$ **2.** $\dfrac{3^5 - 1}{5}$ **3.** $VT + g\dfrac{T^2}{2}$ **4.** $\dfrac{8}{\ln 3}$

§ 2. Свойства определенного интеграла

Сформулируем основные свойства определенного интеграла.

1. $\int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(x)dx$ (величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной).

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$

Замечание. Свойства 2 и 3- дополнения к определению интеграла, то есть распространение этого понятия на случаи $a=b$ и $b<a$.

4. *Линейность интеграла*.

$$\int\limits_b^a (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int\limits_b^a f(x)dx + \beta\int\limits_b^a g(x)dx$$

Отсюда следует, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и интеграл от суммы равен сумме интегралов.

5. *Аддитивность интеграла.*
Если промежуток $[a,b]$ разбит точкой *c* на промежутки $[a,c]$ и $[c,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

6. Если $f(x) \geq 0$ $(f(x) > 0)$ на промежутке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

Следствие. Если $f(x) \geq g(x)$ $(f(x) > g(x))$ на промежутке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

7. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$ (абсолютная величина интеграла не превосходит интеграла от абсолютной величины).

8. *Теорема о среднем.*
Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Это свойство имеет простой *геометрический смысл* (рис. 4). Площадь криволинейной трапеции *AabB* равна $\int\limits_a^b f(x)dx$ (геометрическое истолкование определенного интеграла § 1), $f(c)(b-a)$- площадь прямоугольника A_1abB_1 со сторонами $f(c)$ и $(b-a)$. Из свойства следует, что найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника.

Следствие. Величина $f(c)=\dfrac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a}$ называется средним значением функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$.

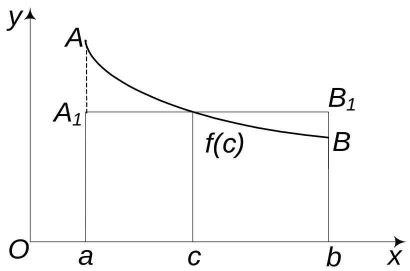

Рис. 4

9. *Интеграл по симметричному промежутку*.

а. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=0$, если функция $f(x)$ нечетная $(f(-x)=-f(x))$.

б. $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$, если функция $f(x)$ четная $(f(-x)=f(x))$.

Пример 2.1

Найти среднее значение функции $f(x)=x+1$ на промежутке $[1,10]$.

Решение

По следствию к свойству 8 среднее значение функции

$$f(c)=\frac{\int\limits_1^{10}(x+1)dx}{10-1}.$$ На основании примера 1.1(б) $\int\limits_1^{10}(x+1)dx=\frac{117}{2}$.

Следовательно, $f(c)=\frac{117}{2\cdot 9}=\frac{13}{2}$. Поскольку $f(x)=x+1$, то $f(c)=c+1=\frac{13}{2}$, тогда $c=\frac{11}{2}$. Среднее значение функции достигается в точке $c=\frac{11}{2}$ и равно $\frac{13}{2}$.

Геометрически (рис.1): $f\left(\frac{11}{2}\right)=\frac{13}{2}=EF$ - длина средней линии трапеции *ABCD*.

Пример 2.2

Вычислить интегралы

а. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos x dx$, **б.** $\int\limits_{-e}^{e}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$

Решение

а. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos x dx$

Подынтегральная функция $f(x)=x^3\cos x$ нечетная,

поскольку $f(-x)=(-x)^3\cos(-x)=-x^3\cos x=-f(x)$. Поэтому

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx = 0$$ (интеграл по симметричному промежутку от

нечетной функции (свойство 9)).

б. $\int_{-e}^{e} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx$

Подынтегральная функция $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ нечетная, так как

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\ln\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$$

Поэтому $\int_{-e}^{e} \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) dx = 0$ (интеграл по симметричному промежутку от нечетной функции (свойство 9)).

Пример 2.3

Оценить интегралы

а. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$, **б.** $\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx$

Решение

а. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}$.

Поскольку $0 \le \cos^2 x \le 1$, то подынтегральную функцию можно оценить следующим образом $\frac{1}{8} = \frac{1}{5+3} \le \frac{1}{5+3\cos^2 x} \le \frac{1}{5+0} = \frac{1}{5}$.

Проинтегрировав неравенства, получим

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{8} \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5}$ (следствие к свойству 6). Согласно примеру 1.1 (а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{8} = \frac{\pi}{16}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5} = \frac{\pi}{10}$. Поэтому справедлива оценка

$$\frac{\pi}{16} \le \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \le \frac{\pi}{10}$$

б. $\int\limits_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

Так как $|\cos x| \le 1$, то при $x \ge 10$ для подынтегральной функции справедлива оценка

$\left| \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} \right| \le \frac{|\cos x|}{\sqrt{x^4}} \le \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{10^2}$. По свойству 7 абсолютную величину интеграла оценим следующим образом

$$\left| \int\limits_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} dx \right| \le \int\limits_{10}^{18} \left| \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} \right| dx \le \int\limits_{10}^{18} \frac{1}{10^2} dx = 10^{-2}(18-10) = 0{,}08.$$

При вычислении последнего интеграла воспользовались примером 1.1 (а).

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интегралы

а. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ **б.** $\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin 2x}{1+x^2} dx$

в. $\int\limits_{-2}^{2} \left(\frac{25}{32} x^3 - \frac{13}{8} x + \frac{1}{8} \right) dx$

2. Найти среднее значение функции на указанных промежутках

а. $f(x) = x^3, \quad x \in [1,2]$

б. $f(x) = \frac{25}{32} x^3 - \frac{13}{8} x + \frac{1}{8}, \quad x \in [-2,2]$

3. Оценить интегралы

а. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x} dx$ **б.** $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{9}{16}\sin^2 x}}$

Ответы

1. **а.** 0 **б.** 0 **в.** $\frac{1}{2}$

2. **а.** $\frac{15}{4}$. Указание: воспользоваться примером 1.3 (в),

б. $\frac{1}{8}$. Указание: воспользоваться примером 1 (в).

3. **а.** $\frac{\pi}{4} \le \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x} dx \le \frac{\pi\sqrt{6}}{8}$.

б. $\frac{4}{5}\pi \le \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1+\frac{9}{16}\sin^2 x}} \le \pi$

§ 3. Основная формула интегрального исчисления

Нахождение определенного интеграла по определению (то есть как предела интегральных сумм) даже в случае простых подынтегральных функций требует довольно больших усилий и применения некоторых искусственных приемов (§ 1). В этом параграфе будет рассмотрена основная формула интегрального исчисления (формула Ньютона-Лейбница), которая позволит свести вычисление определенного интеграла к вычислению неопределенного интеграла.

Напомним определение первообразной функции и неопределенного интеграла (см. приложение, а также [1]-[3]).

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке (a,b), если $f(x)=F'(x)$ для любого $x\in(a,b)$. Отметим, что, если промежуток (a,b) определен естественно, то есть в соответствии с областями определения $f(x)$ и $F(x)$, то его, как правило, не указывают.

Если $F(x)$ одна из первообразных для $f(x)$, то любая первообразная имеет вид $F(x)+C$, где *C*- произвольная постоянная. Таким образом, чтобы знать все первообразные для функции $f(x)$, достаточно знать одну из них.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для данной функции.

Неопределенный интеграл обозначается символом $\int f(x)dx$ (читается интеграл $f(x)dx$), где $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение. Итак,

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,, \qquad (3)$$

где $F'(x) = f(x)$, *C*- произвольная постоянная.

Перейдем к основным определениям и формулам данного параграфа.

Если функция $f(t)$ интегрируема на промежутке $[a,b]$, то функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \;\; (x \in [a,b])$ называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Свойства функции $\Phi(x)$.

1. Если функция *f(t)* интегрируема на промежутке $[a,b]$, то функция $\Phi(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$.

2. Если функция *f(t)* непрерывна на промежутке $[a,b]$, то справедлива формула $\Phi'(x) = f(x)$ для любого $x \in [a,b]$.

Таким образом, производная от интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования. Отсюда следует, что непрерывная на промежутке $[a,b]$ *функция имеет первообразную* $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Если функция *f(x)* непрерывна на промежутке $[a,b]$, то справедлива *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \qquad (4)$$

где $F(x)$ - одна из первообразных для функции *f(x)* ($F'(x) = f(x)$).

Определенный интеграл равен разности значений любой первообразной в точках *b* и *a*.

$F(b) - F(a)$ обычно записывается в виде $F(x)\big|_a^b$ (читается $F(x)$ подстановка от *a* до *b*).

Тогда формула *Ньютона-Лейбница* примет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (5)$$

Эта формула позволяет свести вычисление определенного интеграла к вычислению неопределенного. Она называется *основной формулой интегрального исчисления.*

Таблица неопределенных интегралов и некоторые правила их вычисления приведены в приложении, а также в [1]-[3].

Пример 3.1

Вычислить интегралы

а. $\int_a^b Cdx$, **б.** $\int_1^{10} (1+x)dx$, **в.** $\int_1^2 x^3 dx$

Решение

а. $\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = Cx\Big|_a^b = C(b-a)$

Мы воспользовались тем, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и табличным интегралом 2 ($\alpha = 0$).

б. $\int_1^{10} (1+x)dx = \left(x + \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_1^{10} = \left(10 + \frac{100}{2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{117}{2}$.

Мы воспользовались линейностью определенного интеграла и табличным интегралом 2 ($\alpha = 0$, $\alpha = 1$).

в. $\int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{4}\left(2^4 - 1\right) = \frac{15}{4}$. Воспользовались табличным интегралом 2 ($\alpha = 3$).

Отметим, что эти интегралы были найдены в § 1 на основании определения.

Пример 3.2

Вычислить интеграл $I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^3 - 5x + 2}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Решение

Представим интеграл I в виде суммы двух интегралов

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} dx = I_1 + I_2.$$

Функция $f_1(x) = \frac{x^3 - 5x}{\sqrt{1+x^2}}$ нечетная, поскольку

$f_1(-x) = \frac{(-x)^3 - 5(-x)}{\sqrt{1+(-x)^2}} = -\frac{x^3 - 5x}{\sqrt{1+x^2}} = -f_1(x)$ Очевидно,

что функция $f_2(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$ четная. На основании свойства 9 (§ 2)

интеграл $I_1 = 0$, интеграл $I_2 = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} dx$, поэтому интеграл

$$I = 2\int\limits_{0}^{1} \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} dx = 4\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 4\left(\ln\left(1 + \sqrt{1+1^2}\right) - \ln\left(0 + \sqrt{1+0^2}\right)\right) = 4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Воспользовались табличным интегралом 12 .

Пример 3.3

Вычислить интеграл $\int_{-2}^{1} |1+x| dx$.

Решение

Очевидно, что $|1+x| = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \geq -1 \\ -(x+1), & \text{если } x < -1 \end{cases}$

(рис.5).

Разобьем промежуток $[-2,1]$ на промежутки $[-2,-1]$ и $[-1,1]$. Тогда

$|1+x| = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \in [-1,1] \\ -(x+1), & \text{если } x \in [-2,-1] \end{cases}$.

Следовательно,

$$\int_{-2}^{1} |1+x| dx = -\int_{-2}^{-1} (1+x) dx + \int_{-1}^{1} (1+x) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - x \right) \Bigg|_{-2}^{-1} + 2 = -\frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{(-2)^2}{2} - (-2) \right) + 2 =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 2 = \frac{5}{2}$$

(воспользовались тем, что $\int_{-1}^{1} x dx = 0$ свойство 9 (§ 2) и $\int_{-1}^{1} dx = 2$ пример 1.1 (а)).

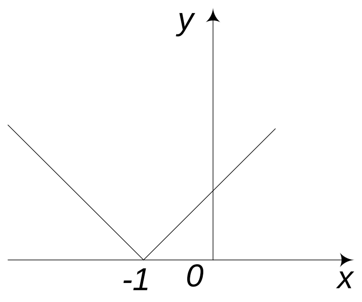

Рис. 5

Пример 3.4

Вычислить интеграл $\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$

Решение

По формуле тригонометрии $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$, тогда интеграл

$$I=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{2\sin^2 x}dx=\sqrt{2}\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx.$$

Так как $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x\in[0,\pi] \\ -\sin x, & \text{если } x\in[\pi,2\pi] \end{cases}$, то интеграл

$$I=\sqrt{2}\left(\int_{0}^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx\right)=\sqrt{2}\left(-\cos x\Big|_{0}^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=$$

$$=\sqrt{2}(-\cos\pi+\cos 0+\cos 2\pi-\cos\pi)=4\sqrt{2}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определенные интегралы по формуле Ньютона-Лейбница

1. $\int_{-1}^{3}\left(x+\frac{3}{4}\right)dx$ **2.** $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

3. $\int_{2}^{4}\left(32+28x-9x^{2}\right)dx$

4. $\int_{1}^{6}\left(7-x-\frac{6}{x}\right)dx$ **5.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^{2}x}$

6. $\int_{0}^{2}|1-x|dx$ **7.** $\int_{0}^{\pi}\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$.

Ответы

1. 7 **2.** $\frac{20}{3}$ **3.** 64 **4.** $17\frac{1}{2}-6\ln 6$ **5.** $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **6.** 1
7. 2

§ 4. Некоторые методы интегрирования

4.1 Простейшая замена переменной в определенном интеграле (внесение множителя под знак дифференциала)

Пусть $\int f(u)du=F(u)+C$, тогда

$$\int_{a}^{b}f(u(x))du(x)=F\left(u(x)\right)\Big|_{a}^{b} \qquad (6)$$

Сравните с формулой (3) приложения.

Пример 4.1

Вычислить интеграл $\int_{e}^{e^{2}}\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln^{2}x}$

Решение

$$\int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \frac{(\ln x)^{-1}}{-1}\Bigg|_e^{e^2} = -\frac{1}{\ln e^2} + \frac{1}{\ln e} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$. Воспользовались табличным интегралом 2 ($\alpha = -2$) и формулой (6) при $u(x) = \ln x$.

Пример 4.2

Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\, d(\sqrt{x})$

Решение

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\, d(\sqrt{x}) = -\cos(\sqrt{x})\Big|_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} = -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} = 1$$

Воспользовались табличным интегралом 5 и формулой (6) при $u(x) = \sqrt{x}$.

Интегралы в виде, рассмотренном в примерах 4.1 и 4.2 встречаются редко, однако в некоторых случаях интегралы можно привести к указанному виду. Требуется вычислить интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$. Пусть подынтегральное выражение можно представить в виде $f(x)dx = f_1(u(x))u'(x)dx = f_1(u(x))d(u(x))$. Тогда, если интеграл $\int f_1(u)du = F(u) + C$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(u(x))du(x) = F(u(x))\Big|_a^b$$ (формула (6)).

При решении примеров потребуются следующие свойства дифференциала

1. $dx = d(x + c)$

2. $dx = \frac{1}{c} d(cx)$

3. $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$

Пример 4.3

Вычислить интегралы

а. $\int\limits_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx$, **б.** $\int\limits_1^5 \frac{dx}{3x - 2}$

Решение

а. $\int\limits_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx$

По второму свойству дифференциала $dx = 4d\left(\frac{x}{4}\right)$. Тогда

$\int\limits_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx = \int\limits_0^4 e^{\frac{x}{4}} 4d\left(\frac{x}{4}\right) = 4e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4 = 4(e - 1)$. Воспользовались табличным интегралом 4.а и формулой (6) при $u(x) = \frac{x}{4}$.

б. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{3x - 2}$

По третьему свойству дифференциала $dx = \frac{1}{3} d(3x - 2)$. Тогда

$$\int\limits_1^5 \frac{dx}{3x - 2} = \int\limits_1^5 \left(\frac{1}{3x - 2}\right)\frac{1}{3} d(3x - 2) = \frac{1}{3}\int\limits_1^5 \frac{d(3x - 2)}{3x - 2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln(3x - 2)\Big|_1^5 = \frac{1}{3}(\ln(15 - 2) - \ln(3 - 2)) = \frac{1}{3}\ln 13$$

Воспользовались табличным интегралом 3 и формулой (6) при

$u(x)=3x-2$

Пример 4.4

Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

Решение

Заметим, что $\frac{dx}{x^2}=d\left(-\frac{1}{x}\right)=-d\left(\frac{1}{x}\right)$. Тогда

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx=-\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2=-e^{\frac{1}{2}}+e$$

Воспользовались табличным интегралом 4.а и формулой (6) при $u(x)=\frac{1}{x}$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы

1. $\int_1^e \sin(\ln x)d(\ln x)$ **2.** $\int_0^1 arctgxd(arctgx)$ **3.** $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$ **5.** $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$ **6.** $\int_1^4 \frac{5^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}}$

7. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ **8.** $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^8+1}$.

Ответы

1. $1-\cos 1$ **2.** $\frac{\pi^2}{32}$ **3.** $\frac{8}{3}$ **4.** $\frac{2}{9}$ **5.** $arctge-\frac{\pi}{4}$ **6.** $\frac{20}{\ln 5}$

7. $\ln 2$ **8.** $\dfrac{\pi}{16}$.

4.2 Замена переменной в определенном интеграле

Справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\cdot x'(t)dt, \qquad (7)$$

где функция $x(t)$ непрерывна на промежутке $[\alpha,\beta]$, имеет на этом промежутке непрерывную производную и $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$.

Сравните с формулой (4) приложения.

Пример 4.6

Вычислить интеграл $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+3}$

Решение

Сделаем замену переменной $t=\sqrt{x}+3$. Тогда $x=(t-3)^2$, $dx=2(t-3)dt$. При x=1 $t=\sqrt{1}+3=4$, а при x =4 $t=\sqrt{4}+3=5$. По формуле (7)

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+3} = \int_4^5 \frac{(t-3)2(t-3)dt}{t} = 2\int_4^5 \frac{(t-3)^2 dt}{t} =$$

$$= 2\int_4^5 \frac{(t^2-6t+9)dt}{t} = 2\int_4^5\left(t-6+\frac{9}{t}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2}-6t+9\ln t\right)\Bigg|_4^5 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}(25-16)-6(5-4)+9(\ln 5-\ln 4)\right) = 2\left(\frac{9}{2}-6+9\ln\frac{5}{4}\right) =$$

$$= 2\left(9\ln\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right)$$

Пример 4.7

Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение

Пусть $x = \sin t$, тогда $dx = d(\sin t) = \cos t dt$.

При $x = 0$ $\sin t = 0$ или $t = 0$, а при $x = 1$ $\sin t = 1$ или $t = \frac{\pi}{2}$.

По формуле (7) интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d\, 2t \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Воспользовались тем, что $|\cos t| = \cos t$, если $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

свойством дифференциала $dt = \frac{1}{a}d(at)$, табличным интегралом 6 и формулой (6) при $u(t) = 2t$.

Пример 4.8

Доказать, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$

Решение

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)^n dx$. Сделаем замену переменной

$y = \frac{\pi}{2} - x$, тогда $x = \frac{\pi}{2} - y$, $dx = d\left(\frac{\pi}{2} - y \right) = -dy$. При

$x = 0$ $y = \frac{\pi}{2}$, а при $x = \frac{\pi}{2}$ $y = 0$. По формуле (7)

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)^n dx = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos y)^n (-dy) =$$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos y)^n (dy) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y)^n dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx .$$

Воспользовались свойствами 3 и 1 определенного интеграла (§ 2).

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определенные интегралы, сделав подходящую замену переменной

1. $\int\limits_1^2 x\sqrt{2-x}dx$ **2.** $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$ **3.** $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

4. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$ **5.** $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$ **6.** $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$.

Ответы

1. $\dfrac{14}{15}$ **2.** $\dfrac{32}{3}$ **3.** $4-2\ln 3$

4. $2-\dfrac{\pi}{2}$ **5.** $\dfrac{\pi}{16}$ **6.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$.

4.3 Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Справедлива формула

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (8) \quad \text{или}$$

$$\int_a^b uv' dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b vu' dx \qquad (9)$$

(подынтегральные функции непрерывны)
Сравните с формулами (5) и (6) приложения.

Пример 4.9

Вычислить интеграл $\int_1^e x\ln x dx$

Решение

Положим $u=\ln x,\ \ dv = xdx$, тогда $du = d(\ln x) = \dfrac{dx}{x}$,

$v=\int xdx = \dfrac{x^2}{2}$. По формуле (8)

$$\int_1^e x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e xdx =$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right)=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

Пример 4.10

Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,dx$$

Решение

Сведем вычисление интеграла от $(\sin x)^n$ к вычислению интеграла от $\sin x$ в более низкой степени. Воспользуемся формулой интегрирования по частям (8).

$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((\sin x)^{n-1}\sin x\right)dx$. Положим

$u=(\sin x)^{n-1},\ dv=\sin x dx,$ тогда

$du=d\left((\sin x)^{n-1}\right)=(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x dx$,

$v=\int\sin x dx=-\cos x$. По формуле (8)

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,dx=(\sin x)^{n-2}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x(-\cos x)\right)dx.$$

Очевидно, что подстановка обращается в 0, поэтому

$I_n = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx$. Заменив $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, получим

$$I_n = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} \left(1-\sin^2 x\right) dx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} dx -$$

$$-(n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n} dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

Итак, $I_n = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$, отсюда

$$I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2} \qquad (10)$$

Таким образом, получена рекуррентная формула для вычисления интеграла I_n.

Отметим, что при *n* четном, интеграл I_n последовательно сводится к интегралу $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$, а при *n* нечетном к интегралу

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Отметим, что согласно примеру 4.8 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx = I_n$.

Пример 4.11

Пользуясь рекуррентной формулой, найти интегралы

а. $I_4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^4 \, dx$, **б.** $I_5 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^5 \, dx$.

Решение

а. Применяя два раза формулу (10) , получим

$$I_4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^4 \, dx = \frac{4-1}{4} I_2 = \frac{3}{4}\frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{8}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

б. Применяя два раза формулу (10) , получим

$$I_5 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^5 \, dx = \frac{5-1}{5} I_3 = \frac{4}{5}\frac{3-1}{3} I_1 = \frac{8}{15}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы

1. $\int\limits_0^1 xe^{=x} dx$ **2.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x dx$ **3.** $\int\limits_0^1 \arcsin x dx$

4. $\int\limits_1^2 (3x+2)\ln x dx$ **5.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ **6.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x dx$

Ответы

1. $1-\frac{2}{e}$ **2.** 4 **3.** $\frac{\pi}{2}-1$ **4.** $10\ln 2-\frac{17}{4}$

5. $\dfrac{5}{32}\pi$ **6.** $\dfrac{16}{35}$.

§ 5. Несобственный интеграл

В предыдущих параграфах рассматривались интегралы от ограниченных функций по конечному промежутку. В данном параграфе рассмотрим интегралы по бесконечному промежутку и интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы).

5.1 Несобственный интеграл I рода (по бесконечному промежутку)

1.
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx \qquad (11)$$

Интеграл $\int_a^A f(x)dx$ существует при любом A (рис.6)

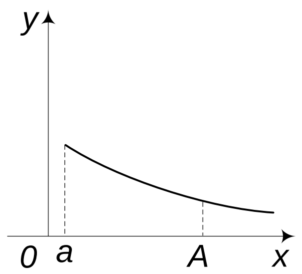

Рис. 6

2.
$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx \qquad (12)$$

Интеграл $\int\limits_A^a f(x)dx$ существует при любом A (рис.7)

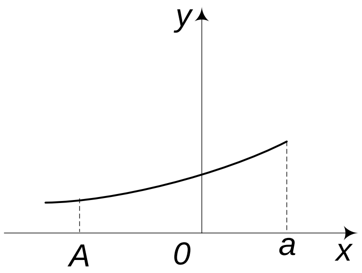

Рис. 7

3. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A f(x)dx \qquad (13)$$

Интеграл $\int\limits_B^A f(x)dx$ существует при любых A и B (рис.8)

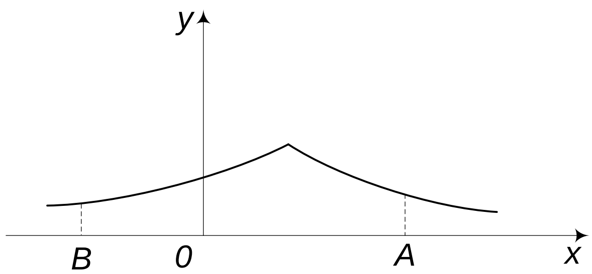

Рис. 8

Если пределы в формулах (11)-(13) конечны, то интегралы называются сходящимися, если пределы не существуют или бесконечны, то интегралы называются расходящимися.

Пример 5.1

Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2}$ или доказать, что он расходится

Решение

По формуле (13) интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A \frac{dx}{2+x^2} = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \frac{1}{\sqrt{2}} arctg x \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_B^A =$$

$$= \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(arctg \frac{A}{\sqrt{2}} - arctg \frac{B}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Воспользовались табличным интегралом 10 и тем, что $arctgx \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ и $arctgx \to -\frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$

Пример 5.2

Вычислить интеграл $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ или доказать, что он расходится

Решение

По формуле (11) интеграл

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln x \Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln A - \ln 1) = +\infty$$

Следовательно, интеграл расходится.

При нахождении первообразной воспользовались табличным интегралом 3 .

Пример 5.3

Выяснить при каких значениях $\alpha \neq 1$интеграл $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится, а при каких расходится.

Решение

По формуле (11) интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^A = \lim_{A \to +\infty} \left(\frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right)$$

Выражение $\frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \to \infty$ при $A \to +\infty$, если $-\alpha+1 > 0$ или $\alpha < 1$. Выражение $\frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \to 0$ при $A \to +\infty$, если $-\alpha+1 < 0$ или $\alpha > 1$. Тогда

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \infty, & \text{ïðè} \quad \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1}, & \text{ïðè} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

. Следовательно, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$.

При нахождении первообразной воспользовались табличным интегралом 2.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку) или доказать, что они расходятся.

1. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{3+x^2}$ **2.** $\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}dx$ **3.** $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ **4.** $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Ответы

1. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ **2.** 1 **3.** расходится **4.** $\frac{1}{\ln 2}$.

5.2 Несобственный интеграл II рода (от неограниченной функции)

1. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки a и непрерывна в $(a,b]$ (рис.9), то

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx \qquad (14)$$

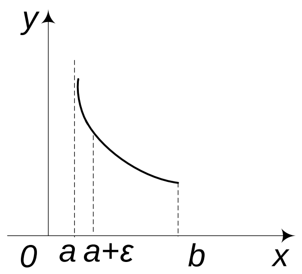

Рис. 9

2. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки b и непрерывна в $[a,b)$ (рис. 10), то

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon}f(x)dx \qquad (15)$$

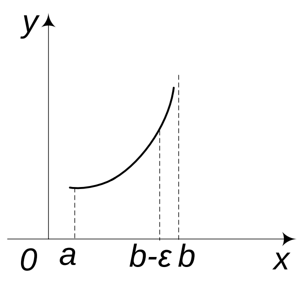

Рис.10

3. Если функция $f(x)$ не ограничена в окрестности точки $c \in (a,b)$ и непрерывна в $[a,c)$ и $(c,b]$ (рис . 11), то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left(\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right) \quad (16)$$

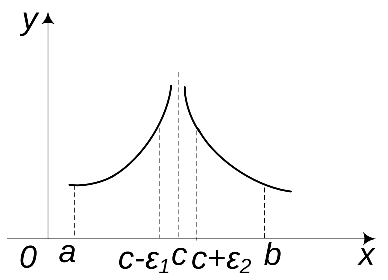

Рис.11

Пример 5.3

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$ или доказать его расходимость

Решение

Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x=0$.

По формуле (14) интеграл $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$

Так как $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$, то $I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{d\ln x}{\ln x}=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln(\ln x)\Big|_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}=$

$=\ln\left(\ln\frac{1}{2}\right)-\ln(\ln\varepsilon)=\infty$. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln x}$ расходится. При нахождении первообразной воспользовались табличным интегралом 3 и формулой (6) при $u(x)=\ln x$.

Пример 5.4

Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ или доказать, что он расходится.

Решение

Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точки $x=1$.
По формуле (16)

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\int\limits_{-1}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\int\limits_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)=$$

$$=\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\int\limits_{-1}^{1-\varepsilon_1} \frac{d(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\int\limits_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{d(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)=$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left(3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1} + 3(x-1)^{\frac{1}{3}} \Big|_{1+\varepsilon_2}^{2} \right) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} 3 \left((-\varepsilon_1)^{\frac{1}{3}} - (-2)^{\frac{1}{3}} + 1^{\frac{1}{3}} - \varepsilon_2^{\frac{1}{3}} \right) = 3\left(\sqrt[3]{2} + 1\right).$$

При нахождении первообразной воспользовались свойством дифференциала $dx = d(x+a)$ табличным интегралом 2 и формулой (6) при $u(x) = x - 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить несобственные интегралы II рода (от неограниченных функций) или доказать, что они расходятся.

1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$ **2.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **3.** $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$ **4.** $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Ответы

1. расходится **2.** $\frac{\pi}{2}$ **3.** расходится **4.** $\frac{1}{\ln 3}$.

Глава 2. Геометрические приложения определенного интеграла

§ 1. Вычисление площадей плоских фигур

1.1 Площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными уравнениями в декартовой системе координат

1. Функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ $(x \in [a,b])$. Плоская фигура *AabB*, ограниченная осью *X*, графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ называется криволинейной трапецией (рис. 12). Её площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (17)$$

(геометрическое истолкование определенного интеграла глава 1, § 1).

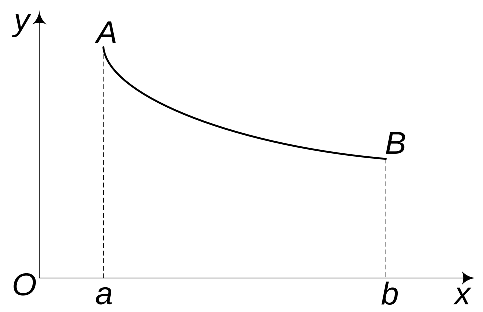

Рис. 12

2. Функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и $f(x) \leq 0$

($x \in [a,b]$). Площадь фигуры *AabB* (рис. 13) вычисляется по формуле

$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (18)$$

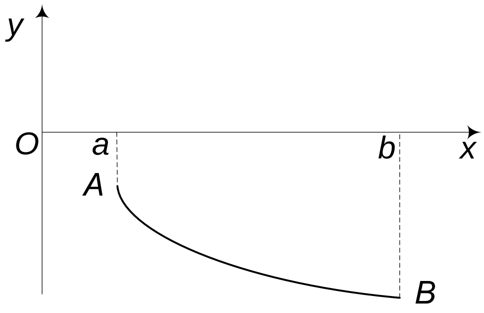

Рис. 13

3. Функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$. Площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью *X*, прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 14), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \qquad (19)$$

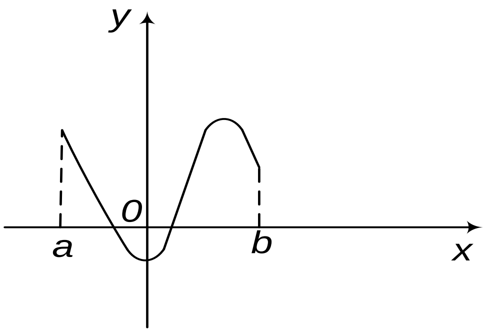

Рис.14

4. Площадь фигуры AA_1B_1B, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x \in [a,b]$ (функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны) и $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис. 15), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx \qquad (20)$$

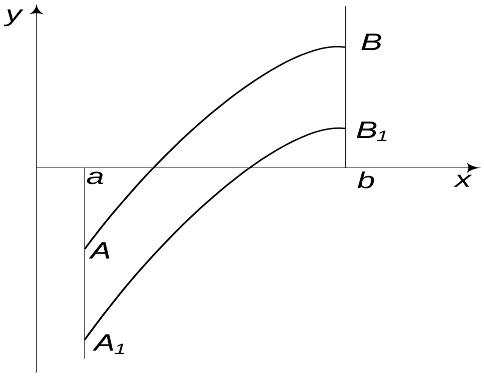

Рис. 15

5. Площадь фигуры AA_1B_1B, ограниченной графиками функций $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y \in [c,d]$ (функции $g_1(y)$ и $g_2(y)$ непрерывны) и $g_2(y) \geq g_1(y)$ (рис. 16) вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \left(g_2(y) - g_1(y)\right) dy \qquad (21)$$

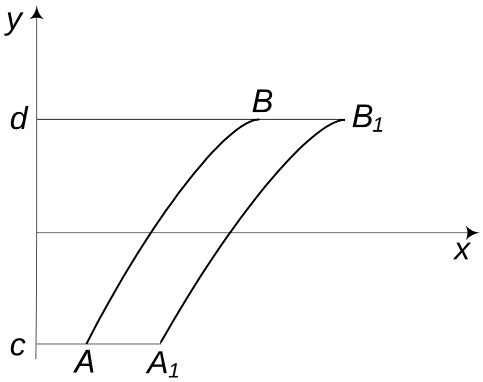

Рис. 16

Пример 1.1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции

$y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ и осью X

(рис. 17).

Решение

По формуле (19) площадь фигуры AA_1BB_1 равна $S = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$. Так как, $|\sin x| = \begin{cases} -\sin x, & \text{åñëè } x \in \left[-\dfrac{\pi}{4};0\right] \\ \sin x, & \text{åñëè } x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$, то

$$S = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin x dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} - \cos x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

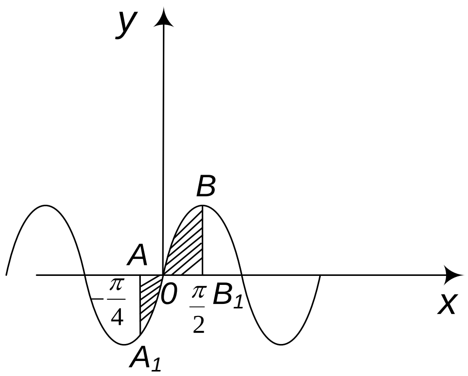

Рис. 17

Пример 1.2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4x$, $y^2 = 2x + 18$, $y \geq 0$.

Решение

Кривые $y^2 = 4x$, $y^2 = 2x + 18$ - параболы симметричные относительно оси X. С учетом условия $y \ge 0$ рассматриваются верхние ветви парабол. Вершина первой параболы в точке $O(0,0)$, а второй в точке $A(-9,0)$ (рис. 18). Точки пересечения парабол находятся из системы уравнений

$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y^2 = 2x + 18 \end{cases}$. Отсюда $4x = 2x + 18$, x=9, y=6, то есть M (9,6)- точка пересечения парабол.

Площадь фигуры можно вычислить двумя способами.

Способ 1. Площадь фигуры равна сумме площадей фигур AOB и OBM. Фигура AOB ограничена осью X и параболой

$y = \sqrt{2x+18}$, $x \in [-9,0]$. Её площадь $S_1 = \int\limits_{-9}^{0} \sqrt{2x+18}\,dx$ (формула (17)). Фигура OBM ограничена кривыми $y = 2\sqrt{x}$ и $y = \sqrt{2x+18}$, $x \in [0,9]$. Её площадь $S_2 = \int\limits_{0}^{9} \left(\sqrt{2x+18} - 2\sqrt{x}\right)dx$ (формула (20)).

Следовательно, площадь всей фигуры

$$S = S_1 + S_2 = \int\limits_{-9}^{0} \sqrt{2x+18}\,dx + \int\limits_{0}^{9} \left(\sqrt{2x+18} - 2\sqrt{x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-9}^{9} \sqrt{2x+18}\,dx - \int\limits_{0}^{9} 2\sqrt{x}\,dx = \sqrt{2}\int\limits_{-9}^{9} \sqrt{x+9}\,d(x+9) - 2\int\limits_{0}^{9} \sqrt{x}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{2(x+9)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{-9}^{9} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{0}^{9} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2}\cdot 18^{\frac{3}{2}} - 2\cdot 9^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$=\frac{2}{3}9^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{3}{2}}-2\right)=\frac{2}{3}27(4-2)=36$$

При вычислении интегралов воспользовались свойством 5 интеграла (глава 1, §2), свойством дифференциала $dx=d(x+a)$, табличным интегралом 2 и формулой (6) при $u(x)=x+9$.

Способ 2. Фигура ограничена параболой $y^2=2x+18$ или $x=\frac{y^2}{2}-9$ и параболой $y^2=4x$ или $x=\frac{y^2}{4}$, $y\in[0,6]$. По формуле (21) ее площадь

$$S=\int_0^6\left(\frac{y^2}{4}-\left(\frac{y^2}{2}-9\right)\right)dy=\int_0^6\left(9-\frac{y^2}{4}\right)dy=\left(9y-\frac{y^3}{3\cdot 4}\right)\Bigg|_0^6=$$

$$=54-\frac{6^3}{12}=54-18=36.$$

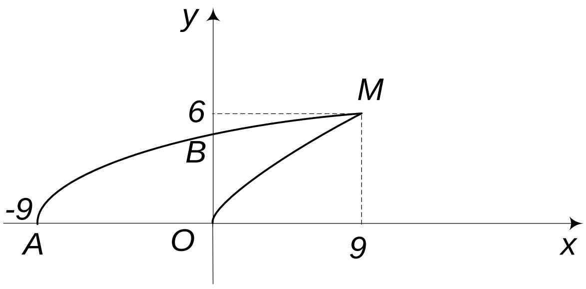

Рис.18

Пример 1.3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой

$y=-x^2+4x-3$ и касательными к ней, проведенными в точках $A(0,-3)$ и $B(3,0)$ (рис.19).

Решение

$y=-x^2+4x-3$ -парабола с вершиной в точке $N(2,1)$ и ветвями направленными вниз $A(0,-3)$ и $B(3,0)$- точки пересечения параболы с осями координат. Известно, что уравнение касательной к кривой $y(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$. У нас $y=-x^2+4x-3$, производная $y'=-2x+4$, поэтому $y-y_0=(-2x_0+4)(x-x_0)$- уравнение касательной в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда касательная в точке $A(0,-3)$ имеет уравнение $y+3=(-2\cdot 0+4)(x-0)$ или $y=4x-3$, а касательная в точке $B(3,0)$ имеет уравнение $y-0=(-2\cdot 3+4)(x-3)$ или $y=-2x+6$.

Из системы уравнений $\begin{cases} y=4x-3 \\ y=-2x+6 \end{cases}$ найдем точку пересечения касательных $M\left(\frac{3}{2},9\right)$.

Площадь фигуры равна сумме площадей фигур AMC и CMB. Фигура AMC ограничена касательной $y=4x-3$ и параболой $y=-x^2+4x-3$, $x\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$. Её площадь

$$S_1=\int_0^{\frac{3}{2}}\left((4x-3)-\left(-x^2+4x-3\right)\right)dx=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2dx.$$

Фигура CMB ограничена касательной $y=-2x+6$ и параболой

$y=-x^2+4x-3$, $x\in\left[\frac{3}{2},3\right]$.

Её площадь $S_2=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left(\left(-2x+6\right)-\left(-x^2+4x-3\right)\right)dx=\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx$.

Тогда площадь всей фигуры

$$S=S_1+S_2=\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}}x^2dx+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx=\int\limits_{0}^{3}x^2dx+\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left(-6x+9\right)dx=$$

$$=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3-3\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3}\left(2x-3\right)dx=9-3\left.\left(x^2-3x\right)\right|_{\frac{3}{2}}^{3}=$$

$$=9-3\left(\left(9-9\right)-\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)\right)=9-3\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$$

Воспользовались свойством 5 интеграла (глава 1, §2)

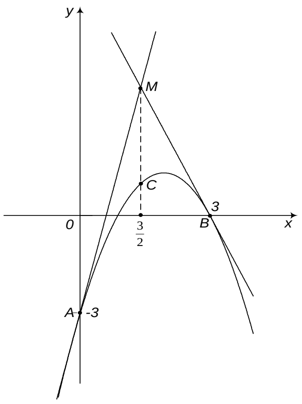

Рис. 19

Задачи для самостоятельного решения

Найти площади фигур ограниченных кривыми

1. $y = 4x - x^2$, $y = 0$

2. $y = x^2 - 6x + 5$, $y = 0$

3. $y = -x^2$, $y = -x - 2$

4. $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$

5. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$

6. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$

7. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$ и касательными к ней, проведенными в точках $A(0,2)$ и $B(4,2)$.

Ответы

1. $\frac{32}{3}$ **2.** $10\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{9}{2}$ **4.** $\frac{3}{2} - \ln 2$

5. 9 **6.** 12 **7.** $\frac{8}{3}$.

1.2 Площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными уравнениями в параметрической форме

Напомним, что параметрическими уравнениями кривой называются уравнения вида $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$, где (x, y)- декартовы координаты точки кривой, *t* - переменная величина, называемая параметром. В некоторых случаях из системы уравнений удается исключить параметр *t* и привести уравнение кривой к виду $F(x, y) = 0$ или $y = f(x)$.

В качестве примера выведем параметрические уравнения окружности радиуса *R* с центром в начале координат (рис. 20). Точка $M(x, y)$ лежит на окружности, *t* – угол, образованный с осью *X* радиусом *OM*. Из треугольника *OMN* находим $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$. Если $t \in [0, 2\pi]$, то получим параметрические уравнения окружности. Исключим параметр *t*. Для этого возведем уравнения в квадрат $\begin{cases} x^2 = R^2\cos^2 t \\ y^2 = R^2\sin^2 t \end{cases}$ и сложим их

$x^2 + y^2 = R^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = R^2$.

Получим известное уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Пусть $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$ - уравнение кривой, заданной в параметрической форме, $y(t) \geq 0$.

Площадь фигуры, ограниченной этой кривой, осью *X*, прямыми $x = a,\ x = b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \qquad (22)$$

где $a = x(t_1),\ b = x(t_2)$.

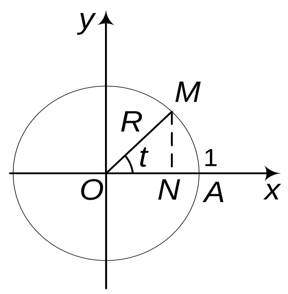

Рис. 20

Пример 1.4

Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 21),

используя его параметрические уравнения $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, $t \in [0,2\pi]$.

t -угол между осью X и радиусом OM .

Решение

Покажем, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ - параметрические уравнения эллипса. Для

исключения параметра перепишем уравнения в виде $\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{b} = \sin t \end{cases}$.

Возведя уравнения в квадрат и сложив, получим уравнение

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$, то есть уравнение эллипса.

В силу симметрии, достаточно вычислить площадь одной четверти эллипса. Это фигура, ограниченная кривой, осью *X*, прямыми $x=0,\ x=a$. Из уравнения $x=a\cos t$ при $x=0$ получим $0=\cos t$ или $t=\frac{\pi}{2}$, а при $x=a$ получим $1=\cos t$ или $t=0$. По формуле (22) находим $\frac{1}{4}S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(a\cos t)'\,dt = ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-\sin t)dt =$

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt = ab\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

Воспользовались свойством 3 интеграла (глава 1, §2) и рекуррентной формулой (10).

Тогда площадь $S = \pi ab$.

Замечание. При $a = b$, получаем окружность радиуса a ($x^2 + y^2 = a^2$). По формуле ее площадь равна πa^2, что совпадает с известной формулой геометрии.

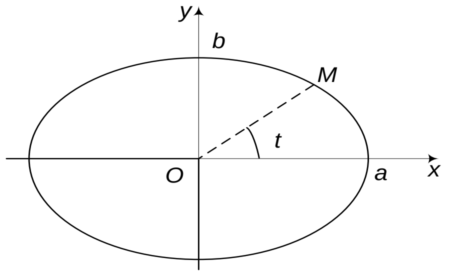

Рис. 21

Пример 1.5

Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (рис. 22), используя её параметрические уравнения $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

$t \in [0,2\pi]$, t-угол между осью X и радиусом OM.

Решение

Покажем, что $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ параметрические уравнения астроиды. Для исключения параметра *t* возведем уравнения в степень $\frac{2}{3}$

$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^2 t \\ y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \sin^2 t \end{cases}$. Сложив эти уравнения, получим $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (уравнение астроиды).

Очевидно, что кривая симметрична относительно координатных осей, поэтому достаточно вычислить площадь одной четверти фигуры. Это фигура, ограниченная астроидой, осью *X*, прямыми $x = 0$, $x = a$.

Из уравнения $x = a\cos^3 t$ при $x = 0$ получим $0 = \cos t$ или $t = \frac{\pi}{2}$, при $x = a$ получим $1 = \cos t$ или $t = 0$. По формуле (22) находим

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t\left(a\cos^3 t\right)' dt = a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^3 t 3\cos^2 t(-\sin t)dt =$$

$$= 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t dt = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\left(1 - \sin^2 t\right)dt =$$

$$= 3a^2\left(I_4 - I_6\right)$$ (пример 4.8 главы 1)

Применяя несколько раз рекуррентную формулу (10), получим

$$\frac{1}{4}S = 3a^2\left(I_4 - \frac{6-1}{6}I_4\right) = 3a^2\frac{1}{6}I_4 = \frac{1}{2}a^2\frac{4-1}{4}I_2 = \frac{3}{8}a^2\frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{16}\frac{\pi}{2}a^2.$$

Следовательно, $S = \frac{3}{8}\pi a^2$.

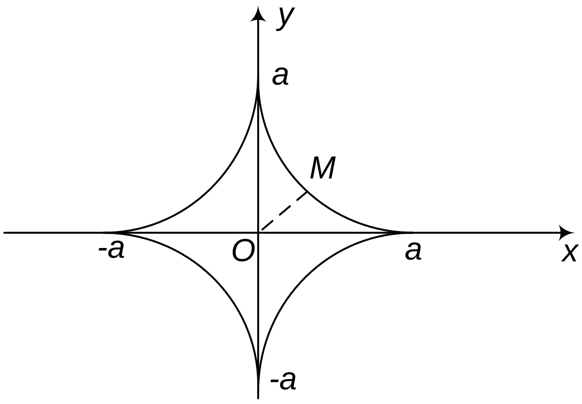

Рис. 22

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, заданными параметрическими уравнениями

а. $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} t \in [0,2\pi]$ **б.** $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases} t \in [0,2\pi]$.

2. Найти площадь фигуры ограниченной одной аркой циклоиды

$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} t \in [0,2\pi]$ (рис. 38)

3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, записав их уравнения в параметрической форме

а. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$ **б.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$.

Ответы

1. а. 15π **б.** $\frac{27}{8}\pi$ **2.** $3\pi a^2$ **3. а.** 60π **б.** 24π .

1.3 Площадь криволинейного сектора

Напомним определение полярной системы координат на плоскости. Полярная система координат на плоскости определяется точкой *O* (полюс), исходящим из нее лучом *OP* (полярная ось), масштабным отрезком *e* и направлением отсчета углов (рис.23).

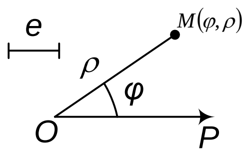

Рис. 23

Полярными координатами точки *M*, не совпадающей с полюсом, называется расстояние $\rho > 0$ (полярный радиус) от точки *M* до полюса и угол φ (полярный угол) между осью *OP* и лучом *OM*. Точку *M* с полярными координатами φ и ρ обозначают $M(\varphi,\rho)$ (рис.23). Полярный угол имеет бесчисленное множество значений, значения $\varphi \in [0,2\pi]$ называются главными. Для полюса *O* считают $\rho = 0$, значение φ не определено.

Если начало декартовой системы координат совместить с полюсом, а полярную ось совместить с осью *X* (рис. 24), то декартовы координаты (x, y) точки *M* связаны с ее полярными координатами (φ,ρ) формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (23)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (24)$$

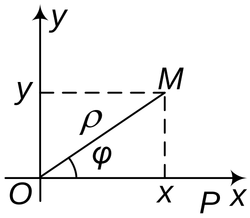

Рис. 24

Уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид $F(\varphi, \rho) = 0$ или $\rho = f(\varphi)$.

Если кривая задана в полярной системе координат уравнением $\rho = f(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора *OAB*, ограниченного этой кривой и радиус-векторами *OA* и *OB*, соответствующими $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 25) вычисляются по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi \qquad (25)$$

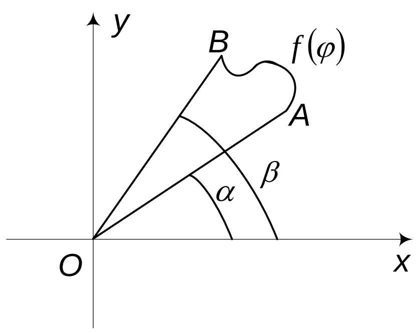

Рис. 25

Пример 1.6

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(x^2+y^2\right)^2=\left(x^2-y^2\right)$ (лемниската Бернулли).

Решение

Запишем уравнение кривой в полярной системе координат. Для этого воспользуемся формулами (23), выражающими декартовы координаты через полярные. Получим

$\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2=\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi$ или $\rho^2=\cos 2\varphi$.

Отсюда находим

$\rho=\pm\sqrt{\cos 2\varphi}$. Поскольку перед ρ стоит знак $\pm$, и при замене φ на $-\varphi$ выражение не меняется, то кривая симметрична относительно координатных осей. Кроме того должно выполняться условие $\cos 2\varphi\geq 0$. В силу симметрии кривую можно рассматривать только в первой четверти, отсюда следует, что $0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{4}$. При $\varphi=0$ $\rho=1$, а при $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ $\rho=0$ (рис.26). По формуле (25)

$\dfrac{1}{4}S=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d2\varphi$ (воспользовались свойством дифференциала $dx=\dfrac{d(ax)}{a}$).

Отсюда $S=\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin 0=1$.

(воспользовались табличным интегралом 6 и формулой (6) при $u(\varphi)=2\varphi$).

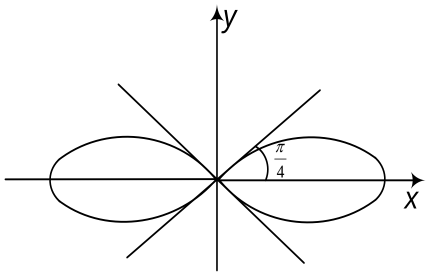

Рис. 26

Пример 1.7

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2+y^2=2x$ и $x^2+y^2=x$.

Решение

Приведем уравнения к каноническому виду. Первое уравнение преобразуем следующим образом $x^2+y^2-2x=0$, $x^2-2x+1-1+y^2=0$, $(x-1)^2+y^2=1$. Это уравнение окружности с центром в точке $A(1,0)$ радиуса 1. Аналогично преобразуем второе уравнение $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$. Это уравнение окружности с центром в точке $B\left(\frac{1}{2},0\right)$ радиуса $\frac{1}{2}$ (рис. 27).

Запишем уравнения кривых в полярной системе координат. Подставляя выражения *x* и *y* через ρ и φ (формулы (23)) в уравнение первой окружности, получим

$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=2\rho\cos\varphi$ или $\rho=2\cos\varphi$. Так как $\rho\geq 0$, то $\cos\varphi\geq 0$ или $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Очевидно, что уравнение второй окружности имеет вид $\rho = \cos\varphi,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Площадь равна разности двух площадей. Первая площадь ограничена криволинейным сектором $\rho = 2\cos\varphi,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. По формуле (25) она равна

$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\varphi)^2 d\varphi$. Вторая площадь ограничена криволинейным сектором $\rho = \cos\varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и равна $S_2 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^2 d\varphi$. Следовательно,

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((2\cos\varphi)^2 - \cos^2\varphi\right) d\varphi = \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi = 3\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{3}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

(воспользовались тем, что подынтегральная функция чётная и рекуррентной формулой (10)).

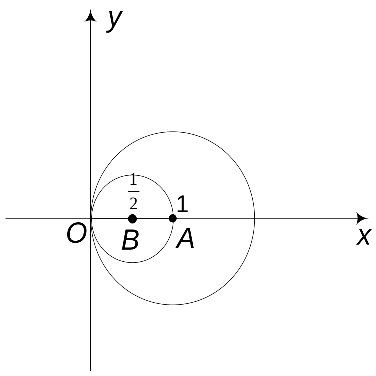

Рис. 27

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти площади фигур, заданных уравнениями в полярной системе координат.

а. $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ **б.** $\rho = 1 + \cos\varphi$ (кардиоида, рис.39).

2. Найти площади фигур, ограниченных кривыми, записав их уравнения в полярной системе координат.

а. $x^2 + y^2 = 4x$ **б.** $x^2 + y^2 = 2y$ **в.** $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2xy$

Ответы

1. **а.** $2a^2$ **б.** $\frac{3}{2}\pi$

2. **а.** 4π **б.** π **в.** 1.

§ 2. Вычисление объемов тел

2.1 Вычисление объемов тел, по заданными площадям поперечных сечений

Пусть $[a,b]$- проекция тела на ось X и для любого $x \in [a,b]$ известна площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси X, равная $S(x)$ (рис. 28). Тогда объем тела вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (26)$$

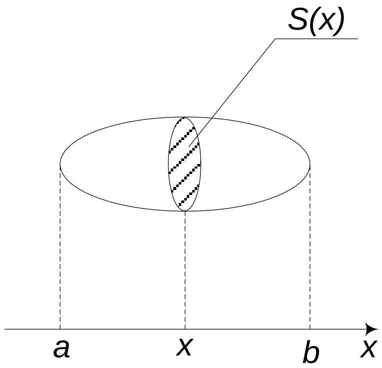

Рис. 28

Пример 2.1

Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 29).

Решение

В силу симметрии эллипсоида относительно плоскости XOY достаточно вычислить половину объема $(z \geq 0)$. Рассмотрим сечение тела плоскостью перпендикулярной оси Z $(z \in [0, c])$ и отстоящей от нее на расстоянии *z*. Считая *z* постоянным и переписав уравнение эллипсоида в виде $\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1$, получим уравнение сечения. Это эллипс с полуосями $a_1=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $b_1=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$. Согласно примеру 1.4 его площадь $S(z)=\pi a_1 b_1=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$. По формуле (26)

$$\frac{1}{2}V=\int_0^c \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\pi ab\left(z-\frac{z^3}{3c^2}\right)\Bigg|_0^c=\pi ab\left(c-\frac{c}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi abc.$$ Следовательно, объем эллипсоида равен $V=\frac{4}{3}\pi abc$.

Замечание. При $a=b=c$ получим уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$. Тогда формула для объема эллипсоида превратится в формулу для объема шара $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

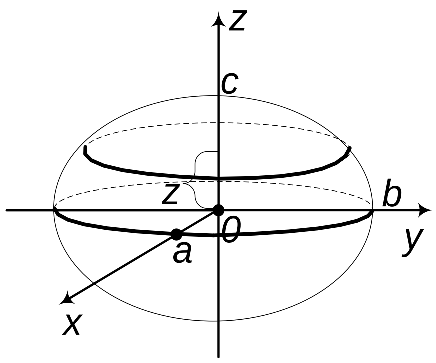

Рис. 29

Пример 2.2

Найти объем конуса с радиусом основания *R* и высотой *H* (рис. 30).

Решение

На рис. 30 $OA=R$, $OB=H$. Примем за ось *X* высоту конуса и рассмотрим сечения конуса плоскостями перпендикулярными оси X и отстоящими от точки *O* на расстояние *x* $(x\in[0,h])$. В сечении получается круг радиуса O_1A_1. Из подобия треугольников *OAB* и $O_1A_1B_1$ получим

$\dfrac{OA}{O_1A_1} = \dfrac{OB}{O_1B}$ или $\dfrac{R}{O_1A_1} = \dfrac{H}{H-x}$, отсюда находим $O_1A_1 = \dfrac{R}{H}(H-x)$.

Следовательно, площадь сечения $S(x) = \pi (O_1A_1)^2 = \pi \dfrac{R^2}{H^2}(H-x)^2$.

По формуле (26) объем конуса

$$V = \int_a^b \pi \frac{R^2}{H^2}(H-x)^2 dx = -\pi \frac{R^2}{H^2}\int_a^b (H-x)^2 d(H-x) =$$

$$= -\pi \frac{R^2}{H^2}\frac{(H-x)^3}{3}\bigg|_0^H = 0 + \pi \frac{R^2}{H^2}\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$, что совпадает с формулой геометрии.

При вычислении интеграла воспользовались тем, что

$\dfrac{1}{a} d(ax+b) = dx$, табличным интегралом 2 и формулой (6) при $u(x) = H - x$.

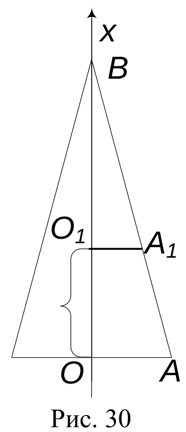

Рис. 30

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти объем тела ограниченного поверхностями

а. $z = x^2 + y^2$, $z = 1$ (рис. 31) **б.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2 - z$, $z = 0$

в. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$,

2. Найти объем пирамиды с площадью основания S_0 и высотой H.

Ответы

1. **а**. $\frac{\pi}{2}$ **б**. 12π **в**. 40π

2. $\frac{1}{3} S_0 H$.

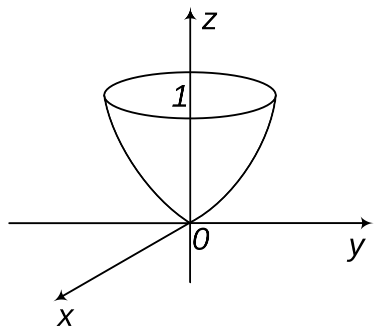

Рис. 31

2.2 Вычисление объемов тел вращения

1. Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$. Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции *AabB*, ограниченной осью *X*, кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 32), вокруг оси *X*, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx \qquad (27)$$

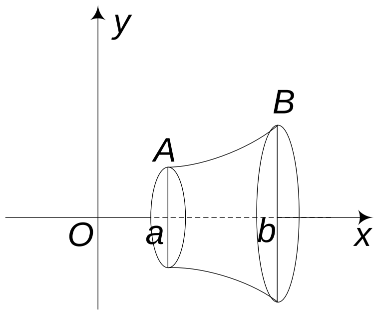

Рис. 32

2. Функция $g(y)$ непрерывна на промежутке $[c,d]$. Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции *AdcB*, ограниченной осью *Y*, кривой $x = g(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$ (рис.33), вокруг оси *Y* вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_c^d (g(y))^2 dy \qquad (28)$$

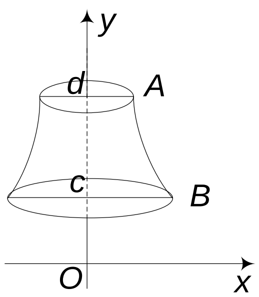

Рис. 33

Пример 2.3

Криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y^2 = x^3$, осью *X* и прямой $x = 1$ вращается вокруг оси *X*. Найти объем тела вращения (рис. 34)

Решение

Из уравнения $y^2 = x^3$ найдем $y = x^{\frac{3}{2}}$ $\left(x \in [0,1]\right)$ и воспользуемся формулой (27). Тогда $V = \pi \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 x^3 dx = \pi \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

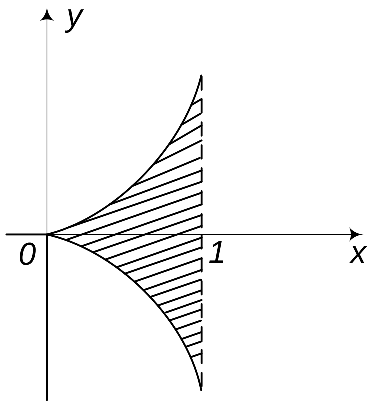

Рис. 34

Пример 2.4

Криволинейная трапеция из примера 2.3 вращается вокруг оси *Y*. Найти объем тела вращения (рис. 35)

Решение

Ясно, что $y \in [0,1]$, если $x \in [0,1]$. Объем равен разности двух объемов. Первый получен при вращении криволинейной трапеции *OABC*, ограниченной прямыми x=1, y=1 и осью *Y* вокруг оси *Y*. Он равен $V_1 = \pi \int_0^1 dy$. Второй получен при вращении криволинейной трапеции

OAB, ограниченной кривой $y^2 = x^3$ или $x = y^{\frac{2}{3}}$, прямой y=1 и осью *Y* вокруг оси *Y*. Он равен $V_2 = \pi\int_0^1 \left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2 dy$. Тогда объем

$$V = V_1 - V_2 = \pi\int_0^1 \left(1 - y^{\frac{4}{3}}\right)dy = \pi\left(y - \frac{y^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{4}{7}\pi .$$

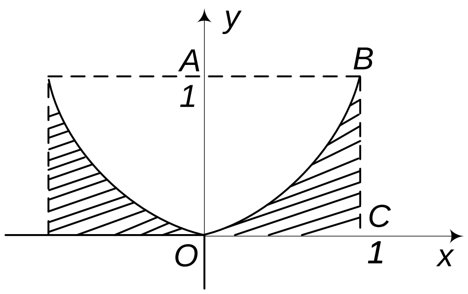

Рис. 35

Пример 2.5

Найти объем тела, полученного при вращении астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (рис. 22) вокруг оси *X*, используя её параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Решение

Так как кривая симметрична относительно оси *X*, то при вращении верхней и нижней части получается один и тот же объем, поэтому можно считать $y \geq 0$. Так как кривая симметрична относительно оси *Y*, вычислим половину объема $\left(x \in [0, a]\right)$. Тогда $\frac{1}{2}V = \pi \int_0^a y^2 dx$.

Воспользуемся параметрическими уравнениями астроиды. Если $x \in [0, a]$, то $t \in \left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$ (пример 1.5)

$y^2 = \left(a \sin^3 t\right)^2 = a^2 \sin^6 t$, $dx = d\left(a \cos^3 t\right) = 3a \cos^2 t(-\sin t)dt$. Следовательно,

$$\frac{1}{2}V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^6 t 3a \cos^2 t(-\sin t)dt = 3a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt =$$

$$= 3a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\left(1 - \sin^2 t\right)dt = 3a^3 \pi\left(I_7 - I_9\right)$$

(пример 4.8 главы 1). Применив несколько раз рекуррентную формулу (10) , получим

$$\frac{1}{2}V = 3a^3 \pi\left(I_7 - \frac{9-1}{9} I_7\right) = 3a^3 \pi \frac{1}{9} I_7 = \frac{1}{3} a^3 \pi \frac{(7-1)I_5}{7} =$$

$$\frac{1}{3} a^3 \pi \frac{6}{7} \frac{5-1}{5} I_3 = \frac{8}{35} a^3 \pi \frac{3-1}{3} I_1 = \frac{16}{105} a^3 \pi$$

Следовательно $V = \frac{32}{105} a^3 \pi$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Криволинейная трапеция, ограниченная кривыми $y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$ вращается вокруг оси X. Найти объем тела вращения.
2. Криволинейная трапеция из примера 1 вращается вокруг оси Y. Найти объем тела вращения.
3. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси X фигуры, ограниченной кривыми

а. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ **б**. $y = x^2 + 1$, $y = 3x - 1$.

4. Циклоида $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ (рис. 38) вращается вокруг оси X. Найти объем тела вращения.

Ответы

1. $\frac{5}{6}\pi$ **2.** $\frac{\pi}{2}$ **3. а**. $\frac{3}{10}\pi$

б. $\frac{17}{15}\pi$. **4.** $5\pi^2$.

§ 3. Длина дуги кривой, площадь поверхности вращения

3.1 Длина дуги кривой, заданной уравнением в декартовой системе координат

1. Кривая задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Длина дуги кривой между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx \qquad (29)$$

(производная $f'(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$).

2. Кривая задана уравнением $x = g(y)$, $y \in [c, d]$. Длина дуги кривой между точками $A(g(c), c)$ и $B(g(d), d)$ вычисляется по формуле

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\,dy \qquad (30)$$

(производная $g^{'}(y)$ непрерывна на промежутке $[c,d]$).

Замечание. Выражения $dl=\sqrt{1+\left(f^{'}(x)\right)^2}dx$, $dl=\sqrt{1+\left(g^{'}(y)\right)^2}dy$ - дифференциалы длины дуги кривой в декартовой системе координат.

Пример 3.1

Найти длину дуги кривой $y^3=x^2$, $x\in[0,1]$ (рис. 36)

Решение

Из неявного уравнения кривой $y^3=x^2$ находим $y=x^{\frac{2}{3}}$. Производная $y^{'}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. По формуле (29) длина дуги кривой

$l=\int\limits_0^1\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)^2}dx=\int\limits_0^1\sqrt{1+\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}}dx$. Получился сложный интеграл. Вычислим длину дуги кривой другим способом.

Способ 2.

Из неявного уравнения кривой $y^3=x^2$ находим $x=y^{\frac{3}{2}}$. Ясно, что $y\in[0,1]$, если $x\in[0,1]$.

Производная $x^{'}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$. По формуле (30) длина дуги кривой

$$l=\int\limits_0^1\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)^2}dy=\int\limits_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}y}dy=\frac{4}{9}\int\limits_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}y}d\left(1+\frac{9}{4}y\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\left.\frac{\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

При вычислении интеграла воспользовались свойством дифференциала $\frac{1}{a}d(ay+b)=dy$, табличным интегралом 2 и формулой (6) при $u(y)=\frac{9}{4}y+1$

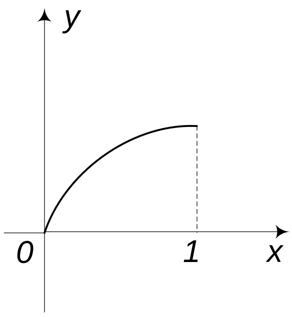

Рис. 36

Пример 3.2

Найти длину дуги кривой $y=\ln\sin x$, $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 37)

Решение

Найдя производную $y' = \frac{1}{\sin x}\cos x$ и применив формулу (29), получим

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\sin x|}dx$$

Так $\sin x > 0$, если $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos x}{1 - \cos^2 x}dx = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2}\ln 1 + \ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Воспользовались тем, что $\sin x dx = -d\cos x$, табличным интегралом 11 и формулой (6) при $u(x) = \cos x$.

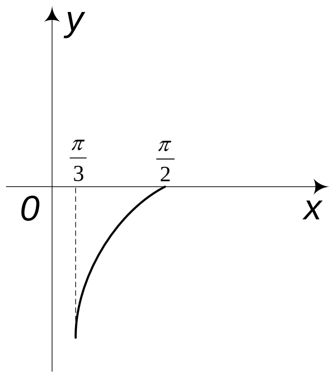

Рис. 37

Пример 3.3

Найти длину дуги кривой $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение

В силу симметрии кривой относительно оси X достаточно вычислить половину длины дуги кривой $\left(y \geq 0,\ \ x \in [0,2]\right)$. Из уравнения кривой находим $y = \sqrt{2x - x^2}$.

Производная $y' = \dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. По формуле (29)

$$\frac{1}{2}l = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{(1-x)^2}{2x - x^2}}dx = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} =$$

$$= \arcsin(x-1)\Big|_0^2 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi$$

Воспользовались свойством дифференциала $d(x-1) = dx$, табличным интегралом 9 и формулой (6) при $u(x) = x - 1$.

Тогда $l = 2\pi$ - длина дуги окружности единичного радиуса.

Замечание. Дифференциал длины дуги окружности равен

$$dl = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти дину дуги кривой

1. $y^2 = (x-1)^3$, $x \in [2{,}5]$

2. $y = \sqrt{2 - x^2}$, $x \in [0{,}1]$

3. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [0{,}1]$.

Ответы

1. $\dfrac{1}{27}\left(40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}\right)$ **2.** $\dfrac{\pi}{4}\sqrt{2}$ **3.** $\dfrac{e - e^{-1}}{2}$.

3.2 Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

Кривая задана параметрическими уравнениями

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [t_1, t_2]$ Длина дуги кривой между точками $A(x(t_1), y(t_1))$ и $B(x(t_2), y(t_2))$ вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt \qquad (31)$$

(производные $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны на промежутке $[t_1, t_2]$).

Замечание. Выражение $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$ - дифференциал длины дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями.

Пример 3.4

Найти длину дуги астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (рис. 22), используя её параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Решение

В силу симметрии кривой относительно координатных осей, достаточно найти длину одной четверти дуги астроиды, то есть можно считать, что $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Найдем производные $x' = \left(a\cos^3 t\right)' = 3a\cos^2 t(-\sin t)$, $y' = \left(a\sin^3 t\right)' = 3a\sin^2 t(\cos t)$. По формуле (31)

$$\frac{1}{4}l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t}\,dt =$$

$$= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\,dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin t\cos t\right| dt$$

Так как $\sin t\cos t \geq 0$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\left|\sin t\cos t\right| = \sin t\cos t$. Поэтому $\frac{1}{4}l = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\,dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,d(\sin t) = 3a\left.\frac{\sin^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a$.

Воспользовались тем, что $\cos x dx = d(\sin x)$, табличным интегралом 2 и формулой (6) при $u(x) = \sin x$. Отсюда следует, что длина дуги астроиды равна $6a$.

Замечание. Дифференциал длины дуги астроиды равен

$dl = 3a\cos t \sin t dt$.

Пример 3.5

Найти длину дуги циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$ (рис. 38)

Решение

Найдем производные $\begin{cases} x' = 1 - \cos t \\ y' = \sin t \end{cases}$

По формуле (31) длина дуги

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin \frac{t}{2}\right| dt .$$

Так как $\sin \frac{t}{2} \geq 0$, если $t \in [0, 2\pi]$, то

$$l = \int_0^{2\pi} 2\sin \frac{t}{2} dt = 4\int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} d\frac{t}{2} = -4\cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -4(\cos \pi - \cos 0) =$$

$$= -4(-2) = 8.$$

Воспользовались свойством дифференциала $dt = \frac{1}{a} d(at)$, табличным интегралом 5 и формулой (6) при $u(t) = \frac{1}{2} t$.

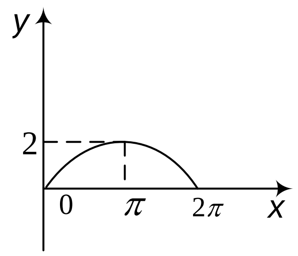

Рис. 38

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

2. Найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

3. Найти длину дуги астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$, записав ее уравнение в параметрической форме

Ответы

1. $2\pi a$ **2.** $8a$ **3.** 48.

3.3 Длина дуги кривой, заданной уравнением в полярной системе координат

Кривая задана уравнением в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$ $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Длина дуги кривой между точками $A(\alpha, \rho(\alpha))$ и $B(\beta, \rho(\beta))$ вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi \qquad (32)$$

($\rho(\varphi)$ и $\rho'(\varphi)$ непрерывны на промежутке $[\alpha, \beta]$).

Пример 3.6

Найти длину дуги кривой $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение

Длина дуги кривой была вычислена с использованием её уравнения в декартовой системе координат (пример 3.3).
Найдем длину дуги кривой другим способом, записав ее уравнение в полярной системе координат

$\rho = 2\cos\varphi$ (пример 1.7). Так как $y \geq 0$, то $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Производная

$\rho' = -2\sin\varphi$. По формуле (32)

$$\frac{1}{2}l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(2\cos\varphi)^2 + (-2\sin\varphi)^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$. Отсюда

$l = 2\pi$.

Замечание. Дифференциал длины дуги кривой $dl = 2d\varphi$.

Пример 3.7

Найти длину дуги кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$ (рис. 39)

Решение

При замене φ на $-\varphi$ выражение для ρ не меняется, поэтому кривая симметрична относительно полярной оси. Длина дуги кардиоиды равна удвоенной длине дуги *OBA*, которая описается полярным радиусом при изменении угла φ от 0 до π. Производная $\rho' = -\sin\varphi$

По формуле (32) половина длины дуги равна

$$\frac{1}{2}l = \int_0^{\pi} \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi = \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi=\int_0^{\pi}2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi$$

Так как $\cos\frac{\varphi}{2}\geq 0$, если $\varphi\in[0,\pi]$, то $\frac{1}{2}l=2\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=$

$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\frac{\varphi}{2}=4\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=4\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=4.$$

Воспользовались свойством дифференциала $dx=\frac{1}{a}dax$, табличным интегралом 6 и формулой (6) при $u(\varphi)=\frac{\varphi}{2}$.

Отсюда следует, что длина дуги кардиоиды равна 8.

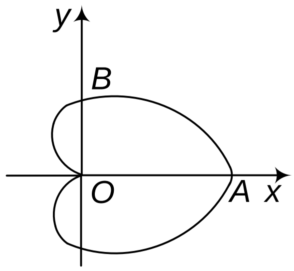

Рис. 39

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти длину дуги кардиоиды $\rho=1-\cos\varphi$

2. Найти длину дуги кривой переходя к полярной системе координат

а. $x^2+y^2=x$ **б**. $x^2+y^2=2y$.

Ответы

1. 8 **2. а.** π **б.** 2π.

3.4 Площадь поверхности вращения

Поверхность образована вращением вокруг оси *X* плоской кривой *AB*. Площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|y|dl\,, \qquad (33)$$

где

$$dl = \begin{cases} \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx, \text{ если } y = f(x) \\ \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt, \text{ если } x = x(t), y = y(t) \\ \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi, \text{ если } \rho = \rho(\varphi), \text{ при этом } y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

α и β - значения переменной интегрирования, соответствующие начальной и конечной точкам дуги.

Пример 3.8

Кривая $x^2 + y^2 = 2x$ вращается вокруг оси *X*. Найти площадь поверхности вращения.

Решение

Способ 1

Кривая симметрична относительно оси *X* , поэтому при вращении верхней и нижней половин получается одна и та же поверхность. Поэтому достаточно рассмотреть $y \ge 0$.

Из уравнения кривой находим $y = \sqrt{2x - x^2}$, $x \in [0,2]$. По замечанию к примеру 3.3 дифференциал длины дуги кривой $dl = \dfrac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$.

По формуле (33) $S = 2\pi\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\,\dfrac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = 2\pi\int_0^2 dx = 4\pi$ - это площадь поверхности сферы единичного радиуса.

Способ 2.
Запишем уравнение кривой в полярной системе координат $\rho = 2\cos\varphi$ (пример 3.6). Так как $y \geq 0$, то $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. По замечанию к примеру 3.6 дифференциал длины дуги кривой $dl = 2d\varphi$. По формуле (33)

$$S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\varphi\sin\varphi 2d\varphi = 8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\sin\varphi = \left.\frac{8\pi\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi .$$

Воспользовались тем, что $\cos xdx = d(\sin x)$, табличным интегралом 2 и формулой (6) при $u(x) = \sin x$.

Пример 3.9

Найти площадь поверхности полученной при вращении астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси X, используя её параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Решение
Так как кривая симметрична относительно оси *X*, то при вращении верхней и нижней части получается одна и та же поверхность, поэтому можно считать $y \geq 0$. Так как кривая симметрична относительно оси *Y*, вычислим половину площади поверхности вращения $\left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

По формуле (33) $\frac{1}{2}S = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)dl$. По замечанию к примеру 3.4 дифференциал длины дуги астроиды равен $dl = 3a\cos t\sin tdt$. Следовательно, $\frac{1}{2}S=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\cdot 3a\cos t\sin tdt=3a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos tdt=$

$$=6a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 td\sin t=\left.\frac{6a^2\pi\sin^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6}{5}a^2\pi$$. Тогда $S=\frac{12}{5}a^2\pi$.

Воспользовались тем, что $\cos xdx=d(\sin x)$, табличным интегралом 2 и формулой (6) при $u(x)=\sin x$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Кривая $y=x^3$ $x\in\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$ вращается вокруг оси *X*.

Найти площадь поверхности вращения.

2. Кривая $x^2+y^2=x$ вращается вокруг оси *X*.

Найти площадь поверхности вращения.

3. Найти площадь поверхности полученной, при вращении кривой вокруг оси *X*.

а. $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

б. $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

4. Найти площадь поверхности вращения, полученной при вращении вокруг полярной оси кривой $\rho=\cos\varphi$

5. Переходя к полярной системе координат найти площадь поверхности полученной при вращении вокруг оси *X* кривой $x^2+y^2=4x$.

Ответы

1. $\frac{2\pi}{27}\left(\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$ **2.** π **3.** **а**. $4\pi a^2$ **б**. $\frac{64}{3}\pi a^2$ **4**. π **5**. 16π.

Глава 3. Варианты контрольных работ

В этой главе приведены четыре варианта контрольных работ. Студенты могут использовать их для проверки своих знаний, а преподаватели для аудиторных и домашних контрольных заданий. Контрольные рассчитаны на наиболее насыщенную программу курса, поэтому в некоторых случаях отдельные примеры (особенно примеры 5) можно исключить из заданий.

Каждая контрольная работа состоит из пяти заданий на вычисление определенных интегралов методами, рассмотренными в пособии, а также на геометрические приложения определенного интеграла. Замена переменной и метод интегрирования по частям (пример 1) в определенном интеграле. Вычисление площадей плоских фигур, объемов тел вращения и длин дуг кривых, заданных уравнениями в декартовой системе координат (примеры 2, 3), а также кривых, заданных уравнениями в параметрической форме или в полярной системе координат (пример 5). Исследование сходимости несобственных интегралов I и II рода (пример 4).

Вариант 1

1. Вычислить интеграл $\int_0^1 xe^{2x}dx$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = x + 2$.

3. Найти длину дуги кривой $y = \sqrt{2 - x^2}$, $x \in [0,1]$.

4. Вычислить несобственный интеграл по бесконечному промежутку (I рода) или доказать, что он расходится $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+9}}$.

5. Найти фигуры ограниченной одной аркой циклоиды

$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \sin t \end{cases}$, $x \in [0, 2\pi]$ и осью *X*.

Вариант 2

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy = 1$, $y = x$, $x = 2$.
3. Найти объем тела , полученного при вращении вокруг оси *X* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $2y^2 = x^3$, осью *X* и прямой $x = 4$.
4. Вычислить несобственный интеграл по бесконечному промежутку (I рода) или доказать, что он расходится $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.
5. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = 1 - \cos\varphi$.

Вариант 3

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$
2. Найти площадь фигуры ограниченной кривыми $y = x^2 + 1$, $y = -x + 3$.
3. Найти длину дуги кривой $y = \ln\cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
4. Вычислить несобственный интеграл от неограниченной функции (II рода) или доказать, что он расходится $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.
5. Криволинейная трапеция ограниченная одной аркой циклоиды

$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \sin t \end{cases}$, $x \in [0, 2\pi]$ и осью *X* вращается вокруг оси *X*.

Найти объем тела вращения.

Вариант 4

1. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$.

2. Найти площадь фигуры ограниченной кривыми $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$.

3. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси *X* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$, осью *X* и прямой $x = 4$.

4. Вычислить несобственный интеграл от неограниченной функции (II рода) или доказать, что он расходится $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

5. Найти фигуры, ограниченной астроидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$, записав её уравнение в параметрической форме.

Приложение. Неопределенный интеграл и некоторые методы интегрирования.

Функция *F(x)* называется *первообразной* для функции *f(x)* на промежутке *(a,b)*, если выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

для любого $x \in (a,b)$.

Если промежуток (a,b) определен в соответствии с областями определения $f(x)$ и $F(x)$, то его не указывают. Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то любая первообразная имеет вид $F(x)+C$, где *C*- произвольная постоянная.

Неопределенным интегралом функции *f(x)* называется совокупность всех первообразных для данной функции. Для неопределенного интеграла принято обозначение $\int f(x)dx$ (читается интеграл $f(x)dx$), где

$\int$ - знак интеграла, *x*- переменная интегрирования, *f(x)*- подынтегральная функция, *f(x)dx*- подынтегральное выражение.

Итак,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где $F'(x) = f(x)$, *C*- произвольная постоянная.

Таблица основных интегралов

№	Функция	Неопределенный интеграл	Примечание
1	0	C	
2	x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\alpha \neq -1$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$

4	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}+C$	*a>0,* $a\neq 1$
4.a	e^x	e^x+C	
5	*sinx*	*-cosx+C*	
6	*cosx*	*sinx+C*	
7	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	*tgx+C*	$x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, *k*-целое
8	$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	*-ctgx+C*	$x\neq\pi k$, *k*-целое
9	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\dfrac{x}{a}+C$ $-\arccos\dfrac{x}{a}+C$	*a>0,* $\lvert x\rvert<a$
10	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C$ $-\dfrac{1}{a}arcctg\dfrac{x}{a}+C$	*a>0*
11	$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$	*a>0*
12	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+\alpha}\right\rvert+C$	α-любое

Простейшая замена переменной в неопределенном интеграле (подведение множителя под знак дифференциала).

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F((\varphi(x)) + C. \quad (3)$$

То есть, формула интегрирования справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией аргумента *x*.

Замена переменной в неопределенном интеграле.

Справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f(x(t)) \cdot x'(t)dt, \quad (4)$$

функция *x(t)* имеет обратную функцию *t(x)* и их производные связаны формулой $x'_t = \frac{1}{t'_x}$.

Подобрав функцию *x(t)* можно добиться того, что интеграл в правой части имеет более простой вид.

Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

Справедлива формула

$$\int udv = vu - \int vdu \quad (5)$$

или

$$\int uv'dx = uv - \int uv'dx \quad (6)$$

(подынтегральные функции непрерывны).

Список литературы

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1., М., 1968.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. М., 1986
3. Шипачев В.С. Высшая математика. М., 1990.
4. Шипачев В.С. Сборник задач по высшей математике. М., 1994.
5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1971.
6. Андрианова Т.Н., Волков В.А., Ефимова Т.А., Коломойцева З.Д. и др. Задачник практикум по высшей математике. Интегральное исчисление. СПб., 1994.
7. Ефимова Т.А. Неопределенный интеграл. СПб., 2005.

Содержание

Подписано к печати 29.09.2009. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Тираж 300 экз. Заказ 72.
Отпечатано в типографии РЕНОВА
199106, г. Санкт-Петербург, ул. Весельная, д.6