

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОРЛОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.С. ТУРГЕНЕВА
ВОЕННО-ВОЗДУШНАЯ АКАДЕМИЯ им. ПРОФЕССОРА Н.Е. ЖУКОВСКОГО
И Ю.А. ГАГАРИНА
ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ,
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
И КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
(ПМТУКТ-2022)**

*Сборник трудов
Международной научной конференции*

Воронеж, 13–16 декабря 2022 г.

ВОРОНЕЖ
2022

УДК 51
ББК 22я73
С56

О р г к о м и т е т :

председатель: декан математического факультета,
заведующий кафедрой математического моделирования ВГУ *М.Ш. Бурлуцкая*;
сопредседатель: профессор, заведующий кафедрой управления СПбГУ *А.П. Жабко*;
заместители председателя: профессор ВГУ *В.В. Провоторов*;
доцент *В.В. Малыгина*, ПГНИУ, доцент *А.В. Иванов*, ВУНЦ ВВС «ВВА»;
члены оргкомитета: *С.Г. Тихомиров, А.А. Парт, О.Р. Корчагина*

Программный комитет:

председатель: декан факультета прикладной математики – процессов управления
СПбГУ *Л.А. Петросян*;
сопредседатели: декан факультета прикладной математики, механики и информатики
ВГУ *С.Н. Медведев*;
декан математического факультета,
заведующий кафедрой математического моделирования ВГУ *М.Ш. Бурлуцкая*;
заместители председателя: *А.П. Жабко, В.П. Максимов, В.В. Провоторов*;
члены программного комитета: *Е.И. Моисеев, А.В. Ильин, А.Ю. Александров,*
А.П. Афанасьев, В.К. Битюков, Л.Н. Борисоглебская, А.В. Боровских, Г.В. Демиденко,
С.М. Дзюба, А. Domoshnitsky, Я.М. Ерусалимский, Е.С. Жуковский, С.Е. Жуковский,
В.Г. Задорожний, А.В. Иванов, А.М. Камачкин, Н.Ю. Лукоянов, В.В. Малыгина,
К.Б. Нуртазина, С.Л. Подвальный, А.А. Рогов, Т.И. Смирнов, Д.С. Сайко,
А. Shindiarin, А.П. Хромов, А.Д. Чернышов, В.А. Юрко

С56 **Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2022):** сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 13-16 декабря 2022 г. / под ред. В.В. Провоторова. – Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2022. – 124 с.

ISBN 978-5-00044-935-6

В сборнике представлены статьи по материалам докладов и лекций, включенных в программу Международной научной конференции ПМТУКТ-2022. Тематика охватывает широкий спектр проблем прикладной математики, теории управления, дифференциальных игр, качественных методов математического моделирования в различных разделах естествознания (биология, медицина, химия), другие разделы современной прикладной математики (в том числе экономического характера). Представлены приближенные методы исследования математических моделей, компьютерные технологии в процессах управления, а также современные компьютерные технологии создания программных продуктов.

УДК 51
ББК 22я73

ISBN978-5-00044-935-6

© Воронежский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный университет, Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2022
© Воронежский государственный педагогический университет, редакционно-издательская обработка, 2022

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНФЛИКТА НА ПРИМЕРЕ «РАБОТНИК-РАБОТОДАТЕЛЬ»

Антипова Е.С.

ФГБОУ ВО «Государственный университет управления», г. Москва

Конфликты являются движущей силой развития общества[1]. Существует множество определений конфликтов и подходов к их моделированию [2, 3, 4].

В данной работе рассмотрен подход к определению конфликта с точки зрения теории управления и проанализирован конкретный пример конфликтной ситуации «работник-работодатель».

Под конфликтом понимается рассогласование между тем, что хочет субъект и тем, что имеет. Выполнены следующие условия:

- 1) рассогласование – неотрицательная величина;
- 2) если рассогласование субъекта равно 0, то конфликт у данного субъекта отсутствует;
- 3) каждый субъект обладает своим рассогласованием, а, следовательно, и своим конфликтом.

Рассмотрим двух субъектов – работника и работодателя. Работник выполняет некую работу, и получает определенную заработную плату, но он хочет получать больше за свою работу. В свою очередь работодатель считает, что работник работает плохо, или хочет, чтобы работник работал больше. У каждого из них возникает рассогласование между тем, что они хотят, и тем, что имеют. У каждого возникает свой конфликт – «маленькая зарплата» для работника и «плохая работа» для работодателя.

Пусть для определенности рассогласование работника u_1 , а рассогласование работодателя u_2 .

Учитывая условия 1–3, рассогласования работника и работодателя описываются уравнениями:

$$u_1^{(n)} = u_1^{(n-1)} - k_{21}u_1^{(n-1)} - k_{22}u_2^{(n-1)} \quad (1)$$

$$u_2^{(n)} = u_2^{(n-1)} - k_{11}u_1^{(n-1)} - k_{12}u_2^{(n-1)} \quad (2)$$

где параметры $k_{ij}, i = 1; 2, j = 1; 2$ характеризуют поведение субъектов в данной конфликтной ситуации и являются параметрами, определяющими силу воздействия участников конфликтной ситуации друг на друга. Индексом n обозначен номер контакта (встречи, взаимодействия) субъектов. Уравнения (1), (2) описывают динамику конфликтной ситуации.

Каждый из параметров $k_{ij}, i = 1; 2, j = 1; 2$ имеет свой смысл:

$k_{11} < 0$ означает, что чем меньше заработная плата работника, тем хуже он работает, при этом увеличиваются u_1 и u_2 . В этом случае работник показывает работодателю, что при повышении заработной платы, он будет работать лучше.

$k_{22} < 0$ означает, что чем хуже работник работает, тем меньшую заработную плату ему платит работодатель при этом увеличиваются u_2 и u_1 . В этом случае работодатель показывает работнику, что, работая лучше, он будет получать большую заработную плату.

$k_{11} > 0$ показывает, что чем меньше заработная плата работника, тем лучше он работает при этом увеличивается u_1 и уменьшается u_2 . В этом случае работник надеется, что, если он будет работать лучше, работодатель это заметит, и повысит ему заработную плату.

$k_{22} > 0$ показывает, что чем хуже работник работает, тем большую заработную плату ему платит работодатель, при этом увеличиваются u_2 и уменьшается u_1 . В этом случае работодатель надеется, что если он будет больше платить работнику, то работник будет лучше работать.

$k_{21} > 0$ показывает, что чем меньше заработная плата работника, тем быстрее работодатель повышает ему заработную плату, при этом уменьшая u_1 . Работодатель идет навстречу работнику, независимо от того, как работник работает.

$k_{12} > 0$ показывает, что чем хуже работник работает, тем быстрее он повышает качество своей работы, при этом уменьшая u_2 . Работник идет навстречу работодателю, независимо от того, какую заработную плату тот ему платит.

$k_{21} < 0$ характеризует занижение работодателем заработной платы работнику. Работодатель может считать, что работники так много получают, или показывает работнику, что он в нем не заинтересован.

$k_{12} < 0$ характеризует снижение качества работы работника. Работник может считать, что он и так много делает, или показывает работодателю, что он не держится за эту работу.

В ходе исследования были получены достаточные условия и критерий существования устойчивого бесконфликтного состояния системы. Проведенный анализ показал, что при выполнении условий критерия конфликт затухает у обоих участников (рис. 1а), что приводит к компромиссному завершению конфликта, например, работник начинает работать лучше, начальник повышает ему заработную плату.

Невыполнение условий критерия для одного из участников конфликта приводит к победному завершению конфликта одним из участников, т.е. происходит затухание конфликта одного участника (победа) и разгорание конфликта другого участника. На рис. 1б показано победное завершение конфликта работником – работодатель повысил ему заработную плату, но при этом сам остался недоволен его работой.

Невыполнение условий критерия для двоих участников конфликта приводит к проигрышному завершению конфликтной ситуации, когда рассогласования обоих субъектов возрастают, т.е. происходит разгорание конфликтов обоих участников (рис. 1с). Итогом может служить увольнением работника работодателем, либо добровольное увольнение самим работником.

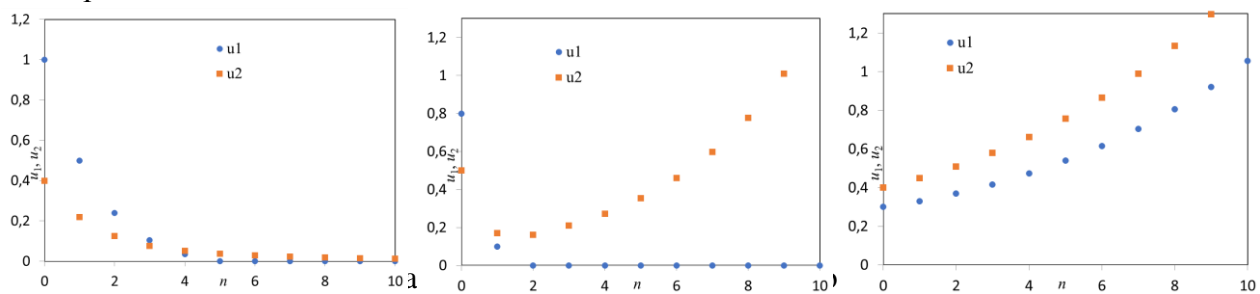


Рисунок 1. Зависимости $u_1(t)$ и $u_2(t)$:

а – компромиссное завершение конфликта: $u_1^{(0)} = 1; u_2^{(0)} = 0.5; k_{11} = 0.1; k_{22} = 0.2;$
 $k_{12} = 0.3; k_{21} = 0.5$

б – победное завершение конфликта: $u_1^{(0)} = 0.8; u_2^{(0)} = 0.5; k_{11} = 0.6; k_{22} = 0.6;$
 $k_{12} = -0.3; k_{21} = 0.5$

с – проигрышное завершение конфликта: $u_1^{(0)} = 0.3; u_2^{(0)} = 0.5; k_{11} = 0.5; k_{22} = -0.6;$
 $k_{12} = -0.5; k_{21} = 0.7$

Литература

1. Turchin, P., Currie, T. E., Turner, E. A., & Gavrillets, S. War, space, and the evolution of Old World complex societies // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2013. Т. 110. № 41. С.16384-16389.

2. Wakulicz-Deja A., Przybyła-Kasperek M. Pawlak's conflict model: Directions of development // 2016 Federated Conference on Computer Science and Information Systems (FedCSIS). IEEE, 2016. С.191-197.

3.Ивашкин Ю. А. Структурно-параметрическое моделирование и идентификация аномальных ситуаций в сложных технологических системах //Проблемы управления. 2004. №. 3. С.39-42.

4. Guo W. Common statistical patterns in urban terrorism // Royal Society open science. 2019. Т. 6.№. 9. С.190645.

© Антипова Е.С.

УДК 517.911

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Асташова И.В.

ФГБОУ ВО «МГУ им. М. В. Ломоносова», ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», г. Москва

Обсуждаются некоторые методы (см., например, [1--6]) изучения качественных и асимптотических свойств решений уравнения

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(x)y^{(j)} = p(x)|y|^k \operatorname{sgn} y, \quad (1)$$

где $k > 1$, $n \geq 2$, а функции p, a_0, \dots, a_{n-1} непрерывны на $[0; \infty)$, и некоторых его частных случаев.

Если рассматривать уравнение (1) как возмущение соответствующего линейного уравнения ($p = 0$), то можно утверждать, что при соответствующих условиях на коэффициенты уравнения решения уравнения (1) в некотором смысле близки к решениям линейного уравнения, описание поведения которых содержится в [1]. А именно справедлива следующая

Теорема 1. *Если непрерывные функции a_0, \dots, a_{n-1} и p удовлетворяют условиям*

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-j-1} |a_j(x)| dx < \infty \text{ при всех } j \in \{0, \dots, n-1\} \quad (2)$$

и, при некотором $m \in \{0, \dots, n-1\}$, условию

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{n-1+(k-1)m} |p(x)| dx < \infty, \quad (3)$$

то для любой константы $C \neq 0$ существует решение уравнения (1), со следующими асимптотиками на бесконечности:

$$y^{(j)}(x) \sim \frac{Cm! x^{m-j}}{(m-j)!} \text{ при } 0 \leq j \leq m,$$

$$y^{(j)}(x) = o(x^{m-j}) \text{ и } \int_{x_0}^{\infty} s^{j-m-1} |y^{(j)}(s)| ds < \infty \text{ при } m < j < n.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы без интегральной оценки производных решения может быть также получено из [3, Следствие 8.2] (доказательство см. в [7]).

Замечание 2. В [5], при замене (3) на более строгое условие

$$\int_{x_0}^{\infty} x^{(n-1)(k+1)} |p(x)| dx < \infty,$$

для любых констант C_1, \dots, C_{n-1} доказано существование решения уравнения (1) с асимптотикой $y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j \xi_j(x) + o(1)$ при $x \rightarrow \infty$, где функции $\xi_j \sim x^j/j!$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) при $p \equiv 0$. В [2] при условии $a_j = 0, j = 0, \dots, n-1$, и более слабом условии на функцию p доказано существование решений

уравнения (1), эквивалентных $x^j, j = 0, \dots, n - 1$ (но не любой их линейной комбинации).

Литература

- 1.Соболь И.М. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений Доклады АН СССР 1948. Т. LXI, 2. С. 219-222.
2. Кигурадзе И.Т. О колеблемости решений уравнения $d^m u/dt^m + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$. Мат. сб., 65 (1964), 2, 172-187.
3. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.
4. Astashova, I.V. On existence of non-oscillatory solutions to quasi-linear differential equations Georgian Math. J. 2007. Vol. 14. P. 223-238.
5. Astashova, I. V. On the asymptotic behavior at the infinity of solutions to quasi-linear differential equations Math. Bohem. 2010.135. P. 373-382 .
6. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: Научное издание под ред. Асташовой И.В., ЮНИТИ-ДАНА, Москва. 2012. С. 22-290.
7. Astashova I., Bartusek M., Dosla Z., Marini M. Asymptotic proximity to higher order nonlinear differential equations Adv. in Nonlin. Anal. 2022. V. 11. 1. P. 1598-1613.

© Асташова И.В.

УДК 517.958

ОБ УСЛОВИИ ГАРМОНИЧНОСТИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ

Афанасенкова Ю.В., Гладышев Ю.А.

*ФГБОУ ВО «Калужский Государственный Университет им. К.Э. Циолковского»,
г. Калуга*

Построение решений многомерного уравнения Лапласа

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0. \quad (1)$$

Можно осуществить методом параметрических обобщенных степеней (ПОС). В символической форме базисные решения (1) представлены в виде

$$\varphi = \left(\sum n_i x_i \right)^n C, \quad (2)$$

где C – обобщенная константа, а $x_i^{(n)}$ – функции x_i , полученные по определенному правилу и названные обобщенными степенями (ОС) [1]. Выражение (2) раскрывается по биномиальной формуле.

Основное условие, которое названо условием гармоничности, то есть удовлетворяет (2) достаточно простое

$$\sum_{i=1}^n n_i = 0.$$

Если рассматривать n_i как компоненты вектора в некотором особом пространстве H размерности $\alpha - 1$, то представляет интерес изучения его свойств. Прежде всего каждое его подпространство дает решения (2) – зависимость меньшего числа переменных x_i . Например,

если $\alpha = 3$, то α_n имеет размерность 2 и определяет решения (2) вида $(x_1 - x_2)^n, (x_2 - x_3)^n, (x_3 - x_1)^n$.

Для $\alpha = 3$ в $H^{\alpha=2}$ имеем основные два вектора $(1, -1, \nu)$ и $(\nu, 1, -1)$. Они образуют вектор $(1, -2, 1)$. Этот вектор и в простейшем случае дает решения

$$(x_1, -2x_2^2, x_3^2), (x_1^2, -x_2^2, 0), (0, x_2, -x_3).$$

Здесь учтем, что $X(i) = \frac{x_1^2}{2}$.

Подпространство $H^{l(k)}$ могут иметь общие элементы. В этот случае назовем их пересекающимися. Если общих элементов нет, то назовем их независимыми.

Вполне возможно, что обратное сложение подпространств H^l связано с определенной операцией, определенной некоторым оператором, отличным от оператора Лапласа.

Литература

1. Гладышев Ю.А. Формализм Бельтарами-Берса и его приложения в математической физике. Калуга. КГУ. 1997;
2. Ландау Л.Д. Квантовая механика, М, ГИФМЛ, 1963, т. III.

© Афанасенкова Ю.В., Гладышев Ю.А.

УДК 51 (091)

ОБ ОСНОВНЫХ ЭТАПАХ РАЗВИТИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА (1920-е-1960-е гг.)

Богатов Е.М.

*Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в городе Губкине Белгородской области, г. Губкин;
Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС», г. Старый Оскол*

Историко-научный анализ общего состояния нелинейного функционального анализа и выделение основных этапов его развития, по-видимому, ранее не проводились. В статье А.М. Вершика [1] была проведена периодизация *линейного* функционального анализа, которая может быть рассмотрена, как «нулевое приближение» к изучаемому вопросу. Как известно, нелинейный функциональный анализ во многом опирается на линейный, но их развитие шло по разным сценариям, поэтому требует отдельного исследования. Следует также отметить, что нелинейный функциональный анализ с самого своего появления предоставлял инструментарий для проведения качественного анализа поведения нелинейных систем (прежде всего, из области небесной механики). Этим он существенно отличался от своего линейного «двойника», эволюция которого на начальном этапе следовала внутренней логике развития самой математики.

1. Предыстория (1905-й-1920-й гг.)

Сейчас не подлежит сомнению тот факт, что теория линейных операторов возникла, как обобщение теории линейных интегральных уравнений, разработанной И. Фредгольмом, Д. Гильбертом и Э. Шмидтом [2]. С теорией нелинейных операторов произошло то же самое. Вскоре после выхода мемуара А.М. Ляпунова (1905) [3], в котором содержалось нелинейное интегральное уравнение, описывающее равновесие вращающейся жидкости, в работе Э. Шмидта (1908) [4] появился и был исследован абстрактный аналог этого уравнения.

Дальнейшее развитие это направление получило в рамках теории нормированных пространств Н. Винера и С. Банаха.

2. Начальный период (1920-й-1930-й гг.)

Польская математическая школа во главе со С. Банахом и Г. Штейнгаузом внесла весомый вклад в развитие функционального анализа [5]. В её рамках уже в начале 1920-х гг. был доказан метод сжимающих отображений [6, с. 160], а в 1927 г. была доказана теорема (Ю. Шаудер, [7]) о том, что всякий непрерывный оператор, преобразующий замкнутую выпуклую область банахова пространства E в себя, имеет неподвижную точку. Метод сжимающих отображений и теорема о неподвижной точке быстро стали рабочим инструментом в решении нелинейных задач.

В тот же период получили своё развитие методы решения задач вариационного исчисления в целом, восходящие к поиску числа геодезических на поверхностях рода h [8]. В определённом смысле они явились обобщением задач об оценке числа критических точек дифференцируемой функции n переменных, заданной на многообразии M . В результате функциональный анализ обогатился теорией Морса [9], в основе которой лежат гомологическая структура M , и теорией категорий Люстерника-Шнирельмана [10], опирающейся на гомотопические инварианты. Это, в частности, дало возможность оценивать число критических точек функционалов, определённых на семействах кривых.

Ещё одним разделом математики, ставшим частью нелинейного функционального анализа, явилась теория ветвления. Она имеет своим истоком задачу о равновесии вращающихся жидкостей [11] и зародилась в цитированных работах А.М. Ляпунова [3] и Э. Шмидта [4]. Ключевым элементом данной теории можно считать *редукцию Ляпунова-Шмидта*, то есть сведение бесконечномерного нелинейного уравнения к конечномерному (уравнению разветвления).

3. Период роста и становления (1930-е гг. - конец 1940-х гг.)

К середине 1930-х гг. нелинейный функциональный анализ обрёл своё место в математике и закрепил за собой статус «поставщика» качественных методов. Этому во многом способствовало возникновение новой теории – *степени отображения*, пришедшей из конечномерного анализа [12]. С помощью этой теории удалось не только ответить на вопрос о разрешимости уравнения

$$Ax = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, x \in G \subset E \quad (1)$$

но и на вопрос о количестве решений этого уравнения.

Методы исследования шли от Ж. Лере и Ю. Шаудера (1934), которые сформулировали *принцип неподвижной точки* для уравнения (1) с вполне непрерывным оператором A . В современных терминах его суть заключается в том, что если вращение векторного поля $\Phi = I - \lambda A$ на границе G отлично от нуля, то внутри области G имеется неподвижная точка.

К данному периоду также возможно отнести создание теории полуупорядоченных пространств (Л.А. Канторович, 1935-1937 гг.). В её рамках, в частности, был разработан общий принцип метода мажорант для доказательства существования решений нелинейных функциональных уравнений и установления сходимости метода последовательных приближений.

4. Период расцвета (конец 1940-х гг. -1960-е гг.)

Во время второй мировой войны исследования в области нелинейного функционального анализа в Европе и СССР существенно замедлились. Однако к концу 1940-х гг. они опять вышли на предвоенный уровень. Выход большой статьи М.Г. Крейна и М.А. Рутмана (1948) [13] ознаменовал появление нового раздела нелинейного функционального анализа – *теории положительных операторов* (операторов, оставляющих инвариантным некоторый конус в банаховом пространстве). Развитие этой теории силами М.А. Красносельского и его учеников в 1950-е -1960-е гг. позволило получить ряд ярких результатов по отношению к уравнению (1) как локального, так и глобального характера (теоремы существования и единственности, теоремы о структуре спектра, сходимости метода последовательных приближений, «конусная» теорема о неподвижной точке и т.п. [14]). Эти

результаты практически сразу нашли своё применение в прикладных областях. В конце 1940-х гг. в журнале «Успехи математических наук» вышла основополагающая статья Л.В. Канторовича «Функциональный анализ и прикладная математика», в которой получили обоснование метод Ньютона и ряд других методов приближённого решения нелинейных операторных уравнений.

Для данного периода оказалось типичным взаимное проникновение идей из смежных разделов самого нелинейного функционального анализа, а также высокая востребованность со стороны других дисциплин: уравнений в частных производных, обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейной механики, гидродинамики и др.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 20-011-00402 А.

Литература

1. *Вершик А.М.* Жизнь и судьба функционального анализа в XX веке / В сб. Математические события XX века, ред. В.И. Арнольд. М.: ФАЗИС, 2003. с. 81-92.
2. *Stewart G. W.* FREDHOLM, HILBERT, SCHMIDT Three Fundamental Papers on Integral Equations. Translated with commentary by G. W. Stewart. – 2014.[Интернет-ресурс]URL: <http://www.cs.umd.edu/~stewart/FHS.pdf> (дата обращения 03.03.2019)
3. *Liapounoff A.* Sur un problème de Tchebycheff // Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg, Vol. 17 (8me Serie), 1905, no. 3, pp. 1-31.
4. *Schmidt E.* Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen // Math. Ann. – 1908. – V. 65. – Iss. 3. – p. 370-399.
5. *Duda R.* Pearls from a Lost City: The Lvov School of Mathematics Translated by D. Davies. Providence, R.I.: American Math. Society, 2014. xi + 231 p.
6. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales// Fund. Math. 3 (1922), p. 133—181.
7. *Schauder J.* Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen // Math. Zeitschr. – 1927. – Vol. 26. – №. 1. – s. 47-65.
8. *Богатов Е.М.* Некоторые заметки об истории вариационного исчисления в целом / Классическая и современная геометрия: материалы междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. Л.С. Атанасяна. Под ред. А.В. Царева. М.: МПГУ, 2021. С. 48-49.
9. *Morse M.* The foundations of a theory in the calculus of variations in the large // Trans. Amer. Math. Soc. 30 (2) (1928). p. 213–274.
10. *Люстерник Л. А., Шнирельман Л. Г.* Топологические методы в вариационных задачах. М.: Иссл. ин-т матем. и мех. при 1-м МГУ. – 1930 - 68 с.
11. *Богатов Е.М.* Об истории теории ветвления и вкладе отечественных математиков / Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XIX Междунар.конф., Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2021. С. 221-225.
12. *Богатов Е.М.* Об истории геометрических методов нелинейного анализа / Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XVIII междунар. конф., (23-26 сентября 2020). - Тула, ТГПУ им. Л.Н. Толстого. 2020. с. 317-321.
13. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // УМН, 3:1(23) (1948), с. 3–95.
14. *Богатов Е.М.* Об истории положительных операторов (1900-е-1960-е гг.) и вкладе М.А. Красносельского // Науч. вед. БелГУ. Сер. Прикладная матем., Физ., 2020. Т. 52, № 2, с. 105-127.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМЕННОГО АППАРАТА
ВОЗДУХОРАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ**

Воробьев А.А.¹, Хвостов А.А.^{1,2}, Журавлев А.А.¹, Куксов Д.Ю.¹

¹*ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

²*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», г. Воронеж*

Одним из основных аппаратов мобильных воздуходелительных установок (ВРУ) является основной теплообменник (ОТ), представляющий собой кожухотрубчатый теплообменник и обеспечивающий передачу теплоты отбросного потока (ОП) к воздуху высокого давления (ВВД). Поскольку ОТ включен в контур сложного технологического процесса, то колебания его режимных параметров крайне нежелательны, так как могут привести к резкому снижению выхода целевого продукта.

Целью работы является синтез динамической математической модели ОТ, позволяющей оценить динамические режимы его работы и выбрать оптимальные условия для его эксплуатации.

В основу математической модели положены балансовые соотношения для тепловых потоков от ОП к стенке змеевика, теплопередачи через стенку, затем от стенки к ВВД. Межтрубное пространство для ОП рассматривается как реактор идеального смешения (РИС), трубное пространство для ВВД – как реактор идеального вытеснения (РИВ) [1]. При таком подходе динамическая модель ОТ имеет вид системы дифференциальных уравнений, дополненных соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{cases} V_{on}\rho_{on}c_{on}\frac{dT_{on}(t)}{dt} = v_{on}\rho_{on}c_{on}[T_{on}^{ex} - T_{on}(t)] + F_{on}K_{Ton}[T_{cm}(t) - T_{on}(t)]; \\ S_{\epsilon}\rho_{\epsilon}c_{\epsilon}\frac{\partial T_{\epsilon}(x,t)}{\partial t} = -v_{\epsilon}\rho_{\epsilon}c_{\epsilon}\frac{\partial T_{\epsilon}(x,t)}{\partial x} + \frac{F_{\epsilon}K_{T\epsilon}}{L_{\epsilon}}[T_{cm}(t) - T_{\epsilon}(t)]; \\ m_{cm}c_{cm}\frac{dT_{cm}(t)}{dt} = F_{on}K_{Ton}[T_{on}(t) - T_{cm}(t)] - F_{\epsilon}K_{T\epsilon}\left[T_{cm}(t) - \frac{1}{L_{\epsilon}}\int_0^{L_{\epsilon}}T_{\epsilon}(x,t)dx\right]; \\ T_{on}(0) = T_{on0}, T_{\epsilon}(x,0) = T_{\epsilon0}(x), T_{\epsilon}(0,t) = T_{x0\epsilon}(t), T_{cm}(0) = T_{cm0}, \end{cases} \quad (1)$$

где $T_{on}(t)$, $T_{cm}(t)$ – температура ОП и продукта центра стенки в момент времени t , °С; V_{on} , V_{ϵ} – объем зоны РИС и РИВ, м³; F_{on} , F_{ϵ} – площадь поверхности теплообмена между ОП и стенкой змеевика и стенкой и ВВД, м²; K_{Ton} , $K_{T\epsilon}$ – коэффициент теплопередачи от ОП к центру стенки и от ВВД к центру стенки, Вт/(м²·К); L_{ϵ} – длина зоны РИВ, м; S_{ϵ} – площадь поперечного сечения РИВ, м²; T_{on}^{ex} , $T_{x0\epsilon}(t)$ – температура ОП на входе в зону РИС и температура ВВД на входе в зону РИВ, °С; $T_{\epsilon}(x,t)$ – функция распределения температуры теплоносителя по пространственной координате и времени, °С; ρ_{on} , ρ_{ϵ} – плотность ОП и ВВД, кг/м³; c_{on} , c_{ϵ} , c_{cm} – удельная теплоемкость ОП, ВВД и стенки, Дж/(кг·К); v_{on} , v_{ϵ} – объемный расход ОП и ВВД, м³/с; m_{cm} – масса стенки, кг.

Для реализации модели (1) в системы компьютерного моделирования MathWorks Simulink™ [2], представим расчетные соотношения в виде системы скалярных и матричных однородных дифференциальных уравнений [3]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}_g(t)}{dt} &= -\frac{v_g}{\Delta x S_g} [\mathbf{A}\mathbf{T}(t) + \mathbf{C}(t)] + \frac{F_g K_{Tg}}{V_g \rho_g c_g} [T_{cm}(t) - \mathbf{T}_g(t)]; \\ \frac{dT_{on}(t)}{dt} &= \frac{v_{on}}{V_{on}} [T^{ex} - T_{on}(t)] + \frac{F_{on} K_{Ton}}{V_{on} \rho_{on} c_{on}} [T_{cm}(t) - T_{on}(t)]; \\ \frac{dT_{cm}(t)}{dt} &= \frac{F_g K_{Tg}}{m_{cm} c_{cm}} \left[\frac{1}{L_g} \sum_{i=1}^N T_{ei}(t) \Delta x - T_{cm}(t) \right] - \frac{F_{on} K_{Ton}}{m_{cm} c_{cm}} [T_{cm}(t) - T_{on}(t)]; \\ \mathbf{T}_g(0) &= \mathbf{T}_{g0}, T_{on}(0) = T_{on0}, T_{cm}(0) = T_{cm0}. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

где N – число элементов дискретизации по длине зоны РИВ; i – порядковый номер текущего элемента зоны РИВ; $\mathbf{T}_g(t)$, \mathbf{T}_{g0} – соответственно, вектор текущей температуры и начальных условий в точках разбиения по пространственной координате; \mathbf{A} – матрица разложения первой производной; $\mathbf{C}(t)$ – вектор, задающий граничное условие.

Синтезированная математическая модель основного теплообменника позволяет в режиме реального времени описать динамику изменения основных параметров его работы (рисунок), использовать ее в качестве имитационной при оценке каналов управления работой теплообменника, а также оценить влияние конструктивных параметров аппарата на эффективность его работы. Например, провести анализ недорекуперации вследствие эксплуатации установки при экстремальных температурах окружающего воздуха при разных вариантах теплоизоляции.

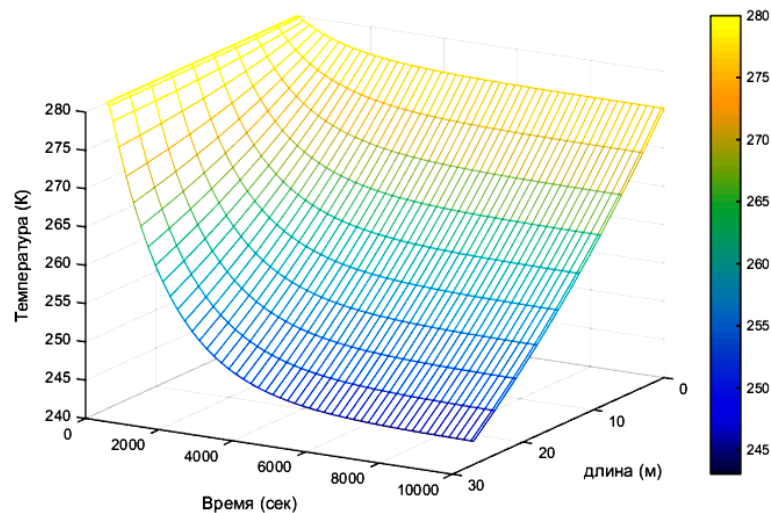


Рисунок. Распределение температуры воздуха по длине змеевика

Литература

1. Математическое моделирование процессов и аппаратов химических, пищевых и биотехнологических производств : учебное пособие / Д.С. Дворецкий, С.И. Дворецкий, Е.В. Пешкова, М.С. Темнов. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014. – 80 с.
2. MathWorks [официальный сайт]. URL: <http://matlab.ru/> (дата обращения 30.10.2022).
3. Khvostov A.A. Matrix dynamic models of elements of technological systems with perfect mixing and plug-flow hydrodynamics in Simulink / A. Khvostov, V. Ryazhskikh, M. Magomedov, A. Zhuravlev // Foods and Raw Materials, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 483–492. DOI: <http://doi.org/10.21603/2308-4057-2018-2-483-492>.

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОНЯТИЯ ОБОБЩЕННОЙ СТЕПЕНИ

Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А.

*ФГБОУ ВО «Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского»,
г. Калуга*

В работе предложена попытка уточнить понятие обобщенной степени. Это связано с тем, что эта конструкция находит приложения в различных вопросах теории линейных дифференциальных уравнений [1-6].

В самом общем смысле это последовательность функций. Для простоты предположим зависимость от одного независимого переменного x . Обозначим элементы этой последовательности $X^{(n)}(x, x_0)$. В некоторых работах эта последовательность названа вариантой [7].

Введем линейный дифференциальный оператор D . Он может содержать некоторые параметры, которые назовем явными. Положим, что оператор имеет непустое ядро, причем элементы ядра обозначим C , т.е. $DC = 0$.

В свою очередь элементы C могут содержать параметры, которые назовем неявными (скрытыми) и они не входят в D .

Дополним символ $X^{(n)}(x, x_0)$ справа $X^{(n)}(x, x_0)C$ и считаем, что последовательность начинается с C

$$X^{(0)}C = C.$$

Функции последовательности $X^{(n)}C$ могут содержать параметры. Обозначим их символом x_0 , так что имеем

$$f^{(n)} = X^{(n)}(x, x_0)C$$

Введем следующее определение. Назовем последовательность функций $X^{(n)}(x, x_0)C$ последовательностью не полностью определенных обобщенных степеней с коэффициентом C , если справедливо соотношение

$$DX^{(n)}C = nX^{(n-1)}C.$$

Термин не полностью определенных связан с тем, что эта последовательность определена с точностью до произвольного элемента C' из ядра D .

Сделаем второе предположение, что оператор D имеет правый обратный $I(x_0)$

$$DI(x, x_0) = 1,$$

причем через x_0 обозначен набор параметров этого оператора.

Примем следующее определение 2. Назовем последовательность

$$f^{(n)}(x) = n! I^n(x, x_0)C$$

полностью определенной последовательностью обобщенных степеней.

Приведем ряд примеров. Например, если в качестве операции I взять неопределенный интеграл, то элементами будут многочлены с возрастающей степенью.

Если взять $D = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}$, т.е. $\frac{d}{dx} f^{(n)} = n f^{(n-1)}$, то можно получить в частном случае многочлен Эрмита.

Если положить $I = \int_0^x d\eta \dots$, то вернемся к алгебраическим степеням с нуль точкой при $x = 0$.

Литература

1. Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А. О методах построения комплексных обобщенных степеней Берса // Вестник Калужского университета. 2020. № 2(47). С.77-80.
2. Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А. О некоторых новых методах решения краевых задач теории переноса в неоднородных твердых пластинах и оболочках. // Вестник Калужского университета. 2017. № 2. с.23-26.
3. Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А. Об использовании аппарата обобщенных степеней Берса при построении решений краевых задач теории переноса методом Фурье // Вестник Калужского университета. 2018. № 3. с.53-57.
4. Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А. Применение метода обобщенных степеней для построения решений кватернионного варианта системы Коши-Римана // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы. Саратов, 2022. С.101-104.
5. Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А. О матричной форме теории обобщенных степеней Берса // Теория управления и математическое моделирование. Материалы Всероссийской конференции. Ижевск, 2022. С.57-60.
6. Афанасенкова Ю.В., Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А. Применение метода обобщенных степеней для построения решений системы дифференциальных уравнений Мойсила-Теодореску // Таврический вестник информатики и математики. 2021. № 1(50). С.48-64.
7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 1. – СПб.: издательство «Лань», 2008. – 448 с.

© Гладышев Ю.А., Лошкарева Е.А.

УДК 004.4

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА МЕДИЦИНСКИХ ДАННЫХ

Гончарова А.Б., Виль М.Ю.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Введение электронной медицинской документации и электронных регистров позволяет накопить и анализировать огромный массив информации. Выводы, сделанные при таком анализе, позволяет решать организационные или исследовательские вопросы. Информация, содержащаяся как в электронных картах, так и регистрах, может быть в текстовом, числовом виде, а так же в виде цифровых изображений или видеозаписей. К вопросам доказательной медицины относятся задачи, целью которых является снижение риска заболевания, снижение риска (вероятности) неблагоприятного исхода заболевания, снижение стоимости лечения, оценка эффективности диагностических и хирургических методов и другие [1]. Единого подхода, как именно проводить поиск по массиву медицинской информации, нет, так как информация разнородна, и, зависима от уровня аппаратно-программного обеспечения медицинской организации, от квалификации персонала и от методик отбора данных.

Для решения задач доказательной медицины производится выборка данных в зависимости от цели проводимого исследования. Далее проводится анализ представленной информации [2]. Для проведения анализа медицинских данных можно применять различные программные средства. В таблице представлено программное обеспечение и обзор инструментальных возможностей для анализа табличных данных, точкой в таблице отмечена возможность применения программного обеспечения для конкретного вида анализа:

Таблица 1. Программное обеспечение для анализа табличных данных и временных рядов.

Программные средства	Табличные данные и временные ряды				
	Инструментальные возможности				
	Разведочный анализ данных, статистическое исследование	Анализ временных рядов	Кластеризация	Классификация и регрессионный анализ	Анализ выживаемости
SPSS Statistics [3]	•	• (не все виды)	• (не все виды)	•	•
MedCalc	•			• (не все виды)	•
Statistica	•	• (не все виды)		• (не все виды)	•
Stata	•	•	•	•	•
NCSS	•	• (не все виды)	•	•	•
SYSTAT	•	• (не все виды)	•	• (не все виды)	•
SAS	•	• (не все виды)	•	•	•
Jamovi [4]	•	• (не все виды)	• (не все виды)	• (не все виды)	•
R	•	•	•	•	•
MATLAB с пакетами Statistics and Machine Learning Toolbox, SimBiology [4,5]	•	•	•	•	•
Python с библиотеками NumPy, SciPy [6]	•	•	•	•	•

Для анализа медицинских изображений и видео применяется программное обеспечение, представленное в таблице:

Таблица 2. Программное обеспечение для анализа изображений и видео.

Программные средства	Инструментальные возможности		
	Классификация	Кластеризация	Сегментация
MATLAB с пакетами Computer Vision Toolbox, Deep Learning Toolbox, Deep Learning Toolbox Model for GoogLeNet Network [4]	•	•	•
Python с библиотеками TensorFlow, Sklearn, PyTorch scikit-image, OpenCV [7]	•	•	•

С учетом существующих программных решений, в качестве препятствий к применению искусственного интеллекта в медицине, можно выделить следующие: сейчас наборы медицинских данных, представляющие научную ценность и значимость, относятся к

охраняемым результатам интеллектуальной деятельности, на них оформляется свидетельство о регистрации электронного ресурса, таким образом, автор ресурса определяет доступ к данным; нет единого методологического подхода к наборам данных; сложность с разметкой данных; нет открытого доступа к современным медицинским данным нигде в мире; работа на стыке наук требует создание рабочих групп, включающих в себя специалистов из разных научных специальностей; нет российского программного обеспечения с дружелюбным интерфейсом для ученых-медиков.

Литература

1. Красько О.С. Пособие по анализу медико-биологических данных (с примерами в R). 2017. 278 с. [Электронный ресурс]// URL:https://www.researchgate.net/publication/312126731_Posobie_po_analizu_mediko-biologiceskih_dannyh_s_primerami_v_R (дата обращения: 15.12.2019).
2. Кривополенова С.Д., Гончарова А.Б. Первичный анализ данных для построения систем поддержки принятия решений.// Процессы управления и устойчивость. 2019. Т.6. №1. С. 250-254.
3. IBM SPSS Statistics [Электронный ресурс]// URL:<https://www.ibm.com/products/spss-statistics> (дата обращения: 10.10.2021).
4. Jamovi - Stats. Open. Now. [Электронный ресурс]// URL: <https://www.jamovi.org/> (дата обращения: 01.02.2022).
5. MATLAB - MathWorks - MATLAB & Simulink [Электронный ресурс]// URL:<https://www.mathworks.com/products/matlab.html> (дата обращения: 01.10.2022).
6. Гончарова А.Б., Виль М.Ю. Имитационное моделирование лечения онкологического заболевания с использованием приложения MATLAB SimBiology.// Моделирование систем и процессов. 2021. Т. 14. №3. С. 90-96. DOI: 10.12737/2219-0767-2021-14-3-90-96.
7. Python [Электронный ресурс]// URL: <https://www.python.org/> (дата обращения: 01.10.2022).

© Гончарова А.Б., Виль М.Ю.

УДК 519.217.2

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ БОЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ВЫСОКООРГАНИЗОВАННОГО БОЯ

Гулькина А.С.

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Условно так называется модель боя, в котором стрельба ведется только по непораженным целям, перенос огня с пораженной единицы на боеспособную осуществляется немедленно. Кроме того, одним выстрелом не может быть поражено не более одной единицы и огонь распределен равномерно по непораженным единицам. Каждая боевая единица может быть в одном из двух состояний: не поражена (ведет огонь) и поражена (ведет огонь). В данной статье приводятся общие правила составления уравнений динамики боя, основанные на теории марковских случайных цепей.

Составление уравнений динамики боя рассмотрим для следующих условий. Две группировки А и Б первоначальной численностью N_1 и N_2 , однородных внутри каждой группировки боевых единиц, ведут бой. Скорострельности боевых единиц стороны А - λ_1 , стороны Б - λ_2 , вероятности поражения на выстрел соответственно p_1 и p_2 . Обстрелу

подвергается с равной вероятностью любая из непораженных боевых единиц противоположной стороны и после ее поражения огонь переносится на еще не пораженную. Одним выстрелом нельзя поразить более одной боевой единицы.

Обозначим возможные состояния боевой единицы каждой из сторон:

ε_1 - боевая единица стороны A не поражена;

ε_2 - боевая единица стороны B не поражена;

ε_3 - боевая единица стороны A поражена;

ε_4 - боевая единица стороны B поражена.

Размеченный граф состояний, разделенный на два подграфа, изображен на рис. 1.

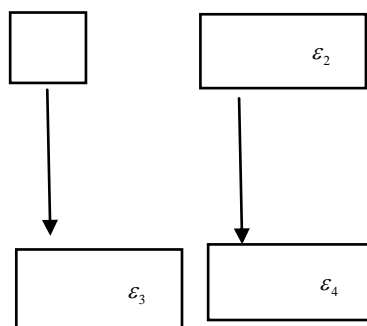


Рис. 1

Для начального состояния:

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1 p_1 N_1}{N_2} \text{ и } \lambda_2^* = \frac{\lambda_2 p_2 N_2}{N_1},$$

где λ_2^* - интенсивность потока поражающих выстрелов, приходящихся на одну боевую единицу стороны A , переводящих ее из состояния ε_1 в ε_3 ; λ_1^* - интенсивность потока поражающих выстрелов, приходящихся на одну боевую единицу стороны B , переводящих ее из состояния ε_2 в ε_4 .

Однако в ходе боя численности сторон меняются со временем, поэтому пользуясь принципом квазирегулярности, можем принять:

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1 p_1 m_1(t)}{m_2(t)} \text{ и } \lambda_2^* = \frac{\lambda_2 p_2 m_2(t)}{m_1(t)}. \quad (1)$$

С учетом (1) на основании графа (рис.1) получим:

$$\begin{cases} \frac{dm_1(t)}{dt} = -\lambda_2 p_2 m_2(t); \\ \frac{dm_2(t)}{dt} = -\lambda_1 p_1 m_1(t). \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения для $m_3(t)$ и $m_4(t)$ нет необходимости записывать, так как для любого t :

$m_1(t) + m_3(t) = N_1$ и $m_2(t) + m_4(t) = N_2$. Кроме того обычно требуется знать состояния численностей не уничтоженных, а боеспособных единиц.

Уравнения (2) можно решать при любых начальных условиях. Данные уравнения пригодны для описания динамики боя только на начальных его стадиях, когда численности группировок еще можно считать многочисленными.

Литература

1. Волгин Н. С. Исследование операций. Ч. 1. – СПб.: ВМА им. Н. Н. Кузнецова, 1999. 362 с.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 147 с.

© Гунькина А.С.

УДК 517.927.2

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА--ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПОТЕНЦИАЛ

Ежак С.С., Тельнова М.Ю.

ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова», г. Москва

Рассмотрим задачу Штурма--Лиувилля

$$y'' + Q(x)y + \lambda y = 0, \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

где Q принадлежит множеству $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ измеримых неотрицательных локально интегрируемых на $(0,1)$ функций, удовлетворяющих интегральным условиям

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta Q^\gamma(x) dx = 1, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0, \quad (3)$$

$$\int_0^1 x(1-x)Q(x)dx < +\infty. \quad (4)$$

Изучаются оценки величин $m_{\alpha,\beta,\gamma} = \inf_{Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}} \lambda_1(Q)$.

Доказано [1], что если условие (4) не выполняется, то ни для какого действительного λ , ни для какого действительного $0 \leq p \leq +\infty$ не существует нетривиального решения y уравнения (1), удовлетворяющего условиям $y(0) = 0, y'(0) = p$. Из результатов [2] следует, что множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ пусто при $\gamma < 0, \alpha \leq 2\gamma - 1$ или $\beta \leq 2\gamma - 1$, для других значений $\alpha, \beta, \gamma, \gamma \neq 0$, множество $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ непусто. Таким образом, при $\gamma < 0, \alpha \leq 2\gamma - 1$ или $\beta \leq 2\gamma - 1$ не существует функций Q , удовлетворяющих условиям (3) и (4) одновременно, и при данных значениях параметров постановка задачи (1)--(4) некорректна.

Доказано [1], [3], что при $\gamma < 0, \alpha, \beta > 2\gamma - 1$ и при $\gamma > 0, -\infty < \alpha, \beta < +\infty$ для любой функции $Q \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$

$$\lambda_1(Q) = \inf_{y \in H_0^1(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x)y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}$$

Теорема 1. Если $\gamma > 1, \alpha, \beta < 2\gamma - 1$, то существуют такие функции $Q_* \in T_{\alpha,\beta,\gamma}$ и $u \in H_0^1(0,1), u > 0$ на $(0,1)$, что $m_{\alpha,\beta,\gamma} = R[Q_*, u]$. Кроме того, u удовлетворяет уравнению

$$u'' + tu = -x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \quad (5)$$

и интегральному условию

$$\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{1-\gamma}}(1-x)^{\frac{\beta}{1-\gamma}}u^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}dx = 1. \quad (6)$$

Теорема 2.

- Если $\gamma = 1, \alpha, \beta \leq 0$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geq \frac{3}{4}\pi^2$.
- Если $\gamma = 1, \beta \leq 0 < \alpha \leq 1$ или $\alpha \leq 0 < \beta \leq 1$, то $m_{\alpha,\beta,\gamma} \geq 0$.

- Если $\gamma = 1$, $0 < \alpha, \beta \leq 1$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} \geq 0$.
- Если $\gamma > 1$, $\alpha, \beta \leq \gamma$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} = 0$.
- Если $\gamma \geq 1$, $\alpha > \gamma$ или $\beta > \gamma$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} \leq 0$.
- Если $\gamma < 0$, $\alpha, \beta > 2\gamma - 1$ или $0 < \gamma < 1$, $-\infty < \alpha, \beta < \infty$, то $m_{\alpha, \beta, \gamma} = -\infty$.

Литература

1. Ezhak S., Telnova M. On conditions on the potential in a Sturm--Liouville problem and an upper estimate of its first eigenvalue / S. Ezhak, M. Telnova // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. - 2020. - V. 333, - P. 481—496.
2. Куралбаева К.З. Об оценках первого собственного значения оператора Штурма--Лиувилля / К.З. Куралбаева // Дифференциальные уравнения. -1996. - Т. 32(6), -С. 852—853.
3. Ежак С.С., Тельнова М.Ю. Об оценках снизу первого собственного значения задачи Штурма--Лиувилля с весовыми интегральными условиями на потенциал / С.С. Ежак, М.Ю. Тельнова // Труды семинара имени И.Г. Петровского. М.: МГУ имени М.В. Ломоносова (принято к печати).

© Ежак С.С., Тельнова М.Ю.

УДК 621.1.016

ЗАДАЧА О КОНТАКТНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДВУХ ПЕРИОДИЧЕСКИ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ

Ерин О.Л., Кузнецов С.А., Распопов А.Д.

ФГКВОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Пусть имеются два стержня одинаковой длины ℓ , оси которых находятся на одной прямой. Один стержень расположен на отрезке $[0, \ell]$, другой на $[-\ell, 0]$. Дальние концы обоих стержней все время остаются нагретыми до постоянных температур T_0 и $(-T_0)$ соответственно. При соприкосновении этих стержней друг с другом температуры на их контактирующих концах мгновенно выравниваются и становятся равными 0 все время при $t \in [0, t_1]$, где t_1 – время продолжительности контакта [1,2]. Для простоты рассмотрений температуры в обоих стержнях отнесем к T_0 , а координату вдоль стержней x к длине стержня ℓ , т.е.

$$U(x, t) = T_0 u(x, t), \quad x = \ell x, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ и x безразмерные температура и координата. Время t остается размерной величиной. Допустим, что для правого стержня при $0 \leq x \leq 1$ температурное поле описывается некоторой функцией $u(x, t)$, а в левом стержне при $-1 \leq x \leq 0$ температурное поле антисимметрично и поэтому будет описываться функцией $[-u(x, t)]$. Такое предположение упрощает всю задачу, т.к. ее достаточно сформулировать только для одного правого стержня.

Обозначим через $u_1(x, t)$ – температуру в правом стержне при первом соединении стержней, $u_2(x, t)$ – при втором соединении после первого их разъединения, $u_i(x, t)$ – при i -

ом соединении после $(i-1)$ -го разъединения; через $v_i(x, t)$ – температуру в правом стержне после i -го разъединения стержней. Индексом "i" обозначен номер цикла. При первом соединении и последующем разъединении стержней $i=1$, при втором соединении и разъединении $i=2$ и т.д. Время, когда стержни контактируют, обозначим через t_1 , через t_2 – время бесконтактного состояния стержней. При рассмотрении каждого цикла время t будем отсчитывать от нуля, т.е. при контактировании стержней $0 \leq t \leq t_1$, а при их разомкнутом состоянии $0 \leq t \leq t_2$ для любого номера i .

Пусть стержни находятся в контакте между собой в течение времени t_1 в i -ом цикле [3].

Тогда приходим к следующей начально-краевой задаче:
найти такое решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{a^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad t \in [0, t_1], \quad x \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

которое удовлетворяет заданному начальному условию

$$u_i|_{t=0} = f_i(x), \quad f_1(x) = 1, \quad f_i(1) = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$u_i|_{x=0} = 0, \quad u_i|_{x=1} = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Если стержни не контактируют между собой, то ближние концы этих стержней не обмениваются теплом между собой и с окружающей средой, т.е. находятся в состоянии теплоизоляции. Для бесконтактного состояния двух стержней будем иметь другую начально-краевую задачу:

найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{a^2}{\ell^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}, \quad t \in [0, t_2], \quad x \in [0, 1], \quad (5)$$

которое удовлетворяет некоторому начальному условию

$$v_i|_{t=0} = \varphi_i(x), \quad \varphi_i(1) = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$\left. \frac{\partial v_i}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad v_i|_{x=1} = 1, \quad i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Весь процесс контактной теплопроводности двух взаимодействующих стержней будем описывать следующим образом. Процесс начинается с первого контакта двух стержней, когда температурное поле в стержнях описывается решением задачи (2)–(4) при $i=1$. По прошествии времени t_1 стержни разъединяются и в течение времени t_2 температурное поле в стержнях будет описываться решением задачи (5)–(7) при $i=1$. Конечное температурное поле в период контакта стержней будет выполнять роль начальной температуры для последующего их бесконтактного состояния, т.е.

$$u_i(x, t_1) = u_i|_{t=0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Поэтому каждую функцию $\varphi_i(x)$, как начальные условия в задачах (5)–(7), следует вычислять по формуле

$$\varphi_i(x) = u_i(x, t_1), \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Точно также конечное температурное поле стержней в бесконтактный период будет являться начальной температурой для последующего их контактного состояния, т.е.

$$v_i(x, t_2) = u_{i+1}|_{t=0}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Таким образом, функции $f_i(x)$, используемые в качестве начальных условий для задач (2.2)–(2.4), будем принимать равными

$$f_1(x) = 1, \quad f_i(x) = v_{i-1}(x, t_2), \quad i = 2, 3, \dots \quad (9)$$

Итак, температурные поля стержней в их контактном и бесконтактном состояниях будут влиять друг на друга через начальные условия (8) и (9). Последовательность действий будет следующей:

1.1 Решаем задачу (2)...(4) при $i = 1$ с начальным условием $u_1(x, t)|_{t=0} = 1$.

1.2 Решаем задачу (5)...(7) при $i = 1$, где $\varphi_1(x) = u_1(x, t_1)$.

2.1 Решаем задачу (2)...(4) при $i = 2$ с начальным условием из (9) при $i = 2$.

2.2 Решаем задачу (5)...(7) при $i = 2$ с начальным условием из (8) при $i = 2$.

3.1 Решаем задачу (2)...(4) при $i = 3$ с начальным условием из (9) при $i = 3$.

3.2 Решаем задачу (5)...(7) при $i = 3$ с начальным условием из (8) при $i = 3$.

Для цикла с номером «к»:

к.1. Решаем задачу (2)...(4) при $i = k$ с начальным условием из (9) при $i = k$.

к.2. Решаем задачу (5)...(7) при $i = k$ с начальным условием из (8) при $i = k$.

Предложенные задачи контактной теплопроводности двух периодически соприкасающихся стержней позволят наглядно описать распределение температур в зоне контакта периодически контактирующих поверхностей.

Литература

1. Попов В.М., Карпов А.А. Моделирование процесса контактного теплообмена в теплонапряженных узлах машин и аппаратов лесного комплекса // Вестник ЦЧ регион. отд. Науки о лесе. 1999. Вып. 2. С.195–197.

2. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке: моногр. М.: Наука, 1980. 326с.

3. Дроздов И.Г. Система обработки теплофизических параметров при исследовании интенсификации теплообмена / И.Г. Дроздов, Н.В. Мозговой, Н.Н. Кожухов, Э.Р. Габасова // Вестник ВГТУ. Серия Энергетика. Вып. 7.4. Воронеж, 2004. С. 81–84.

© Ерин О.Л., Кузнецов С.А., Распопов А.Д.

УДК 621.1.016

ТЕПЛООБМЕН ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКИ СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ОТСУТСТВИИ КОНТАКТНОГО ТЕРМОСОПРОТИВЛЕНИЯ

Ерин О.Л., Кузнецов С.А., Распопов А.Д.

ФГКВООУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

В большинстве случаев при контактировании металлических поверхностей в теплонапряженных системах необходимо учитывать наличие контактных термосопротивлений, не является исключением и периодический контакт поверхностей. Вместе с тем в ряде случаев можно в первом приближении считать, что на пути теплового потока от одного тела к другому при их касании отсутствует контактное термосопротивление. Такой идеальный контакт справедлив для контактных пар с поверхностями высокой чистоты обработки, теплопроводным высокопластичным межконтактным наполнителем, при большом усилии прижима и малом тепловом потоке [1, 2].

Возможность экспериментального рассмотрения системы с периодически контактирующими поверхностями при отсутствии контактного термосопротивления, как дополнительной переменной, позволит натурализовать сам процесс и описать влияние отдельных факторов на процесс теплопереноса [3].

На рисунке 1 представлены экспериментальные данные в безразмерной форме в виде зависимости термосопротивления $(\nu \dot{h}_{np}^2 / a^2) = f(\nu \tau_k)$ за счет периодического прерывания теплового потока от для условия отсутствия контактного термосопротивления в зоне сопряжения стержней: 1 – 0,08 Гц; 2 – 0,11 Гц; 3 – 0,25 Гц; 4 – 0,6 Гц; 5 – 0,96 Гц; 6 – 1,7 Гц; 7 – 3,6 Гц. Температура в зоне контакта $T_k = 413...418$ К.

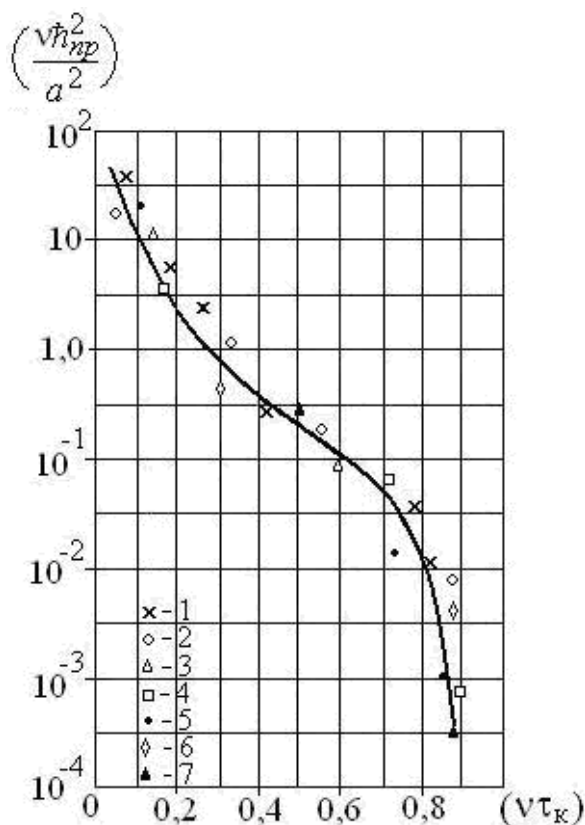


Рисунок 1 – Зависимость термосопротивления $(\nu \dot{h}_{np}^2 / a^2)$ к длительности периода при различной частоте контактов стержней $(\nu \tau_k)$

В качестве объектов исследований выступали стержни из нержавеющей стали марки 12X18Н10Т с контактными поверхностями, обработанными плоским шлифованием до чистоты с $R_z \approx 0,8$ мкм. На поверхность верхнего, т.е. «горячего» стержня наносилось гальваническим способом кадмиевое покрытие толщиной $\delta = 60$ мкм.

Высокая чистота обработки и наличие на одной из поверхностей кадмиевого покрытия позволяют при умеренных усилиях прижима стержней создавать соединения с хорошей тепловой проводимостью, что приводит к вырождению контактного термосопротивления. Этому в свою очередь способствует пластичность кадмиевого покрытия и достаточно хорошая теплопроводность $\lambda = 93$ Вт/м·К в сравнении с теплопроводностью материала стержней $\lambda < 20$ Вт/м·К. Усилие прижима стержней при их контакте находилось в пределах 0,08...0,16 МПа.

Возвращаясь к анализу рис. 4.1, можно видеть, что для периодически контактирующих стержней при отсутствии контактного термосопротивления соотношение между общим

термосопротивлением на пути теплового потока в виде комплекса $\nu \hbar_{np}^2 / a^2$ и частотой и длительностью контакта в виде комплекса $(\nu \tau_k)$ описывается единой кривой.

Разность между тепловыми потоками для стационарного и квазистационарного состояний запишется

$$Q_{cm} - Q_{кв.см.} = \frac{\lambda_m (T_{1np} - T_1)}{x_1 - x_0} = \frac{\lambda_m (T_{2np} - T_2)}{x_2 - x_0} = \dots = \frac{\lambda_m (T_{5np} - T_5)}{x_5 - x_0}, \quad (1)$$

откуда в безразмерной форме

$$H = \frac{Q_{cm} - Q_{кв.см.}}{Q_{cm}} = \frac{T_{1np} - T_1}{T_A - T_1} = \dots = \frac{T_{5np} - T_5}{T_A - T_5} = \frac{\hbar_{np}}{h + \hbar_{np}} \quad (2)$$

Для малых значений потери теплового потока при периодическом прерывании контакта стержней H из уравнения (2) следует, что

$$\frac{h}{H} = \frac{\hbar}{\hbar_{np}} \quad (3)$$

Таким образом, из (3) и графика рисунка 1 видно, что при увеличении частоты ν H уменьшается и при достаточно больших значениях комплекса $(\nu \tau_k)$ потери теплового потока, вызываемые периодическим прерыванием теплового потока, будут минимальные.

Приведенная на рисунке 1 кривая приближенно может считаться как имеющая S-образный вид. Вследствие такого сложного характера зависимости комплексов $(\nu \hbar_{np}^2 / a^2) = f(\nu \tau_k)$ ее аналитическое описание может быть проведено по частям, т.е. с использованием нескольких уравнений.

Для области, когда $(\nu \tau_k)$ изменяется от 0,05 до 0,2

$$\left(\frac{\nu \hbar_{np}^2}{a^2} \right) = 0,225 (\nu \tau_k)^{-1,728} \text{ при } (\nu \tau_k) \text{ в пределах от } 0,2 \text{ до } 0,6, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\nu \hbar_{np}^2}{a^2} \right) = 0,012 (\nu \tau_k)^{-3,575} \text{ и при } (\nu \tau_k) \text{ от } 0,6 \text{ до } 0,9 \quad (5)$$

$$\left(\frac{\nu \hbar_{np}^2}{a^2} \right) = 1,024 (\nu \tau_k) - 1,873 (\nu \tau_k) + 0,856. \quad (6)$$

Полученные уравнения (4)...(6) могут быть использованы в расчетной практике для периодически контактирующих поверхностей при отсутствии или малом значении контактного термосопротивления.

Литература

1. Шлыков Ю.П., Ганин Е.А., Царевский С.Н. Контактное термическое сопротивление: моногр. М.: Энергия, 1977. 328с.
2. Попов В.М. Теплообмен в зоне контакта разъемных и неразъемных соединений: моногр. М.: Энергия, 1971. 216с.
3. Говард С. Влияние теплового контактного сопротивления на перенос тепла между периодически контактирующими поверхностями // Теплопередача. 1973. № 3. С. 128–129.

© Ерин О.Л., Кузнецов С.А., Распопов А.Д.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В КЛАССЕ СУММИРУЕМЫХ НА ГРАФЕ ФУНКЦИЙ

Жабко А.П.¹, Провоторова Е.Н.²

¹ *Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург*

² *Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж*

Пусть Γ – связный ограниченный замкнутый ориентированный граф с ребрами γ_k (каждое ребро параметризовано отрезком $[0,1]$). Обозначим через $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ множество граничных ζ_k и внутренних ξ_k ребер, соответственно. Для каждого узла $\xi \in J(\Gamma)$ графа введем множества: $R(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «к узлу ξ », $r(\xi)$ – множество ребер ориентированных «от узла ξ » [1].

В области $\bar{\Gamma}_T = \Gamma \times [0, T]$ ($T < \infty$) рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)y(x,t) = f(x,t) + Bv(x,t), \quad (1)$$

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial y(1,t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial y(0,t)_\gamma}{\partial x}, \quad (2)$$

$$y|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

$$y|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (4)$$

здесь $a(x)$, $b(x)$ – измеримые ограниченные на Γ функции: $0 < \alpha_0 \leq a(x) \leq \alpha^0$, $|b(x)| \leq \beta$; $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ ($L_{2,1}(\Gamma_T)$ – пространство функций $u(x,t) \in L_1(\Gamma_T)$ с нормой $\|u\|_{L_{2,1}(\Gamma_T)} = \int_0^T (\int_\Gamma u^2(x,t) dx)^{1/2} dt$).

Обозначим через $W_2^{1,0}(\Gamma_T)$ пространство функций $u(x,t)$ из $L_2(\Gamma_T)$, имеющих обобщенную производную также из $L_2(\Gamma_T)$, $\|u\|_{W_2^{1,0}(\Gamma_T)} = (\int_{\Gamma_T} (u^2 + u_x^2) dx dt)^{1/2}$. Пусть далее

$V_2(\Gamma_T)$ – множество всех функций $u(x,t) \in W_2^{1,0}(\Gamma_T)$, имеющих конечную норму, определяемую соотношением $\|u\|_{2,\Gamma_T} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x,t)\|_{L_2(\Gamma)} + \|u_x\|_{L_2(\Gamma_T)}$, и непрерывных по t в

норме $L_2(\Gamma)$. Введем множество $\Omega_0(\Gamma_T)$ функций $u(x,t) \in V_2(\Gamma_T)$, чьи следы определены на сечениях области Γ_T плоскостью $t = t_0$ ($t_0 \in [0, T]$) как функции из $W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ (пространство

$W_{2,0}^1(a, \Gamma)$ определяется как замыкание непрерывных на Γ и гладких на каждом ребре $\gamma \subset \Gamma$ функций $u(x)$, удовлетворяющих условиям $\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma u'(1)_\gamma = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma u'(0)_\gamma$ и $u|_{\partial\Gamma} = 0$.

Замыкание $\Omega_0(\Gamma_T)$ в норме $V_2(\Gamma_T)$ обозначим через $V_{2,0}^{1,0}(a, \Gamma_T)$.

Для системы (1)–(4) рассмотрим задачу оптимального управления. Пусть $\mathbb{U} = L_2(\Gamma_T)$ и $B: \mathbb{U} \rightarrow L_2(\Gamma_T)$ – линейный непрерывный оператор, причем очевидно $Bv \in L_{2,1}(\Gamma_T)$ для любого $v \in \mathbb{U}$. И пусть \mathbb{U}_δ – выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{U} = L_2(\Gamma_T)$ и u_* – заданный элемент пространства $L_2(\Gamma)$.

Задача оптимального в смысле быстрогодействия управления системой (1), (2) *состоит в определении* $\tau_* = \inf \tau$. Элемент $v_* \in \mathbb{U}_\rho$, соответствующий τ_* назовем оптимальным управлением по быстроддействию.

Теорема. Пусть \mathbb{U}_ρ ограничено. Тогда существует оптимальное в смысле быстрогодействия управление $v_* \in \mathbb{U}_\rho$.

Литература

1. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. Vestnik of Saint Peterburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes, 2017, vol. 13, iss. 4, pp. 428-441. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.409>

© Жабко А.П., Провоторова Е.Н.

УДК 517.93

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗНОГО ПОРЯДКА

Зубова С.П.¹, Раецкая Е.В.²

¹*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж*
²*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет», г. Воронеж*

Рассматривается динамическая система в частных производных

$$\frac{\partial x(t, s)}{\partial t} = B \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} + D \frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial s^2} \quad (1)$$

с условиями

$$x(0, s) = \alpha(s) \quad (2)$$

$$x(T, s) = \beta(s), \quad (3)$$

где $B: R^n \rightarrow R^n$, $D: R^m \rightarrow R^n$; $t \in [0, T]$, $s \in [0, \infty)$.

Система (1) называется полностью управляемой если существует $u(t, s)$ - функция управления (управление) под воздействием которого система (1) переводится из произвольного начального состояния (2) в произвольное конечное состояние (3).

Для динамической системы (1) ставится задача управления, а именно, реализация процедуры структурного анализа исследуемой системы с целью выявления свойства матричных коэффициентов, влекущих полную управляемость или неуправляемость системы (1).

В случае выявления свойства полной управляемости системы производится

- установление свойств функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ в условиях (2), (3), необходимых для реализации управляемого процесса;

- получение формул для построения $u(t, s)$ - функции управления и соответствующей функции состояния $x(t, s)$.

Исследование базируется на свойствах прямоугольной матрицы D , которой соответствуют разложения подпространств в прямые суммы:

$$R^n = \text{Coim } D \dot{+} \text{Ker } D, \quad R^m = \text{Im } D \dot{+} \text{Coker } D, \quad (4)$$

где $\text{Ker } D$ - нуль-пространство, ядро отображения D ; $\text{Im } D$ - множество значений D ; $\text{Coker } D$ - дефектное подпространство; $\text{Coim } D$ - прямое дополнение к $\text{Ker } D$ в R^n ; с проекторами P и Q на подпространства $\text{Ker } D$ и $\text{Coker } D$, соответственно; $n_0 = \dim \text{Coker } D$.

В случае $n = n_0$ система (1) является неуправляемой.

В более общем случае $n > n_0 > 0$ система (1) эквивалентна совокупности систем, включающей иерархическую систему первого уровня

$$\frac{\partial^2 u(t, s)}{\partial s^2} = D^- F(t, s) + u(t, s), \quad (5)$$

$$x(t, s) = x_1(t, s) + u_1(t, s), \quad (6)$$

и иерархическую систему второго уровня

$$\frac{\partial x_1(t, s)}{\partial t} = B_1 \frac{\partial x_1(t, s)}{\partial s} + D_1 \frac{\partial u_1(t, s)}{\partial s}, \quad (7)$$

с условиями

$$\left. \frac{\partial^i x_1(t, s)}{\partial t^i} \right|_{t=0} = \alpha_{1i}(s), \quad i = \overline{0, 1}, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial^i x_1(t, s)}{\partial t^i} \right|_{t=T} = \beta_{1i}(s), \quad i = \overline{0, 1}, \quad (9)$$

где

$$F(t, s) = \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} - B \frac{\partial x(t, s)}{\partial s},$$

$$G = QB, \quad B_1 = GQ, \quad D_1 = G(I - Q),$$

$$\alpha_{1i}(s) = G \frac{\partial^i \alpha(s)}{\partial s^i}, \quad \beta_{1i}(s) = G \frac{\partial^i \beta(s)}{\partial t^i}, \quad i = \overline{0, 1}.$$

Функции $x_1(t, s) \in \text{Coker } D$ и $u_1(t, s) \in \text{Im } D$ именуется далее функциями псевдосостояния и псевдоуправления, соответственно; элемент $u(t, s) \in \text{Ker } D$ подбирается произвольным образом, в частности, может быть и нулевым; матрица D^- ограниченная, полуобратная к D - сужению D на $\text{Coim } D$.

Исследование полной управляемости системы (7) с условиями (8), (9) осуществляется методом каскадной декомпозиции (КД), который ранее применялся (например, [1] – [5]) при исследовании свойств динамических систем (робастности, инвариантности, управляемости, наблюдаемости и др.); при решении задач управления, в частности, задач с контрольными точками, для различных динамических систем. Алгоритмический метод КД заключается в поэтапном переходе от системы первого шага (7), с прямоугольной матрицей D_1 ($n_1 = \dim \text{Coker } D_1$), ко вполне аналогичным редуцированным системам в подпространствах. В силу конечномерности исходного пространства алгоритм «прямого хода» полностью реализуется за p шагов ($p \leq n$). Иерархическая система второго уровня последнего p -го шага (с прямоугольной матрицей D_p , $n_p = \dim \text{Coker } D_p$) имеет вид

$$\frac{\partial x_p(t, s)}{\partial t} = B_p \frac{\partial x_p(t, s)}{\partial s} + D_p \frac{\partial u_p(t, s)}{\partial s}, \quad (10)$$

с условиями

$$\left. \frac{\partial^i x_p(t, s)}{\partial t^i} \right|_{t=0} = \alpha_{pi}(s), \quad i = \overline{0, p}, \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial^i x_p(t, s)}{\partial t^i} \right|_{t=T} = \beta_{pi}(s), \quad i = \overline{0, p}. \quad (12)$$

В случае $n_{p-1} = n_p$ система (10) не является управляемой, а следовательно, и система (7), и система (1) являются неуправляемыми.

В случае $n_{p-1} > n_p = 0$ строится, удовлетворяющая всем условиям (11), (12) функция $x_p(t, s)$, например, вида

$$x_p(t, s) = \sum_{j=1}^{2(p+1)} \varphi_{pj}(s) \cdot \psi_{pj}(t). \quad (13)$$

Затем находится функция $u_p(t, s)$ по формуле

$$u_p(t, s) = D_p^{-1} \int_0^s F_p(\tau, s) d\tau + h_p(t),$$

где

$$F_p(t, s) = \frac{\partial x_p(t, s)}{\partial t} - B_p \frac{\partial x_p(t, s)}{\partial s},$$

а функция $h_p(t)$ подбирается таким образом, чтобы выполнялись условия

$$u_p(0, s) = (I - Q_p) \alpha_{po}(s), \quad u_p(T, s) = (I - Q_p) \beta_{po}(s).$$

Далее реализуется «обратный ход» КД, завершающийся построением функции $x_1(t, s)$, удовлетворяющей всем условиям (8), (9) и функции $u_1(t, s)$. Таким образом, применение МКД для исследования системы (7), с условиями (8), (9) позволило не только выявить условия, влекущие ее полную управляемость, но, более того, позволило в явном виде построить функции псевдосостояния и псевдоуправления системы расщепления первого шага – иерархической системы второго уровня.

Наличие функций $x_1(t, s)$, $u_1(t, s)$ позволяет решать задачу программного управления для полностью управляемой системы (1). Для состояния, построенного по формуле (6) или, в развернутом виде, по формуле

$$x(t, s) = \sum_{k=1}^p u_k(t, s) + \sum_{j=1}^{2(p+1)} \varphi_{pj}(s) \cdot \psi_{pj}(t) \quad (14)$$

строится управление

$$u(t, s) = D^{-1} \left(\int_0^s \int_0^\tau F(t, \tau_1) d\tau_1 d\tau + u(t, s) \right) + h(t, s), \quad (15)$$

где функции $u(t, s)$ и $h(t, s)$ подбираются произвольным образом. С этой найденной по формуле (15) функцией управления система переводится из состояния (2) в состояние (3). Таким образом, для динамической системы (1) с условиями (2), (3) решена задача управления. Справедлива

Теорема. Система (1) является ПУ $\Leftrightarrow D_p$ - сюръекция.

При выполнении условий $p+1$ - кратной дифференцируемости функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$, функции состояния и управления находятся по формулам (14) и (15).

Литература

1. Zubova S.P. Solution of the multi-point control problem for a dynamic system in partial derivatives / S.P Zubova, E.V Raetskaya // Mathematical Methods in the Applied Sciences, AIMS Press, New York - V. 44, N 15, 2021. - P. 11998-12009.
2. Zubova S.P. Construction of Controls Providing the Desired Output of the Linear Dynamic System derivatives / S.P Zubova, E.V Raetskaya // Automation and Remote Control. - 2018. -79 (5) - P. 774-791.
3. Раецкая Е.В. Исследование сингулярно возмущенной системы управления Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов, – 2018. – Т. 23, № 122. – С. 303-307.
4. Zubova S.P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition / S.P Zubova, E.V Raetskaya // Automation and Remote Control. - 2017. - 78 (7) - P. 1189-1202.
5. Зубова С.П. Построение управления для получения заданного выхода в системе наблюдения / С.П. Зубова, Е.В. Раецкая // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. Тамбов.- 2015. – Т. 20, № 5. - С. 1400 – 1404.

© Зубова С.П., Раецкая Е.В.

УДК 577.95

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БИОЛОГИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Казанцева С.А., Колпак Е.П., Каримова Р.Т.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Рассматривается проточный реактор непрерывного действия, в котором выращивается биомасса на субстрате с учетом субстратного угнетения скорости роста биомассы. Система уравнений, описывающая рост биомассы X на лимитирующем субстрате Y с учетом субстратного угнетения при наличии диффузии субстрата и биомассы, имеет вид (в нормированном виде) [1]

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - v \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{XY}{1+Y+gY^2}, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - v \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{XY}{1+Y+gY^2},\end{aligned}\tag{1}$$

где g - параметр, характеризующий ингибирование, D - коэффициент диффузии, v - скорость поступления субстрата в реактор и скорость выхода биомассы, X - концентрация биомассы, Y - концентрация субстрата.

К системе уравнений (1) добавляются начальные и граничные условия

$$\text{при } t = 0: X(t = 0) = X_0, Y(t = 0) = Y_0;$$

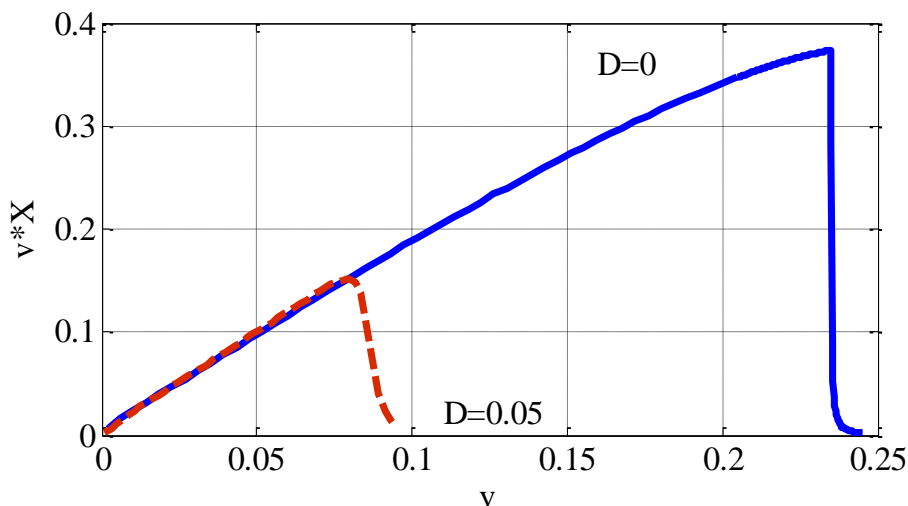
$$\text{при } x = 0: X = 0, Y = Y^0;$$

$$\text{при } x = l: \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Из анализа уравнений (1) следует, что при больших скоростях поступления субстрата в реактор может происходить «вымывание» биомассы как для диффузионной модели, так и

для реактора идеального смешения ($D=0$) при превышении порогового значения скорости $v = v_{\max}$. Наличие диффузии понижает скорость «вымывания» биомассы. Это необходимо учитывать в технологических процессах [2].

Для случая значений параметров $g=2$ и $Y_0=2$ скорость вымывания в модели (5) $v_{\max}=0.26$. На рисунке приведена зависимость установившегося выхода биомассы из реактора в зависимости от скорости подачи субстрата (зависимости $D=0$ и $D=0.05$). Выход биомассы пропорционален скорости подачи субстрата, а вблизи критического значения скорости $v=v_{\max}$ происходит резкое падение выхода биомассы. Численная реализация построения решений уравнений (1) осуществлялась в среде программирования математического пакета Matlab [3, 4].



Зависимость установившегося выхода биомассы из реактора от скорости подачи субстрата.

Литература

1. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. Введение в теоретическую биофизику. 2-е изд., доп. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 472 с.
2. Кривополенова С.Д., Гончарова А.Б. Первичный анализ данных для построения системы поддержки принятия решений // Процессы управления и устойчивость. - 2019. - Т. 6. - № 1. - С. 250-254.
3. Бусько Е.А., Гончарова А.Б., Рожкова Н.И., Семиглазов В.В., Шишова А.С., Жильцова Е.К., Зиновьев Г.В., Белобородова К.А., Криворотько П.В. Модель системы принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы // Вопросы онкологии. - 2020. - Т. 66. - № 6. - С. 653-658.
4. Гончарова А.Б., Виль М.Ю. Имитационное моделирование лечения онкологического заболевания с использованием приложения MATLAB SIMBIOLOGY // Моделирование систем и процессов. - 2021. - Т. 14. - № 3. - С. 90-96.

© Казанцева С.А., Колпак Е.П., Каримова Р.Т.

СОЗДАНИЕ НАБОРА ВИДЕОЗАПИСЕЙ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛЯ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ОЧАГОВЫХ ОБРАЗОВАНИЙ В ПЕЧЕНИ С ЦЕЛЬЮ ОБУЧЕНИЯ СЕРВИСОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА

Камгуя Ф. Х.¹, Козубова К.В.², Бусько Е.А.^{1,2}, Гончарова А.Б.¹

¹ Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

² ФГБУ "Научный медицинский исследовательский центр онкологии им.
Н.Н. Петрова", г. Санкт-Петербург

Аннотация: сверточные нейронные сети (CNN) являются мощным инструментом для извлечения особенностей из изображений и широко используются в обработке изображений [1]. Видео - это набор изображений, записанных в разные моменты времени. Таким образом, видео имеет как пространственное, так и временное измерение. Для врача ультразвуковой диагностики, визуализирующего очаговое поражение печени и определяющего, является ли оно злокачественным или нет, важно изменение паренхимы данного органа в разных срезах и в различные временные промежутки. При выполнении ультразвукового исследования (УЗИ) печени важно визуализировать очаговое изменение эхогенности данного органа, которое трактуется как наличие поражения [2]. При УЗИ выделяют 4 вида эхогенности образования: анэхогенное- полностью поглощает ультразвуковые волны, чаще всего жидкостная структура, изоэхогенное - имеет такую же плотность как и неизменённая ткань, гипоехогенное- структурное изменение ткани исследуемого органа, характеризующееся сниженной плотностью и, соответственно, гиперэхогенное- образование, имеющее высокую плотность для прохождения ультразвуковых волн.

Материалы и методы: для исследования возможностей применения нейронных сетей для диагностирования метастатического поражения печени по данным ультразвуковых исследований специалистами проводится обследование пациентов на базе ФГБУ «НМИЦ онкологии им. Н.Н. Петрова» Минздрава России. В процессе исследования создается набор данных, содержащий видеозаписи длительностью от 7 до 30 секунд, к каждой видеозаписи врач ультразвуковой диагностики создает текстовый документ с описанием состояния печени на основании следующих ультразвуковых параметров: оценка структуры и эхогенности паренхимы, оценка сосудистой архитектоники органа, выявление признаков диффузных и очаговых изменений, а так же при наличии очагового поражения полное описание изменений согласно общеутверждённым нормам. Ниже приводится краткое описание собранных видео.

Таблица 1. Описание набора данных.

Тип	Количество видеозаписей
Нормальная печень	17
Диффузные изменения печени (жировой гепатоз) без очаговых образований	8
Добкачественные очаговые образования (кисты, гемангиомы)	5
Очаги метастазирования	8

В общей сложности было получено 38 видео, выполненных либо при продольном сканировании, либо визуализация из поперечного сканирования. Полученный набор требуется разделять на обучающий, валидационный и тестовый (60%, 20%, 20% соответственно). Из каждого видео извлекается максимальное количество кадров.

Задача, решаемая сервисом искусственного интеллекта - определение признаков наличия и локализации артефактов, характерных для рака печени [3]. Для каждого артефакта наиболее вероятная категория из приведенного ниже перечня и вероятность отнесения находки к этой категории в процентах:

- злокачественное новообразование;
- доброкачественное образование;
- норма.

Целью данного исследования является создание набора данных для изучения возможностей применения нейронных сетей для диагностирования очаговых образований печени и их дифференциальной диагностики по данным ультразвуковых исследований.

Результаты: на данном этапе создан набор данных из 38 видео файлов, проведена разбивка видео файлов по кадрам.

Выводы: выполнена подготовка дата сета к применению моделей, построенных на технологии сверточных нейронных сетей. Сформулирована задача, решаемая сервисом искусственного интеллекта. В процессе дальнейшей работы планируется увеличить базу видео изображений для проведения дальнейшего тестирования построенных моделей.

Литература

1. Siyuan Zhang, Yifan Wang, Jiayao Jiang, Jingxian Dong, Weiwei Yi, and Wenguang Hou CNN-Based Medical Ultrasound Image Quality Assessment.// Hindawi Complexity Volume 2021 , Article ID 9938367, 9 pages DOI: 10.1155/2021/9938367.

2. Бусько Е.А., Козубова К.В., Багненко С.С., Карачун А.М., Буровик И.А., Гончарова А.Б., Костромина Е.В., Кадырлеев Р.А., Курганская И.Х., Шевкунов Л.Н. Сравнительный анализ эффективности КТ и контрастно-усиленного УЗИ в диагностике метастазов колоректального рака печени. *Анналы хирургической гепатологии*. 2022. Т. 27. № 1. С. 22-32. DOI: 10.16931/1995-5464.2022-1-22-32.

3. Государственное бюджетное учреждение здравоохранения города Москвы «Научно-практический клинический центр диагностики и телемедицинских технологий Департамента здравоохранения города Москвы». Базовые диагностические требования к работе ИИ-сервисов. [Электронный ресурс] // URL: <https://mosmed.ai/> (дата обращения: 01.10.2022).

© Камгуга Ф. Х., Козубова К.В., Бусько Е.А., Гончарова А.Б.

УДК 517.927

АППРОКСИМАЦИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТИ

Корчагина О.Р., Кашиников В.И.

ФГКВБОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Целью исследователей последнего десятилетия является математическое моделирование и анализ математических моделей сетеподобных эволюционных процессов переноса применительно к дифференциальным системам с распределенными параметрами на сети. Сложность состоит в описании мест сочленения (узлах) линейных фрагментов сети. В технических задачах особый интерес вызывают гидродинамические процессы, осложненные термальным эффектом, а именно поглощением (выделением)

энергии. При транспортировке вязкой среды по гидросети происходит нагрев (охлаждение) гидросистемы, а это значит что необходимо учитывать неизотермическую составляющую при анализе гидродинамического процесса. Для адекватного математического анализа гидродинамического процесса во всей гидросети требуется адекватное математическое описание процесса сопряжения (согласования) в узлах гидросистемы.

Рассмотрим произвольный граф Γ с конечным числом ребер γ и внутренних узлов ξ . Через $R(\xi)$ обозначим множество ребер, ориентированных «к узлу ξ », $r(\xi)$ – множество ребер, ориентированных «от узла ξ ». $\partial\Gamma$ – множество граничных узлов ζ графа Γ и пусть Γ_0 – объединение всех ребер, не содержащих концевых точек, $\Gamma_T = \Gamma_0 \times (0, T)$, $\partial\Gamma_T = \partial\Gamma \times (0, T)$. Каждое ребро γ графа Γ параметризуется отрезком $[0, 1]$ и параметром $x \in [0, 1]$, ориентация ребер установлена отрезком $[0, 1]$. Пусть $C[\Gamma]$ – множество непрерывных функций на Γ , $C[\Gamma]$ – множество кусочно непрерывных функций и $C^2[\Gamma]$ – множество функций, все производные которых до второго порядка включительно принадлежат $C[\Gamma]$.

Обозначим через $a(x)$ – коэффициент, характеризующий определяющее свойство потокового процесса, а через $b(x)$ – коэффициент, характеризующий условия перемещения потока, определяемые свойствами носителя потока. Функция $u(x, t)$, $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ ($0 < T < \infty$) удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + b(x)u(x, t), \quad x \in \Gamma_T, \quad (1)$$

$$(u(1, t))_{R(\xi)} = (u(0, t))_{r(\xi)}, \quad \sum_{R(\xi)} \frac{\partial u(1, t)}{dx} = \sum_{r(\xi)} \frac{\partial u(0, t)}{dx}, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

Соотношение (1), (2) назовем уравнением переноса по сетевому носителю (графу Γ) при изменении временной переменной $t \in (0, T)$. Присоединяя к уравнению (1), (2) начальное

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma \quad (3)$$

и граничные

$$u(0, t)_{\partial\Gamma} = 0, \quad u(1, t)_{\partial\Gamma} = 0, \quad t \in (0, T) \quad (4)$$

условия, получаем начально-краевую задачу (1)-(4).

Можно считать, что область Γ_T определена уравнением (1), (2). При этом соотношения (4) задаются на множестве $\partial\Gamma \times (0, T)$. Функция $u(x, t)$ класса $C^2(\Gamma_T) \cap C(\Gamma \times [0, T])$ является решением краевой задачи (1)-(4). Она удовлетворяет уравнению (1), (2) в области Γ_T , начальным условиям (3.27) при $t = 0$, $x \in \Gamma$ и граничным условиям (4) в области $\partial\Gamma \times (0, T)$.

Начально-краевая задача (1)-(4) имеет единственное слабое решение $u(x, t)$, непрерывно зависящее от исходных данных.

Аппроксимация начально-краевой задачи (1)-(4) приводит к разностной схеме:

$$\begin{aligned} \frac{(u_k^{j+1})_\gamma - (u_k^j)_\gamma}{\tau} &= (a_k)_\gamma \frac{(u_{k-1}^j)_\gamma - 2(u_k^j)_\gamma + (u_{k+1}^j)_\gamma}{h^2} + (b_k)_\gamma (u_k^j)_\gamma, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ (u_n^{j+1})_{\gamma \subset R(\xi)} &= (u_0^{j+1})_{\gamma \subset r(\xi)}, \\ \sum_{\gamma \subset R(\xi)} ((u_n^{j+1})_\gamma - (u_{n-1}^{j+1})_\gamma) &= \sum_{\gamma \subset r(\xi)} ((u_1^{j+1})_\gamma - (u_0^{j+1})_\gamma), \\ u_k^0 &= \varphi_k, \quad k = \overline{0, n}, \quad (u_0^{j+1})_{\gamma \in \partial\Gamma} = (u_1^{j+1})_{\gamma \in \partial\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Индексом k пронумерованы узловые точки деления ребер для пространственной переменной x , индексом j – узловые точки деления для временной переменной $t \in [0, 1]$.

Подробное описание разностной схемы (5) представлено ниже.

Фрагмент разностной схемы для ребра γ :

$$(u_k^{j+1})_\gamma = s_k (u_{k-1}^j)_\gamma + (1 - 2s_k + w_k) (u_k^j)_\gamma + s_k (u_{k+1}^j)_\gamma,$$

$$k = \overline{1, n-1}, s_k = (a_k)_\gamma \frac{\tau}{h^2}, w_k = \tau (b_k)_\gamma.$$

Фрагмент разностной схемы для балансных соотношений:

$$(u_n^{j+1})_{\gamma \subset R(\xi)} = (u_0^{j+1})_{\gamma \subset r(\xi)},$$

$$\sum_{\gamma \subset R(\xi)} ((u_n^{j+1})_\gamma - (u_{n-1}^{j+1})_\gamma) = \sum_{\gamma \subset r(\xi)} ((u_1^{j+1})_\gamma - (u_0^{j+1})_\gamma),$$

Фрагмент разностной схемы для начальных условий:

$$u_k^0 = \varphi_k, k = \overline{0, n}.$$

Фрагмент разностной схемы для граничных условий:

$$(u_0^{j+1})_{\partial\Gamma} = 0,$$

$$(u_1^{j+1})_{\partial\Gamma} = 0.$$

Представлена аппроксимация математической модели сетеподобных эволюционных процессов переноса, описываемых дифференциальными системами с распределенными параметрами на произвольной сети (графе). Построены разностные схемы для математических моделей с носителями на основных фрагментах сети (произвольного графа). Результаты работы могут быть использованы в задачах оптимального управления указанными эволюционными процессами в сетях [6-10].

Литература

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.:Наука. 1977. 456 с.
2. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Определение стартовой функции в задаче наблюдения параболической системы с распределенными параметрами на графе. Вестник Воронежского государственного технического университета. 2014;10(6). С. 29-35.
3. Провоторов В.В. Метод моментов в задаче гашения колебаний дифференциальной системы на графе. Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010;2. С. 60-69.
4. Provotorov V.V., Ryazhskikh V.I., Gnilitckaya Yu.A. Unique weak solvability of a nonlinear initial boundary value problem with distributed parameters in a netlike region. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. 2017;13(3). С. 264-277. Доступно по: <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.304>. (дата обращения: 4.06.2022).
5. Zhabko A.P., Provotorov V.V., Balaban O.R. Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes. 2019;15(2). С. 187-198. Доступно по: <https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.203>. (дата обращения: 4.06.2022).

© Корчагина О.Р., Кашников В.И.

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СЕТЕПОДОБНЫХ ПОТОКОВЫХ ЯВЛЕНИЙ СО
СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ НОСИТЕЛЕЙ**

Корчагина О.Р.,¹ Парт А.А.²

¹*ФГКВБОУ ВПО ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е.
Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

²*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж*

Рассмотрим подходы при построении аппроксимаций эволюционных операторов, формализмами которых описываются эволюционные потоковые явления. Обозначим через $R(t)$ линейное многообразие функций $\varphi(x,t)$, для каждого фиксированного $t \in [0, T]$ (здесь через $R(t)$ обозначено множество функций $\varphi(x,t)$ непрерывно-дифференцируемых по переменной t и имеющих определенную гладкость по переменной x).

Для функции $\varphi(x,t) \in \Phi$ рассмотрим эволюционную задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Lambda \varphi &= f, \quad x, t \in ((\Gamma \setminus \partial \Gamma) \setminus J(\Gamma)) \times (0, T], \\ \varphi &= \theta, \quad x \in \Gamma \setminus \partial \Gamma, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где Φ – множество функций $\varphi \in R(t)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi = \theta, \quad x, t \in \partial \Gamma \times (0, T],$$

здесь заданная функция $\theta \in G$ ($G \subset R(t)$ – заданное линейное многообразие), оператор Λ

определен дифференциальным выражением вида $\Lambda \varphi = -\frac{d^2}{dx^2} \varphi + q(x)\varphi$, $x \in (\Gamma \setminus \partial \Gamma) \setminus J(\Gamma)$.

Пусть задача (1) имеет единственное решение φ и пусть это решение непрерывно в $\Gamma \times [0, T]$. Вначале аппроксимируем задачу (1) в области $\Gamma^h \times [0, T]$ по пространственной переменной x . Получим обыкновенное дифференциальное уравнение по временной переменной t и разностное по пространственной переменной x – дифференциально-разностное уравнение. Приходим к дифференциально-разностной задаче

$$\frac{d\varphi_k}{dt} + \Lambda^h \varphi_k = f_k, \quad \varphi_k = \theta_k,$$

здесь φ_k, f_k – сеточные функции времени t , Λ^h – конечно-разностный оператор соответствующий $\Lambda \varphi$, k – индекс, соответствующий точкам деления ребер графа Γ пространственной переменной x с шагом h .

Далее рассмотрим аппроксимацию по временной переменной с шагом τ

$$\frac{\varphi_k^{j+1} - \varphi_k^j}{\tau} + \Lambda^h \varphi_k^j = f_k^j, \quad \varphi_k^0 = \theta_k,$$

здесь j – индекс, соответствующий точкам деления отрезка $[0, T]$ по временной переменной t ; f_k^j – компоненты проекции функции f_k^j на сетку $\{t_j : t_j = j\tau (j = \overline{0, L}), \tau = T/L\}$, можно считать $f_k^j = f_k(t_j)$.

Рассмотрим разностную схему на примере первой краевой задачи решение для эволюционной дифференциальной системы. Математическая модель имеет вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \quad (2)$$

$$u(1,t)_\gamma = u(0,t)_\gamma, \quad \sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{\partial u(1,t)_\gamma}{\partial x} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{\partial u(0,t)_\gamma}{\partial x}, \quad (3)$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (4)$$

$$u(x,t)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad t \in [0, T], \quad 0 \leq T \leq \infty. \quad (5)$$

Разобьем ребра γ сети Γ точками kh (k – натуральные числа, $k = \overline{1, N}$, $h > 0$ – фиксированное число, равное длине элементарного отрезка ω_{kh}), при этом считаем, что внутренние узлы $\xi \in J(\Gamma)$ графа входят в число таких точек. Множество точек $\{kh\}$ назовем сеткой Γ и обозначим Γ^h . Для сеточных функций u_h (индекс h для упрощения записи иногда опускается), определенных на Γ^h и соответствующих функциям $u(x)$, $x \in \Gamma$, введем разностные операции (разностные отношения) $u_{\bar{x}}(x) = \frac{1}{h}(u(x+h) - u(x))$, $u_x(x) = \frac{1}{h}(u(x) - u(x-h))$ (правое и левое разностные отношения). Переменные u_x и $u_{\bar{x}}$ являются разностным аналогом производной $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$. В силу представленных обозначений разностная схема принимает вид:

$$u_{\bar{x}}(x) - (a_h u_x(x))_{\bar{x}} + b_h u(x) = f_h(x), \quad (6)$$

$$u_h(x)|_{\partial\Gamma^h} = 0, \quad (7)$$

$$u_h|_{t=0} = \varphi_h. \quad (8)$$

В соотношении (8) сеточная функция φ_h в точке kh отрезка ω_{kh} равна усреднению $\varphi_h = \frac{1}{h} \int_{\omega_{kh}} \varphi(x) dx$. Аналогично строятся сеточные функции a_h и b_h . Сеточная функция $f_h(x)$ строится по заданной функции f в соответствии с соотношением (усреднение) $f_h|_{k,j} = \frac{1}{h\tau} \int_{\Gamma_T(k,j)} f(x,t) dx dt$, где $\Gamma_T(k,j) = \omega_{kh} \times (j\tau, (j+1)\tau)$.

Разностная схема (6)-(8) для каждого слоя $t = t_j$ ($j = \overline{1, L}$) представляется в виде линейной алгебраической системы уравнений относительно значений сеточной функции, однозначно разрешимую для всех $\tau < \tau_0$. Здесь $\tau_0 > 0$ – некоторое фиксированное число. Предположение, что решение задачи (1) ищется в пространстве интегрируемых функций, приводит к тому, что решение как сеточная функция удовлетворяет тождеству

$$\sum_{\Gamma_+^h} (u_{\bar{x}} \eta_h + a_h u_x \eta_x + b_h u_h \eta_h) = \sum_{\Gamma_+^h} f_h \eta_h,$$

имеющему месту во всех слоях $t = t_j$, где Γ_+^h – множество вершин $x = kh$ ячеек ω_{kh} , принадлежащих сетке Γ^h , η_h – произвольная сеточная функция Γ^h , равная нулю в граничных узлах $\partial\Gamma^h$. Система (6), (7) при $\tau < \tau_0$ однозначно разрешима на слое $t = t_j$ при любых $f_h(x)$.

Разностная схема (6), (7) устойчива. Сходимость приближенных решений есть прямое следствие устойчивости разностной схемы при выбранной аппроксимации дифференциального уравнения или систем уравнений.

Литература

1. Провоторов В.В. Метод моментов в задаче гашения колебаний дифференциальной системы на графе. Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010;2. С. 60-69.
2. Balaban O.R. Difference scheme for evolutionary processes with distributed parameters on the network / O.R. Balaban // Modern informatization problems in simulation and social technologies (MIP-2021'SCT): Proceedings of the XXIV-th International Open Science Conference. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House. – 2021. – p. 16-20.
3. Балабан, О. Р. Аппроксимация эволюционных процессов с распределенными параметрами на сети / О.Р. Балабан // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2020. – Т. 8. – № 3. – URL: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/08/Balaban_3_20_1.pdf.

© Корчагина О.Р., Парт А.А.

УДК 519.6

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ НА ОСНОВЕ ОПТИМИЗАЦИОННОГО ПОДХОДА

Котина Е.Д., Харченко Д.С.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Не смотря на существующее многообразие методов цифровой обработки изображений, разработка новых методов по-прежнему остается актуальной задачей. Такие алгоритмы имеют множество приложений в разных сферах. Примерами применения алгоритмов построения поля скоростей могут служить системы детектирования движения, системы наружного наблюдения, программы обработки радионуклидных исследований.

Задача построения поля скоростей исследовалась многими авторами [1-3]. В основе данных работ лежит предположение о постоянстве яркости вдоль траекторий. В работах [4, 5] рассматриваются оптимизационные алгоритмы построения поля скоростей как на основе дискретных систем [4], так и на основе непрерывных систем [5]. В данной работе представлен алгоритм построения поля скоростей на основе оптимизационного подхода с разбиением изображений на подобласти с использованием морфологических операций [6].

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (1)$$

где t – время, x – пространственный вектор координат, $x \in \mathbb{R}^n$, u – вектор параметров, $u \in \mathbb{R}^m$. В рассмотрение вводится функция $\rho = \rho(t, x)$ – количественная характеристика изображения (яркость), которая будет зависеть от времени и пространственных координат. Предполагается, что яркость остается неизменной вдоль траекторий системы (1), то есть

$$\left. \frac{d\rho}{dt} \right|_{(1)} = 0.$$

Считается, что функция $\rho = \rho(t, x)$ задана, требуется восстановить правую часть системы (1), заданную функцией $f(t, x, u)$, где вектор $u = (u_1, \dots, u_m)$ является неизвестным. Задача поиска вектора параметров сводится к задаче оптимизации [5]. Оптимизационный алгоритм строится на основе аналитического представления градиента исследуемого функционала.

Изображения могут содержать информацию о сложных движениях различных объектов, поэтому в работе предлагается разбиение изображений на подобласти в

предположении, что движение в каждой подобласти описывается своей системой уравнений, в частности системой линейного приближения. В основе алгоритма разбиения изображений на подобласти лежит морфологический подход обработки изображений с операциями дилатации и замыкания. Предложенный алгоритм может применяться для обработки различных последовательностей изображений, в частности, при обработке медицинских диагностических изображений.

Литература

1. Lucas B. D., Kanade T. An iterative image registration technique with an application to stereo vision // Proceedings of Imaging Understanding Workshop. 1981. С.121-130.
2. Horn B.K.P., Schunck B.G. Determining optical flow // Artificial Intelligence. 1981. №17. С.185-203.
3. Farneback G. Two-Frame Motion Estimation Based on Polynomial Expansion // Lecture Notes in Computer Science. 2003. Т.2749. С.363-370.
4. Kotina E. D., Leonova E.B., Ploskikh V.A. Displacement Field Construction Based on a Discrete Model in Image Processing Problems // «Известия Иркутского государственного университета». Серия «Математика». 2022. Т.39. С.3-16.
5. Bazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V. Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing // Cybernetics and Physics. 2018. №7. С.174-181.
6. Гонсалес Р., Вуд Р. Цифровая обработка изображений. М.: ТЕХНОСФЕРА. – 2005.

© Котина Е.Д., Харченко Д.С.

УДК 532.582.7

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ МАЛОГО ЭЛЛИПСОИДА НЕОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Купцов В.С., Катрахова А.А.

Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж

Пусть основной (невозмущенный) поток удовлетворяет уравнениям вида

$$\frac{\partial U_i^0}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^0}{\partial x_i} + \nu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 U_i^0}{\partial x_j^2}; \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial U_j^0}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

где t - время, x_j - декартовы координаты, U_i^0 - компоненты вектора скорости, P^0 - давление в жидкости, ρ - плотность жидкости, ν - коэффициент кинематической вязкости, $i=1,2,3$.

Внесем в этот поток эллипсоид. Уравнение эллипсоида в системе координат y_i пусть задано таким образом, что направление осей y_i совпадает с направлением полуосей a_i . тогда уравнение полуосей имеет вид:

$$a_i = a + \varepsilon(\alpha \delta_{i2} + \delta_{i3})a. \quad (2)$$

где ε - малый параметр, $0 < \alpha < 1$, a - радиус сферы. Это уравнение (2) описывает эллипсоид, у которого две полуоси мало отличаются от радиуса сферы, δ_{ij} - тензор Кронекера.

Рассмотрим новую систему координат $z_i = \sum_{j=1}^3 (\delta_{ij} + \varepsilon \alpha \delta_{i2} \delta_{j2} + \varepsilon \delta_{i3} \delta_{j3}) y_j$.

Тогда уравнение эллипсоида в новой системе координат имеет вид: $z_j z_j = a^2$ (По повторным индексам ведется суммирование). Применяя к уравнениям (1) методы операционного исчисления получим:

$$(\delta_{kj} + \varepsilon \alpha \delta_{k2} \delta_{j2} + \varepsilon \delta_{k3} \delta_{j3})^{-2} \frac{\partial^2 U_i^{*эл}}{\partial z_k^2} - \frac{p}{\nu} U_i^{*эл} = \frac{1}{\mu} (\delta_{ij} + \varepsilon \alpha \delta_{k2} \delta_{j2} + \varepsilon \delta_{k3} \delta_{j3})^{-1} \frac{\partial P^{*эл}}{\partial z_k};$$

$$(\delta_{kj} + \varepsilon\alpha\delta_{k2}\delta_{j2} + \varepsilon\delta_{k3}\delta_{j3})^{-1} \frac{\partial U^{*\varepsilon l}}{\partial z_k} = 0. \quad (3)$$

где p - параметр преобразования Лапласа ; $U^{*\varepsilon l}$, $P^{*\varepsilon l}$ - образы компонент поля скоростей и давления в возмущенном эллипсоидом потоке, $\mu, = \rho v$.

Граничные условия для уравнений (3) имеют вид:

$$U^{*\varepsilon l}|_{r=a} = 0; \quad U^{*\varepsilon l}|_{r \rightarrow \infty} = U^*_i(z_m, p), \quad (4)$$

где $r^2 = z_j \cdot z_j$, U^*_i - компоненты образа скорости невозмущенного потока.

Решение уравнений (3) с учетом граничных условий (4) будет:

$$U^{*\varepsilon l}_i = U^{*c}_i(z_m, p) + \varepsilon V^{*\varepsilon l}_i(z_m, p) + \dots; \quad P^{*\varepsilon l} = P^{*c}(z_m, p) + \varepsilon P^{*l}(z_m, p) + \dots \quad (5)$$

Нулевое приближение задачи согласно (5) будет обтекание сферы неустановившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости. Первое приближение:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V_i^{*\varepsilon l}}{\partial z_j^2} - \frac{p}{v} V_i^{*\varepsilon l} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P^{*1}}{\partial z_i} + (\alpha\delta_{j2} + \delta_{j3}) \left(2 \frac{\partial^2 U_i^{*c}}{\partial z_j^2} - \frac{\delta_{ij}}{\mu} \frac{\partial P_B^{*\varepsilon l}}{\partial z_k} \right);$$

$$\frac{\partial V_j^{*\varepsilon l}}{\partial z_j} - (\alpha\delta_{j2} + \delta_{j3}) \frac{\partial U_j^{*c}}{\partial z_j} = 0. \quad (6)$$

Граничные условия

$$V^{*\varepsilon l}|_{r=a} = 0; \quad V^{*\varepsilon l}|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (7)$$

Решение (6) с учетом (7) представим как

$$= W_i^{*\varepsilon l} + (\alpha\delta_{j2} + \delta_{j3}) z_j \frac{\partial U_j^{*c}}{\partial z_j};$$

$$P^{*1} = T^{*1} - (\alpha\delta_{j2} + \delta_{j3}) z_j \frac{\partial P^{*c}}{\partial z_j}. \quad (8)$$

Подставим решения (8) в уравнения (6) - (7), то

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 W_i^{*\varepsilon l}}{\partial z_j^2} - \frac{p}{v} W_i^{*\varepsilon l} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial T^{*1}}{\partial z_i}; \quad \frac{\partial W_j^{*\varepsilon l}}{\partial z_i} = 0, \quad (9)$$

где T^{*1} , $W_i^{*\varepsilon l}$ - неизвестные функции координат и времени t ; при этом $W_i^{*\varepsilon l}$ удовлетворяет $T W^{*\varepsilon l}|_{r=a} = -(\alpha\delta_{j2} + \delta_{j3}) z_j \frac{\partial U_j^{*c}}{\partial z_j}$; $W^{*\varepsilon l}|_{r \rightarrow \infty} = 0$. Согласно результатам работы [4] имеем для сферы с условием прилипания жидкости на ее поверхности

$$U^{*c}_i = -\frac{v}{p \cdot \mu} \left\{ \begin{aligned} & \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{K_{2,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} - \left(\frac{a}{r} \right)^{0,5} \frac{K_{0,5} \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^{0,5} \frac{K_{2,5} \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_i} (\bar{q}, p) \right. \\ & \left. \frac{3z_i z_j}{r^2} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^3 \frac{K_{2,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} - \left(\frac{a}{r} \right)^{0,5} \frac{K_{2,5} \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right)}{K_{0,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}} \right)} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_j} (\bar{q}, p) \right. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $K_n(r)$ - функция Макдональда дробного порядка; P^* - давление невозмущенного потока; q_j - координаты центра эллипсоида, $\bar{q} = \{q_j\}$.

Решение (9) с учетом соответствующих граничных условий будет:

$$W^{*\varepsilon l}_i = r^{0,5} K_{2,5} \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right) \left(\frac{p}{v} \right)^{1,25} \left[z_j \frac{\partial}{\partial z_e} \left(\frac{A^* m z_j z_e}{r^5} \right) - z_e \frac{\partial}{\partial z_j} \left(\frac{A^* m z_j z_e}{r^5} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{A^* m z_m}{r^3} \right) +$$

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \left[B_j \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \left(\frac{z_j}{r^3} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z_i} \left[K^0_j \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \left(\frac{z_i}{r^3} \right) \right] - 3T_j r^{4,5} \left(\frac{p}{v} \right)^{2,25} K_{4,5} \left(r \sqrt{\frac{p}{v}} \right) \frac{\partial}{\partial z_i} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \left(\frac{z_j}{r^3} \right) \right]. \quad (11)$$

где $A^* m z_j z_e = A_1 z_2 z_3 + A_2 z_1 z_3 + A_3 z_1 z_2$, $i \neq j \neq e$ и образуют перестановку чисел 1,2,3; $A^*_j, A_j, B_j, T_j, L_j, K^0_j$ - постоянные определяются из системы уравнений (4). Они имеют вид:

$$L_i = T_i / \alpha, \quad K^0_i = B_i / \alpha, \quad A_i = -0,4a^2 [(\alpha + 1)\delta_{ij} - 0,5\alpha \cdot \delta_{i2}\delta_{j2} - 0,5 \cdot \delta_{i3}\delta_{j3}] a^*_i,$$

$$A^0_i = 0,4 [(\alpha + 1)\delta_{ij} - (3,5 + \alpha) \cdot \delta_{i2}\delta_{j2} + (1,5\alpha - 1) \cdot \delta_{i3}\delta_{j3}] a^*_i,$$

$$T_i = \alpha \cdot a^*_i / 105a^2 n_*, \quad B_i = \alpha \cdot a^*_i (m_* + 7a^9 n_*) / 105a^2 n_*.$$

$$n_* = a^{-4,5} \left(\frac{p}{v}\right)^{2,25} K_{2,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}}\right), \quad m_* = a^{4,5} \left(\frac{p}{v}\right)^{2,25} \left[\left(1 + \frac{15v}{pa^2}\right) K_{2,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}}\right) + 3 \left(\frac{p}{v}\right)^{-0,5} K_{1,5} \left(a \sqrt{\frac{p}{v}}\right) \right],$$

$$a^*_{i} = -\frac{1}{2\mu a^2} \left[\alpha \left(\frac{p}{v}\right)^{-0,5} + \frac{v}{p} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x_i} (\bar{q}, p).$$

Затем получены оригиналы поля скоростей и давлений возмущенного течения, которые ввиду громоздкости здесь не приведены.

Определим силовое воздействие на эллипсоид по формуле

$$F_i^{\text{эл}} = \int_{S_{\text{эл}}} \sigma_{ij} n_j ds,$$

где $S_{\text{эл}}$ - площадь поверхности, n_j - компоненты нормали к данной поверхности, σ_{ij} - тензор напряжений возмущенного потока жидкости. Используя нулевое и первое приближение в разложении (5), из (12) получено выражение для силы, действующей на эллипсоид. С учетом зависимости тензора напряжений от скорости и давления в жидкости

$$F_i^{\text{эл}} = F_i^{\text{с}} + F_i^{\text{эл}}_{\text{уст}} + \varepsilon \cdot F_i'$$

где $F_i^{\text{с}}$ - компоненты силового воздействия на сферу, помещенную в нестационарный неоднородный поток вязкой несжимаемой жидкости $-2\pi a^3 \left\{ \frac{\partial p'}{\partial x_j} (\bar{q}, t) + \frac{3v}{a^2} \int_0^t \left[1 + \alpha / (v\pi(t-\tau))^{0,5} \frac{\partial p'}{\partial x_j} (\bar{q}, \tau) d\tau \right] \right\}$, $F_i^{\text{эл}}_{\text{уст}}$ - силовое воздействие на эллипсоид, помещенный в установившийся поток неоднородной жидкости

$$F_i^{\text{эл}}_{\text{уст}} = 6\pi\mu a U^0_i(\bar{q}, 0) + \pi a^3 \frac{\partial p^0}{\partial x_i} (\bar{q}, 0) + 2,4a \cdot \varepsilon \left[(1 + \alpha) \delta_{ij} - 0,5\alpha \delta_{i2} \delta_{j2} - 0,5\delta_{i3} \delta_{j3} \right] \left(\mu K^0_j(\bar{q}, 0) + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial p^0}{\partial x_j} (\bar{q}, 0) \right) + 2\pi a^3 \mu \varepsilon (\alpha \delta_{j2} + \delta_{j3}) \frac{\partial^2 U^0_i}{\partial x_j^2} (\bar{q}, 0)$$

Первое приближение за счет не стационарности потока будет:

$$F_i = -0,4\pi a^3 \left\{ \left[(1 + \alpha) \delta_{ij} - 0,5\alpha \cdot \delta_{i2} \delta_{j2} - 0,5 \cdot \delta_{i3} \delta_{j3} \right] \left[\frac{\partial p'}{\partial x_j} (\bar{q}, t) + \frac{4}{a} \left(\frac{v}{\pi}\right)^{0,5} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial p'}{\partial x_j} (\bar{q}, \tau) d\tau - \frac{2v}{a^2} \int_0^t \frac{\partial p'}{\partial x_j} (\bar{q}, \tau) d\tau \right] - 2,5(\alpha \cdot \delta_{i2} \delta_{j2} + \delta_{i3} \delta_{j3}) \frac{\partial p'}{\partial x_j} (\bar{q}, t) \right\}, p' = p^0 - p^0|_{t=0}$$

Точность решения задачи для силового воздействия будет порядка a^3 , для компонент вектора скорости порядка (a/L) , где L - расстояние от центра эллипсоида до особенностей основного потока.

Литература

1. Седов Л.И.. Механика сплошной среды. - М: Наука. 1973г.
2. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. -М: Гос. изд. технико-теоретич. литер., 1955.
3. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. - М.: Мир, 1976 Дифференциальные уравнения. 1990. т.26 №8.
4. Купцов В.С. О силе, действующей на сферическую частицу, помещенную в нестационарный поток вязкой жидкости // В кн: Сб. статей по мех. спл. сред. /Труды НИИМа. Воронеж: ВГУ, 1976.

© Купцов В.С., Катрахова А.А.

РАЗРАБОТКА ТЕЛЕМЕДИЦИНСКОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ КОНСУЛЬТАЦИЙ

Курниавати А.С.Д.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

В широком смысле телемедицина - это обмен информацией о состоянии здоровья пациентов профессионалами с помощью телекоммуникационных технологий, таких как мобильные приложения, видеоконференции, электронные письма, с целью лечения, профилактики заболеваний, травм, исследований, оценки, непрерывного образования медицинских работников и укрепления здоровья отдельных людей и сообществ [1, 2].

С марта 2020 года из-за эпидемии коронавируса в США применение телемедицинских технологий увеличилось на 154% [3]. Более широкое использование телемедицины также отмечено в различных странах после начала пандемии коронавирусной инфекции. Телемедицина в России переживает значительное развитие, трансформацию и становится драйвером новых технологий оказания медицинской помощи. Использование телемедицинских технологий для дистанционного мониторинга артериального давления и теле-ЭКГ помогает выявлять и оценивать состояние пациентов с хронической сердечной недостаточностью [4, 5].

Телемедицина оказывает положительное воздействие, такое как уменьшение вариабельности диагноза, улучшение клинического ведения и предоставления медицинских услуг во всем мире за счет повышения доступности, качества, эффективности и рентабельности [1]. Телемедицина - это мост между профессионалами и пациентами. Телепсихиатрия в отделении неотложной помощи в настоящее время способна повысить качество и эффективность медицинской помощи [6]. В России по телекоммуникационным системам разрешено консультировать пациентов из многих регионов Российской Федерации, особенно в области акушерства и гинекологии [7]. Телеконсультация помогает преодолеть дистанционные барьеры и улучшить доступ к медицинской помощи [8].

Целью этого исследования является разработка телемедицинского приложения на базе Android в качестве инструмента консультаций с пациентами и врачами. Пациенты могут записаться на прием к врачу, как соответствующей специальности, так и в соответствии с жалобами пациента. Пациенты могут консультироваться с помощью чата и видеозвонков, а также осуществлять платежи банковским переводом.

Можно выделить три основные функциональные требования к разрабатываемой платформе:

1. удобство проведения телемедицинских консультаций как в режиме реального времени, так и в отложенном формате;
2. хранение информации (медицинской, личных данных) пациента;
3. наблюдение и оценка за качеством работы врачей.

Разработка мобильного приложения выполняется с помощью платформы Flutter framework с Android Studio IDE с базой данных MySQL. Для соединения между приложением и базой данных используется технология REST API. Разработка приложения ведется как интерактивными, так и инкрементальными методами, реализован приоритет функций для повышения эффективности. Оценка приложения делается на основе паттернов – декомпозиции, единиц поставки функциональности и задач функциональности, оценки в группах, временных затратах [9].

Разработка приложений для телемедицины повышает эффективность медицинских услуг и снижает затраты на здравоохранение.

Литература

1. WHO Global Observatory for eHealth. Telemedicine: opportunities and developments in Member States: report on the second global survey on eHealth. 2010. 93 p. [Электронный ресурс] // URL: <https://apps.who.int/iris/handle/10665/44497> (дата обращения: 01.02.2022).
2. Scheffer M., Cassenote A., S. de Britto e Alves M. T. S., Russo G. The multiple uses of telemedicine during the pandemic: the evidence from a cross-sectional survey of medical doctors in Brazil. //Glob. Health. 2022. Vol. 18. No. 1, p. 81. doi: 10.1186/s12992-022-00875-9.
3. Koonin L. M. et al. Trends in the Use of Telehealth During the Emergence of the COVID-19 Pandemic — United States, January–March 2020. //MMWR Morb. Mortal. Wkly. Rep., 2020. Vol. 69. No. 43, p. 1595–1599. doi: 10.15585/mmwr.mm6943a3.
4. Потапов А.П., Ярцев С.Е., Лагутова Е.А. Дистанционное наблюдение за пациентами с хронической сердечной недостаточностью с применением телемониторинга АД и ЭКГ.// Российский журнал телемедицины и электронного здравоохранения 2021. Вып. 7(3). с. 42-51. doi: 10.29188/2712-9217-2021-7-3-42-51.
5. Шадеркин И.А., Шадеркина В.А. Дистанционные медицинские консультации пациентов: что изменилось в России за 20 лет. //Российский журнал телемедицины и электронного здравоохранения. 2021. Вып. 7(2). с.7-17. doi: 10.29188/2712-9217-2021-7-2-7-17.
6. Vakkalanka J. P. et al. Telepsychiatry services across an emergency department network: A mixed methods study of the implementation process. //Am. J. Emerg. Med. 2022. Vol. 59. p. 79–84. doi: 10.1016/j.ajem.2022.06.053.
7. Леванов В.М., Перевезенцев Е.А., Калиткина О. Применение телемедицинских технологий при оказании медицинской помощи в акушерстве и гинекологии (обзор). //Российский журнал телемедицины и электронного здравоохранения. 2021. Вып. 7(2). с. 23-30. doi: 10.29188/2712-9217-2021-7-2-23-30
8. L. B. Silva et al. Orthopedic Asynchronous Teleconsultation for Primary Care Patients by a Large-Scale Telemedicine Service in Minas Gerais, Brazil. //Telemed. E-Health, 2022. Vol. 28. No. 8. p. 1172–1177. doi: 10.1089/tmj.2021.0293.
9. Кривополенова С.Д., Гончарова А.Б. Программная реализация системы постановки предварительного диагноза. Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7. № 1. С. 153-157.

© Курниавати А.С.Д.

УДК 004.67

ОПИСАТЕЛЬНАЯ СТАТИСТИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА JAMOVI

Легкова И.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Программный пакет Jamovi появился в 2017 году под руководством таких людей как: Джонатан Лав, Дэмиан Дропманн и Рави Селкер [1]. Программа написана при помощи языка R, что позволяет разрабатывать новые статистические методы, и включать их в дополнительные модули. Программа имеет облачную реализацию.

Jamovi – это открытая и бесплатная платформа для решения многих статистических задач, которая является хорошей альтернативой дорогостоящим продуктам, таким как SPSS, SAS и Statistica. Также программа имеет специальные

пакеты для обработки медицинских данных, построения систем поддержки принятия диагностических решений, кривых выживаемости, линейной и логической регрессий. Особым преимуществом программного пакета является возможность импортирования файлов с данными в огромном количестве расширений таких как .xls, .xlsx, .xprt, .csv и др. В свою очередь Jamovi сохраняет данные, анализ и результаты в одном файле со специальным расширением .omv [2].

Рассмотрим обработку эмпирических данных таблиц при помощи методов описательной статистики в Jamovi. Чтобы перейти в окно, в котором проводится описательная статистика, следует зайти во вкладку «Анализ», далее нажать на иконку «Разведочный» и в выпавшем меню выбрать строку с названием «Описательные статистики».

Описательная статистика помогает собрать первичную информацию про базу данных. Основным объектом рассмотрения описательной статистики является частотное распределение переменной, которое в свою очередь делится на три группы: меры среднего уровня, меры рассеивания и меры распределения. Можно рассмотреть описательную статистику в зависимости от разделения по исходу [3].

Меры среднего уровня, иначе центральная тенденция, включают в себя такие понятия как среднее, мода и медиана. В меры рассеивания (дисперсии) входят понятия дисперсии, стандартного отклонения, стандартной ошибки средней, диапазона (размаха), минимума и максимума. Группа мер распределения состоит из асимметрии и эксцесса.

Описательные статистики

Статистики

Размер выборки

N Пропущенный

Процентильные значения

Точки отсечки для равные группы

Процентили

Дисперсия

Станд. отклонение Минимум

Дисперсия Максимум

Диапазон Межквартильное расстояние

Средняя дисперсия

Станд. ошибка средней

Доверительный интервал для средней %

Центральная тенденция

Среднее

Медиана

Мода

Сумма

Распределение

Асимметрия

Эксцесс

Нормальность

Шапиро-Уилк

Рис. 1. Меню описательной статистики Jamovi.

При применении описательной статистики к базе в зависимости от группировки по столбцу ИВЛ, получена таблица со следующими данными:

Описательные статистики				
	ИВЛ	Возраст	Лейкоциты ($10^9/\text{л}$)	Лимфоциты, ($10^9/\text{л}$)
N	0	97	97	97
	1	202	200	200
Пропущенный	0	0	0	0
	1	0	2	2
Среднее	0	66.7	9.45	1.06
	1	69.4	10.4	0.989
Медиана	0	69	8.28	0.960
	1	70.0	9.31	0.700
Стандартное отклонение	0	13.6	5.09	0.614
	1	13.5	5.20	1.12
Дисперсия	0	186	25.9	0.376
	1	181	27.1	1.25
Асимметрия	0	-0.455	1.32	1.51
	1	-0.338	1.77	4.36
Экссесс	0	-0.414	1.90	3.08
	1	-0.492	5.48	22.0

Благодаря удобству работы, программный пакет Jamovi имеет очень много шансов занять лидирующую позицию в статистической обработке данных.

Литература

1. Edelsbrunner P. Introducing jamovi: Free and Open Statistical Software Combining Ease of Use with the Power of R.// JEPS Bulletin. 2017. [Электронный ресурс] URL: <https://blog.efpsa.org/2017/03/23/introducing-jamovi-free-and-open-statistical-software-combining-ease-of-use-with-the-power-of-r/> (Дата обращения: 08.11.2022).

2. Jamovi, статистическое приложение для работы с электронными таблицами: [Электронный ресурс]. URL: https://ubunlog.com/ru/jamovi-aplicacion-hoja-de-calculo-estadistica/#Caracteristicas_generales_de_jamovi. (Дата обращения: 08.11.2022)

3. Гончарова А.Б., Бусько Е.А. Программная реализация системы принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы. //Сибирский журнал клинической и экспериментальной медицины. 2020. Т. 35. № 4. с. 137-142. DOI: [10.29001/2073-8552-2020-35-4-137-142](https://doi.org/10.29001/2073-8552-2020-35-4-137-142).

© Легкова И.А.

УДК 517.442

ПОИСК ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДАМИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Мишина Д.Г.

*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»,
г. Воронеж*

Процесс решения ряда задач в области высшей математики значительно упрощается, если использовать процесс перехода от оригиналов f к изображениям F .

Зачастую необходимо решить следующую задачу: найти частное решение неоднородного уравнения второго порядка $y''+py'+qy=f(x)$ с постоянными коэффициентами, при заданных начальных условиях: $y(0)=\alpha$, $y'(0)=\beta$.

Понятно, что исходное дифференциальное уравнение может быть однородным: $y''+py'+qy=0$. Однако и для него можно применить методы операционного исчисления в вышеизложенной формулировке. Нужно отметить, что в задачах и примерах практического характера однородное дифференциальное уравнение второго порядка встречается крайне редко [2].

Известно, что неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка можно решить тремя способами: методом подбора частного решения по виду правой части, методом вариации произвольных постоянных, с помощью операционного исчисления.

Запишем уравнение $y''+py'+qy=f(x)$ в следующем виде: $x''(t)+px'(t)+qx(t)=f(t)$, где t - независимая переменная, а $x(t)$ - функция от t . Найдем частное решение неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим данную задачу методом операционного исчисления. Для этого нужно использовать таблицу оригиналов и изображений, где $p = s + iw$ обозначает комплексную переменную.

По таблице преобразований Лапласа необходимо превратить x'' , x' и $f(t)$ в некоторые изображения. Далее выполняются простые арифметические действия и вычисления, в конце используется обратное преобразование Лапласа. По данному алгоритму будет найдено искомое частное решение исходного дифференциального уравнения второго порядка.

Пример 1. Материальная точка массы m движется прямолинейно под действием возмущающей силы $f=2msint$ и силы сопротивления $R=mv$, где v - скорость точки. Найти закон движения $x = x(t)$, если в начальный момент времени $x(0) = 0$, $v(0) = 1$.

Решение. Так как тело движется по закону $x = x(t)$, то из физического смысла производных следует, что производная первого порядка $x'(t)$ представляет собой скорость движения материальной точки, а вторая производная $x''(t)$ ее ускорение в момент времени t . По второму закону Ньютона $mx''=F$, где m - масса точки, F - равнодействующая всех сил, действующих на точку, равная $F=f-R=2msint-mx'$. Получим уравнение движения точки: $mx''=2msint-mx'$.

Таким образом, для определения закона движения точки получается следующая задача Коши: $x''+x'=2sint$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Перемещение точки за время от t_1 до t_2 находится по формуле $\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} x'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.

Эту задачу можно решить операционными методами. Обозначим $x(t) \doteq X(p)$, $x'(t) \doteq pX(p)$, $x''(t) \doteq p^2X(p)-1$, $sint \doteq \frac{1}{p^2+1}$.

Получаем уравнение для изображения: $p^2X(p)-1+pX(p) = \frac{1}{p^2+1}$, из которого

$$\text{находим } X(p^2+p) = \frac{2}{p^2+1} + 1 \Rightarrow X = \frac{1}{p^2+1} \left(\frac{2}{p^2+1} + 1 \right) = \frac{p^2+3}{p(p+1)(p^2+1)}.$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим X на сумму и разность простейших дробей

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+N}{p^2+1} = \frac{p^2+3}{p(p+1)(p^2+1)};$$

$$A(p+1)(p^2+1) + Bp(p^2+1) + (Cp+N)(p^2+p) = p^2+3;$$

$$A(p^3 + p^2 + p + 1) = B(p^3 + p) + C(p^3 + p^2) + N(p^2 + p) = p^2 + 3;$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях и решим систему:

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ A + N + C = 1, \\ A + B + N = 0, \\ A = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -3 - C, \\ 3 + C - (3 + B) = 1, \\ N = -(3 + B), \\ A = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -2, \\ C = -1, \\ N = -1, \\ A = 3; \end{cases}$$

$$X = \frac{3}{p} - \frac{2}{p+1} - \frac{p+1}{p^2+1} = 3 \cdot \frac{1}{p} - 2 \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Находим оригинал от каждой простейшей дроби:

$$3 \frac{1}{p} = [1 \mp \frac{1}{p}] = 3 \cdot 1 = 3; \quad e^{\alpha t} \mp \frac{1}{p-\alpha} \Rightarrow 2 \frac{1}{p-\alpha} \mp 2e^{-t};$$

$$\cos \omega t \mp \frac{p}{p^2 + \omega^2} \Rightarrow \cos t \mp \frac{p}{p^2 + 1};$$

$$\sin \omega t \mp \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \Rightarrow \sin t \mp \frac{1}{p^2 + 1},$$

и получаем решение исходной задачи $x(t) = 3 - 2e^{-t} - \cos t - \sin t$.

Ответ: $x(t) = 3 - 2e^{-t} - \cos t - \sin t$.

Литература

1. Мишина Д.Г. Интегральные преобразования и их приложения / Д. Г. Мишина // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования : материалы V международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», посвященной 90-летию Воронежского государственного педагогического университета / отв. за выпуск Г.Г. Петросян; редкол.: В.В. Обуховский (глав. ред.) [и др.]. - Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2021. - Вып. 11. - С. 132 - 133.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов, т. 2: Учебное пособие для вузов. / Н. С. Пискунов. - 13-е изд. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. - 560 с.

© Мишина Д.Г.

УДК 517.977.5

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ТОЧЕК ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Моисеев И.А.

*«Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф.
М. А. Бонч-Бруевича», г. Санкт-Петербург*

Ниже рассматривается задача быстрого действия для объекта, движение которого описывается нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В теории игр эта задача получила название игры «шофер-убийца» [1-6]. Так же задачи, подобные рассматриваемой, решаются методами теории оптимального управления [7-11].

Далее будем рассматривать траектории движения, описываемого следующей системой

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= V \sin \varphi + W_x, \\
\dot{y} &= V \cos \varphi - W_y, \\
\dot{\varphi} &= \omega u_1, \\
\dot{V} &= a u_2.
\end{aligned} \tag{1}$$

Управляемый объект переводится из начальной точки $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$ в область $(0, 0, \cos \varphi_T = 1, V_0)$, где T – конечный момент времени. Вектор управления $(u_1(t), u_2(t))^*$ кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая ограничениям $|u_1(t)| \leq 1, |u_2(t)| \leq 1$. Курсовой угол $\varphi(t)$ и скорость объекта $V(t)$ удовлетворяют ограничениям $|\varphi(t)| \leq 2\pi, V(t) \in [V_0, V_0 + a2\pi/\omega]$, угловая скорость ω , ускорение a и возмущения W_x, W_y — положительные неравные нулю постоянные. Кроме того, накладываются ограничения на курсовой угол и конечное значение скорости. Рассмотрим частный случай, когда существует допустимое и удовлетворяющее необходимому условию оптимальности движение с одним переключением курсового угла, в точке переключения угла не происходит переключения управления скоростью. В работе [12] для данного случая была сформулирована и доказана теорема.

Теорема. *Теорема. Пусть для движения управляемого объекта, описываемого системой (1), существуют траектории, с одной точкой переключения управления курсовым углом, являющиеся решением поставленной задачи. Тогда эти траектории имеют одну или же три, точки переключения управления скоростью.*

В следствии к теореме [13] приводятся все варианты движений, претендующих на оптимальность и подробно рассмотрены условия существования траекторий с одним переключением управления скоростью 1.1, 1.2, 2.1, 2.2. Ниже рассмотрим случаи с тремя точками переключения – 1.3, 1.4, 2.3, 2.4. Пусть t_p – момент переключения угла, t_i – моменты переключения скорости, φ_i – значения курсового угла в моменты t_i . Итак

$$u_1^0 = +1, t \in [0, t_p], u_1^1 = -1, t \in [t_p, T].$$

$$1.3. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, t_2], u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_3], u_2^3 = -1, t \in [t_3, T].$$

$$1.4. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_2], u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_p] \cup [t_p, t_3], u_2^3 = -1, t \in [t_3, T].$$

$$u_1^0 = -1, t \in [0, t_p], u_1^1 = +1, t \in [t_p, T].$$

$$2.3. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, t_2], u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_3], u_2^3 = -1, t \in [t_3, T].$$

$$2.4. \quad u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, t_2], u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_3], u_2^3 = -1, t \in [t_3, T].$$

В дальнейшем нам понадобятся уравнения, полученные в результате интегрирования системы (3), сопряженной (1) и гамильтониан (2) исходной системы. Имеем

$$\begin{aligned}
H(x, y, \varphi, V, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, u_1, u_2, t) &= \psi_1(V \sin \varphi + W_x) + \\
&+ \psi_2(V \cos \varphi + W_y) + \omega u_1 \psi_3 + a u_2 \psi_4
\end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_1 &= 0, \\
\dot{\psi}_2 &= 0, \\
\dot{\psi}_3 &= -(\psi_1 V \cos \varphi - \psi_2 V \sin \varphi), \\
\dot{\psi}_4 &= -(\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi).
\end{aligned} \tag{3}$$

Интегрируя (3) получим $\psi_1 = C_1, \psi_2 = C_2$,

$$\begin{aligned}
\psi_3 &= -C_1 \int V \cos \varphi dt + C_2 \int V \sin \varphi dt + C_3 = -C_1 \int (V \cos \varphi - W_y) dt - C_1 W_y t + \\
&+ C_2 \int (V \sin \varphi - W_x) dt - C_2 W_x t + C_3 = C_2 \int \dot{x} dt - C_2 W_x t - C_1 \int \dot{y} dt - C_1 W_y t + C_3 = \\
&= C_2 (x - W_x t) - C_1 (y + W_y t) + C_3.
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\psi_4 &= -\int (C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi) dt + C_4 = -\int \cos(\varphi - \alpha) dt + \\
&+ C_4 = -\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\omega u_1} + C_4,
\end{aligned}$$

где $\alpha = \arctg(C_1/C_2)$. В дальнейшем будем считать, что если $\varphi_0 \in [-2\pi, 0], u_1^0 = +1$ и $\varphi_0 \in [0, 2\pi], u_1^0 = -1$. Рассмотрим вариант движения 1.3

$$u_2^0 = +1, t \in [0, t_1], u_2^1 = -1, t \in [t_1, t_p] \cup [t_p, t_2], u_2^2 = +1, t \in [t_2, t_3], u_2^3 = -1, t \in [t_3, T].$$

В точке t_1 функция $\psi_4(t_1) = -\frac{\sin(\varphi_1 - \alpha)}{\omega u_1^0} + C_4 = 0$, откуда $t_1 C_4 = \frac{\sin(\varphi_1 - \alpha)}{\omega u_1^0}$. В точке t_2

функция $\psi_4(t_2) = -\frac{\sin(\varphi_2 - \alpha)}{\omega u_1^1} + C_4 = \frac{\sin(\varphi_2 - \alpha)}{\omega u_1^0} + C_4 = 0$, откуда следует, что

$C_4 = -\frac{\sin(\varphi_2 - \alpha)}{\omega u_1^0}$. Отсюда получаем равенство $C_4 = \frac{\sin(\varphi_1 - \alpha)}{\omega u_1^0} = -\frac{\sin(\varphi_2 - \alpha)}{\omega u_1^0}$ и

$\frac{\sin(\varphi_1 - \alpha)}{\omega u_1^0} + \frac{\sin(\varphi_2 - \alpha)}{\omega u_1^0} = 0$, т.е. $\sin(\varphi_1 - \alpha) + \sin(\varphi_2 - \alpha) = 0$. С другой стороны

$\psi_4(t_p) = -\frac{\sin(\varphi_p - \alpha)}{\omega u_1^0} + \frac{\sin(\varphi_1 - \alpha)}{\omega u_1^0}$ и, кроме того,

$\psi_4(t_p) = -\frac{\sin(\varphi_p - \alpha)}{\omega u_1^1} + \frac{\sin(\varphi_2 - \alpha)}{\omega u_1^1} = \frac{\sin(\varphi_p - \alpha)}{\omega u_1^0} - \frac{\sin(\varphi_2 - \alpha)}{\omega u_1^0}$. Отсюда следует, что

$2\sin(\varphi_p - \alpha) = \sin(\varphi_2 - \alpha) + \sin(\varphi_1 - \alpha) = 0$ и $\sin(\varphi_p - \alpha) = 0$, т.е. $\varphi_p = \alpha + \pi k$. Так как $\sin(\varphi_2 - \alpha) + \sin(\varphi_1 - \alpha) = 2\sin((\varphi_2 + \varphi_1 - 2\alpha)/2)\cos((\varphi_2 - \varphi_1)/2) = 0$, откуда следует, что $\sin((\varphi_2 + \varphi_1 - 2\alpha)/2) = 0$, или $\cos((\varphi_2 - \varphi_1)/2) = 0$. В первом случае $\varphi_2 + \varphi_1 - 2\alpha = 2\pi n$. Тогда время $2\varphi_p - \varphi_1 - \varphi_2 = 2\alpha + 2\pi k - 2\alpha - 2\pi n = 2\pi(k - n) \geq 2\pi$. Но это противоречит ограничениям, накладываемым на скорость, откуда следует, что следует рассматривать вариант когда $\cos((\varphi_2 - \varphi_1)/2) = 0$, а тогда $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi + 2\pi m$. В данном случае вопрос о существовании искомого движения требует дальнейшего исследования.

Теперь рассмотрим вариант движения 1.4. В этом случае $\sin(\varphi_2 - \alpha) + \sin(\varphi_3 - \alpha) = 0$ и $\sin(\varphi_p - \alpha) = 0$, $\varphi_p = \alpha + \pi k$, а кроме того $\sin((\varphi_3 + \varphi_2 - 2\alpha)/2) \cos((\varphi_3 - \varphi_2)/2) = 0$. Если равен нулю первый сомножитель, то $2\varphi_p - \varphi_2 - \varphi_3 = 2\alpha + 2\pi k - 2\alpha - 2\pi n = 2\pi(k - n) \geq 2\pi$. Во втором случае $\varphi_3 = \varphi_2 + \pi + 2\pi m$. Ситуация та же, что и в случае 1.3. Аналогичная ситуация имеет место и при рассмотрении движения 2.3, 2.4.

Литература

1. Isaacs R. Games of pursuit. Scientific report of the RAND Corporation. Santa Monica. 1951. P. 1-14.
2. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. — 384 с.
3. Reeds J. A., Shepp L. A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards// Pacific J. Math. 1990. Vol. 145, № 2. P. 367 — 393.
4. Пацко В. С., Турова В. Л. Игра шофер-убийца: история и современные исследования. Научные доклады // Рос. акад. наук, Урал. отд-ние, Ин-т математики и механики. УрО РАН, Екатеринбург. 2009. 43 с.
5. Двуреченский П. Е. Алгоритмы построения эpsilon-оптимальных стратегий в нелинейных дифференциальных играх на плоскости. Автореферат кандидатской диссертации, МФТИ (государственный университет), Долгопрудный 2013, 24 с.
6. Кулешов А.В. Некоторые способы численного решения дифференциальной игры «шофер-убийца». Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39). С. 73.
7. Бердышев Ю. И. Синтез оптимального по быстродействию управления движением материальной точки в среде с сопротивлением. Автореферат кандидатской диссертации, Свердловск 1978 (УНЦ АН СССР). — 18 с.
8. Золотых М. С., Моисеев И. А. Свойства точек переключения управления нелинейной системы четвертого порядка. / Вестник СПбГУ, сер. 10, пр. мат., инф., процессы управ., 2014, №3, с. 118-124
9. Гриднев Л. В., Моисеев И. А. Частный случай синтеза траекторий нелинейной системы четвертого порядка, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Процессы управления и устойчивость. Том 3(19). № 1. Труды XLVII международной научной конференции аспирантов и студентов / науч. ред. тома Н. В. Смирнов. СПб.: Издат. Дом Федоровой Г. В., 2016. С. 85 — 89.
10. Иванов А. В., Моисеев И. А. Частный случай синтеза оптимального управления в задаче перелета. Процессы управления и устойчивость. Том 8(24). № 1. Труды LI международной научной конференции аспирантов и студентов // науч. ред. тома Н. В. Смирнов. СПб.: Издат. Дом Федоровой Г. В., 2021. С. 66 — 72.
11. Иванов А. В., Моисеев И. А. Синтез оптимального по быстродействию управления в задаче перелета в случае одного переключения курсового угла.// В сб. Современ. методы прикладн. мат., теории упр-я, компьют. технологий (ПМТУКТ-2021), сб. Трудов Всероссийской научной конф. Воронеж: Воронежский гос. университет, 2021,-232 с., с. 54-5

© Моисеев И.А.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Мухсинов Е.М.

*Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
г. Худжанд, Таджикистан*

В гильбертовом пространстве X рассмотрим дифференциальную игру, описываемую дифференциальным уравнением дробного порядка

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + f(t, u(t), v(t)) \quad (1)$$

и терминальным множеством M , которое является замкнутым подпространством пространства X .

В игре (1) $t \geq 0$, $x(t) \in X$, $D^\alpha x(t)$ - дробная производная Капуто порядка α , $1 \leq \alpha < 2$, от функции $x(t)$, линейный замкнутый оператор $A: D \rightarrow X$, имеющий плотную в X область определения D , порождает сильно непрерывную полугруппу $S_\alpha(t)$. Далее, Y и Z - гильбертовы пространства, $U([0, \infty), Y)$ - множество всех измеримых отображений, действующих из $[0, \infty)$ в Y , $u(\cdot) \in U([0, \infty), Y)$ - управление преследования, $v(\cdot) \in U([0, \infty), Z)$ - управление убегания, причем на эти управления наложены следующие интегральные ограничения

$$\int_0^\infty \|u(s)\|^2 ds \leq \rho^2, \quad \int_0^\infty \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2 \quad (2)$$

Определение 1 [1, с 2101]. *Линейный и замкнутый оператор $A: D \rightarrow X$ называется оператором типа (N, θ, α, μ) , если существуют $0 < \theta < \pi/2$, $N > 0$ и $\mu \in \mathbb{R}$ такие, что у оператора A существует α -резолвента $R(\lambda^\alpha, A) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1}$ вне сектора $\mu + S_\theta = \{\mu + \lambda^\alpha: \lambda \in \mathbb{C}, |\text{Arg}(-\lambda^\alpha)| < \theta\}$ и имеет место следующая оценка*

$$\|(\lambda^\alpha I - A)^{-1}\| \leq \frac{N}{|\lambda^\alpha - \mu|}, \quad \lambda^\alpha \notin \mu + S_\theta.$$

Как отмечается в работе [1, с.2102] если A является оператором типа (N, θ, α, μ) , то он порождает сильно непрерывную полугруппу

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\lambda t} R(\lambda^\alpha, A) d\lambda,$$

где c - контур для которого $\lambda \in c$ и $\lambda^\alpha \notin \mu + S_\theta$.

В силу [1, с.2102] можно показать, что если линейный замкнутый оператор A является оператором типа (N, θ, α, μ) , а отображение $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\beta \in (0, 1]$, то задача Коши (1) с начальным условием

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1 \quad (3)$$

имеет единственное решение вида

$$x(t) = K_\alpha(t)x_1 + L_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(u(s), v(s), s)ds, \quad (4)$$

где

$$K_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-2} R(\lambda^\alpha, A) d\lambda, \quad L_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A) d\lambda.$$

Поэтому, следуя А.Фридману [2, с.95] дадим следующее

Определение 2. Если отображение $t \rightarrow f(u(t), v(t), t)$ локально интегрируемо, то решением задачи Коши (1) с начальным условием (3) и соответствующим управлением $u(t)$ и $v(t)$, будем называть отображение вида (4), где интеграл понимается в смысле Бохнера.

В дальнейшем, M^\perp – ортогональное дополнение к M в X , π – оператор ортогонального проектирования из X на M^\perp , $f(u(t), v(t), t) = -Cu(t) + Dv(t)$, где $C: Y \rightarrow X$ и $D: Z \rightarrow X$ – линейные ограниченные операторы.

Следующая теорема обеспечить разрешимость задачи преследования в смысле Л.С.Понтрягина [3, с.309] для дифференциальной игры (1).

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) существует линейный оператор $L(t): Z \rightarrow Y$ непрерывно зависящий от $t \geq 0$ такой, что $\pi S_\alpha(t)D = \pi S_\alpha(t)CL$;
- 2) если

$$\lambda^2(t) = \sup \left\{ \int_0^t \|L(s)v(t-s)\|^2 ds : \int_0^t \|v(s)\|^2 ds \leq \sigma^2 \right\},$$

то при всех $t \geq 0$ имеет место неравенство $\rho \geq \lambda(t)$;

- 3) начальная точка (x_0, x_1) и число T такие, что имеет место включение

$$\pi K_\alpha(T)x_1 + \pi L_\alpha(T)x_0 \in \left\{ \int_0^T \pi S_\alpha(T-s)Cp(s)ds : \int_0^T \|p(s)\|^2 ds \leq (\rho - \lambda(T))^2 \right\} \quad (5)$$

Тогда в игре (1) из начальной точки (x_0, x_1) возможно преследование за время T .

Замечание. Аналогичная задача исследуется в [4, с.109], где линейный оператор является ограниченным, а игра происходит в конечномерном пространстве.

Литература

1. Xiao-BaoShu, Qianqian Wang. The existancean duniqueen essof mild solutions forfractional differential equations with non local condition so forder $1 < \alpha < 2$ // Computers and Mathematics with Applications. – 2012. – Vol.64.– P. 2100–2110.
2. Friedman A. Differential Games of Pursuitin Banach Space // Journal of Mathematical analysis and applications. – 1969. – Vol.25. – P. 93–113.
3. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования// Математический сборник. – 1980. – Т.112(154). – №3(7). – С.307–331.
4. Мухсинов Е.М.Задача преследования для одной дифференциальной игры дробного порядка с интегральными ограничениями // Сборник трудов Всероссийской научной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» (14–16 декабря 2021г.). – Воронеж, 2021. – С. 109–111.

© Мухсинов Е.М.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКОМ ТРАЕКТОРИЙ

Овсянников Д.А., Котина Е.Д.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Построению программных управлений посвящено много работ различных авторов. В данной работе рассматривается задача программного управления пучком траекторий [1, 2]. Исследуется задача перевода центра тяжести одного множества в центр тяжести другого множества. Такие задачи возникают при управлении пучками заряженных частиц, а также, например, при обработке изображений [3, 4].

В работе рассматривается нелинейная управляемая динамическая система

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0 \in M_0, M_0 \in R^n. \quad (2)$$

В формуле (1) t – время, x – n – вектор фазовых координат x_1, x_2, \dots, x_n , r – мерная вектор-функция на $[0, T]$, $f(t, x, u)$ – n – мерная вектор-функция непрерывная вместе с частными производными $\partial f / \partial x$, $\partial \operatorname{div}_x f / \partial x$, $(\operatorname{div}_x f = \sum_{i=1}^n \partial f_i / \partial x_i)$ по переменным x, u и кусочно-непрерывная по t . Считаем, что управления $u = u(t)$ составляют класс D векторных кусочно-непрерывных функций со значениями в U , U – компакт в R^r .

Пусть

$$x(t) = x_t = x(t, x_0, u), t \in [0, T] \quad (3)$$

решения системы (1) с начальным условием (2).

Через $M_{T,u} = \{x(T) = x(T, x_0, u), x_0 \in M_0\}$ обозначим сечение пучка траекторий в момент времени T , при фиксированном векторе управления u .

В работе также рассматривается функция плотности распределения $\rho = \rho(t, x)$, которая в различных задачах механики и электродинамики играет роль плотности распределения массы или заряда. В задачах обработки изображений эта функция может также играть роль количественной характеристики изображения (яркости), зависящей от пространственных координат и времени, или интенсивности распределения радиофармпрепарата при анализе данных радионуклидных исследований [3,4].

Уравнение, которое при заданной вектор-функции $f(t, x, u)$, определяет изменение функции плотности распределения в пространстве с течением времени имеет вид [1,2]:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} f(t, x, u) + \rho(t, x) \operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0 \quad (4)$$

с начальным условием

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), x \in M_0.$$

Отметим, что уравнение (4) называют уравнением Лиувилля (уравнением переноса) [1, 2].

Если функция $\rho(t, x)$ описывает изменение плотности распределения вероятности во времени и фазовом пространстве координат динамической системы (1) уравнение (4) есть уравнение Фокера-Планка-Колмогорова [5]. Такой процесс будет иметь место, когда семейство траекторий (3) с начальными условиями (2) соответствует множеству случайных начальных значений координат с плотностью распределения вероятности $\rho_0(x)$. При этом

$$\int_{M_0} \rho_0(x_0) dx_0 = 1.$$

Зададим следующие характеристики, которые можно рассматривать, как центры тяжести на множестве $M_{T,u}$, определяемые плотностью распределения $\rho(T, x)$ и некоторой плотностью $\hat{\rho}(x)$:

$$\bar{A}(u) = \frac{1}{\bar{\rho}_0} \int_{M_{T,u}} x_T \rho(T, x_T) dx_T, \quad \bar{A} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n),$$

$$\hat{A}(u) = \frac{1}{\hat{\rho}_0} \int_{M_{T,u}} x_T \hat{\rho}(x_T) dx_T, \quad \hat{A} = (\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n).$$

Здесь

$$\bar{\rho}_0 = \int_{M_0} \rho_0(x_0) dx_0, \quad \hat{\rho}_0 = \int_{R^n} \hat{\rho}(x) dx.$$

Рассматривается функционал

$$J(u) = (\bar{A} - \hat{A})^2 = \sum_{i=1}^n (\bar{A}_i - \hat{A}_i)^2. \quad (5)$$

Решается задача минимизации данного функционала по всем управлениям $u \in D$. В работе получены вариации исследуемого функционала и необходимые условия оптимальности.

Заметим, что если взять

$$\hat{A} = \frac{1}{\hat{\rho}_0} \int_{R^n} x \hat{\rho}(x) dx, \quad (6)$$

то задача минимизации функционала (5) будет состоять в построении программного управления, переводящего центр тяжести, определяемый функцией $\rho_0(x)$ на множестве M_0 в центр тяжести, определяемый формулой (6). Отметим, что если уравнение (1) линейно, то как показано в [2], задача программного управления пучком траекторий в данном случае сводится к управлению отдельной траекторией, исходящей из центра тяжести, определяемого функцией $\rho_0(x)$ на множестве M_0 . Следует также отметить, что функционалы типа (5), характеризующие макропараметры рассматриваемых множеств, могут использоваться при построении поля скоростей в задачах обработки изображений [4].

Литература

1. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, – 1980. – 228 с.
2. Овсянников Д.А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. – 1990. – 312 с.
3. Kotina E.D., Leonova E.B., Ploskikh V.A. Displacement Field Construction Based on a Discrete Model in Image Processing Problems // «Известия Иркутского государственного университета». Серия «Математика». 2022. Т. 39. С.3-16.
4. Bazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V. Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing // Cybernetics and Physics. 2018. №7. С.174-181.
5. Красовский А.А. Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М.: – 1968. – 240с.

© Овсянников Д.А., Котина Е.Д.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЯ МНОГОДИАПАЗОННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНТЕННЫ

Панов О.И., Старченко А.Д, Харченко В.В., Урывская Т.Ю., Вартазарова А.Э.

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Работа радиосредств в различных частотных диапазонах в настоящее время обеспечивается применением большого числа антенных систем, каждая из которых, как правило, функционирует в одном заданном диапазоне частот. Однако с учетом необходимости уменьшения массогабаритных параметров антенн для мобильных и передвижных пунктов связи перспективным является направление развития унифицированных антенных устройств, которые смогут совмещать в одной конструкции функции антенн, работающих в нескольких частотных диапазонах в секторе углов по азимуту $[0, 2\pi]$.

Варианты построения многодиапазонной ЦАР, представленные на рис. 1, отличаются геометрическим расположением излучателей, формирующих кольцевые антенные решетки 1 и 2. Предполагается, что на одной несущей конструкции можно будет расположить 3-4 кольцевые антенные решетки, работающие в разных частотных диапазонах. В качестве излучающих элементов могут использоваться продольные щели (поперечные магнитные излучатели), ориентированных параллельно образующей цилиндра, ко входам которых подключены ЭДС.

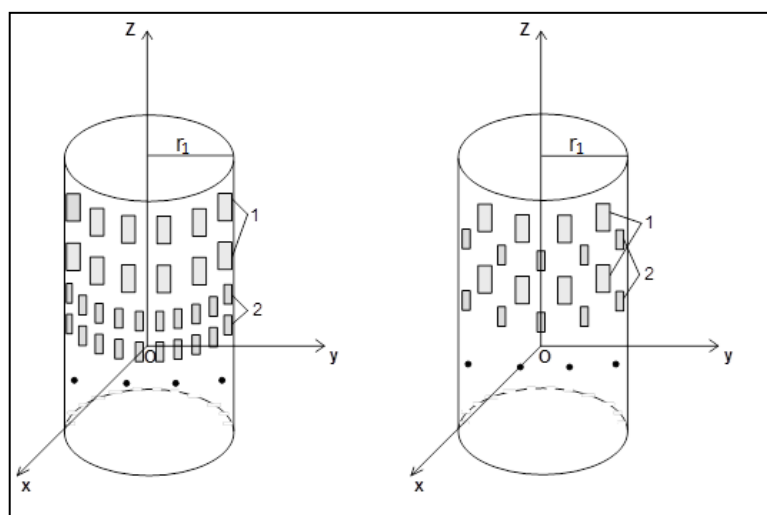


Рисунок 1-Многодиапазонная ЦАР

Исследование направленных свойств продольных щелевых излучателей проводилось в большом числе теоретических и прикладных работ [1-5]. Однако, как правило, рассматривались вопросы, связанные с влиянием кругового цилиндра на характеристики направленности в поперечной по отношению к оси цилиндра плоскости. В то же время круговой цилиндр приводит к изменению направленных свойств продольного щелевого излучателя и в продольной по отношению к оси цилиндра плоскости.

Рассмотрим модель излучателя в виде продольно ориентированной щели на поверхности идеально проводящего кругового цилиндра с бесконечной образующей, что связано с необходимостью построения электродинамической модели данной антенной

конструкции. Сторонний магнитный ток, протекающий по излучателю, описывается выражением [1-3]:

$$\vec{J}^{m,cm}(\rho', \phi', z') = \vec{i}_z I_0^m \delta(\rho' - \rho_0) \delta(\phi' - \phi_0) j(z' - z_0) \frac{1}{\rho_0}, \quad (1)$$

где ρ_0 , ϕ_0 и z_0 – координаты положения источника излучения.

Учитывая граничные условия для электромагнитных волн на идеально проводящей поверхности, а также соотношения из [1-3], описывающие компоненты векторного магнитного потенциала появляется возможность записать выражения, определяющие z -компоненту магнитного поля щели, расположенной на проводящем цилиндре, в дальней зоне. Для нахождения указанной компоненты напряженности магнитного поля воспользуемся соотношением [1]:

$$H_z = \int_V j_n(\rho', \phi', z') \int_{-\infty}^{\infty} H_z^{(0)}(\rho, \phi, z, \rho', \phi', z') d\rho' d\phi' dz' dh, \quad (2)$$

где $H_z^{(0)}(\rho, \phi, z)$ - z -компонента магнитного поля продольного магнитного диполя в области свободного пространства (вне цилиндра).

Магнитный ток в щелевом излучателе может быть представлен в виде:

$$j_n(\rho', \phi', z') = I_n(z') \delta(\phi' - \phi_n) \delta(\rho' - r_1). \quad (3)$$

С учетом данного выражения компонента H_z описывается формулой:

$$H_z = \int_{-l/2}^{l/2} I_n(z') \int_{-\infty}^{\infty} H_z^{(0)}(\rho, \phi, z, r_1, \phi_n, z') dz' dh. \quad (4)$$

При вычислении интеграла (4), при условии $v_0 r \gg 1$ можно заменить функции Ганкеля их асимптотическим разложением [1, 4, 6], что позволяет преобразовать интеграл в соотношении (4) к виду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz} e^{-i\left(v_0 r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi v_0 r}} \left\{ \frac{k_0^2 - h^2}{ik_0 W_0} a_n^{(0)}(h) \right\} dh. \quad (5)$$

Для вычисления указанного интеграла в соответствии с [5] используем метод перевала. Воспользовавшись приведенными в работе результатами, запишем окончательное значение:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ihz} e^{-i\left(v_0 r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi v_0 r}} \left\{ \frac{k_0^2 - h^2}{ik_0 W_0} a_n^{(0)}(h) \right\} dh = \\ & = e^{-i\left(k_0 \sin \theta r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 \sin \theta r}} \left\{ \frac{k_0^2 - k_0^2 \cos^2 \theta}{ik_0 W_0} a_n^{(0)}(k_0 \cos \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

В соотношении (6) угол θ представляет собой угол между направлением, в котором определяется диаграмма направленности, и осью Oz цилиндра.

Особенностью решения задачи формирования ДН многодиапазонной ЦАР будет являться различие значений частотно-зависимых параметров для подрешеток, работающих в разных частотных диапазонах. Еще одной особенностью при анализе характеристик и параметров многодиапазонной ЦАР будет учет влияния взаимной связи излучателей различных диапазонов.

Особенностью кольцевой АР является эквивалентность расположения взаимного расположения излучателей. Это позволяет упростить методы и алгоритмы определения взаимной связи, которые рассмотрены в [7, 8.].

Литература

- 1 Уэйт Д. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем. – М.: Сов. радио, 1963.
- 2 Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения. – М.: Радио и связь, 1987. – 272 с.

3 Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн: Учебник для вузов. М.: Радио и связь, 2014. – 559с.

4 Габриэльян Д.Д., Звезда М.Ю., Лабунько О.С., Харченко В.В. Вклад поверхностных волн в диаграмму направленности излучателей, расположенных в слое магнитоэлектрика на круговом металлическом цилиндре / Мат-лы III МНТК «Излучение и рассеивание ЭМВ-2005». 20-25 июня, 2005. Таганрог, Россия. с. 91-93.

5 Габриэльян Д.Д., Харченко В.В. Учет особенностей при определении коэффициентов разложения / Материалы III МНТК «Излучение и рассеивание ЭМВ-2005». 20-25 июня, 2005. Таганрог, Россия. с.77-79.

© Панов О.И., Старченко А.Д., Харченко В.В., Урывская Т.Ю., Вартазарова А.Э.

УДК 517.958

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СЕТЕВИДНЫХ АНТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Парт А.А.¹, Корчагина О.Р.²

¹ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

²ФГКВООУ ВПО ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Современные комплексы радиосвязи имеют в своём составе множество различных антенн, большинство из них имеет сетевидную структуру. Выделим следующие категории антенн: жесткой конструкции и с приёмным элементом в виде кабеля. Антенны жесткой конструкции, такие как логопереодическая, зеркальная, не подвергаются колебательным процессам с большой амплитудой колебаний. На их поверхности возникают лишь мелкие вибрации, которые не влияют на параметры антенн, отвечающие за приём или передачу сигнала. Совсем наоборот дело обстоит с антеннами, приёмным элементом которых является кабель. Примером таких антенн являются V-образная, диполи различной длины. При установке неизбежно возникает провисание кабеля, т.к. размеры приёмного полотна таких антенн достигают 40 метров. При воздействии на приёмный элемент потоков ветра большой силы будут возникать колебания такой амплитуды и формы, что изменятся передающие характеристики антенны. Моделирование подобных процессов позволит исследовать степень искажения сигнала и разработать методы устранения подобных колебательных воздействий.

В статье используются обозначения, принятые в работах [1, 2].

Будем считать, что функции, рассматриваемые ниже, удовлетворяют условиям согласования

$$\sum_{\gamma_j \in R(\xi)} a(1)_{\gamma_j} \frac{\partial u(1,t)_{\gamma_j}}{\partial x} = \sum_{\gamma_j \in r(\xi)} a(0)_{\gamma_j} \frac{\partial u(0,t)_{\gamma_j}}{\partial x} \quad (1)$$

для всех узлов $\xi \in J(\Gamma)$.

Рассмотрим аппроксимацию начально-краевой задачи для уравнения гиперболического типа с распределенными параметрами на ориентированном ограниченном графе:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + b(x)u(x,t) = f(x,t), \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (3)$$

$$\left(\alpha u(x,t) + a(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \Big|_{\partial \Gamma} = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

здесь $\alpha = const$, $\varphi(x) \in W_2^1(a, \Gamma)$, $\psi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(\Gamma_T)$. Для коэффициентов $a(x)$ и $b(x)$ имеют место предположения

$$0 \leq a_* \leq a(x) \leq a^*, |b(x)| \leq \tilde{b}, x \in \Gamma. \quad (5)$$

Как показано в работе [3], разобьем ребра γ графа Γ на частичные интервалы длиной h , для сеточных функций $u^{h,\tau}$, соответствующих функциям $u(x,t)$, $x \in \Gamma$, $t \in [0, T]$ введем разностные аналоги производных.

Построим разностную схему для задачи (2)-(4).

$$\nabla_t \Delta_t u^{h,\tau} - \nabla_x (a^h \Delta_x u^{h,\tau}) + b^h u^{h,\tau} = f^{h,\tau}, \quad (6)$$

$$u^{h,0} = \phi^h, \Delta_t u^{h,0} = \psi^h, \quad (7)$$

$$\left(\alpha u^{h,\tau} + a^h \Delta_x u^{h,\tau} \right) \Big|_{\partial \Gamma} = 0, 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Разностные отношения (6) должны выполняться на слоях $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}$) в точках сетки Γ^h ; равенства (7) выполняются для $k = \overline{1, N}$; равенство (8) – в точках Γ^h . Сеточная функция $a^h = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} a(x) dx$, аналогично строятся сеточные функции b^h, ϕ^h, ψ^h . Сеточная функция $f^{h,\tau}$ строится по заданной функции f в соответствии с соотношением

$$f^{h,\tau} = \frac{1}{h\tau} \int_x^{x+h} \int_t^{t+\tau} f(x,t) dx dt.$$

Кроме того, должны быть выполнены разностные соотношения

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} (a^h \nabla_x u^{h,\tau})_\gamma = \sum_{\gamma \in r(\xi)} (a^h \Delta_x u^{h,\tau})_\gamma, \quad (9)$$

аппроксимирующие условия согласования (1) во всех внутренних узлах $\xi \in J(\Gamma)$ графа Γ .

Для каждого слоя $t = t_k$ ($k = \overline{1, N}$) разностная схема (6)-(9) является однозначно разрешимой системой алгебраических уравнений, ее решение есть сеточная функция $u^{h,\tau}$.

Разностная схема (6)-(9) устойчива и последовательность сеточных функций $u^{h,\tau}$ сходится к обобщенному решению $u(x,t)$ начально-краевой задачи (2)-(4). Доказательство этих фактов приведены в [3].

Литература

1. Провоторов В.В., Волкова А.С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе. Воронеж: Научная книга, 2014. 188 с.
2. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Оптимизационные задачи для эволюционных систем с распределенными параметрами на графе // В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014) сборник трудов VII Международной конференции. 2014. С. 282-286.
3. Парт А.А. Разностная схема для начально-краевой задачи гиперболического типа с распределенными параметрами на сети // Системы управления и информационные технологии, №1(67), 2017. – С. 9-12.

© Парт А.А., Корчагина О.Р.

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ НА ГРАФЕ

Перова И.В., Тимошенко В.В.

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Предварительно введем следующие понятия и обозначения [1, с. 9]. Γ – ограниченный ориентированный геометрический граф с ребрами γ , параметризованными отрезком $[0,1]$; $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ – множества граничных ζ и внутренних ξ узлов графа, соответственно; Γ_0 – объединение всех ребер графа Γ , не содержащих концевых точек. Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество гладких функций $u(x)$ с компактным носителем в Γ_0 , удовлетворяющих соотношениям $\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx}$ в каждом узле $\xi \in J(\Gamma)$ (здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества ребер γ , соответственно ориентированных «к узлу ξ » и «от узла ξ », числа 1 и 0 определены в соответствии с параметризацией ребер $\gamma \in R(\xi)$ и $\gamma \in r(\xi)$ графа) и $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$. Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W_0^1(a, \Gamma)$.

В пространстве $W_0^1(a, \Gamma)$ рассматривается дифференциально-разностная система уравнений вида

$$\frac{1}{\tau}[y(k) - y(k-1)] - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k)}{dx} \right) + b(x)y(k) = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

с начальным

$$y(0) = \varphi(x), \quad (2)$$

и краевыми

$$y(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

условиями, где $y(k) := y(x; k)$, $f(k) := f(x; k)$, $k = 1, 2, \dots, M$, $\varphi(x) \in L_2(\Gamma)$, $f(k) \in L_2(\Gamma)$ и $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$, $|b(x)| \leq \beta$, $x \in \Gamma_0$.

Определение. Слабым решением дифференциально-разностной системы (1) – (3) называется совокупность функций $y(k) \in W_0^1(a; \Gamma)$, ($k = 1, 2, \dots, M$), каждая из которых удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Gamma} y(k)_t v(x) dx + \ell(y(k), v) = \int_{\Gamma} f_\tau(k) v(x) dx,$$

являющееся тождеством при произвольной функции $v(x)$ из пространства $W_0^1(a, \Gamma)$, здесь

$$y(k)_t = \frac{1}{\tau}[y(k) - y(k-1)].$$

Замечание. Из определения следует, что для каждого фиксированного k ($k = 1, 2, \dots, M$) соотношения (25) – (27) -- краевая задача в пространстве $W_0^1(a, \Gamma)$ для эллиптического уравнения (25) относительно $y(k)$.

Теорема. Предположим, что выполнены условия $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$ и $|b(x)| \leq \beta$, $x \in \Gamma_0$.

Если $\tau \leq \tau_0 < \frac{1}{4\beta}$, тогда для функций $y(k)$, $k = 1, 2, \dots, M$, имеют место следующие оценки, не зависящие от τ :

$$\|y(k)\|_{2,\Gamma} \leq e^{4\beta T} (\|\varphi\|_{2,\Gamma} + 2\|f(k)\|_{2,1,\Gamma}) \quad (4)$$

$$\|y(m)\|_{2,\Gamma}^2 + 2a_*\tau \sum_{k=1}^m \left\| \frac{dy(k)}{dx} \right\|^2 + \tau^2 \sum_{k=1}^m \|y(k)_t\|_{2,\Gamma}^2 \leq C(\|\varphi\|_{2,\Gamma}^2 + \|f(m)\|_{2,1,\Gamma}^2), \quad (5)$$

где через $\|\cdot\|_{2,\Gamma}$ обозначена норма в $L_2(\Gamma)$, $\|f(k)\|_{2,1,\Gamma} = \tau \sum_{k=1}^m \|f(k)\|_{2,\Gamma}$, постоянная C не зависит от τ .

Отметим, что доказательство оценок (4), (5) основано на представленном в работе [1, с. 180] методе, берущим свое начало от метода полу-дискретизации Е. Роте [2]. С использованием этих оценок устанавливаются условия разрешимости дифференциальной системы, соответствующей (1) – (3).

Литература

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М: «Наука», 1973. – 407 с.
2. Rothe E. Wärmeleitungsgleichungen mit nichtconstanten koeffizienten. Math. Ann. 104 (1931), С. 340-362.

© Перова И.В., Тимошенко В.В.

УДК 004.021

Обработка изображений на основе оптического потока

Петруханова А.А., Котина Е.Д.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Задачи компьютерного зрения являются в настоящее время актуальными и включают различные методы получения, обработки и анализа изображений. В данной работе рассматривается задача построения оптического потока (поля скоростей) [2, 3] для последовательных изображений. Предполагается, что перемещения определяются следующей системой

$$\begin{cases} \dot{x} = u(t, x, y), \\ \dot{y} = v(t, x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь x и y пространственные координаты, t - время, функции u и v определяют поле скоростей.

Основное предположение метода заключается в том, что функция яркости $\rho(t, x, y)$ вдоль траекторий системы (1) остается постоянной. Рассматривается обратная задача построения поля скоростей системы (1) по известной функции $\rho(t, x, y)$. Данная задача сводится к решению уравнений Эйлера-Лагранжа при соответствующих граничных условиях [1-3]:

$$\begin{cases} \rho_x^2 u + \rho_y \rho_x v + \rho_t \rho_x - \alpha^2 \nabla^2 u = 0, \\ \rho_y^2 v + \rho_x \rho_y u + \rho_t \rho_y - \alpha^2 \nabla^2 v = 0, \end{cases} \quad (2)$$

Здесь ρ_x, ρ_y, ρ_t - производные функции яркости по времени и пространственным переменным, α - параметр регуляризации по А. Н. Тихонову, $\nabla^2 u, \nabla^2 v$ - лапласианы.

В результате дискретизации системы уравнений в частных производных (2), получается разностная система линейных уравнений

$$\begin{cases} -\alpha^2(u(i-1, j) + u(i+1, j) + u(i, j-1) + u(i, j+1)) + (4\alpha^2 + \rho_x^2(i, j))u(i, j) + \\ + \rho_x(i, j)\rho_y(i, j)v(i, j) = -\rho_x(i, j)\rho_i(i, j), \\ -\alpha^2(v(i-1, j) + v(i+1, j) + v(i, j-1) + v(i, j+1)) + (4\alpha^2 + \rho_y^2(i, j))v(i, j) + \\ + \rho_x(i, j)\rho_y(i, j)u(i, j) = -\rho_y(i, j)\rho_i(i, j), \end{cases} \quad (3)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

Предполагается, что изображение имеет размер $[0, n+1] \times [0, n+1]$.

Систему (3) можно записать в следующем виде [1, 3]:

$$Hz = q. \quad (4)$$

Здесь

$$z = (u(1,1), v(1,1), u(1,2), v(1,2), \dots, u(1,n), v(1,n), u(2,1), v(2,1), \dots, u(2,n), v(2,n), \dots, u(n,n), v(n,n))^T,$$

матрица H – это разреженная матрица большого порядка. На Рис.1 схематично отражена структура матрицы системы для сетки 8×8 с обозначением ненулевых элементов.

Данную систему можно решить с помощью итерационного блочного метода Гаусса-Зейделя, который для системы (4) сходится при любом начальном приближении [4].

В работе рассматривается влияние задания граничных условий на точность определения оптического потока. Проведены эксперименты на тестовых данных, где погрешность вычисления поля скоростей определялась следующим образом:

$$\Delta = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n |\theta_{i,j} - \alpha_{i,j}|,$$

где $n \times n$ - размер области изображения, $\theta_{i,j} = \arctg \frac{\bar{v}(i, j)}{\bar{u}(i, j)}$, $\alpha_{i,j} = \arctg \frac{v(i, j)}{u(i, j)}$, $\bar{v}(i, j), \bar{u}(i, j)$ – заданные значения.

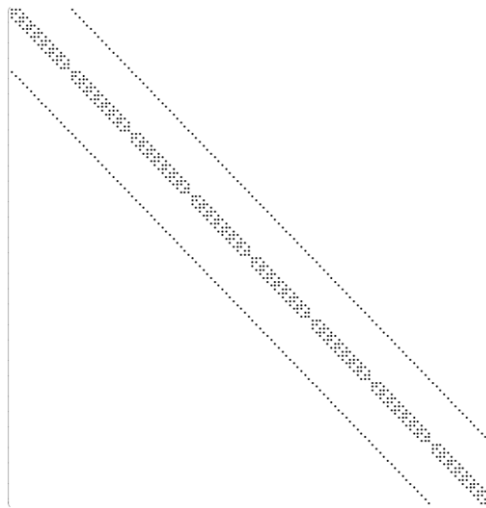


Рис.1. Пример матрицы для изображения 8×8 .

В работе реализован алгоритм построения поля скоростей для последовательных изображений, проведен анализ влияния задания граничных условий на вычисление поля скоростей для тестовых изображений. Обработка изображений на основе построения оптического потока может применяться в различных задачах компьютерного зрения, а также при обработке медицинских исследований, например, при обработке радионуклидных диагностических изображений [3].

Литература

1. Котина Е.Д. Математическое и компьютерное моделирование в ядерной медицине. СПб.: ВВМ, 2022. 143 с.

2. Horn B.K.P., Schunck B.G. Determining optical flow // Artificial intelligence, 1981. Vol. 17. P. 185–203.
3. Barron J. Performance of optical flow techniques / J. Barron, D. Fleet // International Journal of Computer Vision. – 1994. – Vol. 12. – P. 43–77.
3. Kotina E., Pasechnaya G. Optical Flow-Based Approach For The Contour Detection In Radionuclide Images Processing // Cybernetics And Physics, Vol. 3, № 2, 2014, P. 62–65.
4. Котина Е. Д. О сходимости блочных итерационных методов // Изв. Иркут. гос. ун-та. – 2012. – Т. 5, вып. 3. – С. 41–55.

© Петруханова А.А., Котина Е.Д.

УДК 51-76(075.8)

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ ВИЧ ИНФЕКЦИИ

Полина С.Г., Колпак Е.П.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Вич-инфекция рассматривается как эпидемическое заболевание, передаваемое от человека к человеку различными путями, как правило, при непосредственном контакте. Число лиц, живущих с ВИЧ-инфекцией в РФ, постоянно растет. Одной из причин роста является отсутствие эффективных методов лечения. Отсутствует и единая система учета зараженных лиц. Статистические данные по общей заболеваемости публикует статистический комитет РФ и Федеральный научно-методический центр по профилактике и борьбе со СПИДом [1, 2]

Из анализа статистических данных [3] следует, что число лиц, живущих с ВИЧ-инфекцией, начиная с 1994 г. растет по логистической зависимости с удельной скоростью роста 0.2. Общее число стоящих на учете лиц на 2022 г. составляет около 1 500 000. Число лиц, поставленных на учет впервые, увеличивалось на 15% в год до 2016 г., а после 2016 г. стало уменьшаться на 15% в год. Основными факторами риска заражения в России являются гетеросексуальный контакт и внутривенное введение наркотиков [1, 2]. Количество зарегистрированных случаев с установленным способом заражения «внутривенное введение наркотиков» уменьшается, начиная с 2016 г., и составляет 15% от общего числа зараженных в 2019 году. Тогда как количество зарегистрированных случаев с установленным способом заражения «гетеросексуальный контакт» увеличивается и составляет 30% от общего числа зараженных в том же году. Около половины ВИЧ-инфицированных не знают или не сообщили, каким именно путем произошло инфицирование.

До 2016 г. темпы роста числа вновь зараженных по 96 регионам РФ изменялись в диапазоне от 1% до 100% в среднем на 22%. Начиная с 2016 г. число впервые заболевших стало уменьшаться. Распределение количества больных по российским регионам приведено на рисунке. В 60% регионов на тысячу человек приходится один ВИЧ-инфицированный, в 40% - от 3 до 13. Основная доля инфицированных граждан приходится на возраст от 20 до 40 лет. Среди них 60% - мужчины, 40% женщины. В первые две наибольшие по численности группы риска входят когорта лиц, имеющих гетеросексуальный контакт, и когорта лиц, использующих внутривенное ведение наркотиков. Имитационное моделирование реализовывалось в пакете Matlab[4].

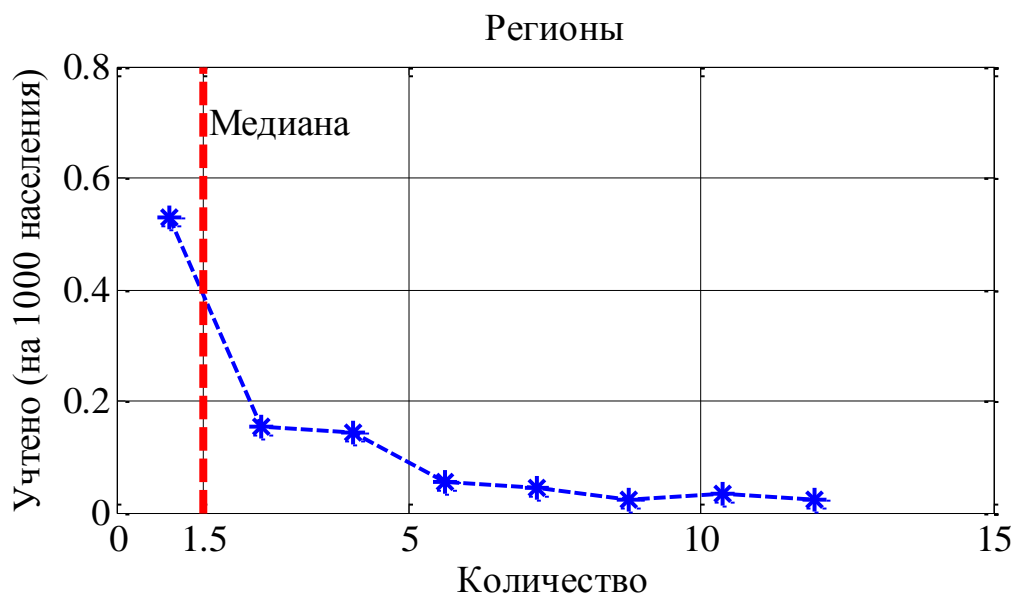


Рис. Число инфицированных по регионам РФ на 1000 населения

Как следует из анализа статистических данных, одним из основных методов борьбы с ВИЧ инфекцией могут быть: разъяснительная деятельность и борьба с распространением наркотиков. Полученные результаты могут быть полезными при принятии конкретных решений по прекращению распространения инфекции [5].

Литература

1. Российский статистический ежегодник. 2019: Стат.сб./Росстат. М., 2019 – 708 с.
2. Информационные бюллетени «Вич-инфекция». Федеральный научно-методический центр по профилактике и борьбе со СПИДом. <http://www.hivrussia.info/elektronnye-versii-informatsionnyh-byulletenij/>. Дата обращения 10.11.2022.
3. Кривополенова С.Д., Гончарова А.Б. Первичный анализ данных для построения системы поддержки принятия решений // Процессы управления и устойчивость. 2019. Т. 6. № 1. С. 250-254.
4. Гончарова А.Б., Виль М.Ю. Имитационное моделирование лечения онкологического заболевания с использованием приложения Matlab Simbiology // Моделирование систем и процессов. - 2021. - Т. 14. - № 3. - С. 90-96.
5. Гончарова А.Б. Постановка предварительного медицинского диагноза на основе теории нечетких множеств с использованием меры Сугено // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. - 2019. - Т. 15. - № 4. - С. 529-543.

© Полина С.Г., Колпак Е.П.

УДК 001.891.57

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВИЧ-ИНФЕКЦИИ

Полина С.Ю., Каримова Р.Т., Колпак Е.П.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

Когорта лиц с ВИЧ-инфекцией в стране увеличивается на 10-15% в год, и составляет более 1 100 000 человек [1]. Распространение ВИЧ-инфекции приобретает эпидемический

характер. Передача инфекции происходит по двум основным путям – гетеросексуальный (около 40% всех случаев), и через потребление инъекционных наркотиков (около 50% всех случаев).

Модель эпидемии, когда когорта инфицированных увеличивается за счет контактного и бесконтактного способов передачи инфекции, описывается системой уравнений

$$\frac{dS}{dt} = \mu S \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \gamma SI + (1 - \rho)\gamma_h S_h,$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma SI - \beta I + \rho\gamma_h S_h + \gamma_I \mu_I S_h I,$$

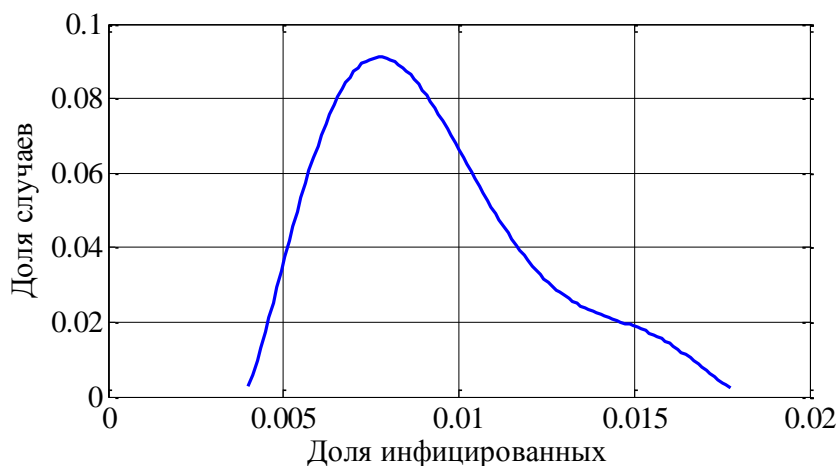
$$\frac{dS_h}{dt} = \mu_h S_h \left(1 - \frac{S_h}{K_h}\right) - \gamma_h S_h - \gamma_I \mu_I S_h I.$$

В этих уравнениях S - число лиц, которым инфекция передается гетеросексуальным способом, I - число инфицированных лиц, S_h - число лиц, которые применяют инъекционный способ введения препаратов. $\mu, \gamma, \rho, \beta, \gamma_h, K_h, K, \mu_h$ - параметры. $\gamma_h S_h$ - скорость перехода части «инфекционистов» в группы «гетеросексуалистов» и инфицированных лиц. Лица из группы S_h со скоростью $\rho\gamma_h S_h$ переходя в группу I , а скоростью $(1 - \rho)\gamma_h S_h$ - в группу S ($0 \leq \rho \leq 1$). Такой подход в разработке моделей трудноизлечимых заболевания предложен в [2, 3].

Модель допускает уменьшение когорты лиц, использующих «грязный» шприц (при выполнении неравенства $\mu_h < \gamma_h S_h(t) \rightarrow 0$). В этом случае число инфицированных лиц со временем будет стремиться к значению $I_* = \frac{\mu}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} \frac{1}{K}\right)$. Поскольку параметр K

рассматривается как максимальное количество лиц, которые могут стать инфицированными, то при их больших количествах и высокой скорости передачи инфекции (при выполнении неравенства $\gamma K > \beta$) когорта инфицированных лиц исчезнет.

Имитационное моделирование для случая, когда за «базовые» значения приняты $K_h / K = 0.5, \mu / \mu_h = 0.01, \beta = 0.1, \gamma = 0.01$, проведено для 1000 вариантов отклонения параметров от базовых значений не более, чем на 50%. На рисунке приведено вероятностное распределение числа инфицированных относительно максимально возможного их числа. Для РФ число инфицированных стоящих на учете составляет около 1% от численности населения. Моделирование осуществлялось в среде математического пакета Matlab [4].



Как следует из анализа стационарных состояний, одним из основных методов борьбы с ВИЧ инфекцией могут быть: разъяснительная деятельность и создание препаратов, позволяющих блокировать вирус на начальной стадии поражения организма. Полученные

результаты могут быть полезными при принятии конкретных решений по прекращению распространения инфекции [5].

Литература

1. Информационные бюллетени «Вич-инфекция». Федеральный научно-методический центр по профилактике и борьбе со СПИДом. <http://www.hivrussia.info/elektronnye-versii-informatsionnyh-byulletenij/>. Дата обращения 10.11.2022.

2. Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Расулова М.М., Шмелева А.А. Математическое моделирование онкологического заболевания // Перспективы науки. - 2020. - № 12 (135). - С. 20-26.

3. Бусько Е.А., Гончарова А.Б., Рожкова Н.И., Семиглазов В.В., Шишова А.С., Жильцова Е.К., Зиновьев Г.В., Белобородова К.А., Криворотько П.В. Модель системы принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы // Вопросы онкологии. - 2020. - Т. 66. - № 6. - С. 653-658.

4. Гончарова А.Б., Виль М.Ю. Имитационное моделирование лечения онкологического заболевания с использованием приложения Matlab Simbiology // Моделирование систем и процессов. - 2021. - Т. 14. - № 3. - С. 90-96.

5. Лифантова Е.Е., Мацинский Н.С., Гончарова А.Б. Создание системы поддержки принятия решения в медицине для диагностики заболеваний желудочно-кишечного тракта // Процессы управления и устойчивость. - 2016. - Т. 3. - № 1. - С. 312-316.

© Полина С.Ю., Каримова Р.Т., Колпак Е.П.

УДК 621.59

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОТИВОТОЧНОГО ТЕПЛООБМЕННИКА ВОЗДУХОРАЗДЕЛИТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Приходько И.В.

ФГКВБОУ ВО «Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»», г. Воронеж

Введение. Современные типы воздушных судов авиации Вооруженных Сил Российской Федерации снабжены разветвленными бортовыми газовыми системами, играющими жизненно важную роль в обеспечении полетов и боевой деятельности авиации. Поэтому эффективность выполнения полетов зависит от необходимых объемов дыхательных смесей, получаемых с помощью мобильных воздуходелительных установок военного назначения.

Актуальность. До настоящего времени продолжают попытки разработки эффективных теплообменных устройств кислорододобывающих станций на основе выявления резервов конструкционного и параметрического анализа существующих схем. Для успешного проведения такого анализа удобно применять метод математического моделирования.

В предлагаемой работе описывается математическая модель противоточного теплообменника с сосредоточенными параметрами [1].

$$\frac{dQ_1(\tau)}{d\tau} = \alpha_1 S_1 \left[\frac{t_1^\circ + t_1^\infty(\tau)}{2} - t_w(\tau) \right], \quad (1)$$

$$\frac{dQ_2(\tau)}{d\tau} = \alpha_2 S_2 \left[t_w(\tau) - \frac{t_2^\circ + t_2^\infty(\tau)}{2} \right], \quad (2)$$

$$\frac{dQ_1(\tau)}{d\tau} = G_1 c_{1f} [t_1^\circ - t_1^\infty(\tau)], \quad (3)$$

$$\frac{dQ_2(\tau)}{d\tau} = G_2 c_{2f} [t_2^\infty(\tau) - t_2^\circ], \quad (4)$$

$$\frac{dQ_1(\tau)}{d\tau} - \frac{dQ_2(\tau)}{d\tau} = M_w c_w \frac{dt_w(\tau)}{d\tau}(\tau), \quad (5)$$

$$t_1^\infty(0) = t_1^\circ, \quad (6)$$

$$t_2^\infty(0) = t_2^\circ, \quad (7)$$

$$t_w(0) = t_w^\circ, \quad (8)$$

где τ – время. Все обозначения принятые в (1) – (8) подробно описаны в [2].

Решение системы уравнений (1) – (8) предлагается рассматривать в безразмерной форме:

$$\frac{dq_1(\theta)}{d\theta} = Nu_1 \left[\frac{1}{2} T_1^\infty(\theta) - T_w(\theta) + \frac{1}{2} \right], \quad (9)$$

$$\frac{dq_2(\theta)}{d\theta} = ANu_2 \left[T_w(\theta) - \frac{1}{2} T_2^\infty(\theta) \right], \quad (10)$$

$$\frac{dq_1(\theta)}{d\theta} = \xi_1 Re_1 Pr_1 [1 - T_1^\infty(\theta)], \quad (11)$$

$$\frac{dq_2(\theta)}{d\theta} = A\xi_2 Re_2 Pr_2 T_2^\infty(\theta), \quad (12)$$

$$\frac{dq_1(\theta)}{d\theta} - \frac{dq_2(\theta)}{d\theta} = \frac{dT_w(\theta)}{d\theta}, \quad (13)$$

$$T_1^\infty(0) = 1, \quad (14)$$

$$T_2^\infty(0) = 0, \quad (15)$$

$$T_w(0) = T_w^\circ, \quad (16)$$

где $\theta = S_1 \lambda_1 \tau / (M_w c_w d_1)$; $T_{1,2}^\infty(\theta) = t_{1,2}^\infty(\tau) - t_2^\circ / t_1^\circ - t_2^\circ$; $T_w(\theta) = t_w(\tau) - t_2 / t_1 - t_2^\circ$; $T_w^\circ = t_w^\circ - t_2 / t_1 - t_2^\circ$; $A = S_2 \lambda_2 d_1 / S_1 \lambda_1 d_2$; $\xi_{1,2} = K_s^{(1,2)} d_{1,2} / 2\pi l$; $Nu_{1,2} = \alpha_{1,2} d_{1,2} / \lambda_{1,2}$ – числа Нуссельта; $Re_{1,2} = \nu_{1,2} d_{1,2} / \nu_{1,2}$ – числа Рейнольдса; $Pr_{1,2} = \nu_{1,2} / a_{1,2}$ – числа Прандтля; λ_1, λ_2 – теплопроводности теплоносителей; d_1, d_2 – гидравлические диаметры со стороны 1-го и 2-го теплоносителей; $K_s^{(1,2)}$ – коэффициент формы проходных сечений со стороны 1-го и 2-го теплоносителей; $\nu_{1,2}$ – скорости теплоносителей; $\nu_{1,2}, a_{1,2}$ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности теплоносителей; l – характерный размер теплопередающей поверхности.

В работе [2] проведен анализ влияния параметров предложенной модели на динамику выхода теплопередающей поверхности на стационарный режим, что является важной характеристикой при исследовании переходных процессов в теплообменных элементах воздухоподделительных установок.

Литература

1. Сычёв В.В. Дифференциальные уравнения термодинамики. М.: МЭИ, 2010. – 251 с.
2. И.В. Приходько, Модификация модели противоточного теплообменника воздухоподогревательной установки военного назначения / Приходько И.В. // Воздушно-космические силы. Теория и практика». – 2017 г. – №3 (3). – 45 – 52 с.

© Приходько И.В.

УДК 517.935.2

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СТАБИЛИЗИРОВАННЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Раецкий К.А.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

Рассматривается полностью управляемая динамическая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$; $A: n \times n$, $B: n \times m$; $A: n \times n$, B – необратима, $t \in [t_0, t_k]$, $f(t) \in R^n$ – дополнительная входная непрерывная вектор-функция.

Для системы (1) рассчитан программный вход $u(t)$, при наличии которого в системе (1), $x(t)$ – программное состояние (траектория системы) принимает в моменты t_i ($t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_k$) значения x_i , то есть

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (2)$$

Задача стабилизации возникает в случае, когда для практической динамической системы стало невозможным начальное состояние x_0 (порыв ветра, недостаток катализатора, и т.д.).

В таком случае намечаются два выхода из сложившейся ситуации:

1) заново решить задачу моделирования траекторий для системы (1) с условиями

$$x(t_0) = x^*, \quad x(t_i) = x_i, \quad i = 0, 1, \dots, k, \quad (3)$$

где x^* – новое начальное состояние;

2) построить стабилизированные $x(t)$ и $u(t)$ для системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad (4)$$

с условиями

$$x(t_0) = x^*, \quad \|x(t) - x(t)\| \leq c \cdot e^{-wt}, \quad w > 0, \quad t > t' > t_0, \quad (5)$$

то есть построить экспоненциально близкие к $x(t)$ траектории $x(t)$.

Второй путь является более экономичным и эффективным с точки зрения минимизации вычислительных, интеллектуальных и временных ресурсов.

Решается задача

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bv(t), \quad (6)$$

$$y(t_0) = x_0 - x^*, \quad \|y(t)\| \leq c \cdot e^{-wt}, \quad (7)$$

где

$$y(t) = x(t) - x(t), \quad v(t) = u(t) - u(t). \quad (8)$$

Предполагается моделирование траекторий $y(t)$ системы (6), (7) методом неопределенных коэффициентов, для чего $y(t)$ и $v(t)$ формируются в виде

$$y(t) = \sum_{j=1}^r e^{-a_j t} \alpha_j, \quad (9)$$

$$v(t) = \sum_{j=1}^r e^{-a_j t} \beta_j, \quad (10)$$

здесь $\alpha_j, \beta_j \in R^n$, α_j – скалярные величины, от выбора которых зависит выполнение неравенства в (7), $r = 2(p + 1)$, где $p = \min q$, а q определяется из условия Калмана

$$\text{rank} (B \ AB \ \dots \ A^q B) = n.$$

Задача (6), (7), (9) решается, если линейные алгебраические системы для нахождения α_j, β_j разрешимы. Приводятся наборы $\{\alpha_j\}$ для которых задача (6), (7), (9) разрешима. Стабилизированные $x(t)$ находятся из (8).

Литература

1. Zubova S.P. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition /S.P Zubova, K.A. Raetskiy // *Mathematical Biosciences and Engineering*. – 2021. – 18 (6) – P. 7861-7876.

2. Раецкий К.А. Построение модели движения линейной динамической системы с многоточечными условиями // *Таврический вестник информатики и математики*. – 2021. – 1(50) – С. 65 -80.

3. Раецкий К.А. К методу неопределенных коэффициентов решения задач управления. // *Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика*. – 2015. Т.3 № 5- 2 (16 – 2) – С. 40 -41

4. Раецкий К.А. Моделирование движения динамической системы в частных производных // *Современные проблемы в науке и технике. Теория и практика. Материалы международной открытой конференции*. Воронеж, 2022. С. 281 - 283.

5. Раецкий К.А. Моделирование траектории движения динамической системы с контрольными точками и условиями на управление // *Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ – 2021)*. Сборник трудов Всероссийской научной конференции. Воронеж, 2021. С. 132 - 134.

© Раецкий К.А.

УДК 517.911

ТЕОРЕМЫ О ЧЕРЕДОВАНИИ НУЛЕЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА –ФАУЛЕРА

Рогачев В.В.

*ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова», ФГБОУ ВО «МГТУ имени Н.Э. Баумана»,
г. Москва*

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} + p(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})|y|^k \text{sgn } y = 0, \quad (1)$$

где n натуральное, $n \geq 3, k > 0, k \neq 1, 0 < t \leq p(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \leq M < +\infty, x \in \mathbb{R}$, а функция $p = p(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ удовлетворяет условию Липшица по $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, и непрерывна. Уравнение (1) можно считать нелинейным аналогом линейного уравнения

$$y^{(n)} + q(x)y = 0 \quad (2)$$

с непрерывным потенциалом q .

Для (1) с помощью методов из [4]--[6] получены следующие результаты (см. [7]--[9]).

Теорема 1. Для любого целого $s \geq 2$ на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ существует решение уравнения (1), имеющее на нем ровно s нулей и равное нулю в его концах.

Теорема 2. При $k > 1$ на любом полуинтервале $[a, b) \subset \mathbb{R}$ существует решение уравнения (1), имеющее на нем счетное множество нулей.

Теорема 3. При $0 < k < 1$ и $p(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \equiv p_0 \in \mathbb{R}, p_0 > 0$, на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ существует решение уравнения (1), имеющее на нем счетное число нулей и равное нулю в его концах. Также существует нетривиальное решение с континуумом нулей на этом отрезке, равное нулю в его концах.

Эти результаты показывают, как отличается поведение решений нелинейных уравнений от их линейного аналога, для которого верны теорема Штурма и продолжающие её теоремы Кондратьева.

Теорема (Sturm J. Ch. F., [1]). При $n = 2$ между двумя последовательными нулями решения (2) лежит ровно один нуль любого другого линейно независимого с этим решения.

Теорема (В. А. Кондратьев, [2], [3]). При $n = 3$ и $q(x) > 0$ (или $q(x) < 0$) между двумя последовательными нулями решения (2) лежит не более двух нулей любого другого линейно независимого с этим решения. При $n = 4$ и $q(x) > 0$ --- не более четырех. При $n = 4$ и $q(x) < 0$ --- не более трех. При $n \geq 5$ и $q(x) \geq 0$ между двумя последовательными нулями одного решения может лежать любое число нулей другого решения.

Литература

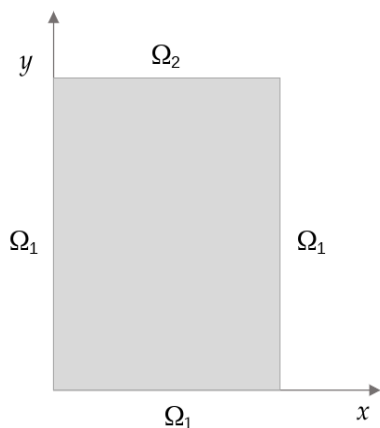
1. Sturm J.Ch.F. Memoire sur la resolution des equations numeriques / J. Ch. F. Sturm // Birkhauser Basel --- 2009.
2. Кондратьев В.А. О колеблемости решений линейных уравнений третьего и четвертого порядка / В.А. Кондратьев // Труды ММО. --- 1959. --- Т. 8, --- С. 259--281.
3. Кондратьев В.А. О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ / В.А. Кондратьев // Труды ММО. --- 1961. --- Т. 10. --- С. 419--436.
4. Astashova I.V., Rogachev V.V. On the number of zeros of oscillating solutions of the third- and fourth-order equations with power nonlinearities / I.V. Astashova, V.V. Rogachev // Journal of Mathematical Sciences. --- 2015. --- V. 205, 6. --- P. 733--748.
5. Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений / И.В. Асташова // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа --- М.: ЮНИТИ--ДАНА. --- 2012. --- С. 22--288.
6. Astashova I.V. On quasi-periodic solutions to a higher-order Emden--Fowler type differential equation. / I.V. Astashova // Boundary Value Problems. --- 2014. --- no. 2014:174. --- P. 1--8.
7. Rogachev V.V. On existence of solutions to higher-order singular nonlinear Emden--Fowler type equation with given number of zeros on prescribed interval / V.V. Rogachev // Functional Differential Equations. --- 2016. --- V. 23, 3-4. --- P. 141-151.
8. Rogachev V.V. On the Existence of Solutions to Higher-Order Regular Nonlinear Emden--Fowler Type Equations with Given Number of Zeros on the Prescribed Interval / V.V. Rogachev // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. --- 2018. --- V. 78. --- P. 123--129.
9. Рогачев В.В. Существование решений с заданным числом нулей у регулярно нелинейного уравнения типа Эмдена--Фаулера произвольного порядка / В.В. Рогачев // Дифференциальные уравнения. --- 2018. --- Т. 54, 12. --- С. 1638--1644.

Математическая модель динамики образования областей кристаллизации парафиновых фракций нефтепродуктов.

Таволжанский А.В., Хвостов А.А.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет»

Одной из проблем, возникающих при хранении дизельного топлива в цистернах, является выпадение парафина. Этот процесс негативно влияет на качество топлива, на его транспортировку, а также на надёжность работы двигателей, работающих на таком топливе. В холодном климате в резервуарах без утепления может происходить кристаллизация парафинов. В этих условиях актуальной задачей является разработка математической модели динамики образования кристаллической фазы парафиновых фракций нефтепродуктов [1].



Рассмотрен подход, основанный на CFD модели однофазного потока в условиях термоконвекции.

Граничные условия на стенках Ω_1 : прилипание жидкости к поверхности стенки $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, где \mathbf{u} – скорость потока жидкости. Граничные условия на стенках Ω_2 : движение жидкости без прилипания $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, где \mathbf{n} – вектор нормали к расчётной поверхности.

Рис. 1

Математическая модель:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \cdot [-p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)] - \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \rho\mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости, кг/м³; \mathbf{g} – ускорение свободного падения, м/с²; μ – динамическая вязкость жидкости, Па·с; p – давление, Па; t – время, с.

Уравнение, которое описывает перенос тепла от стенки резервуара к жидкости, а также в самой жидкости:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{q} = -k\nabla T, \quad (4)$$

где c_p – удельная теплоёмкость жидкости, Дж/(кг·К), k – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К).

Граничные условия на Ω_1 задают плотность теплового потока за счёт конвективной теплоотдачи:

$$-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = q_0, \quad (5)$$

где \mathbf{q} – удельный тепловой поток, Вт/м²;

$$q_0 = h(T_{ext} - T), \quad (6)$$

где T_{ext} – температура окружающего воздуха, К; T – температура жидкости, К;

$$h = \frac{k}{H} \left(\frac{4}{3} \left(\frac{7Ra_H Pr}{5(20 + 21Pr)} \right)^{1/4} + \frac{4(272 + 315Pr)H}{35(64 + 63Pr)D} \right), \quad (7)$$

где Ra – число Рэлея; Pr – Число Прандтля; H – высота цилиндра, м; D – диаметр цилиндра, м; Условия на свободной поверхности Ω_2 задают условие теплоизоляции среды $\mathbf{q} = 0$.

Для корректного описания явления термоконвекции введена линейная зависимость плотности жидкой фазы (нефтепродукта) от температуры

$$\rho(T) = \rho_0 - a(T - T_0), \quad (8)$$

где ρ_0 - плотность жидкости при температуре T_0 ; a – температурная поправка [2].

Вычислительный эксперимент проводился с использованием теплофизических характеристик дизельного топлива [2]. Решение системы (1 – 8) осуществлялось методом конечных элементов в среде Comsol Multiphysics™. Результаты математического моделирования представлены на рис. 2, на котором показаны поля модуля вектора скорости через семь минут после начала моделирования (рис. 2а), температуры (рис. 2б).

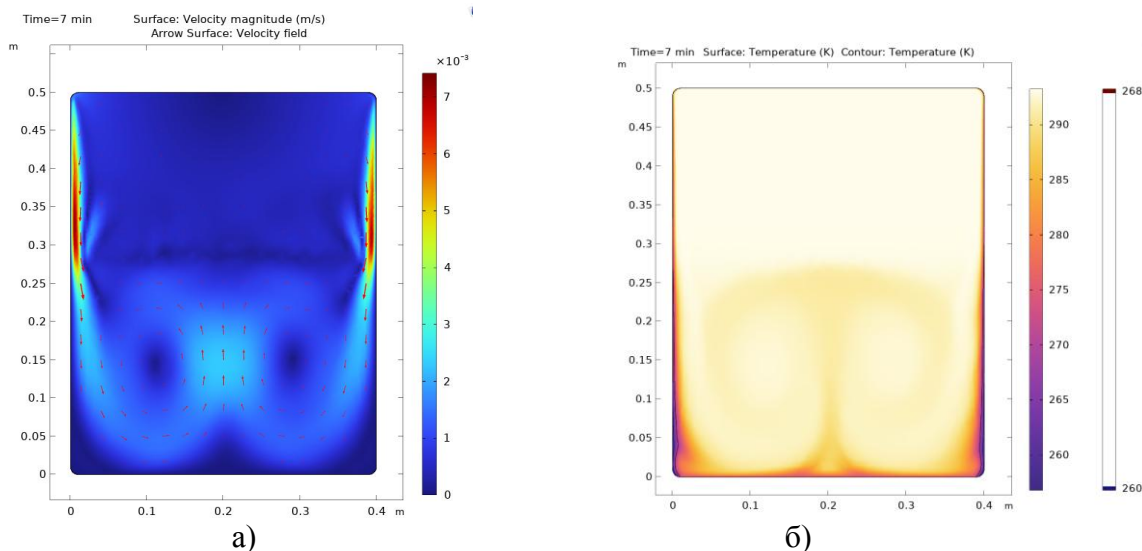


Рис 2 Результаты моделирования

Поле модуля вектора скорости отражает циркуляционные потоки внутри резервуара (рис. 2а). Поле температуры отражает неравномерное распределение температуры внутри резервуара (рис. 2б). С течением времени в нижней части резервуара повышается концентрация твердой фазы (рис. 2б). Скорость выпадения твердой фазы парафина зависит от оттока тепла со стороны боковых и нижней границ. Наличие оттока тепла приводит к уменьшению температуры дизельного топлива до температуры, при которой начинает выпадать парафин. Вызванные термоконвекцией скоростные поля приводят к неоднородности концентрации твердой фазы на стенках резервуара.

Таким образом, при организации хранения нефтепродуктов при прогнозировании процессов осаждения парафиновых фракций следует учитывать теплообмен резервуара с окружающей средой и тепловую обстановку внутри резервуара, что позволит повысить точность прогнозирования динамики процессов выпадения парафинов.

Литература

1. Хранение нефти и нефтепродуктов: Учебное пособие./ Под общей редакцией Ю.Д. Земенкова. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2001. – 550 с
2. Рудин М.Г., Сомов В.Е., Фомин А.С. Карманный справочник нефтепереработчика
3. CFD Module User's Guide. Comsol official site. [электронный ресурс] URL: <https://doc.comsol.com/5.4/doc/com.comsol.help.cfd/CFDModuleUsersGuide.pdf> (16.11.2020).

**УСТОЙЧИВОСТЬ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ
В КЛАССЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С НОСИТЕЛЯМИ
В СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ**

Тимошенко В.В., Перова И.В.

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Сетеподобная ограниченная область $\mathfrak{Z} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ с границей $\partial\mathfrak{Z}$ состоит из областей \mathfrak{Z}_k с границами $\partial\mathfrak{Z}_k$ ($k = \overline{1, N}$), попарно соединенных в M узловых местах ω_j ($j = \overline{1, M}$, $1 \leq M \leq N-1$): $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z} \cup \widehat{\omega}$, где $\mathfrak{Z} = \bigcup_{k=1}^N \mathfrak{Z}_k$, $\widehat{\omega} = \bigcup_{j=1}^M \omega_j$, $\mathfrak{Z}_k \cap \mathfrak{Z}_l = \emptyset$ ($k \neq l$), $\omega_j \cap \omega_i = \emptyset$ ($j \neq i$), $\mathfrak{Z}_k \cap \omega_j = \emptyset$ $\forall k, j$ [1]. Области \mathfrak{Z}_k в узловых местах ω_j для каждого фиксированного j ($j = \overline{1, M}$) имеют общие границы в виде поверхности примыкания S_j ($\text{meas } S_j > 0$), которая разделяет примыкающие к ней $1+m_j$ области \mathfrak{Z}_{k_0} и \mathfrak{Z}_{k_s} ($s = \overline{1, m_j}$): $S_j = \bigcup_{s=1}^{m_j} S_{j_s}$ ($\text{meas } S_{j_s} > 0$), причем $S_j \subset \partial\mathfrak{Z}_{k_0}$, $S_{j_s} \subset \partial\mathfrak{Z}_{k_s}$ ($s = \overline{1, m_j}$). Таким образом, ω_j определяется поверхностью примыкания S_j , для которой S_{j_s} также поверхность примыкания \mathfrak{Z}_{k_s} к \mathfrak{Z}_{k_0} ($s = \overline{1, m_j}$); $\partial\mathfrak{Z} = \bigcup_{k=1}^N \partial\mathfrak{Z}_k \setminus \bigcup_{j=1}^M S_j$ – граница области \mathfrak{Z} . Применительно к сетеподобной области \mathfrak{Z} скалярные произведения и нормы имеют вид:

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}} = \sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_k} u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{Z}} = \left(\sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_k} u^2(x)dx \right)^{1/2}, \quad (1)$$

$$(u, v)_{\mathfrak{Z}}^1 = \sum_{k=1}^N \int_{\mathfrak{Z}_k} \left(u(x)v(x) + \sum_{\kappa=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_{\kappa}} \frac{\partial v(x)}{\partial x_{\kappa}} \right) dx, \quad \|u\|_{\mathfrak{Z}}^1 = \left(\sum_{k=1}^N (u, u)_{\mathfrak{Z}_k}^1 \right)^{1/2}, \quad (2)$$

Обозначим через $C(\overline{\mathfrak{Z}})$ совокупность непрерывных в $\overline{\mathfrak{Z}}$ функций $u(x)$, через $C^1(\overline{\mathfrak{Z}_k})$ ($k = \overline{1, N}$) совокупности функций из $C(\overline{\mathfrak{Z}})$, для которых при каждом фиксированном k в $\overline{\mathfrak{Z}_k}$ существуют непрерывные производные $u_{x_2}(x), \dots, u_{x_n}(x)$ и через $C^1(\overline{\mathfrak{Z}})$ совокупность функций со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами (1) и (2), соответственно. Пусть $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{Z})$ – множество функций $u(x) \in C^1(\overline{\mathfrak{Z}})$, для которых имеют место условия примыкания

$$\int_{S_j} a(x)_{S_j} \frac{\partial u(x)_{S_j}}{\partial n_j} ds + \sum_{i=1}^{m_j} \int_{S_{ji}} a(x)_{S_{ji}} \frac{u(x)_{S_{ji}}}{\partial n_{ji}} ds = 0, \quad x \in S_{ji}, i = \overline{1, m_j}, \quad (3)$$

на поверхностях S_j, S_{ji} ($i = \overline{1, m_j}$) всех узловых мест $\omega_j, j = \overline{1, M}$, функции $u(x)$ имеют компактный носитель в области \mathfrak{Z} , т.е. $u(x)|_{\partial\mathfrak{Z}} = 0$. В соотношениях (3) $a(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$ и $a(x)_{S_j}, u(x)_{S_j}, a(x)_{S_{ji}}, u(x)_{S_{ji}}$ – сужения функций $a(x), u(x)$ на S_j и S_{ji} , векторы n_j и n_{ji} – внешние нормали к S_j и S_{ji} , соответственно, $i = \overline{1, m_j}, j = \overline{1, M}$. Пространством $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$ назовем замыкание множества $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{Z})$ в норме $W_2^1(\mathfrak{Z})$.

Рассмотрим дифференциально-разностную систему уравнений

$$u(k)_t + \Lambda u(k) = f(k), \quad u(0) = \varphi(x), \quad u(1) = \psi(x) = \varphi(x) + \tau[\Lambda \varphi(x) + f(1)], \quad (4)$$

где $\Lambda u = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right) + b(x)u(x)$, $u(k)_t = \frac{3}{2\tau}[u(k) - u(k-1)] - \frac{1}{2\tau}[u(k-1) - u(k-2)]$.

Определение 1. Слабым решением дифференциально-разностной системы (4) называются функции $u(k) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, $(k = 2, \dots, M)$, удовлетворяющие интегральному тождеству $\int_{\Gamma} u(k)_t v(x) dx + \ell(u(k), v(x)) = \int_{\Gamma} f(k) v(x) dx \quad \forall v(k) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$.

Определение 2. Дифференциально-разностная система (5), (6) устойчива по начальным данным $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и правой части $f(k)$, если при любом $\tau \leq \tau_0$ выполняется неравенство $\|u(k)\|_{\Gamma} \leq R_1 \|\varphi\| + R_2 \|\psi\| + R_3 \|f\|_{2,1}$, где через $\|u(k)\|_{\Gamma}$ обозначена норма пространства $L_2(\mathfrak{Z})$ или $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{Z})$, $\|f\|_{2,1} = \tau \sum_{k=1}^N \|f(k)\|_{\mathfrak{Z}}$, положительные постоянные R_1 , R_2 и R_3 не зависят от τ .

Теорема. При выполнении условий $0 < a_* \leq a(x) \leq a^* < \infty$, $|b(x)| \leq \beta < \infty$, $x \in \mathfrak{Z}$, $\varphi(x) \in L_2(\mathfrak{Z})$ и при $\tau \leq \tau_0 < 0,5 / \rho$ дифференциально-разностная система (4) устойчива по начальным данным и правой части.

Литература

1. Провоторов В.В. Собственные функции краевых задач на графах и приложения. – Воронеж: Научная книга. 2008. – 228 с.

© Тимошенко В.В., Перова И.В.

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С «ВЕСОВОЙ» ПРОИЗВОДНОЙ

Ткачева С.А., Савченко Г.Б., Забабурина И.Г.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г Воронеж

Рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$D_{\alpha,t} u - B(D_x)u = f(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, x \in R^n. \quad (1)$$

где искомая функция $u = u(t, x) = u(t, x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяет граничному условию

$$B_1 u(t, x)|_{t=0} = B_2 u(t, x)|_{t=T}, \quad (2)$$

здесь $B(D_x)u(t, x) = \sum_{|\beta| \leq m} b_{\beta} D_x^{\beta} u(t, x)$ – дифференциальный оператор по $x \in R^n$ с

постоянными коэффициентами: $B_k(D_x)u(t, x) = \sum_{|\beta| \leq m} b_{\beta}^k D_x^{\beta} u(t, x)$, $(k = 1, 2)$.

$D_{\alpha,t} = \sqrt{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\alpha(t)}$ – дифференциальный оператор, содержащий «весовые» производные по переменной $t \in [0, T]$, $(0 < T < \infty)$, где $\alpha(t)$ достаточно гладкая на $[0, T]$ функция, обращающаяся в нуль при $t = +0$: $\alpha(+0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t \in [0, T]$. Функция $f(t, x) = f(t, x_1, \dots, x_n)$ – заданная функция, определенная в слое $(0 \leq t \leq T, x \in R^n)$. Через

$B(s) = \sum_{|\beta| \leq m} b_\beta s^\beta$, $B_k(s) = \sum_{|\beta| \leq m} b_\beta^k s^\beta$ ($k=1,2$) обозначим символы дифференциальных операторов – полиномы от s_1, s_2, \dots, s_n с постоянными коэффициентами, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – мультииндекс.

На гладких функциях $u(t, x) \in L_2$ зададим оператор G_α по формулам (см. [1])

$$G_\alpha [u](\tau, x) = \sqrt{\alpha(t)} u(t, x) \Big|_{t=\tau} = v(\tau, x),$$

здесь $t = t(\tau)$, функция, обратная функции

$$\tau = \tau(t) = \int_t^T \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}, \quad 0 < t < T, \quad 0 < \tau < \gamma, \quad \gamma = \int_0^T \frac{d\rho}{\alpha(\rho)} < \infty.$$

Теорема. Пусть существуют постоянные $c_k > 0$, ($k=1,2,3$), что выполняются условия:

1. $|L_1(s)L_2(s) - \exp(\gamma L(s))| \geq c_1$ при любых $s \in R^n$.
2. $|L_1(s)L_2^{-1}(s)|\sigma^{-1}(s) \leq c_2$ при $\sigma(s) \geq c_3$.

Тогда задача (1) – (2) разрешима при любой правой части $f(t, x) \in L_2([0, T] \times R^n)$ и выполняется оценка

$$\int_0^T \|u(t, x)\|_{L_2(R^n)}^2 dt \leq c \int_0^T \|f(t, x)\|_{L_2(R^n)}^2 dt, \quad (3)$$

константа $c > 0$ не зависит от $s \in R^n$.

Литература

1. Глушко В.П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи // В.П. Глушко, Ю.Б. Савченко – Итоги науки и техники ВИНТИ – М., 1985. – т. 23. – С. 125-218.
2. Ткачева С.А. Разрешимость нелокальной граничной задачи для систем линейных дифференциальных уравнений / С.А. Ткачева, Г.Б. Савченко // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. ПМТУКТ-2021. – Воронеж, 2021. – С. 152-154.

© Ткачева С.А., Савченко Г.Б., Забабурина И.Г.

УДК 517.977.56

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА СЕТЕПОДОБНОЙ ОБЛАСТИ

Тран 3.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

Рассмотрим начально-краевую задачу с многомерной пространственной переменной, принадлежащей евклидову пространству \mathfrak{R}^n ($n \geq 2$). Введем следующие обозначения, аналогичные используемым в работах [1]. Обозначим через \mathfrak{Z} сетеподобную область, содержащую подобласти \mathfrak{Z}_m ($m = \overline{1, M}$), попарно примыкающие друг к другу посредством поверхностей S_l ($l = \overline{1, L}$) (поверхности примыкания); каждая разделяющая подобласти

поверхность S_l является частью границ $\partial\mathfrak{Z}_m$ этих подобластей. Таким образом, область \mathfrak{Z} представляется в виде объединений \mathfrak{Z}_m и S_l : $\mathfrak{Z} = \left(\bigcup_{m=1}^M \mathfrak{Z}_m \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^L S_l \right)$, а ее граница имеет вид. Места примыкания подобластей \mathfrak{Z}_m (узловые места ξ_p ($p = \overline{1, P}$)) определяются поверхностями примыкания и являются местами ветвления, которые будут обозначаться символом $\xi = \bigcup_{p=1}^P \xi_p$ [2].

Обозначим через $U(x, t) = U(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ функцию, определяющую количественные характеристики упругой среды в области $\mathfrak{Z} \times [0, T]$, где $0 < T < \infty$ фиксированная постоянная. Математическая модель колебательного процесса для амплитуд $U(x, t)$, $(x, t) \in \Gamma \times [0, T]$ описывается уравнениями

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(a_\alpha(x_\alpha) \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \right) \quad (1)$$

с условиями примыкания в каждом узловом месте ξ_p ($p = \overline{1, P}$):

$$U|_{S_l^+(\xi_p)} = U|_{S_l^-(\xi_p)}, \quad (2)$$

$$\sum_{l=1}^n a_\alpha \frac{\partial U}{\partial \bar{n}_l^+} \Big|_{S_l^+(\xi_p)} + \sum_{l=1}^n b_\alpha \frac{\partial U}{\partial \bar{n}_l^-} \Big|_{S_l^-(\xi_p)} = 0, \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Для системы уравнений (1)–(3) устанавливаются начальное и граничное условия:

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, 0) = 0, \quad (4)$$

$$U|_{\partial\mathfrak{Z}} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, начально-краевая задача (1)–(5) определяет математическую модель колебаний в сетеподобной области $\mathfrak{Z} \times [0, T]$.

Разностные схемы

Построим дискретную область $\omega_{\mathfrak{Z}}$, которая является сеткой области $\mathfrak{Z} \times [0, T]$,

состоящей из точек (x_i, t_j) , $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{0, K}$: $\omega_{\mathfrak{Z}} = \bigcup_{m=1}^M \omega_{\mathfrak{Z}_m}$, где

$\omega_{\mathfrak{Z}_m} = \left\{ (x_{i_m}, t_j) : x_{i_m} \in \mathfrak{Z}_m, i_m = \overline{1, N_m}, j = \overline{0, K}; m = \overline{1, M} \right\}$; $x_{i_m} = (x_1^{(i_m)}, x_2^{(i_m)}, \dots, x_\alpha^{(i_m)}, \dots, x_n^{(i_m)})$
 $= (i_1 h_1, i_2 h_2, \dots, i_\alpha h_\alpha, \dots, i_n h_n)$, $i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}$; $t_j = j\tau$, h_α, τ являются шагами пространственно-временной разностной сетки $\omega_{\mathfrak{Z}}$.

Для построения решения задачи (1) – (5) сформируем ей соответствующий конечно-разностный аналог (разностную схему) на сетке $\omega_{\mathfrak{Z}}$:

$$\frac{u_{i_\alpha}^{j+1} - 2u_{i_\alpha}^j + u_{i_\alpha}^{j-1}}{\tau^2} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{a_\alpha^{(i_\alpha+1)} \frac{u_{i_\alpha+1}^j - u_{i_\alpha}^j}{h_\alpha} - a_\alpha^{(i_\alpha)} \frac{u_{i_\alpha}^j - u_{i_\alpha-1}^j}{h_\alpha}}{h_\alpha},$$

$$u_{i_\alpha}^j \Big|_{S_l^+(\xi_p)} = u_{i_\alpha}^j \Big|_{S_l^-(\xi_p)},$$

$$\sum_{l=1} a_{\alpha} \frac{u_{i_{\alpha}^{*}+1}^j - u_{i_{\alpha}^{*}}^j}{h_{\alpha}} \Big|_{S_l^{+}(\xi_p)} + \sum_{l=1} b_{\alpha} \frac{u_{i_{\alpha}^{*}}^j - u_{i_{\alpha}^{*}-1}^j}{h_{\alpha}} \Big|_{S_l^{-}(\xi_p)} = 0,$$

$$u_{i_{\alpha}}^0 = \varphi_{i_{\alpha}}, \quad \frac{u_{i_{\alpha}}^2 - u_{i_{\alpha}}^1}{\tau} = 0,$$

$$u_{i_{\alpha}}^j \Big|_{\partial\Gamma} = 0.$$

Литература

1. Zhabko A.P., Provotorov V.V., Balaban O.R. Stabilization of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2019;15(2):187–198.

2. Тран З. Локально-одномерный метод для уравнения переноса сплошной среды с распределенными параметрами на сетеподобной области. Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2022;10(2).

© Тран З.

УДК 519.711.3

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ С ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ВЕРШИНОЙ

Трибунских О.А.

ФГКВОУ ВО «Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж

Используя динамично развивающуюся теорию дифференциальных уравнений на геометрических графах (см.[1],[2]), предлагается построить алгоритм решения краевой задачи для случая, когда граф \mathcal{T} содержит одну внутреннюю вершину a и m конечных вершин. Граф состоит из множества ребер $\{\gamma_i\}$ и множества конечных вершин $\partial\mathcal{T}$. Обозначим через m число конечных вершин, а через $d(a)$ число ребер примыкающих к внутренней вершине a . По определению $d(a) \geq 3$.

Пусть на \mathcal{T} задана система линейных дифференциальных уравнений следующего вида

$$y_1' = p_1(x)y_1 + q_1(x)y_2 + f_1(x), \quad (1)$$

$$y_2' = p_2(x)y_1 + q_2(x)y_2 + f_2(x).$$

Будем полагать, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны и дифференцируемы на сети.

Во внутренней вершине a сформулированы условия согласования следующего вида

$$y_{11} = y_{12} = \dots = y_{1d(a)}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{d(a)} \mu_i y_2(a) = 0. \quad (3)$$

$$i=1$$

В концевых узлах сети b_i ($i=1,m$) заданы граничные условия. Будем полагать, что в l концевых узлах нам известно значение функции y_1 , а в оставшихся концевых узлах нам известно значение функции y_2

$$y_1(b_i) = y_{1i}, \quad i = 1, l, \quad (4)$$

$$y_2(b_i) = y_{2i}, \quad i = l+1, m.$$

Построим на основе метода суперпозиции алгоритм решения системы дифференциальных уравнений первого порядка на графе. Так же как и в случае краевой задачи на отрезке, функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, которые являются решением системы уравнений, будем искать в виде

$$y_1 = e_1 + \lambda g_1, \quad (5)$$

$$y_2 = e_2 + \lambda g_2, \quad (6)$$

где λ - некоторая постоянная, а $e_1(x)$, $e_2(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ - функции заданные на \mathfrak{T} .

Продифференцируем выражения (5), (6) и подставим их в (1). После группировки получим две системы уравнений

$$e_1' = p_1 e_1 + q_1 e_2 + f_1$$

$$e_2' = q_2 e_2 + p_2 e_1 + f_2$$

$$g_1' = p_1 g_1 + q_1 g_2$$

$$g_2' = p_2 g_1 + q_2 g_2$$

Решение этих систем уравнений найдем при следующих краевых условиях

$$e_1(b_i) = y_{1i}, \quad g_1(b_i) = 0, \quad i = 1, l,$$

$$e_2(b_i) = y_{2i}, \quad g_2(b_i) = 0, \quad i = l+1, m-1,$$

$$e_2(b_1) = 0, \quad g_2(b_1) = 1.$$

Таким образом, в вершине b_1 заданы начальные условия, а в вершине b_m условия отсутствуют. После решения на сети двух систем уравнений получим решение $y(x)$, которое удовлетворяет условиям согласования (2), (3) в точке a и условиям (4) во всех концевых вершинах, кроме одного в вершине b_m . Подберем λ так, чтобы $y(x)$ удовлетворяло и условию в точке b_m

$$\lambda = \frac{y_2(b_m) - e_2(b_m)}{g_2(b_m)}.$$

Метод суперпозиции может быть использован и в случае, когда на \mathfrak{T} задано дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = p(x)y + f(x), \quad (7)$$

во внутренней вершине a условия согласования вида

$$y_1(a) = y_2(a) = \dots = y_d(a), \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{d(a)} \mu_i y_i(a) = 0, \quad (9)$$

где μ_i произвольная ненулевая константа, для внутренней вершины a . В каждой концевой вершине $b_i \in \partial\mathfrak{T}$ заданы краевые условия

$$y(b_i) = c_i, \quad (10)$$

где $i=1, m$, c_i - постоянные.

Для нахождения приближенного решения задачи (7)-(10) построим метод аналогичный методу суперпозиции для краевой задачи, заданной на отрезке (см.[3]). Так же как и в классическом случае функцию $y(x)$, которая является решением уравнения (7), будем искать в виде

$$y(x) = e(x) + \lambda g(x), \quad (11)$$

где λ - некоторая постоянная, а $e(x)$ и $g(x)$ - функции заданные на графе \mathcal{G} .

Продифференцируем выражение (11) и подставим в (7) получим $e''(x) + \lambda g''(x) = pe(x) + pg(x) + f$ или $(e'' - pe - f) + \lambda(g'' - pg) = 0$. Найдем функцию $g(x)$ так, чтобы $g'' - pg = 0$. Тогда функция $e(x)$ удовлетворяет уравнению $e'' - pe - f = 0$. Таким образом, функции $e(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$e'' = pe + f \quad (12)$$

$$g'' = pg \quad (13)$$

Решение системы уравнений (12)-(13) найдем при условиях согласования (8), (9) и при граничных условиях

$$e(b_i) = c_i \quad (i = \overline{1, m-1}); \quad e'(b_1) = 0; \quad (14)$$

$$g(b_i) = 0 \quad (i = \overline{1, m-1}); \quad g'(b_1) = 1. \quad (15)$$

Таким образом, для решения исходной задачи вида (7)-(13) нам необходимо на сети \mathcal{G} решить две начально-краевых задачи.

Решив на сети \mathcal{G} две начально-краевых задачи (12), (14) и (13), (15), получим решение $y(x)$, которое удовлетворяет условиям согласования (8), (9) в точке a и условиям (10) во всех концевых вершинах, кроме одного в вершине b_m . Подберем λ так, чтобы $y(x)$ удовлетворяло и условию в точке b_m , для этого положим

$$\lambda = \frac{y(b_m) - e(b_m)}{g(b_m)}. \quad (16)$$

Опишем процедуру поиска решения уравнения (12) с условиями (14). Решение начально-краевой задачи на произвольной сети рассмотрим на примере определения функции $e(x)$ (для $g(x)$ аналогично). На ребре $\gamma_1 = (b_1, a)$ находим решение задачи Коши для уравнения (12) с начальными условиями $e(b_1) = c_1$, $e'(b_1) = 0$. Обозначим через c^* значение найденной функции $e(x)$ в вершине a ребра γ_1 ($e(a) = c^*$). Исключим из сети \mathcal{G} ребро γ_1 и вершину a . В результате исходная сеть распадется на множество компонентов связности $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{k-1}, \mathcal{G}_k$ ($k = d(a) - 1$). Так как у нас одна внутренняя вершина, то все подграфы \mathcal{G}_i состоят из одного ребра. Найдем решение $e(x)$ на подграфах \mathcal{G}_i , $i = 1, \dots, k-1$. Так как \mathcal{G}_i состоит из одного ребра $[b_i, a]$, то в граничных точках этого ребра заданы краевые условия $e(b_i) = c_i$, $e(a) = c^*$ и решение ищется классическим методом суперпозиции (см. напр.[3]) для краевой задачи на отрезке.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004.
2. Завгородний М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 4. С. 446-456.

3. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач.-М.: Мир, 1982.-249с.

© Трибунских О.А.

УДК 517.9

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ "ЛЕС-БИОМАССА"

Тусупбекова Э.Е.

*ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова»,
г. Москва*

Лес - важнейший компонент биосферы, основной источник экологической безопасности человека. В лесах содержится около 60-70 процентов всего атмосферного запаса углекислоты - 400-500 млрд.т. Помимо биологической пользы леса приносят огромный вклад в развитие экономики многих промышленно развитых стран мира.

В данной работе проводится исследование и анализ динамической модели для сохранения лесного хозяйства, которое истощается из-за вырубки лесов, роста лесной промышленности, климатических факторов (см. [3--5]). Рассматривается возрастная структура лесной биомассы через деление на молодые (P) и зрелые (M) популяции. Для промышленных предприятий (I) накладывается ограничение на вырубку молодых популяций. В качестве альтернативных ресурсов для промышленных предприятий вводится модифицированная функция Лесли---Гоуэра (см.[5]).

В работе изучается система нелинейных дифференциальных уравнений, исследуется устойчивость решений системы, допускающей линеаризацию в окрестности положений равновесия. Взаимодействие между величинами P, M, I описывается динамической системой:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right) - \beta P + \gamma P, \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dt} = \beta P - q_1 EM - d_1 M, \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 I}{\alpha_3 + M}\right) I - d_2 I, \quad (3)$$

где $P(0) \geq 0, M(0) \geq 0, I(0) \geq 0$, $r, \beta, k, \gamma, q_1, E, d_1, d_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — действительные параметры. Для доказательства положительности и ограниченности решений системы используется лемма Чена. Теория дифференциальных неравенств используется для получения достаточных условий существования предельных значений введенных переменных. Исследуется устойчивость положения равновесия системы. Рассматриваются четыре биологически возможных положения равновесия системы. Строятся фазовые портреты в проекции по двум переменным при помощи веб-приложения PhaPl [2]. В ходе работы были выявлены условия при которых положения равновесия представляли собой устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый седло---узел, неустойчивый седло---узел.

В результате исследования было построено трехмерное поле направлений динамической системы и фазовые портреты в проекции по двум переменным. Были получены условия биоэкономического равновесия. В результате численного моделирования были построены графики, соответствующие полученным в работе результатам. Было изучено каждое уравнение системы по отдельности. Решив первое уравнение как уравнения с разделяющимися переменными и подставив его решение во

второе уравнение системы, было получено линейное неоднородное уравнение. При подстановке решения второго уравнения в третье было получено уравнение Бернулли. Были найдены аналитические выражения решений в зависимости от параметров.

Отметим, что в исследовании использовались методы, применявшиеся в [1] для исследования поведения решений нелинейных динамических систем.

Литература

1. Асташова И.В. *Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков* Современная математика и ее приложения, 2003. Т. 8, с.3---33.

2. Черепанов А.А. *Программный комплекс PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости* Открытое образование, 2017. с.41---52.

3. Chen F. *On a nonlinear nonautonomous predator - prey model with diffusion and distributed delay* Comput Appl Math, 2014. p.33 --- 49.

4. Leslie P.H. *Some further notes on the use of matrices in population mathematics* Oxford University Press, 1948. p. 213 --- 245.

5. Manisha C., Joydip D., Om P. M. *A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction* Springer International Publishing Switzerland, 2015. p. 1---10.

© Тусупбекова Э.Е.

УДК 517.94

ИЗМЕНЕНИЕ ДИАПАЗОНА ПРИ МОДУЛЯЦИИ ЦИФРОВОГО СИГНАЛА

Урывская Т.Ю., Рудый С.В., Лютов Н.С., Жидких И.В.

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Проведенная проверка программного обеспечения, необходимого для реализации соответствующих образовательных программ и организации научной работы, позволила подобрать для него наиболее функциональные аналоги среди научных программных продуктов с последующим внедрением в учебный процесс и научно-исследовательскую деятельность. Приближенной базой исследования послужил анализ заявок на предоставление основного программного обеспечения в период с 2017 по 2019 годы, поданных кафедрами, факультетами и структурными научными подразделениями Военного Учебно-научного Центра Военно-воздушных Сил «Военно-воздушной Академии имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж, Россия), а также филиалами, и инструментами Фонда алгоритмов и программ данной организации, на основе которых были разработаны собственные прототипы программного обеспечения [1-2].

Проведенный в этой области анализ показал, что наиболее популярными математическими системами являются MathCad и Matlab, а их ближайшими аналогами - SMathStudio, Maxima и Scilab, GNU Octave.

В таблицах 1 и 2 представлены основные характеристики математических пакетов, информация об их разработчиках и их сравнение. Данные обновлены до последних версий программ, выпущенных к маю 2021 года [3].

Таблица 1. Сравнение математических систем MathCad [4], SMath Studio и Maxima

Параметр	MathCad	SMath Studio	Maxima
Разработчик, официальный сайт	ParametricTechnology Corporation (PTC), https://www.ptc.com/ru/products/mathcad/	Андрей Ивашов, https://ru.smith.com/	Massachusetts Institute of Technology (MIT), http://maxima.sourceforge.net/
Год выпуска	1986	2006	1982
Основные функциональные возможности:			
Алгебраические вычисления	да	да	да
Дифференцирование	да	да	да
Интегрирование	да	да	да
Операции с матрицами	да	да	да
Вычисление пределов	да	нет	да
Построение графиков	да	да	да
Операции с комплексными числами	да	да	да
Операторы while и for	да	да	да

Таблица 2. Сравнение математических систем Matlab [5], Scilab[6] и GNU Octave[7]

Параметр	Matlab	Scilab	GNU Octave
Год первого выпуска программы	1984	1994	1988
Основные функциональные возможности:			
Алгебраические вычисления:	да	да	да
Дифференцирование	да	да	да
Интегрирование	да	да	да
Операции с матрицами	да	да	да
Обработка сигналов	да	да	да
Оператор if	да	да	да
Операторы while и for	да	да	да

Из таблицы 1 видно, что программы SMath Studio и Maxima не являются полными аналогами Mathcad и уступают ей функционалом.

К недостаткам SMath Studio можно отнести небольшое количество встроенных функций, плохую реализацию вычислений в символьном виде и отсутствие средств компоновки документов. При решении системы уравнений в Maxima результаты трудно использовать в дальнейшем. Также вероятность совершить ошибку выше при вводе в рабочий лист длинных уравнений с большим количеством математических операций.

К преимуществам SMath Studio можно отнести визуальное представление решаемых математических задач, наличие поддержки пользователя в виде всплывающей подсказки по вводу переменных и функций, как в современных средах программирования, возможность расширения программы с помощью пользовательских модулей и дополнений. SMath Studio наиболее близка по стилю (интерфейсу) к MathCad [5]. Программа Maxima имеет более строгую типизацию данных, что повышает ее производительность и упрощает процесс отладки проекта. Обе программы являются кроссплатформенными и совместимы с Linux.

Таким образом, проведенный анализ показал, что внедрение и использование

свободного программного обеспечения в научной и образовательной деятельности можно рассматривать как реальную альтернативу проприетарным программным системам. Это решение ускорит темпы обучения и исследований в инженерных дисциплинах, а также поможет бороться с важным негативным последствием коммерческого программного обеспечения - явлением так называемого "пиратства" или распространения "пиратского" программного обеспечения.

Основные трудности, связанные с внедрением свободного программного обеспечения в образовательный процесс, представляются следующими

Проблемы совместимости (или отсутствия совместимости) между новыми форматами и существующими продуктами

Консерватизм пользователей, который связан с их нежеланием учиться чему-то новому;

Недостаточная функциональность LSS по отношению к программному обеспечению, которое будет использоваться в некоторых дисциплинах;

В некоторых случаях более высокие требования руководства (нормативные документы) к использованию определенного программного продукта для определенной области.

Для поддержки этого направления военным вузам рекомендуется разработать и поддерживать соответствующую общедоступную базу данных с набором необходимых разверток LSS, электронных учебных материалов и другого контента для облегчения и сокращения времени на их освоение, создавая тем самым необходимые условия для обеспечения коллективного перехода пользователей на пакеты LSS, что позволит существенно сэкономить средства государственного бюджета при требуемом качестве подготовки стажеров

Литература

1 Бобровских А.В. Перспективы использования программного обеспечения в образовательной деятельности курсантов ВУНЦ ВВС «ВВА»// VI Научно-практическая конференция. Воронеж: ВУНЦ ВВС «ВВА», 2019 г. С. 23-27.

2 Бобровских А.В. Урывская Т.Ю., Алимов А.П. Свободное программное обеспечение. Математические продукты

3 Фонд Свободного Программного Обеспечения (Free Software Foundation) URL: gnu.org, свободный. Дата обращения: 21.10.2019.

4 MathCad. – URL: mathcad.com.

5 MatLab. – URL: matlab.ru/products/matlab (дата обращения: 09.07.2019).

6 SciLab. – URL: scilab.org/software/scilab (дата обращения: 09.07.2019).

7 GNU Octave. – URL: gnu.org/software/octave/ (дата обращения: 09.07.2019).

© Урывская Т.Ю., Рудый С.В., Лютов Н.С., Жидких И.В.

УДК 517.94

МАСШТАБИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА ПРИ СМЕНЕ ФОРМАТОВ

Урывская Т.Ю., Харченко В.В., Черноротов П.О., Репрынцев Е.С., Щербатов Д.С.

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

При системных исследованиях эффективности боевого применения авиационных комплексов (АК) система моделей, описывающих процесс боевых действий группировки к АК, представляется как система вложенных друг в друга двухуровневых моделей, образующих иерархическую структуру. Модель верхнего уровня (координирующая модель)

дает возможность сформулировать частные показатели эффективности, характеризующие отдельные этапы (фазы), цикла функционирования УАК, и установить их количественные связи с принятыми общими критериями эффективности, характеризующими результаты функционирования группировки УАК. Она позволяет оценить значения общих критериев эффективности группировки УАК и исследовать зависимость общих критериев от частных показателей. В основе координирующей модели лежит оперативно-тактическая модель (ОТМ) боевых действий группировки УАК, представляющая собой неформальное описание боевых действий, отражающее структуру, основные черты и факторы этого процесса. При исследованиях эффективности ОТМ отражает основные черты реальных боевых действий и в какой-то степени заменяет для исследования результаты наблюдения. ОТМ основывается на положениях военной доктрины, стратегии, оперативного искусства и тактики и отражает реальный опыт боевых действий, учений и боевой подготовки войск. Важнейшими сведениями, содержащимися в ОТМ, которые необходимы для построения формализованной модели боевых действий (операции), являются [1]:

- общее количество, состав и базирование авиации, участвующей в боевых действиях
- количество, размещение и состав сил противника, противодействующих ударной авиации: силы, действующие по аэродромам базирования, средства ПВО и др.
- напряженность боевых действий, которая задается моментами нанесения массированных ударов и обозначением периодов эшелонированных боевых действий
- распределение усилий по объектам боевых действий
- моменты нанесения ударов и состав сил противника при действиях по аэродромам базирования и другим объектам
- обеспечение боевых действий (огневое подавление ПВО, РЭБ, патрульное сопровождение и др.).

Для всестороннего исследования эффективности боевых действий (ЭБД), как правило, требуется несколько типовых ОТМ [2-3], описывающих ход боевых действий при разных стратегиях и тактиках.

Для прояснения методической стороны дела рассмотрим и кратко опишем одну из них, соответствующую оборонительной доктрине, основная особенность которой состоит в том, что противник первым начинает боевые действия, в результате чего создается ситуация, в которой наша авиация прежде, чем нанести ответный удар, вынуждена часть сил, не готовых к немедленному нанесению ответных ударов, выводить из-под удара авиации противника и перебазировать ее на оперативные (запасные) аэродромы.

В кратком описании, которое в полном объеме обычно выполняется специалистами-операторами, а затем последовательно уточняется во взаимодействии со специалистами, занимающимися оценкой эффективности, мы выделим лишь те его положения, которые существенны для создания формализованной имитационной модели. Применительно к боевым действиям авиационного полка (АП) ударной авиации основные черты ОТМ сводятся к следующим положениям.

Авиационный полк базируется на нескольких аэродромах и находится в постоянной боевой готовности. Самолеты находятся в разных степенях готовности. Поступает сигнал об ожидаемом ударе противника по аэродромам [4]. Получена команда о выходе из-под удара и нанесении ответного удара.

Принимается решение на подготовку и взлет на нанесение удара по объектам противника той части самолетов, которые успеют взлететь до предполагаемого момента удара противника по аэродромному базированию. Самолеты, которые не будут готовы к моменту нанесения удара противника, не успеют взлететь до удара по аэродрому, взлетают и перебазировываются на запасные аэродромы, по которым удар противника не наносится. Эти самолеты смогут принять участие только в следующем ударе. Часть самолетов, не успевших взлететь с аэродрома, по которому наносится удар противника, и не получивший повреждений в результате удара, могут принять участие в ударах после восстановления

ВПП. В последующих ударах могут принять участие самолеты, получившие повреждения, но восстановленные к моменту восстановления ВПП.

Взлетевшие для нанесения удара по наземным объектам самолеты занимают свои места в боевом порядке соединения, преодолевая ПВО противника, выходят на объекты действий и наносят удары по назначенным наземным целям. После нанесения удара возвращаются, совершают посадку на неповрежденные аэродромы и готовятся к нанесению следующего удара. В следующем ударе принимают участие и те самолеты, которые вышли из-под удара, перебазировались на запасные аэродромы и успели подготовиться ко второму удару. В дальнейшем запасные аэродромы, на которых находится авиация, становятся известны противнику и процесс в основных чертах повторяется. Таким образом, предполагается, что противник не наносит ударов по аэродромам, на которых в момент удара нет самолетов.

При нанесении ударов по объектам противника производится целераспределение [5], которое устанавливает соотношение между подвергающимися ударам типами объектов. Это соотношение может быть разным в разных ударах или приблизительно выдерживаться на всем рассматриваемом отрезке времени.

Литература

1 Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. “Дифференциальные уравнения” – М.: издательство МВТУ, 2000.

2 Амелин В.В. “Дифференциальные уравнения в приложениях” – издательство ЕдиториалУРСС, 2003.

3 Филипс Г. М. “Дифференциальные уравнения” - издательство ЛКИ, 2008

4 Эльсгольц Л.Э. “Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление” – издательство ЕдиториалУРСС, 2000.

5 Вентгель Е.С. “Исследование операций” – М.: Советское радио, 1972.

© Урывская Т.Ю., Харченко В.В., Черноротов П.О., Репрынцев Е.С., Щербатов Д.С.

УДК 681.3.06

СОРЕВНОВАНИЯ ПЕРВОКУРСНИКОВ ВОРОНЕЖСКИХ ВУЗОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ПРОГРАММИРОВАНИЮ В ГОД НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

Ускова О.Ф., Абрамов Г.В., Федутинов К.А., Каплиева Н.А.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

Факультет прикладной математики, информатики и механики (ПММ ВГУ) организованный в нашей стране в 1969 году одним из первых факультетов подобного профиля, ежегодно проводит мероприятия, которые расширяют информационно-образовательную среду, способствуя подготовке востребованных специалистов в области математики и информационных технологий.

В течение нескольких лет (2001–2012) Воронежский университет выигрывал гранты Федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции науки и высшего образования» по направлению 2.7 «Проведение научных конкурсов школ и конференций для студентов, аспирантов, молодых преподавателей и сотрудников вузов и научных организаций».

Опыт, приобретенный в организации и проведении Открытых региональных студенческих школ-олимпиад по программированию и компьютерному моделированию, позволил нашему университету стать головным вузом при проведении третьего тура Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование.

Информационные технологии», которая проводилась в нашем университете в течение девяти лет, начиная с 2003 года в соответствии с приказом Министерства образования и науки РФ и Федерального агентства по образованию [1–6].

Ежегодно, начиная с 2012 года, наш факультет является организатором соревнований по информатике и программированию первокурсников вузов г. Воронежа, которые проводятся в рамках Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики».

В 2021 году, который являлся годом науки и технологий, соревнования первокурсников вузов г. Воронежа проводились в online режиме. Спонсорскую поддержку оказала корпорация Digital Soft, директором по развитию которой является Александр Александрович Азнаурьянц, выпускник математического факультета ВГУ. Его родители генеральный директор корпорации Парус Азнаурьянц Александр Владимирович и главный бухгалтер Ольга Михайловна Азнаурьянц являются выпускниками факультета ПММ ВГУ. На основании приказа министерства образования и науки № 404 от 03.05.2004 «Об организации Всероссийской студенческой олимпиады» соревнования студентов проводились факультетом ПММ ВГУ. Одним из спонсоров этой олимпиады было Центрально-Черноземное представительство корпорации Парус.

Задания соревнований первокурсников 2021 года были выставлены на сайте олимпиады 8 декабря 2021 года в 10 часов. Решения (заполненный бланк ответов) принимались до 11 часов 15 мин по указанному электронному адресу. Для проверки решений участников соревнований разработано соответствующее программное обеспечение.

В соревнованиях первокурсников участвовали 110 студентов. Наибольшее количество участников (96) было из ВГУ. Это студенты факультетов ПММ, компьютерных наук и математического. Студенты, участвующие в соревнованиях первокурсников, представляли вузы:

Воронежский государственный университет (96 первокурсников);

Воронежский государственный педагогический университет (3 первокурсника);

Воронежский государственный университет инженерных технологий (4 первокурсника);

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» (3 первокурсника);

Воронежский институт инженерных технологий (4 первокурсника).

Все участники соревнований получили сертификат участника олимпиады. Успешнее всех выступили студенты факультета ПММ ВГУ, занявшие призовые места олимпиады.

Первое место завоевал первокурсник Бубнов Кирилл Владимирович (34 балла). На второе место (с результатом 33 балла) вышли Волкова Елизавета Андреевна и Киселева Олеся Алексеевна. Третье место заняли три студента: Турбино Александр Владимирович (32 балла), Чурсин Виктор Юрьевич и Корчагина Анастасия Сергеевна, набравшие по 30 баллов. Все 6 человек, занявших первые три места, награждены денежными призами корпорацией Digital Soft.

Большую работу по организации и проведению соревнований Воронежских вузов провели сотрудники корпорации Digital Soft:

Азнаурьянц Александр Александрович – директор по развитию;

Никодимов Игорь Анатольевич – директор по технологиям.

Опыт организации и проведения соревнований первокурсников показывает, что они способствуют последующей учебе в области современных информационных технологий.

Литература

1. Ускова О. Ф., Горбенко О.Д. Всероссийская студенческая олимпиада «Информационное моделирование и современные компьютерные технологии» // Актуальные проблемы информатики и информационных технологий : материалы 2 Международ. (9 Тамбов. межвуз.) науч.-практ. конф., посвящ. 75-летию физ.-мат. фак., 8-9 сент. 2005 г. С. 156-157.

2. Ускова О. Ф., Горбенко О.Д. О некоторых аспектах технологии проведения всероссийских олимпиад по информатике // Проблемы организации и проведения предметных олимпиад в высших учебных заведениях : материалы Всерос. науч.-метод. семинара, 18-20 нояб. 2008 г., г. Рыбинск. С. 125-129.

3. Ускова О. Ф., Горбенко О.Д. Инновации в организации и проведении III тура всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. тр. междунар. конф., Воронеж, 22-24 июня 2009 г. С. 220-222.

4. Ускова О. Ф., Горбенко О.Д. Всероссийская студенческая олимпиада «Информационное моделирование и современные компьютерные технологии» 2003 года: особенности методики и технологии проведения третьего (основного) тура // Математика. Компьютер. Образование : сб. науч. тр. 2004. Вып. 11, ч. 1. С. 277-281.

5. Ускова О. Ф., Горбенко О.Д. Качество содержания заданий всероссийской студенческой олимпиады по информатике // Математика. Компьютер. Образование : тез. , Пушкино, 19-24 янв. 2009 г. М.-Ижевск, 2009. Вып. 16, ч. 2. С. 596.

6. Горбенко О.Д., Ускова О.Ф., Шашкин А.И. Воронежский государственный университет - базовый вуз Всероссийской студенческой олимпиады «Информатика. Программирование. Информационные технологии» // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Проблемы высшего образования. Воронеж, 2012. № 2. С. 51-56.

© Ускова О.Ф., Абрамов Г.В., Федутинов К.А., Каплиева Н.А.

УДК 517.954

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЗАДАЧИ РОБЕНА

Филиновский А.В.

*ФГБОУ ВО «МГТУ им. Н.Э. Баумана», ФГБОУ ВО «МГУ им. М.В. Ломоносова»,
г. Москва*

Нас будет интересовать поведение собственных значений задачи Робена

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u \right) \right|_{x \in \Gamma} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей $\Gamma \in C^2$, как функций параметра α . Обозначим через $\lambda_1^R(\alpha)$ первое собственное значение задачи (1) --- (2). В этой же области Ω рассмотрим спектральную задачу Дирихле

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{x \in \Gamma} = 0,$$

обозначая через λ_1^D её первое собственное значение, а через $u_1^D(x)$ --- соответствующую нормированную собственную функцию ($\|u_1^D\|_{L_2(\Omega)} = 1$).

Теорема 1. *Справедливо следующее асимптотическое разложение*

$$\lambda_1^R(\alpha) = \lambda_1^D - a_1 \alpha^{-1} - a_2 \alpha^{-2} + o(\alpha^{-2}), \quad \alpha \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

$$a_1 = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu} \right)^2 ds, \quad a_2 = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_1^D}{\partial \nu} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds,$$

где функция $v \in H^1(\Omega)$ - решение краевой задачи

$$\Delta v + \lambda_1^D v = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_1^D}{\partial \nu} \right)^2 ds u_1^D, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

$$v|_{x \in \Gamma} = - \frac{\partial u_1^D}{\partial \nu} \Big|_{x \in \Gamma}, \quad (5)$$

удовлетворяющее условию

$$\int_{\Omega} v u_1^D dx = 0. \quad (6)$$

Задача (4) --- (6) имеет единственное решение.

В ([1], [2]) получены следующие оценки.

Теорема 2. Если $\Omega \subset B_{R_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < R_0\}$ $ub(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \in C^1(\bar{\Omega})$ - вектор-функция, то справедливы следующие неравенства:

$$\frac{2\lambda_1^D}{R_0} \leq a_1 \leq 4n \inf_{\substack{b \in C^1(\bar{\Omega}) \\ b|_{\Gamma} = v}} \max_{i,j=1,\dots,n} \|(b_i)_{x_j}\|_{C(\bar{\Omega})} \lambda_1^D, \quad (7)$$

$$\|f(x)\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|.$$

Определение 1. Поверхность Γ называется строго звездной, если для всех $x \in \Gamma$ выполнено неравенство $(v, x) > 0$.

Теорема 3. Если Γ - строго звездная поверхность, то справедлива оценка:

$$a_1 \leq \frac{2\lambda_1^D}{\inf_{x \in \Gamma} (v, x)}. \quad (8)$$

Замечание 1. Для $\Omega = B_{R_0}(0)$ из оценок (7), (8) следует, что $a_1 = \frac{2\lambda_1^D}{R_0}$.

Замечание 2. В работе [3] получены асимптотические разложения собственных значений краевых задач для эллиптических уравнений с параметрическим возмущением при не зависящих от параметра граничных условиях.

Литература

1. Филиновский А.В. О коэффициентах асимптотического представления первого собственного значения задачи Робена // Дифф. уравнения. 2020. -Т. 56, № 11, - С. 1564-1565.
2. Filinovskiy A.V. On some bounds for coefficients of the asymptotics to Robin eigenvalue // International workshop on the qualitative theory of differential equations, QUALITDE-2020, December 19-21, - A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University Tbilisi, Georgia, - P. 75-77.
3. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // Успехи мат. наук. - 1960. - Т. 15, № 3. - С. 3--80.

© Филиновский А.В.

УДК 621.396.67

МОДЕЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ДВУХДИАПАЗОННОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

Харченко В.В., Рудый С.В., Ермухамбетов Т.М., Мозговой М.И., Урывская Т.Ю.

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

При организации радиосвязи часто возникает необходимость обеспечить возможность передачи информации в различных частотных диапазонах. Например, в спутниковой радиосвязи одной из актуальных задач является создание мобильных наземных и бортовых радиосистем, способных одновременно поддерживать связь через несколько спутников в

нескольких существенно разнесенных частотных диапазонах. Аналогичные задачи возникают и при разработке радиорелейных и других линий связи [1]. Известно [2], что при организации дуплексной радиосвязи передача в одном и другом направлениях ведется обычно на разных несущих частотах. Это делается, в том числе и для того, чтобы радиоприемник принимал сигналы только от радиопередатчика противоположного пункта и не принимал сигналы собственного радиопередатчика.

Перспективным для решения целого ряда практических задач радиолокации и радиосвязи в настоящее время является СВЧ диапазон. Наибольшее распространение получило использование систем двойного назначения, работающих с длинами волн от 0,5 до 75 см.

В настоящее время для решения таких задач используется совокупность антенно-фидерных устройств, каждое из которых обеспечивает передачу информации в определенном диапазоне частот. Однако перспективным видится использование антенных систем, которые позволят реализовать функции нескольких антенн в одной антенной конструкции, что, несомненно, приведет к улучшению показателей надежности и эффективности функционирования комплексов радиосвязи в целом, так как именно антенны являются одним из важнейших звеньев радиосистем, существенно определяющих их предельные характеристики.

В качестве многочастотной антенны комплекса радиосвязи может рассматриваться цилиндрическая антенная решетка (АР) щелевых излучателей, варианты построения которой представлены на рисунке 1.

Варианты построения двухчастотной цилиндрической АР, представленные на рисунках 1а и 1б, отличаются геометрическим расположением излучателей, формирующих кольцевые антенные решетки 1 и 2.

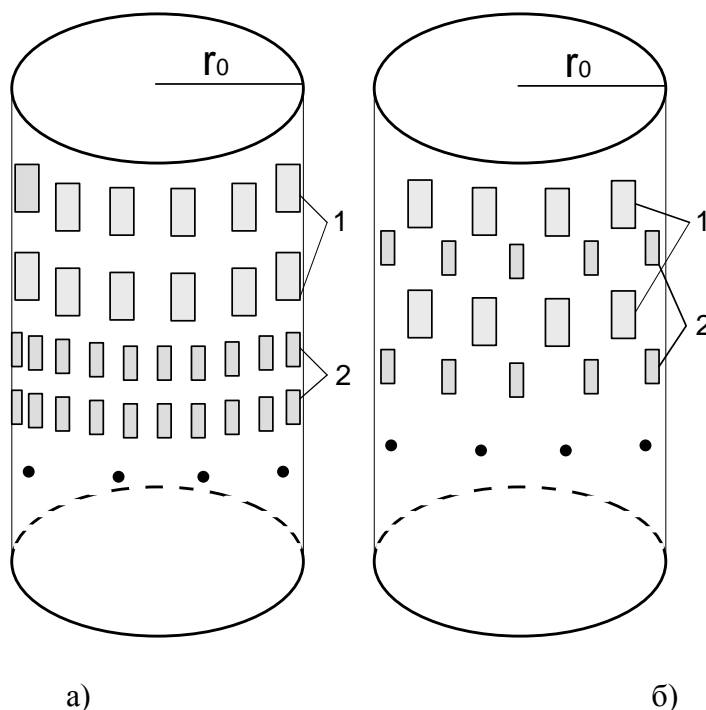


Рисунок 1 – Двухчастотная антенная решетка

Предполагается, что на одной несущей конструкции можно будет расположить 3-4 кольцевые антенные решетки, работающие в разных частотных диапазонах. При этом должны быть учтены все электродинамические особенности размещения излучателей в соседних решетках, и, в первую очередь, их взаимная связь в решетках.

Выбор цилиндрической формы несущей конструкции объясняется тем, что неплоские конструкции характеризуются следующими свойствами [4]:

- наиболее полно отвечают совокупности требований по обеспечению сектора сканирования;
- возможность быстрого углового перемещения главного максимума диаграммы направленности (ДН);
- независимость характеристик излучения от направления излучения.

Если необходимо иметь радиосвязь с большим числом пунктов управления, то организуется радиосеть, представляющая совокупность радиолиний, работающих на одной общей для всех абонентов, частоте или группе частот [2, 5]. Функционирование радиосети может организовываться по следующим алгоритмам. Одна радиостанция, называемая главной, может передавать сообщения как для одной, так и для нескольких подчиненных радиостанций. Оператор главной радиостанции следит за порядком в радиосети и устанавливает очередность работы на передачу подчиненным радиостанциям. Последние при соответствующем разрешении могут обмениваться сообщениями (информацией) не только с главной радиостанцией, но и между собой. Такая организация связи может быть реализована как на основе сложных дуплексного, так и симплексного каналов. В первом случае главная радиостанция ведет передачу на одной частоте, а принимает на нескольких (по числу подчиненных радиостанций). Во втором случае возможно использование совмещенных приемопередающих радиоустройств и общей рабочей частоты. При этом, может быть реализован и полудуплексный режим радиосвязи.

При построении радиорелейных линий в используемых ретрансляторах разница уровней принимаемых и излучаемых антеннами радиосигналов весьма велика (превышает 150 дБ). Поэтому для исключения возможности возникновения паразитных связей между радиопередающими и радиоприемными трактами ретранслятора необходимо использовать две несущие частоты для каждого направления передачи. При этом для передачи радиосигналов в противоположных направлениях может быть использована либо одна и та же пара частот ($f_1 - f_2$), либо две разные пары ($f_1 - f_2$ и $f_3 - f_4$) [2].

Приведенные примеры подчеркивают актуальность использования многочастотных антенных систем при организации радиолиний и построении комплексов радиосвязи. Применение многочастотных антенн в радиотехнических системах различного назначения позволит повысить эффективность функционирования последних как по показателям надежности, так и по энергетическим параметрам.

Литература

1. Пономарёв Л.И., Степаненко В.И. Сканирующие многочастотные совмещенные антенные решетки / Под ред. Л.И. Пономарёва. – М.: Радиотехника, 2009. – 358 с.
2. Сакалема Д.Ж. Подвижная радиосвязь / Под ред. профессора О.И. Шелухина. – М.: Горячая линия–Телеком, 2012. – 512 с.: ил.
3. ITUNewsMAGAZINE 02/2017. – 36 p.
4. Габриэльян Д.Д., Звезда М.Ю., Лабунько О.С., Харченко В.В. Метод расчета проводимости щелей на круговом цилиндре под слоем магнетодиэлектрика. // Электромагнитные волны и электронные системы, 2005, вып. 5. – С. 24-29.
5. Актуальные вопросы проектирования антенно-фидерных устройств радиосвязи / Под ред. Г.И. Трошина. Кн.1. – М.: Радиотехника, 2001. – 72 с.

© Харченко В.В., Рудый С.В., Ермухамбетов Т.М., Мозговой М.И., Урывская Т.Ю.

КИНЕМАТИКА ТЕЧЕНИЯ ВЫСОКОВЯЗКОЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ СРЕДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ С ВНЕЗАПНЫМ СУЖЕНИЕМ

Хвостов А.А.¹, Журавлев А.А.², Никитченко А.А.², Григорьев А.А.²

¹*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», г. Воронеж*

²*ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

Конструктивные элементы типа внезапного сужения являются широко распространенными составляющими трубопроводов, экструдеров, трубчатых реакторов и других машин и аппаратов для переработки высоковязких материалов. Изменения поперечного сечения рабочей зоны оказывают непосредственное влияние на характер потока и его кинематические и динамические параметры, что необходимо учитывать с целью обеспечения требуемого режима и условий течения.

Рассматривается ламинарное стационарное изотермическое течение несжимаемой неньютоновской среды в цилиндрическом канале с внезапным сужением. Источники тепла отсутствуют, гравитационные силы и диссипативные члены не учитываются. Гидромеханическая модель течения формализована в виде уравнений сохранения удельного импульса и массы [1, 2]:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla \cdot \left[-P\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \right]; \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ – плотность; $|\mathbf{v}|$ – скорость; P – давление; \mathbf{I} – единичный тензор; μ – вязкость.

На стенках канала заданы условия прилипания, на оси симметрии выполняется условие симметрии. В выходном сечении задается нулевое значение избыточного давления.

В качестве реологической модели принята модель Карро [3]:

$$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{m-1}{2}}, \quad (2)$$

где μ_0 , μ_∞ – соответственно, наибольшая и наименьшая вязкость; $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{S}:\mathbf{S}}$ – скорость сдвига; $\mathbf{S} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$ – тензор скорости деформации; m – показатель кривизны реологической кривой $\mu(\dot{\gamma})$; λ – величина, обратная скорости сдвига, при которой начинается «разжижение» структуры.

Для анализа введены безразмерные геометрические и кинематические параметры: координата поперечного сечения канала $\xi = z/R_2$, аксиальная $\mathcal{G}_z/\mathcal{G}_{cp2}$ и радиальная $\mathcal{G}_r/\mathcal{G}_{cp2}$ составляющие вектора скорости, максимальная скорость $\mathcal{G}_{max}/\mathcal{G}_{cp2}$, где \mathcal{G}_{cp2} – среднеобъемная скорость установившегося потока в выходном канале радиусом R_2 .

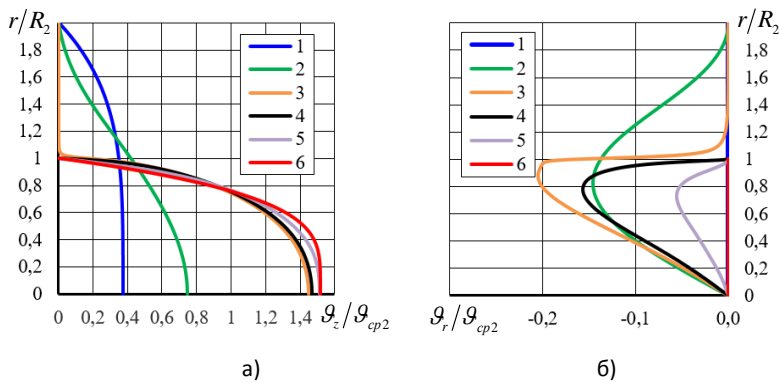


Рис. 1 Распределение аксиальной (а) и радиальной (б) составляющей вектора скорости в сечениях, расположенных от внезапного сужения

расстоянии от внезапного сужения, распределение аксиальной составляющей вектора скорости соответствует установившемуся движению жидкости в бесконечной круглой трубе, радиальная составляющая вектора скорости при этом отсутствует (кривые 1). По мере приближения к внезапному сужению вертикальная стенка начинает оказывать все большее влияние на периферийные слои жидкости, что приводит к переформированию потока. Профиль аксиальной составляющей вектора скорости при этом становится более наполненным вблизи оси симметрии и появляется радиальная составляющая вектора скорости (кривые 2, 3). В сечении, проходящем через внезапное сужение, наблюдаются аналогичные предыдущему сечению тенденции, при этом абсолютные значения аксиальной и радиальной составляющих скорости увеличиваются (кривые 4). После преодоления внезапного сужения поток постепенно трансформируется (кривые 5), и далее течение выходит на установившийся режим, при котором исчезает радиальная составляющая, а профиль аксиальной составляющей скорости перестает меняться (кривые 6).

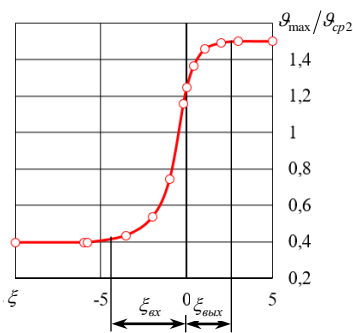


Рис. 2 Изменение максимальной

Анализ изменения максимальной скорости v_{max}/v_{cp2} по длине канала позволяет определить положение сечений $\xi_{вх}$ и $\xi_{вых}$, в которых, соответственно, начинается и завершается перестройка профиля скорости потока (рис. 2). Установлено, что при $Re_2 < 10$ протяженность зон дестабилизированного течения до и после внезапного сужения (соответственно, $l_{вх}$ и $l_{вых}$) не зависит от числа Рейнольдса, а определяются только радиусом канала:

$$l_{вх} = (1,5 \div 1,8) R_1; \quad l_{вых} = (1,0 \div 1,4) R_2, \quad (3)$$

что находится в тесном согласии с известными результатами [1, 2].

Гидравлической характеристикой внезапного сужения является коэффициент местного сопротивления, равный отношению потерь гидродинамического давления на преодоление сужения к динамическому давлению. Установлено, что при $Re_2 < 10$ значение коэффициента местного сопротивления уменьшается с увеличением числа Рейнольдса

$$C_{мс} = 6,65 Re_2^{-1,04}. \quad (4)$$

Установленные особенности течения указывают на необходимость их учета при расчете параметров переработки неньютоновских сред в рабочих зонах оборудования, содержащих конструктивные элементы в виде внезапного сужения.

Литература

1. Течение полимеров в отверстиях фильер: теория, расчет, практика / В.И. Янков, И.О. Глот, Н.М. Труфанова, Н.В. Шакиров. – Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 264 с.
2. Борзенко Е.И. Численное исследование характеристик течения неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением / Е.И. Борзенко, К.Е. Рыльцева, Г.Р. Шрагер // Вестник Томского гос. ун-та. Матем. и мех. 2019. № 58. С. 56 – 70.
3. Хвостов А.А. Параметрическая идентификация реологической модели Карро с использованием регуляризации А.Н. Тихонова на основе CFD-модели / А.А. Хвостов, Г.О. Магомедов, В.И. Ряжских, А.В. Ковалев, А.А. Журавлев, М.Г. Магомедов // Техника и технология пищевых производств. 2021. Т. 51. № 3. С. 615 – 627. DOI: 10.21603/2074-9414-2021-3-615-627.

© Хвостов А.А., Журавлев А.А., Никитченко А.А., Григорьев А.А.

УДК 532.529.5

МОДЕЛЬ СЕДИМЕНТАЦИИ НЕФТЯНЫХ СУСПЕНЗИЙ В УСЛОВИЯХ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ

Хвостов А.А.¹, Ряжских В.И.¹, Журавлев А.А.², Ряжских А.В.¹, Семенихин О.А.¹

¹*ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», г. Воронеж*

²*ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия имени Н.Е. Жуковского
и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж*

Одной из проблем, возникающих при хранении нефтяных суспензий, является процесс седиментации, вызванный наличием в жидком продукте дисперсной фазы [1]. В этих условиях актуальной задачей является разработка математической модели, позволяющей в динамике оценивать локальную концентрацию дисперсной фазы. Моделирование процесса осложняется интенсивной термоконвекцией в нефтепродуктах, которая обусловлена достаточно высокими значениями коэффициентов объемного расширения [2].

Подходы к моделированию течения многофазных систем можно условно разделить на два подхода: первый (метод решеточных уравнений Больцмана) рассматривает многофазную среду как объединение частиц,двигающихся в пространстве; второй (основанный на аппроксимации уравнениями Навье-Стокса) – как единую субстанцию с разными характеристиками различных фаз [3]. Первый метод позволяет учесть особенности микродинамики исследуемой среды, однако его использование требует больших вычислительных затрат и не всегда обосновано для случаев малых скоростей течения. Наибольшее распространение при моделировании течения нефтяных суспензий получили модели второго подхода. Среди них выделяются модели раздельного многофазного течения, которые описывают поведение границы раздела фазы континуальные дисперсные модели, которые позволяют рассчитать только объемную долю одной фазы, диспергированной в другой фазе [3].

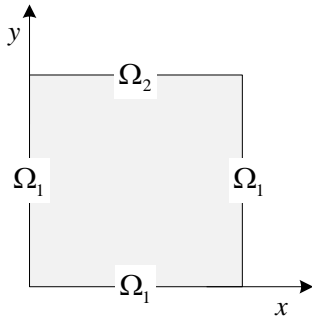


Рис. 1 Расчётная область

Рассмотрен процесс седиментации двухфазной нефтяной суспензии в условиях термоконвекции в рамках модели взаимопроникающих континуумов с учетом проскальзывания фаз в прямоугольной камере (рис. 1) без учёта взаимодействия частиц твёрдой фазы со стенками.

Закон сохранения массы для дисперсионной фазы

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_l s_l) + \nabla \cdot (\rho_l s_l \mathbf{u}_l) = 0, \quad (1)$$

где ρ_l – плотность дисперсионной фазы, кг/м³; s_l – объемная доля дисперсионной фазы, безразм.; \mathbf{u}_l – скорости движения дисперсионной фазы, м/с; t – время, с. При этом нет стока-притока фаз, то есть $s_l + s_s = 1$, s_s – объемная доля дисперсионной фазы.

Граничные условия на стенках Ω_1 и свободной поверхности Ω_2 : отсутствие массового потока $-\mathbf{n} \cdot \rho_l s_l \mathbf{u}_l = 0$, $-\mathbf{n} \cdot \rho_s s_s \mathbf{u}_s = 0$, где \mathbf{n} – вектор нормали к расчётной поверхности; начальное условие $s_s = s_{0,s}$, $s_l = 1 - s_{0,l}$, где $s_{0,s}$ – начальное содержание дисперсионной фазы в среде. Плотность смеси рассчитывается усреднением как $\rho = s_l \rho_l + s_s \rho_s$.

Предварительные расчёты показали, что число Грасгофа для гетерогенной системы «нефть-песок» не превышают значений 10^6 . Что говорит о ламинарном характере течения в пограничном слое. Так как в рассматриваемой области нагрева выполняется соотношение $\Delta\rho/\rho \ll 1$, примем действие массовых сил в приближении Буссинеска.

Тогда уравнения сохранения импульса и массы запишутся так

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \cdot \left\{ -p \mathbf{I} + \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \right\} + \rho |\mathbf{g}| \mathbf{e}, \quad (2)$$

Ошибка! Закладка не определена.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (3)$$

Ошибка! Закладка не определена.

где μ – динамическая вязкость, Па·с; \mathbf{u} – вектор скорости движения смеси, м/с; p – давление, Па; $|\mathbf{g}|$ – модуль ускорения свободного падения, м/с²; \mathbf{e} – орт направления силы тяжести.

Граничные условия на стенках Ω_1 задаются плотностью теплового потока q_0 : $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = q_0$; граничные условия на свободной поверхности Ω_2 – отсутствие теплового потока $-\mathbf{n} \cdot \mathbf{q} = 0$.

Вязкость суспензии рассчитывается в соответствии законом Кригера-Догерти [4]

$$\mu = \mu_c \left(1 - \frac{s_d}{\phi_{\max}} \right)^{-2.5 \phi_{\max}}, \quad (4)$$

Ошибка! Закладка не определена.

где μ_c – динамическая вязкость дисперсионной фазы, Па·с; ϕ_{\max} – максимальная степень упаковки, безразм.

Граничные условия на стенках Ω_1 задают условие прилипания к стенке: $\mathbf{u} = 0$; граничные условия на свободной поверхности Ω_2 задают проскальзывание среды $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$; начальное условие – смесь находится в покое $\mathbf{u}|_{t=0} = 0$, **Ошибка! Закладка не определена.**

$p|_{t=0} = p_0 + [\rho |\mathbf{g}| (h - y)]$, где p_0 – давление в верхней точке расчетной области, Па; h – высота камеры, м; y – координата по вертикальной оси, м.

Закон сохранения энергии для каждой фазы суспензии

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (5)$$

где T – температура смеси, К; c_p – удельная теплоёмкость смеси, Дж/(кг·К); λ – коэффициент теплопроводности смеси, Вт/(м·К).

Граничные условия на стенках Ω_1 задают плотность теплового потока $\mathbf{q} = q_h$; граничные условия на свободной поверхности Ω_2 задают отсутствие теплового потока $\mathbf{q} = 0$; начальное условие – заданная начальная температура $T|_{t=0} = T_0$. **Ошибка! Закладка не определена.**

Теплоёмкость и коэффициент теплопроводности смеси рассчитываются как

$$c_p = \frac{1}{\rho} (s_l \rho_l c_{p,l} + s_s \rho_s c_{p,s}), \quad \lambda = s_l \lambda_l + s_s \lambda_s. \quad (6)$$

Для корректного описания явления термоконвекции введена линейная зависимость плотности жидкой фазы от температуры

$$\rho_l(T) = \rho_0 - a(T - T_0), \quad (7)$$

где ρ_0 – плотность жидкости при температуре T_0 ; a – температурная поправка [5].

Учет проскальзывания твердой фазы осуществлялся с помощью модели Шиллера-Науманна [6].

Динамическая вязкость дисперсионной фазы нефтяной суспензии задана моделью Карро [7]

$$\mu_c = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{m-1}{2}}, \quad (8)$$

где μ_0 , μ_∞ – соответственно, наибольшая и наименьшая вязкость; $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{S}:\mathbf{S}}$ – скорость сдвига; $\mathbf{S} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$ – тензор скорости деформации; m – показатель кривизны реологической кривой $\mu(\dot{\gamma})$; λ – величина, обратная скорости сдвига, при которой начинается «разжижение» структуры, с.

Вычислительный эксперимент проводился на модельной смеси «нефть-песок». Использовались теплофизические характеристики нефтяной суспензии, представленные в [5]. Решение системы (1 – 7) осуществлялось методом конечных элементов в среде ComsolMultiphysicsTM. Реологические параметры уравнения Карро (8) $\mu_0 = 17,228$ Па·с, $\mu_\infty = 3,309$ Па·с, $\lambda = 0,01$ с, $m = 0,405$ по данным [8].

Результаты математического моделирования представлены на рис. 2, на котором показаны поля модуля вектора скорости (рис. 2а), температуры (рис. 2б) и объемной доли твердой фазы (рис. 2в). На рис. 2г показана динамика изменения среднеинтегральной концентрации твердой фазы на дне резервуара при значениях плотности теплового потока на границе Ω_1 0, 1000, 3000 и 5000 Вт/м². На рис. 2д показано распределение концентрации твердой фазы по длине нижней границы резервуара в моменты времени 108, 120, 135 мин.

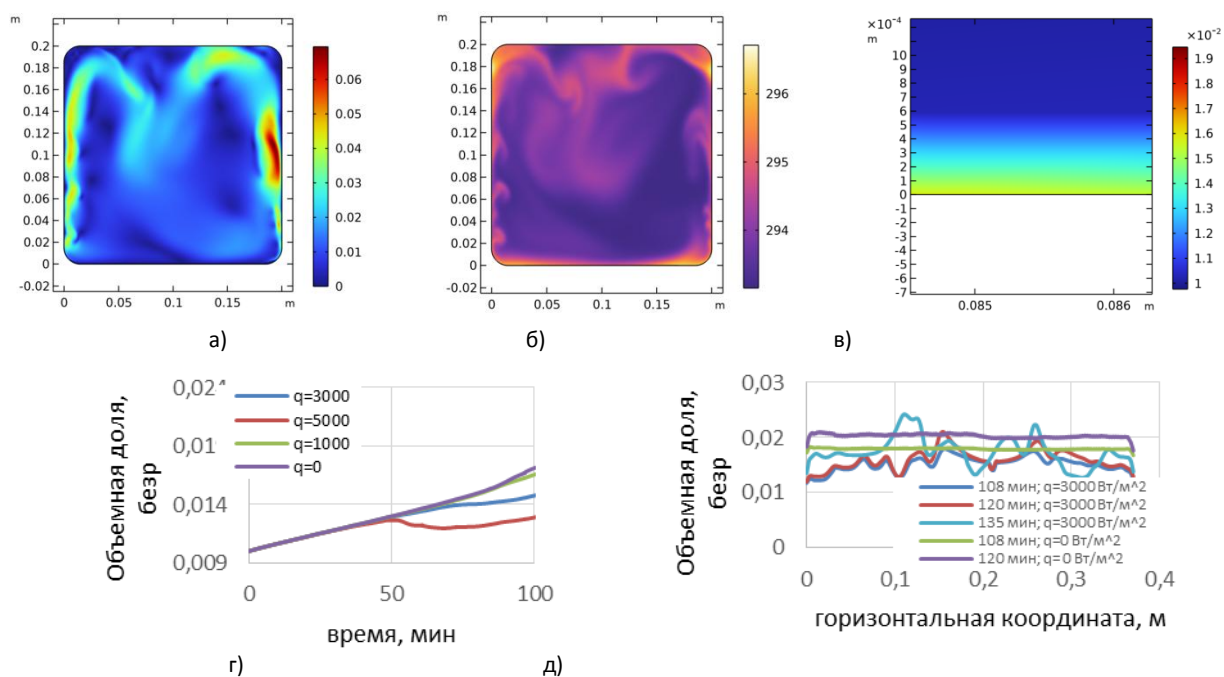


Рис. 2 Результаты моделирования

Поле модуля вектора скорости отражает циркуляционные потоки внутри резервуара (рис. 2а). Температурное поле обусловлено суперпозицией движения двух фаз, имеющих разные теплофизические характеристики и скоростные поля (рис. 2б). С течением времени в нижней части резервуара повышается концентрация твердой фазы (рис. 2в). Интенсивность роста концентрации твердой фазы зависит от теплопритоков со стороны боковых и нижней границ (рис. 2г). Наличие теплопритоков изменяет равномерность образования осадка. Вызванные термоконвекцией скоростные поля приводят к неоднородности концентрации твердой фазы на дне резервуара (рис. 2д). Несимметричность полей объясняется погрешностью геометрической дискретизации области при решении задачи методом конечных элементов.

Таким образом, при организации хранения нефтепродуктов при прогнозировании седиментационных процессов следует учитывать теплообмен резервуара с окружающей средой и тепловую обстановку внутри резервуара, что позволит повысить точность прогнозирования как динамики процессов седиментации нефтепродуктов, так и параметров образующегося осадка.

Литература

1. Лукошкин Г.С. Сбор и подготовка нефти, газа и воды, М.: Недра, 1983.
2. Математические модели и численные методы тепло- и массопереноса при естественной конвекции горячих жидких нефтепродуктов в котле вагона-цистерны / Моисеев В.И., Ксенофонтова В.А., Комарова Т.А. // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2022. № 1, с. 5-15.
3. CFD Module User's Guide. Comsolofficialsite. [электронный ресурс] URL: <https://doc.comsol.com/5.4/doc/com.comsol.help.cfd/CFDModuleUsersGuide.pdf> (16.11.2020).
4. Krieger, I.M.; Dougherty, T.J. A Mechanism for Non-Newtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres. Trans. Soc. Rheol. 1959, 3, 137–152.
5. Рудин М.Г., Сомов В.Е., Фомин А.С. Карманный справочник нефтепереработчика/ Под ред. М.Г. Рудина. – М.: ЦНИИТ Энефтехим, 2004. – 336 С.
6. Schiller L. and Naumann Z., Ver Z. Deutsch. Ing. 77. 318. 1935.

7. Закиров А.И. Исследование реологических моделей смеси битуминозной и маловязкой нефтей Ашальтинского месторождений / А.И. Закиров, А.К. Николаев, В.В. Пшенин // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2015. – № 11. – С. 353–359.

8. Хвостов А.А. Параметрическая идентификация реологической модели Карро с использованием регуляризации А.Н. Тихонова на основе CFD-модели / А.А. Хвостов, Г.О. Магомедов, В.И. Рязских, А.В. Ковалев, А.А. Журавлев, М.Г. Магомедов // Техника и технология пищевых производств. 2021. Т. 51. № 3. С. 615 – 627.

© Хвостов А.А., Рязских В.И., Журавлев А.А., Рязских А.В., Семенихин О.А.

УДК 517.929.2

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ПО СТАРТОВЫМ УСЛОВИЯМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ГРАФЕ

Хоанг В.Н.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», г. Воронеж

Используются обозначения и определения, принятые в работе [1]. Ребра γ графа Γ имеют одинаковую длину и параметризованы отрезком $[0, 1]$; $\partial\Gamma$ – множества граничных узлов графа; Γ_0 – объединение всех ребер, не содержащих конечных точек; $L_2(\Gamma)$ – банахово пространство измеримых на Γ_0 функций, суммируемых с квадратом; $W_2^1(\Gamma)$ – пространство функций из $L_2(\Gamma)$, имеющих обобщенную производную первого порядка также из $L_2(\Gamma)$. Обозначим через $\Omega_a(\Gamma)$ множество непрерывных во всех внутренних узлах функций $u(x)$ из класса $W_2^1(\Gamma)$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\sum_{\gamma \in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{du(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma \in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{du(0)_\gamma}{dx},$$

здесь $R(\xi)$ и $r(\xi)$ – множества ребер γ , соответственно ориентированных к узлу ξ и от узла ξ , пояснения для функции $a(x)$ приведены ниже. Замыкание в норме $W_2^1(\Gamma)$ множества $\Omega_a(\Gamma)$ обозначим через $W^1(a, \Gamma)$. При этом, если допустить, что функции $u(x)$ из $\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют еще и краевому условию $u(x)|_{\partial\Gamma} = 0$, то получим пространство $W_0^1(a, \Gamma)$.

Рассмотрим дифференциально-разностную систему

$$\frac{1}{\tau}(y(k) - y(k-1)) - \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy(k)}{dx} \right) + b(x)y(k) = f(k), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (1)$$

$$y(0) = v(x), \quad y(k)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \quad k = 1, \dots, M, \quad (2)$$

где $\tau > 0$ – действительное число, $y(k) := y(x; k)$, $f(k) := f(x; k) \in L_2(\Gamma)$, $y(0) := y(x; 0) = v(x) \in L_2(\Gamma)$ (разрешимость системы (1), (2) и устойчивость ее решения подробно изучалось в работе [2]). Коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ – фиксированные, измеримые и ограниченные на Γ_0 функции, суммируемые с квадратом: $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$, $|b(x)| \leq \beta$, $x \in \Gamma_0$.

Определение. Слабым решением дифференциально-разностного уравнения (1) с условиями (2) называются функции $y(k) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $k=1, \dots, M$, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} [y(k) - y(k-1)] \eta(x) dx + \ell(y(k), \eta) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx, \quad y(0) = \varphi(x),$$

для любой функции $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$, где $\ell(y(k), \eta) = \int_{\Gamma} \left(a(x) \frac{dy(k)(x)}{dx} \frac{d\eta(x)}{dx} + by(k)(x) \eta(x) \right) dx$.

Состояние $y(k) \in W_0^1(a, \Gamma)$ системы (1), (2), определяемое как слабое решение задачи (1), (2) с начальным условием $v(x)$, очевидно, зависит от функции $v(x) \in U$, являющейся стартовым состоянием системы (1), (2), при этом U – пространство стартовых состояний $v(x)$ системы (1), (2). Поэтому всюду ниже обозначение $y(k)$ будет заменено на $y(k; v(x))$.

Введем минимизирующий функционал: $J(v) = \|y(k; v(x)) - z_0(x)\|_{L_2(\Gamma)}^2 + (Nv, v)_U$, с заданными функциями $z_0(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$, при этом для положительно определенного линейного оператора $N: U \rightarrow U$ выполнены условия $(Nv, v)_U \geq \zeta \|v\|_U^2$, $\zeta > 0$, для произвольного $v(x) \in U$, символами (\cdot, \cdot) и $(\cdot, \cdot)_U$ обозначены скалярные произведения в $L_2(\Gamma)$ и U , соответственно. Пусть далее область U_δ – выпуклое замкнутое подмножество множества U .

Оптимизационная задача по стартовым условиям для дифференциально-разностной системы (1), (2) определяется нахождением: $\min_{v \in U_\delta} J(v)$.

Теорема 1. Оптимизационная задача по стартовым условиям для дифференциально-разностной системы (1), (2) имеет единственный оптимум $v^* \in U_\delta$, т.е.: $J(v^*) = \min_{v \in U_\delta} J(v)$.

Теорема 2. Пусть множество U_δ ограничено. Для того чтобы элемент $u(x) \in U_\delta$ был оптимальным управлением, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись следующие соотношения ($k=1, \dots, M$)

$$\frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} (y(k; u(x)) - y(k-1; u(x))) \eta(x) dx + \ell(y(k; u(x)), \eta(x)) = \int_{\Gamma} f(k) \eta(x) dx,$$

для любой $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$,

$$\frac{1}{\tau} \int_{\Gamma} (p(k; u(x)) - p(k-1; u(x))) \eta(x) dx + \ell(p(k; u(x)), \eta(x)) = \int_{\Gamma} (y(k; v(x)) - z_0(x)) \eta(x) dx,$$

для любой $\eta(x) \in W_0^1(a, \Gamma)$,

$$p(k; u(x))(v(x) - u(x)) + Nu(x), v(x) - u(x)_{L_2(\Gamma)} \geq 0,$$

для любых $v(x) \in U_\delta$. Здесь через $p(k; u(x))$ обозначено сопряженное состояние для системы (1), (2), $y(k; u(x)) \in W_0^1(a, \Gamma)$, $p(k; u(x)) \in W_0^1(a, \Gamma)$ и $p(M; v(x)) = 0$.

Доказательство утверждений теорем 1 и 2 аналогично приведенным в работе [3].

Литература

1. Хоанг В. Н. Приближенное решение дифференциально-разностной параболической системы с распределенными параметрами на графе // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. XI междунар. конф. ПМТУКТ-2021. Воронеж: Изд-во Научная книга. 2021. С. 179–182.

2. A. P. Zhabko, V. V. Provotorov, A. I. Shindyapin. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2021. Vol. 17. iss. 4. P. 433–448.

3. V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, V. N. Hoang, Point control of differential-difference system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2021. Vol. 17. No 3. P. 277–286.

© Хоанг В.Н.

УДК 004.67

АНАЛИЗ ДАННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМУЛ И ФИЛЬТРОВ В СТАТИСТИЧЕСКОМ ПАКЕТЕ JAMOVI

Хоменко И.Е.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Для оценивания уровня здоровья населения, прогнозирования заболеваемости и повышения качества обслуживания пациентов используется анализ медицинских данных [1]. В статистике развивается специальное направление, занимающееся анализом медицинских данных – медицинская статистика. В 2017 году появилась программа JAMOVI с открытым кодом для анализа данных и выполнения статистических тестов [2]. В частности, идеей австралийских разработчиков, было создать статистическую программу в образовательных целях. JAMOVI проста в использовании и имеет специальные пакеты для обработки медицинских данных, вместе с тем она бесплатная, что делает ее альтернативой дорогостоящим статистическим продуктам SPSS и SAS.

JAMOVI – многофункциональная программа, в которой за короткий срок можно провести описательную статистику и t-тесты, однофакторный и многофакторный анализ, построить систему поддержки и принятия диагностических решений.

После импорта таблицы в одном из наиболее часто встречающихся форматах загрузки из медицинских информационных систем и оборудования – .csv, .xsl, .xlsx и др. в JAMOVI, необходимо проделать несколько простых шагов, которые существенно упростят дальнейшую работу. В JAMOVI наиболее часто используются три типа данных –


в одном из четырех типов измерений и .






Типы мер обозначаются символом в заголовке столбца переменной. Некоторые комбинации типа данных и типа меры не имеют смысла, и JAMOVI выдаст ошибку при их выборе.

тип данных используется для описания как дихотомических данных (сопоставляются ответам «да», «нет»), так и номинальных (нумерация, не подлежащая упорядочиванию); – схож с номинальным, используется, как численное описание шкал, не имеющих фактической математической величины (например, как чувствует себя пациент от 0 до 10);

– тип данных, описывающий результаты анализов, возраст пациентов, и все величины, которые в дальнейшем будет необходимость упорядочивать или численно сравнивать; – это тип для распознавания объекта, это могут быть номера полисов, имена. Благодаря наличию комбинации типа данных и измерения в JAMOVI поддерживаются уровни вложенности, что удобно для анализа больших объемов данных. При исследовании выделяется столбец исхода, который необходимо прогнозировать по набору ковариат [3].

После первичной подготовки таблицы можно приступить к анализу данных посредством формул и фильтров. Для того чтобы задать столбец-функцию необходимо добавить столбец «Вычисляемая переменная», внутри которой вычисляется новая логическая или числовая переменная. Для обзора встроенных функций Jamovi и выбора

используемых в таблице переменных, необходимо нажать на . Программа использует различные типы функций: математические, статистические, логические, текстовые, ссылка, разное и симуляция. Все функции снабжены кратким описанием (Рис. 1).

Фильтр задается идентичным способом – для создания первого фильтра необходимо перейти в поле , создание последующих фильтров возможно уже внутри появившегося окна, нажатием на . Отличительным фактором фильтра от функции является наглядность, если результатом работы фильтра являются значения «0», «1», то при нажатии на символ , в таблице будут отображены исключительно истинные строки. Пример работы фильтра 'Возраст'>65 (рис.2). Фильтр можно отключить, переведя из **активно**  в **неактивно**  режим. При использовании двух фильтров, выводится результат их пересечения. В Jamovi функции и фильтры можно использовать совместно, делая переменными фильтра результаты функций, так, при их параллельном использовании, достигается эффективный и наглядный анализ.

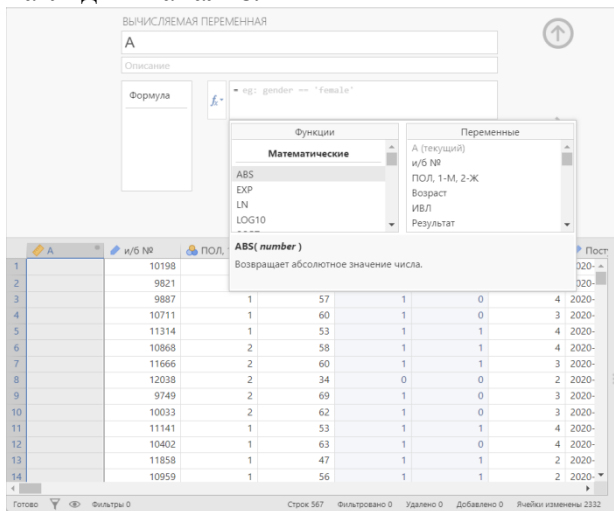


Рис. 1. Функции в Jamovi

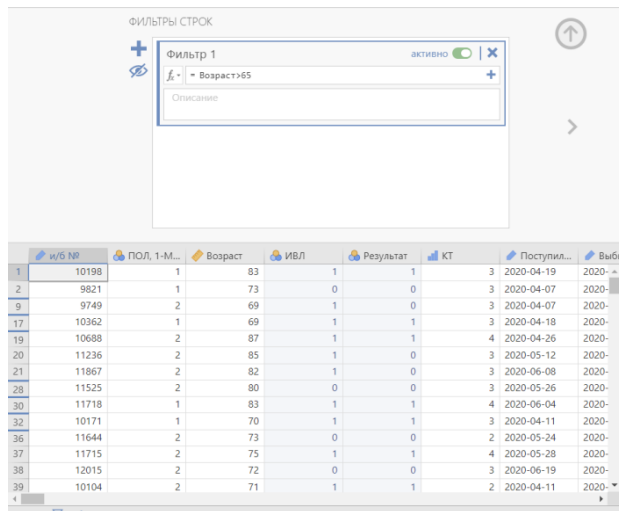


Рис. 2 Фильтры в Jamovi

Таким образом, удобство работы, свободный доступ и наличие облачной версии привлекают все новых и новых пользователей Jamovi.

Литература

1. Гончарова А.Б., Бусько Е.А. Программная реализация системы принятия диагностических решений на основе мультипараметрических ультразвуковых показателей образований молочной железы. //Сибирский журнал клинической и экспериментальной медицины. 2020. Т. 35. № 4. с. 137-142. DOI: 10.29001/2073-8552-2020-35-4-137-142.
2. Jamovi- open statistical software for the desktop and cloud [Электронный ресурс]. URL: <https://www.jamovi.org/> (Дата обращения: 02.10.2022)
3. Красько О. Статистический анализ данных в медицинских исследованиях: учеб. метод. пособие. Минск. 2014. 127 с.

© Хоменко И.Е.

МАЛОМЕРНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ МАЯТНИКИ В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ: АНАЛИЗ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Шамолин М.В.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва

Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики многомерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Работа представляет собой развитие результатов по интегрированию уравнений движения маломерного твердого тела, находящегося в некотором поле сил, построенном при условии квазистационарного взаимодействия твердого тела со средой (например, [1, 2]).

Построение неконсервативного силового поля, действующего на закрепленное многомерное твердое тело, опирается на результаты из динамики реальных закрепленных твердых тел, находящихся, в поле силы воздействия среды. Становится возможным изучение уравнений движения для многомерного тела в аналогично построенном поле сил и получение полного набора, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил, поскольку ранее другими авторами использовалось поле сил лишь потенциальное [3, 4].

Ранее автором была показана интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения закрепленного маятника в потоке набегающей среды при учете зависимости момента сил от угловой скорости тела, когда у системы динамических уравнений был найден в явном виде первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле комплексного анализа) функцией квазискоростей. При этом все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности, которая имеет форму (одномерной) пластины. Позднее задача была обобщена на пространственный случай (сферический маятник), при этом был найден в явном виде полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже все взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части его поверхности, которая имеет форму плоского (двумерного) диска. Также в дальнейшем исследовались уравнения движения закрепленных четырехмерных твердых тел различных типов динамической симметрии, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трехмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску. В работе показана интегрируемость в элементарных функциях совместных уравнений движения динамически симметричного закрепленного многомерного твердого тела под действием неконсервативной пары сил при наличии линейного демпфирующего момента (дополнительной зависимости силового поля от тензора угловой скорости тела).

Получены новые случаи интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обуславливается наличием в системе

притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов или узлов, предельных циклов).

В начале систематизируются результаты по исследованию уравнений плоскопараллельного движения симметричного закрепленного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о плоскопараллельном движении свободного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил).

Результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму одномерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

Далее систематизируются результаты по исследованию уравнений пространственного движения динамически симметричного закрепленного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид также заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о пространственном движении свободного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, либо заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил).

Результаты относятся к случаю, когда все взаимодействие однородного потока среды с закрепленным телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, которое перпендикулярно данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде.

Далее моделируются многомерные аналоги [4, 5].

Литература

1. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. – М.: Экзамен, 2007. 352 с.
2. Чаплыгин С.А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. – С. 133–135.
3. Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. и прикл. матем. – 2008. – Т. 14. – Вып. 3. – С. 3–237.
4. Шамолин М.В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ. – 1996. – № 4. – С. 57–69.
5. Шамолин М.В. Автоколебания при моделировании воздействия среды на твердое тело // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий. Сб. тр. IX междунар. конф. “ПМТУКТ-2016” (Воронеж, 20–26 сентября 2016 г.), ред. И. Л. Батаронов, А. П. Жабко, В. В. Провоторов. – Воронеж: «Научная книга», 2016. – С. 398–401.

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА
ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Шелковой А.Н.

ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», г. Воронеж

Пусть $L_2[0, 1]$ – гильбертово пространство комплексных измеримых (классов) функций, суммируемых с квадратом модуля со скалярным произведением вида $(x, y) = \int_0^1 x(\tau) \overline{y(\tau)} d\tau$.

Через $W_2^2[0, 1]$ обозначим пространство Соболева $\{x \in L_2[0, 1] : x' \text{ абсолютно непрерывна, } x'' \in L_2[0, 1]\}$. Рассматривается дифференциальный оператор

$$L: D(L) \subset L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1],$$

задаваемый выражением вида

$$(Ly)(t) = -\ddot{y}(t)$$

и нелокальными краевыми условиями

$$y(0) = \int_0^1 a_0(t) y(t) dt, \quad y(1) = \int_0^1 a_1(t) y(t) dt,$$

где a_0 и a_1 – функции из $L_2[0, 1]$.

Так как собственные значения оператора L и ему сопряжённого оператора L^* связаны соотношением $\lambda = \bar{\lambda}$, то для исследования спектра оператора L рассматривается сопряжённый ему оператор

$$(L^*x)(t) = -\ddot{x}(t) + \left[\dot{x}(1)a_1(t) - \dot{x}(0)a_0(t) \right] \quad (1)$$

с краевыми условиями $x(0) = x(1) = 0$.

Методом изучения спектральных свойств данного класса является метод подобных операторов, рассматриваемый в работах [1-5].

Для исследования спектральных свойств сопряжённого оператора (1) представим его в виде $L^*x = Ax - B_1x - B_2x$. Оператор A порождается дифференциальным выражением вида $Ax = -\ddot{x}$, $x \in D(A)$, $D(A) = \{x \in W_2^2[0, 1], x(0) = x(1) = 0\}$. Оператор A является самосопряжённым оператором с дискретным спектром, собственные значения которого $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in N$, являются простыми, а соответствующие собственные функции $e_n(t) = \sqrt{2}\pi \sin \pi nt$, $n \in N$, образуют ортонормированный базис в $L_2[0, 1]$.

Будем считать оператор A невозмущённым оператором, а оператор $B = B_1 + B_2$ – возмущением. Операторы B_1 и B_2 на области определения $D(A)$ задаются соотношениями $(B_1x)(t) = -\dot{x}(1)a_1(t)$; $(B_2x)(t) = \dot{x}(0)a_0(t)$, $x \in D(A)$, $t \in [0, 1]$, $a_0, a_1 \in L_2[0, 1]$.

Методом подобных операторов получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций исходного оператора.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-01-00197.

Литература

1. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов. – Воронеж, Изд-во ВГУ. 1987. 165 с.
2. Шелковой А.Н. Спектральный анализ дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Воронеж. 2004. 144 с.
3. Шелковой А.Н. Оценки собственных значений и собственных функций одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями // Вестник факультета прикладной математики и механики. 2016. № 2. С. 226-235.
4. Шелковой А.Н. Спектральные свойства дифференциального оператора, определяемого нелокальными краевыми условиями // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2018. Т. 21, № 4. С. 18-33.
5. Шелковой А.Н. Спектральный анализ интегро-дифференциального оператора с вырожденным ядром // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2020. Т. 23, № 3. С. 76-89.

© Шелковой А.Н.

УДК 51-76(075.8)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИММУНОТЕРАПИИ

Шмелева А.А., Колпак Е.П., Виль М.Ю.

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Онкологические заболевания характеризуются появлением в организме бесконтрольно делящихся, в следствие генетических нарушений, клеток, способных к инвазии в прилежащие ткани и метастазированию в отдаленные органы. За последние несколько десятилетий, произошли значительные изменения в теоретическом, экспериментальном и клиническом подходах к пониманию динамики развития раковых клеток и их взаимодействия с иммунной системой [1]. Это привело к развитию различных методов лечения онкологических заболеваний, таких как, виротерапия, иммунотерапия, химиотерапия, молекулярно-таргетная терапия, и других различных методик. В то же время, появились новые разработки аналитических и вычислительных моделей, помогающих получить представление о клинических наблюдениях [2].

Один из наиболее современных методов лечения рака, иммунотерапия – это искусственная модуляция иммунной системы, помогающая организму больного естественным путем бороться с болезнью, поскольку она позволяет использовать собственный иммунитет организма для уничтожения опухолевых клеток. Математическая модель роста опухоли представлена задачей Коши для системы дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \mu T \left(1 - \frac{T}{K_T}\right) - \frac{\alpha ET}{g_1 + T}, \\ \frac{dE}{dt} &= (1 + Drug(1 + e^{-\alpha_i(t-t_0)}))\beta T - \lambda_E E + \frac{\alpha_1 EI}{g_2 + I}, \\ \frac{dI}{dt} &= -\lambda_I I + \frac{\alpha_2 ET}{g_3 + T}, \end{aligned}$$

где $(1 + Drug(1 + e^{-\alpha_i(t-t_0)}))$ – скорость реакции усиления эффекторных клеток, μ – удельная скорость роста популяции делящихся клеток; K_T – объем функционального пространства делящихся клеток; $\beta, \lambda_1, \lambda_E, g_1, g_2, g_3$ – параметры, характеризующие скорости изменения $T(t)$ (делящиеся клетки), $E(t)$ (эффекторные клетки) и $I(t)$ (клетки иммунной системы).

Этот вариант стабилизации числа делящихся клеток позволяет за счет введения химиопрепаратов $Drug$ увеличить скорость реакции усиления эффекторных клеток. Параметр α_i характеризует скорость внедрения препаратов $Drug$ в биохимические реакции. Анализ возможных стационарных состояний позволяет определить диапазон изменения параметров, в границах которого возможно уничтожение раковых клеток.

Математическое моделирование осуществлялось в математическом пакете Matlab [4]. На рисунке представлена динамика делящихся клеток в зависимости от времени при добавлении препаратов одинаковой дозировки и иммунотерапии для трех пациентов. Из полученных результатов можно заключить, что заболевание переходит в хроническую форму вне зависимости от параметров, соответствующих пациенту.

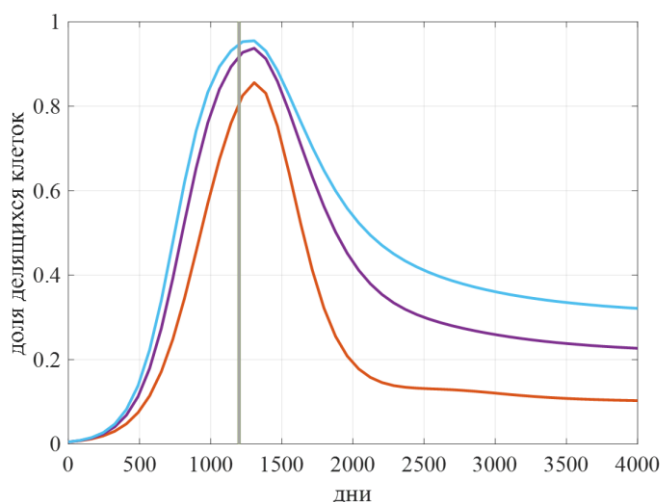


Рис.1 Рост делящихся клеток в зависимости от времени при добавлении лекарств

Полученные результаты могут быть полезными при принятии конкретных решений по выбору программы лечения заболевания [5].

Литература

1. Моисеенко В.М. «Естественная история» роста рака молочной железы / В.М. Моисеенко // Лекции по фундаментальной и клинической онкологии. СПб.: ООО «Издательство Н-Л», 2004. С. 198–212.
2. Гончарова А.Б., Колпак Е.П. Математическое моделирование лечения новообразования методом иммунотерапии // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия «Естественные и технические науки». – 2021. - № 1. – С. 74 – 78.
3. Гончарова А.Б., Колпак Е.П., Расулова М.М., Шмелева А.А. Математическое моделирование онкологического заболевания // Перспективы науки. – 2020. - № 12(135). – Р. 20 – 24.
4. Гончарова А.Б., Виль М.Ю. Имитационное моделирование лечения онкологического заболевания с использованием приложения MatlabSimbiology // Моделирование систем и процессов. - 2021. - Т. 14. - № 3. - С. 90-96.
5. Лифантова Е.Е., Машинский Н.С., Гончарова А.Б. Создание системы поддержки принятия решения в медицине для диагностики заболеваний желудочно-кишечного тракта // Процессы управления и устойчивость. - 2016. - Т. 3. - № 1. - С. 312-316.

© Шмелева А.А., Колпак Е.П., Виль М.Ю.

СОЦИАЛЬНО-ЛИЧНОСТНЫЕ АСПЕКТЫ И СОЦИАЛИЗАЦИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

Юрьева А.А.

*Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I,
г. Воронеж*

Становление, развитие и функционирование гражданского общества не возможны без социализации образования, то есть без решения наиболее важных задач в социокультурной сфере общества. Социализация образования позволяет преодолевать разобщенность, поляризацию взаимосвязанных компонентов культуры: естественнонаучного, технико-технологического и социально-гуманистического. Одной из главных характеристик социализации образования можно считать оптимальное сочетание уровня потенциальных способностей в реализации социально признанных ценностей и собственных творческих сил при решении конкретной учебно-воспитательной, производственной или управленческой задачи. Очевидно и то, что при формировании специалиста любого профиля приоритетным является не столько набор специальных знаний (хотя они крайне важны), сколько глубокая фундаментальная подготовка как "стартовая площадка" и необходимое условие саморазвития личности и профессионала, его творческой самореализации. Образование невозможно без обращения к личности. Дело лишь в том, какую роль играет личность в этом процессе - роль цели или средства. Традиционное образование, преследующее цели функциональной, предметно-вещной образованности человека, использует личность как раз в функции средства, опирается на механизмы мотивации, ценностной ориентировки, смыслопоиска как на своего рода движущие силы достижения заданных извне целей. Развитие же самих этих личностных "механизмов", "функций" совершается в данном случае попутно, в той мере и в тех аспектах, в каких они оказываются необходимыми, востребованными для социальной ориентации индивида. От состояния образовательной системы, ее способности удовлетворять потребности личности и общества в высококачественных образовательных услугах принципиально зависят перспективы общественного развития в мире. С самой общей точки зрения, образование – это естественное и наиболее оптимальное место встречи личности и общества, место продуктивного и взаиморазвивающего разрешения бытийных противоречий между ними. Образование все более предстает как своего рода "производство образованности", в котором как и в других производствах, используются современные наукоемкие технологии, информационные продукты, квалифицированные специалисты. Становясь центральным феноменом культуры, образование все более ориентируется на утверждение сущностного личностного начала в человеке.

© Юрьева А.А.

Аннотации и сведения об авторах

Моделирование конфликта на примере «работник-работодатель», Антипова Екатерина Сергеевна

Ключевые слова: конфликты, теория управления, моделирование конфликтов, математическое моделирование.

В работе продемонстрирована модель конфликта на примере «работник-работодатель». Проведен анализ параметров модели и определен их смысл. Получены условия существования устойчивого бесконфликтного состояния системы. Показано, что для рассмотренной модели существует 3 вида завершения конфликта: компромисс, победное завершение одним из участников конфликта и проигрышное завершение, когда ни один из участников не получил того, что хотел.

Антипова Екатерина Сергеевна, Государственный университет управления, г.Москва, Российская Федерация, старший преподаватель кафедры математических методов в экономике и управлении, e-mail: antipovaes@live.ru

Об асимптотической близости решений дифференциальных уравнений высокого порядка, Асташова Ирина Викторовна

Ключевые слова: уравнения типа Эмдена-Фаулера, асимптотика решений

Для уравнения типа Эмдена-Фаулера высокого порядка с младшими производными получены достаточные условия асимптотической близости решений и их производных решениям и их производным соответствующих линейных уравнений.

Асташова Ирина Викторовна, профессор, МГУ им. М. В. Ломоносова, РЭУ им. Г. В. Плеханова, доктор физико-математических наук, e-mail: ast.diffiety@gmail.com

Об условии гармоничности при построении решений уравнения Лапласа методом обобщенных степеней, Афанасенкова Юлия Вячеславовна, Гладышев Юрий Александрович

Ключевые слова: Обобщенные степени, уравнение Лапласа, симметрия, параметрические обобщенные степени.

В сообщении исследуется симметрия решений многомерного уравнения Лапласа, полученных методом параметрических обобщенных степеней.

Афанасенкова Юлия Вячеславовна, Калужский государственный университет г. Калуга, e-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

Гладышев Юрий Александрович, Калужский государственный университет г. Калуга, кандидат физико-математических наук, e-mail: dvoryanchikova_y@mail.ru

Об основных этапах развития нелинейного функционального анализа (1920-е-1960-е гг.), Богатов Егор Михайлович

Ключевые слова: нелинейный функциональный анализ, этапы развития, математика XX века, отечественная математика

В работе предпринята попытка периодизации развития нелинейного функционального анализа в промежуток с 1920-го по 1970-й гг., при этом более пристальное внимание уделяется достижениям отечественных математиков. Итогом явилось выделение трёх этапов указанного развития – начального (1920-й-1930-й гг.), периода роста и развития (1930-е гг. -

конец 1940-х гг.) и периода расцвета (конец 1940-х гг. - 1960-е гг.), а также осмысление предыстории обсуждаемого процесса.

Богатов Егор Михайлович, Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСИС», г. Старый Оскол, Россия, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и информатики, email: embogatov@inbox.ru; Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСИС» в городе Губкине Белгородской области, г. Губкин; Россия, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры горного дела, email: embogatov@inbox.ru.

Математическая модель теплообменного аппарата воздуходелительной установки, Воробьев Александр Александрович, Хвостов Анатолий Анатольевич, Журавлев Алексей Александрович, Куксов Дмитрий Юрьевич

Ключевые слова: воздуходелительная установка, теплообменник, математическая модель, теплопередача.

На основе тепловых балансовых соотношений синтезирована математическая модель основного теплообменника воздуходелительной установки в виде системы скалярных и матричных однородных дифференциальных уравнений, дополненных начальными и граничными условиями.

Воробьев Александр Александрович, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, научный сотрудник

Хвостов Анатолий Анатольевич, ВГТУ, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики, e-mail: Khvtol1974@yandex.ru

Журавлев Алексей Александрович, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, научный сотрудник

Куксов Дмитрий Юрьевич, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация, научный сотрудник

К вопросу об определении понятия обобщенной степени, Гладышев Юрий Александрович, Лошкарева Елена Анатольевна

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, обобщенные степени, оператор

В работе предпринята попытка уточнить понятие обобщенной степени. Это связано с тем, что эта конструкция находит приложения в различных вопросах теории линейных дифференциальных уравнений. Введены определения последовательности не полностью определенных обобщенных степеней с коэффициентом C и последовательности полностью определенной обобщенных степеней.

Гладышев Юрий Александрович, Калужский государственный университет г. Калуга, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры физики и математики, e-mail: gladyshev.yua@yandex.ru

Лошкарева Елена Анатольевна, Калужский государственный университет г. Калуга, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры физики и математики, e-mail: losh-lena@yandex.ru

Программное обеспечение для анализа медицинских данных, Гончарова Анастасия Борисовна, Виль Мария Юрьевна

Ключевые слова: анализ медицинских данных, программные средства, табличные данные, временные ряды, изображения, видео

Анализ медицинских данных представляет собой сложную задачу, так как данные могут быть представлены в виде текста, изображений и видео. Кроме того, в зависимости от цели исследования, может применяться различное программное обеспечение. В статье представлен обзор существующих программных средств и их инструментальных возможностей в зависимости от типа анализируемой информации.

Гончарова Анастасия Борисовна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории систем управления электрофизической аппаратурой, e-mail: a.goncharova@spbu.ru

Виль Мария Юрьевна, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, аспирант, e-mail: st054723@student.spbu.ru

Уравнения динамики боя при моделировании высокоорганизованного боя, Гунькина Анна Сергеевна

Ключевые слова: уравнения динамики боя, марковские случайные цепи, размеченный граф состояний

В данной статье рассматриваются уравнения динамики боя, сущность которых состоит в методе динамики средних. Элементы рассматриваемой системы считаются однородными, интенсивности потоков которых являются независимыми от средних численностей состояний системы.

Гунькина Анна Сергеевна, ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» г.Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, e-mail: volan100@mail.ru

Об оценках снизу минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с интегральными условиями на потенциал, Ежак Светлана Сергеевна, Тельнова Мария Юрьевна.

Ключевые слова: краевые задачи, оценки собственных значений.

Для задачи Штурма-Лиувилля с интегральным условием на потенциал получены оценки снизу первого собственного значения в зависимости от параметров интегрального условия.

Ежак Светлана Сергеевна, РЭУ им. Г.В. Плеханова, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, e-mail: svetlana.ezhak@gmail.com

Тельнова Мария Юрьевна, РЭУ им. Г.В. Плеханова, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, e-mail: mytelnova@yandex.ru

Задача о контактной теплопроводности двух периодически соприкасающихся стержней, Ерин Олег Леонидович, Кузнецов Станислав Александрович, Распопов Артем Дмитриевич.

Ключевые слова: контактная теплопроводность, моделирование процесса, теплонапряженные узлы.

Аналитическое решение задачи контактной теплопроводности даже для систем со статическими контактами представляется достаточно сложной операцией. Задача еще более

усложняется при рассмотрении систем с нестатическими контактами. В этом случае нахождение термосопротивления тепловому потоку между периодически контактирующими поверхностями двух стержней путем решения трехмерного уравнения теплопроводности практически невозможно из-за сложной геометрической формы поверхности контакта и многочисленных граничных условий.

Ерин Олег Леонидович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: ol-er85@mail.ru.

Кузнецов Станислав Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: ol-er85@mail.ru.

Распопов Артем Дмитриевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант.

Теплообмен через периодически соприкасающиеся металлические поверхности при отсутствии контактного термосопротивления, Ерин Олег Леонидович, Кузнецов Станислав Александрович, Распопов Артем Дмитриевич.

Ключевые слова: теплоперенос, контактное термосопротивление, частота контактов стержней, тепловой поток.

При контактировании металлических поверхностей в теплонапряженных системах необходимо учитывать наличие контактных термосопротивлений, не является исключением и периодический контакт поверхностей. Вместе с тем в ряде случаев можно в первом приближении считать, что на пути теплового потока от одного тела к другому при их касании отсутствует контактное термосопротивление.

Ерин Олег Леонидович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: ol-er85@mail.ru.

Кузнецов Станислав Александрович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, младший научный сотрудник, e-mail: ol-er85@mail.ru.

Распопов Артем Дмитриевич, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, курсант.

Оптимальное по быстродействию управление параболической системой в классе суммируемых на графе функций, Жабко Алексей Петрович, Провоторова Елена Николаевна.

Ключевые слова: Дифференциальная система, распределенные параметры на графе, оптимальное быстродействие.

В работе рассматривается задача оптимального быстродействия для линейной дифференциальной системы с распределенными параметрами на графе. Представлены условия существования оптимального управления в пространствах типа С.Л. Соболева.

Жабко Алексей Петрович, С.-Петербургский государственный университет г. С.-Петербург, Российская Федерация, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления, e-mail: wwprov@mail.ru

Провоторова Елена Николаевна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: enprov@mail.ru

Решение задачи управления для динамической системы в частных производных разного порядка, Зубова Светлана Петровна, Раецкая Елена Владимировна

Ключевые слова: динамическая система, функция состояния, полная управляемость, система в частных производных.

Аннотация. Рассматривается динамическая система в частных производных. Порядок производных по одной переменной функций состояния и функции управления отличается. Выявляются свойства матричных коэффициентов, влекущих полную управляемость или неуправляемость системы. Для полностью управляемой системы выводятся формулы для построения функции управления и соответствующей функции состояния.

Зубова Светлана Петровна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, e-mail: spzubova@mail.ru

Раецкая Елена Владимировна, Воронежский государственный лесотехнический университет, г.Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, e-mail: raetskaya@inbox.ru

Математическая модель биологического реактора, Казанцева Станислава Александровна, Колпак Евгений Петрович, Каримова Резеда Талгатовна

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, устойчивость, биомасса, субстрат, математическое моделирование

Математическое описание роста микробных популяций в биологическом реакторе опирается на аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений. Рост биомассы клеток описывается уравнением автокатализа. Учитывается, что удельная скорость роста биомассы может быть ограничена скоростью переработки субстрата с учетом субстратного угнетения. Основная задача – оценить значения пороговых скоростей подачи субстрата, превышение которых приводит к вымыванию биомассы из ректора.

Казанцева Станислава Александровна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики - процессов управления, st076336@student.spbu.ru.

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных методов механики деформируемого тела, retrovich_pmpu@mail.ru.

Каримова Резеда Талгатовна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, kirakari1101@gmail.com

Создание набора видеозаписей ультразвуковых исследований для диагностирования очаговых образований в печени с целью обучения сервисов искусственного интеллекта. Камгуя Феукви Херве, Козубова Ксения Вячеславовна, Бусько Екатерина Александровна, Гончарова Анастасия Борисовна.

Ключевые слова: набор данных, УЗИ печени, покадровая разбивка видео, сервис искусственного интеллекта.

Для исследования возможностей применения нейронных сетей для диагностирования очаговых образований в печени по ультразвуковым исследованиям первым этапом является создание набора данных из видеозаписей. Набор данных содержит текстовое описание к каждой видеозаписи. С целью дальнейшего извлечения признаков из каждого видео проведена покадровая разбивка видео файлов.

Камгуя Феукви Херве, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, магистрант, e-mail: st093241@student.spbu.ru,

Козубова Ксения Вячеславовна, ФГБУ "Научный медицинский исследовательский центр онкологии им. Н.Н. Петрова", г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, аспирант научного отделения диагностической и интервенционной радиологии, e-mail: dr.kozubova@yandex.ru,

Бусько Екатерина Александровна, ФГБУ "Научный медицинский исследовательский центр онкологии им. Н.Н. Петрова", Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор мед. наук, доцент, ведущий научный сотрудник научного отделения диагностической и интервенционной радиологии; e-mail: katrn@mail.ru.

Гончарова Анастасия Борисовна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории систем управления электрофизической аппаратурой, e-mail: a.goncharova@spbu.ru

Аппроксимация эволюционных процессов переноса с распределенными параметрами на произвольной сети, Корчагина Олеся Руслановна, Кашников Владимир Иванович.

Ключевые слова: эволюционные процессы переноса, аппроксимация, явная разностная схема, узлы сети, численные методы.

В статье рассматривается аппроксимация математической модели сетеподобных эволюционных процессов переноса с распределенными параметрами на произвольной сети (графе). Аппроксимация математической модели на произвольной сети определяется классическими аппроксимациями дифференциальных выражений. Особенность структуры носителя – наличие особых точек графа (узлов), которые требуют отдельного подхода в вопросах аппроксимации. При аппроксимации соотношений используется явная разностная схема.

Корчагина Олеся Руслановна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: bal-olesya@mail.ru.

Кашников Владимир Иванович, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат географических наук, доцент, старший научный сотрудник, e-mail: bal-olesya@mail.ru.

Численный анализ сетеподобных потоковых явлений со сложной структурой носителей, Корчагина Олеся Руслановна, Парт Анна Александровна

Ключевые слова: потоковые явления, устойчивость и сходимости разностных схем, аппроксимация, численные методы.

Работа посвящена обоснованию неклассических численных методов, адаптированных для использования при численном анализе сетеподобных потоковых явлений со сложной структурой носителей. Основным вопросом численного анализа математических моделей явлений является построение устойчивых разностных схем, применимых к дифференциальным системам с распределенными параметрами на сети и сетеподобных объектах.

Корчагина Олеся Руслановна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: bal-olesya@mail.ru.

Парт Анна Александровна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры природопользования, e-mail: anna_razinkova@mail.ru.

Алгоритм построения поля скоростей на основе оптимизационного подхода, Котина Елена Дмитриевна, Харченко Данил Сергеевич

Ключевые слова: поле скоростей, обработка изображений, оптимизация, вариация функционала

В данной работе рассматривается алгоритм построения поля скоростей для последовательных изображений на основе оптимизационного подхода. В основе данного подхода лежит предположение о постоянстве яркости изображений вдоль траекторий рассматриваемой системы. Задача отыскания поля скоростей сводится к задаче минимизации целевого функционала градиентными методами. Также предложен новый подход к разделению исходных изображений на подобласти на основе морфологической обработки изображений.

Котина Елена Дмитриевна, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теории управления, e-mail: e.kotina@spbu.ru

Харченко Данил Сергеевич, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская федерация, студент 2-го курса магистратуры, e-mail: st098139@student.spbu.ru

Решение методом малого параметра системы уравнений Навье-Стокса задачи обтекания малого эллипсоида неоднородным потоком вязкой несжимаемой жидкости, Купцов Валерий Семенович, Катрахова Алла Анатольевна.

Ключевые слова: Навье-Стокса, метод малого параметра, эллипсоид, нестационарный неоднородный поток, вязкая несжимаемая жидкость.

В работе вычислено поле скоростей на эллипсоид, помещенный в нестационарный поток вязкой несжимаемой жидкости. Ввиду сложности задачи рассматривались линеаризованные уравнения Навье-Стокса, а также был применен метод малого параметра. В результате для решения вычислены нулевое и первое приближения задачи, а также сделана оценка точности решения задачи.

Купцов Валерий Семенович, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры

высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: vskuptsov@rambler.ru.

Катрахова Алла Анатольевна, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования.

Разработка телемедицинского приложения для организации консультаций.
Курниавати Анастасия Синтия Деви.

Ключевые слова: телемедицина, разработка приложения, функциональные требования.

В связи с пандемией коронавирусной инфекции все большую актуальность приобретают способы общения врача и пациента на основе телемедицинских технологий. Целью работы является анализ требований к телемедицинскому приложению и описание способа программной реализации такого приложения.

Курниавати Анастасия Синтия Деви, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, магистрант, e-mail: st098657@student.spbu.ru.

Описательная статистика с использованием программного пакета JAMOVI,
Легкова Ирина Анатольевна

Ключевые слова: статистическая программа, Jamovi, описательная статистика, разведочный анализ.

Описательная статистика один из важнейших этапов обработки данных. При помощи методов описательной статистики анализируются первичные данные, которые впоследствии исследуются с использованием различных тестов и анализа. Программный пакет Jamovi является отличным средством для предобработки электронных таблиц. Программа имеет простой и интуитивный интерфейс.

Легкова Ирина Анатольевна, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, бакалавр, e-mail: st088253@student.spbu.ru

Поиск частного решения дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методами операционного исчисления, Мишина Дарья Геннадиевна

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, методы операционного исчисления, преобразования Лапласа.

Положение поднятой научной проблемы актуально, рассмотренное интегральное преобразование Лапласа имеет широкий спектр приложений не только в математических науках, но и в других отраслях. Более подробно были рассмотрено приложение для поиска частного решения дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Подобранный пример показал, что интегральное преобразование Лапласа упрощает ход решения уравнений, сводя его к простому алгебраическому уравнению.

Мишина Дарья Геннадиевна, Воронежский государственный педагогический университет г. Воронеж, Российская Федерация, студент 1 курса физико-математического факультета, профиль «Математическое образование», e-mail: dgmishina@gmail.com.

Некоторые свойства точек переключения управления нелинейной системы четвертого порядка, Моисеев Игорь Анатольевич

Ключевые слова: оптимальное быстроедействие, оптимальное управление, оптимальная траектория, курсовой угол, игра "шофер-убийца".

В статье рассматривается задача перевода управляемого объекта из начального положения в начало координат с заданными значениями курсового угла и скорости объекта в конечной точке за минимальное время. Предполагается, что оптимальная траектория движения существует, и для решения задачи требуется одно переключение управления курсовым углом и три переключения управления скоростью. Исследуются свойства таких точек.

Моисеев Игорь Анатольевич, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, С.-Петербург, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры безопасности информационных систем, e-mail: mig1256@mail.ru

О разрешимости задачи преследования для одной дифференциальной игры дробного порядка, Мухсинов Едгор Мирзоевич

Ключевые слова: задача преследования, дифференциальная игра с интегральными ограничениями, дробная производная Капуто.

Аннотация. В гильбертовом пространстве рассматривается разрешимость задачи преследования для линейной дифференциальной игры, когда динамика игры описывается дифференциальным уравнением дробного порядка в смысле Капуто. Найдены множество начальных положений, из которых возможно завершение преследования.

Мухсинов Едгор Мирзоевич, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, г. Худжанд, Республика Таджикистан, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических дисциплин и современного естествознания, e-mail: yodgor.mukhsinov@gmail.com

Об одной задаче программного управления пучком траекторий, Овсянников Дмитрий Александрович, Котина Елена Дмитриевна

Ключевые слова: программное управление, пучок траекторий, вариация функционала

В данной работе рассматривается задача программного управления пучком траекторий. Исследуется задача минимизации функционала специального вида, характеризующего перевод центра тяжести одного множества в центр тяжести другого множества. Для исследуемого функционала получены аналитические представления вариаций. Даются необходимые условия оптимальности. Полученные результаты можно использовать при решении задач управления пучками заряженных частиц, а также для построения поля скоростей при обработке изображений.

Овсянников Дмитрий Александрович, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории систем управления электрофизической аппаратурой, e-mail: d.a.ovsyannikov@spbu.ru

Котина Елена Дмитриевна, Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории управления, e-mail: e.kotina@spbu.ru

Математическое моделирование характеристик излучения многодиапазонной цилиндрической антенны

Панов Олег Игоревич, студент

Старченко Алексей Дмитриевич, студент

Харченко Виктор Викторович, кандидат технических наук, доцент

Урывская Татьяна Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент

Вартазарова Анастасия Эдуардовна, кандидат экономических наук

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Колебательные процессы в сетевидных антенных конструкциях, Парт Анна Александровна, Корчагина Олеся Руслановна

Ключевые слова: граф, гиперболическое уравнение, начально-краевая задача, слабое решение.

Построена устойчивая разностная схема для гиперболической начально-краевой задачи третьего типа с распределенными параметрами на сети. Учтены особенности, порождаемые структурой графа (наличие узлов).

Парт Анна Александровна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры природопользования, e-mail: anna_razinkova@mail.ru.

Корчагина Олеся Руслановна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, e-mail: bal-olesya@mail.ru.

Априорные оценки для дифференциально-разностной системы с пространственной переменной на графе, Перова Ирина Васильевна, Тимошенко Виктор Владимирович.

Ключевые слова: ориентированный граф, дифференциально-разностная система на графе, оценки норм слабых решений

Целью настоящего исследования является получение условий разрешимости дифференциально-разностной системы параболического типа в слабой постановке с пространственной переменной, изменяющейся на ориентированном геометрическом графе.

Перова Ирина Васильевна, аспирант кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета, e-mail: wwprgv@mail.ru.

Тимошенко Виктор Владимирович, аспирант кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета.

Обработка изображений на основе оптического потока, Петруханова Анастасия Алексеевна, Котина Елена Дмитриевна

Ключевые слова: оптический поток, поле скоростей, блочные итерационные методы

В работе рассматривается метод обработки последовательных изображений на основе построения оптического потока. Исследуется построение поля скоростей на основе решения соответствующих уравнений Эйлера Лагранжа. Анализируется влияние задания граничных условий на построение оптического потока. Рассмотренный метод может использоваться при

решении различных задач обработки изображений, в частности, медицинских диагностических изображений.

Петруханова Анастасия Алексеевна, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент 4 курса бакалавриата, email: st077348@student.spbu.ru

Котина Елена Дмитриевна, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории управления СПбГУ, e-mail: e.kotina@spbu.ru

Статистическое оценивание заболеваемости ВИЧ инфекции, Полина Софья Геннадьевна, Колпак Евгений Петрович

Ключевые слова: ВИЧ-инфекция, статистика, математическая модель, заболеваемость.

Проведено статистическое оценивание заболеваемости ВИЧ инфекции в России. Проанализированы данные по темпам роста когорт лиц, стоящих на учете, по путям заражения, по темпам уменьшения числа впервые поставленных на учет. Дана оценка числа лиц, стоящих на учете.

Полина Софья Геннадьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, st062259@student.spbu.ru

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор факультета прикладной математики-процессов управления, petrovich_pmpu@mail.ru.

Математическая модель распространения ВИЧ-инфекции, Полина Софья Юрьевна, Каримова Резеда Талгатовна, Колпак Евгений Петрович

Ключевые слова: математическое моделирование, заболеваемость, лечение, инфекция

Разработана математическая модель распространения ВИЧ-инфекции. Модель учитывает гетеросексуальный и инъекционный пути распространения инфекции. Из анализа равновесных состояний следует, что возможен вариант постоянного числа инфицированных лиц. Наиболее эффективным методом борьбы с эпидемией является, в рамках модели, уменьшение числа лиц, предрасположенных к инфекционному заражению

Полина Софья Юрьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, st062259@student.spbu.ru

Каримова Резеда Талгатовна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, kirakari1101@gmail.com

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор факультета прикладной математики-процессов управления, petrovich_pmpu@mail.ru.

Анализ математической модели противоточного теплообменника воздухоподогревательной установки, Приходько Инна Владимировна

Ключевые слова: противоточный теплообменник, разность температур, теплопередача, массовые теплоёмкости.

В статье рассматривается анализ модели противоточного теплообменника с сосредоточенными параметрами методом формирования обобщённых уравнений, которые позволяют сформулировать математическую модель в виде отдельных дифференциальных уравнений и их систем. Данная модель позволяет повысить эффективность теплообменных устройств кислорододобывающих станций на основе выявления резервов конструкционного и параметрического анализа существующих схем.

Приходько Инна Владимировна, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», г. Воронеж, Российская Федерация, научный сотрудник, e-mail: prihodko84@mail.ru

Построение моделей стабилизированных траекторий для динамической системы управления, Раецкий Кирилл Александрович

Ключевые слова: стабилизация, полная управляемость, динамическая система, траектория системы, метод неопределённых коэффициентов, контрольные точки.

Аннотация. Рассматривается линейная полностью управляемая динамическая система. Решается задача моделирования стабилизированной траектории системы. Кроме экспоненциального сближения стабилизированной траектории и программной траектории с течением времени, в данной работе накладывается требование полного их совпадения в контрольные моменты времени. Процесс построения стабилизированной траектории осуществляется методом неопределённых коэффициентов. Приводятся формулы для построения стабилизированного управления и стабилизированной траектории динамической системы.

Раецкий Кирилл Александрович, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, аспирант кафедры математического анализа, e-mail: kraetsky@mail.ru

Теоремы о чередовании нулей для нелинейных уравнений типа Эмдена – Фаулера, Рогачев Владимир Викторович.

Ключевые слова: уравнение Эмдена-Фаулера, колеблемость решений, теоремы типа Штурма.

Рассматриваются теоремы о чередовании нулей для дифференциального уравнения произвольного порядка со степенной нелинейностью. Они расширяют полученные Штурмом и Кондратьевым результаты о чередовании нулей для линейного дифференциального уравнения произвольного порядка.

Рогачев Владимир Викторович, МГУ имени М.В. Ломоносова, МГТУ имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук. E-mail: valdakhar@gmail.com

Математическая модель динамики образования кристаллической фазы парафиновых фракций нефтепродуктов, Таволжанский А.В., Хвостов А.А.

Ключевые слова: математическое моделирование, выпадение парафина, хранение дизельного топлива.

Формализована математическая модель процесса выпадения парафина в дизельном топливе. Математическая модель основана на уравнениях сохранений удельного импульса, массы и энергии. Показан неоднородный характер распределения концентрации областей

кристаллизации в условиях термоконвективных потоков вследствие оттока тепла через боковые стенки резервуара.

Таволжанский Артём Валентинович, ВГТУ, г. Воронеж, Российская Федерация, студент, e-mail: artyom.tavolzhanskiy@outlook.com

Хвостов Анатолий Анатольевич, ВГТУ, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики, e-mail: Khvtol1974@yandex.ru

Устойчивость операторно-разностной системы в классе суммируемых функций с носителями в сетеподобной области, Тимошенко Виктор Владимирович, Перова Ирина Васильевна

Ключевые слова: сетеподобная область, операторно-разностная система, слабые решения, априорные оценки, устойчивость

В работе предложены пути получения априорных оценок норм слабых решений дифференциально-разностной системы для установления однозначной разрешимости этой системы.

Тимошенко Виктор Владимирович, аспирант кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета.

Перова Ирина Васильевна, аспирант кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета, e-mail: wwprov@mail.ru.

Исследование разрешимости нелокальной граничной задачи для линейных дифференциальных уравнений с «весовой» производной, Ткачева Светлана Анатольевна, Савченко Галина Борисовна, Забабурина Иулия Геннадьевна

Ключевые слова: граничная задача, «весовые» производные, символы дифференциального оператора.

Рассматривается граничная задача с нелокальными граничными условиями для линейных дифференциальных уравнений с оператором, содержащим «весовые» производные. Исследуется корректность такой задачи в пространствах интегрируемых функций.

Ткачева Светлана Анатольевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, e-mail: svtkach@mail.ru

Савченко Галина Борисовна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования математического факультета, e-mail: savchenkogb@mail.ru

Забабурина Иулия Геннадьевна, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация, магистр 2 курса математического факультета кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, e-mail: zababurinay@mail.ru.

Начально-краевая задача для математической модели колебаний с распределенными параметрами на сетеподобной области, Тран Зуй

Ключевые слова: начально-краевая задача, сетеподобная область, упругая среда, разностная схема.

В работе рассматривается широкий спектр вопросов, относящихся к решению начально-краевой задачи для уравнения в частных производных параболического типа с многомерной пространственной переменной, принадлежащей евклидову пространству \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) и изменяющейся на сетеподобной области. Математическая модель, описывающая процесс переноса упругой среды по сетевому носителю, определяется формализмами начально-краевой задачи. Разработана и протестирована ЭВМ-программа на тестовых задачах, ориентированных на задачи прикладного характера.

Тран Зуй, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация, e-mail: trandyusp94@gmail.com.

Использование метода суперпозиции для решения краевой задачи на геометрическом графе с одной внутренней вершиной, Трибунских Олег Александрович

Ключевые слова: метод суперпозиции, система дифференциальных уравнений, геометрический граф, краевая задача на графе.

В докладе описан алгоритм, построенный на основе метода суперпозиции для решения краевой задачи на геометрическом графе. Рассмотрены два случая. В первом случае на графе задана система дифференциальных уравнений первого порядка, во втором случае на графе задано дифференциальное уравнение второго порядка.

Трибунских Олег Александрович, Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г.Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры математики, e-mail: toa_vrn@mail.ru

Качественный анализ математической модели "лес-биомасса", Тусупбекова Эльмира Ерсыновна.

Ключевые слова: математические модели, модель «лес-биомасса»

В данной работе проводится исследование и анализ динамической модели для сохранения лесного хозяйства, которое истощается из-за вырубки лесов, роста лесной промышленности, и климатических факторов. Были выявлены условия, при которых положения равновесия системы устойчивы.

Тусупбекова Эльмира Ерсыновна, МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: elmira.tussupbekova@gmail.com

Изменение диапазона при модуляции цифрового сигнала

Уривская Татьяна Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент

Рудый Сергей Валерьевич

Лютов Никита Сергеевич, студент

Жидких Илья Васильевич, студент

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Масштабирование коэффициентов цифрового фильтра при смене форматов

Урывская Татьяна Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент

Харченко Виктор Викторович, кандидат технических наук, доцент

Черноротов Павел Олегович, студент

Репрынцев Евгений Сергеевич, студент

Щербатов Дмитрий Сергеевич

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Соревнования первокурсников воронежских вузов по информатике и программированию в год науки и технологий, Ускова Ольга Федоровна, Абрамов Геннадий Владимирович, Федутинов Константин Александрович, Каплиева Наталья Алексеевна

Ключевые слова: спонсорская поддержка; список вузов г. Воронежа, первокурсники, которых участвовали в соревнованиях; призовые места; информатика и программирование.

Рассматривается организация и проведение соревнований студентов 1 курса по информатике и программированию, которые проводятся ежегодно в рамках Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» в 2021 году.

Ускова Ольга Федоровна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, профессор кафедры математического обеспечения ЭВМ, e-mail: sunny.uskova@mail.ru

Абрамов Геннадий Владимирович, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, заведующий кафедрой математического обеспечения ЭВМ, e-mail: agwl@yandex.ru

Федутинов Константин Александрович, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, преподаватель кафедры математических методов исследования операций, e-mail: fedutinovv@gmail.ru

Каплиева Наталья Алексеевна, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического обеспечения ЭВМ, e-mail: kaplieva@amm.vsu.ru

Оценки коэффициентов асимптотических разложений собственных значений задачи Робена, Филиновский Алексей Владиславович

Ключевые слова: задача Робена, асимптотика собственных значений.

Для задачи Робена в звёздной области получены асимптотически разложения собственных значений задачи Робена и оценки коэффициентов этого разложения.

Филиновский Алексей Владиславович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики МГТУ им. Н.Э. Баумана; профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: flnv@mail.ru

Модель цилиндрической двухдиапазонной антенной решетки

Харченко Виктор Викторович, кандидат технических наук, доцент

Рудый Сергей Валерьевич

Ермухамбетов Тамерлан Муратович, студент

Мозговой Михаил Игоревич, студент

Урывская Татьяна Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент

ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)

Кинематика течения высоковязкой неньютоновской среды в цилиндрическом канале с внезапным сужением, Хвостов Анатолий Анатольевич, Журавлев Алексей Александрович, Никитченко Анатолий Александрович, Григорьев Артем Алексеевич

Ключевые слова: внезапное сужение, неньютоновская жидкость, модель Карро.

Формализована математическая модель ламинарного изотермического течения неньютоновской среды в цилиндрическом канале с внезапным сужением. В качестве реологической модели принята модель Карро. Проведен анализ структуры течения и кинематических характеристик потока в зависимости от числа Рейнольдса.

Хвостов Анатолий Анатольевич, ВГТУ, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики, e-mail: Khvtol1974@yandex.ru

Журавлев Алексей Александрович, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, email: zhuraa1@rambler.ru

Никитченко Анатолий Александрович, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры изыскания аэродромов, email: nik.to77@mail.ru

Григорьев Артем Алексеевич, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация, курсант

Модель седиментации нефтяных суспензий в условиях термоконвекции, Хвостов Анатолий Анатольевич, Ряжских Виктор Иванович, Журавлев Алексей Александрович, Ряжских Александр Викторович, Семенихин Олег Александрович

Ключевые слова: седиментация, нефтяные суспензии, математическое моделирование.

Формализована математическая модель процесса седиментации твёрдых частиц в нефтяной суспензии. Математическая модель рассмотрена в рамках континуальной модели. Показан неоднородный характер распределения концентрации осадка в условиях термоконвективных потоков вследствие теплопритоков через боковые стенки резервуара.

Хвостов Анатолий Анатольевич, ВГТУ, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной математики и механики, e-mail: Khvtol1974@yandex.ru

Ряжских Виктор Иванович, ВГТУ, г. Воронеж, Российская Федерация, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и механики, e-mail: ryazhskih_vi@mail.ru

Журавлев Алексей Александрович, ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, email: zhuraa1@rambler.ru

Ряжских Александр Викторович, ВГТУ, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики, e-mail: ryazhskih_vi@mail.ru

Семенихин Олег Александрович, ВГТУ, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики, e-mail: semenihin72@yandex.ru

Оптимизационная задача по стартовым условиям для дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на графе, ХоангВанНгуен.

Ключевые слова: оптимизационная задача по стартовым условиям, граф, дифференциально-разностная система, минимизирующий функционал.

Аннотация. В работе рассматривается оптимизационная задача для дифференциально-разностной системы с распределенными параметрами на графе. Получены условия существования и единственности оптимума функционала наблюдения при управлении по стартовым условиям.

Хоанг Ван Нгуен, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация,

аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, e-mail: fadded9x@gmail.com.

Анализ данных с использованием формул и фильтров в статистическом пакете jamovi, Хоменко Ирина Евгеньевна

Ключевые слова: статистическая программа, Jamovi, типы данных, вычисляемые переменные, функции, фильтр.

Первичная статистическая обработка данных неотъемлемая часть работы с табличными данными. Программный пакет Jamovi является хорошим средством для первичной статистической обработки данных благодаря возможности применения функций и формул. Достоинствами Jamovi является интуитивный интерфейс, бесплатное использование и наличие облачной реализации.

Хоменко Ирина Евгеньевна, Санкт-Петербургский государственный университет г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, бакалавр, e-mail: st087797@student.spbu.ru

Маломерные и многомерные маятники в неконсервативном поле: анализ и интегрируемость, Шамолин Максим Владимирович

Ключевые слова: динамическая система маятникового типа, колебания, структурная устойчивость

Работа посвящена новым случаям интегрируемости систем на касательном расслоении к конечномерной сфере. К такого рода задачам приводятся системы из динамики многомерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Обнаружены случаи интегрируемости уравнений движения в трансцендентных (в смысле классификации их особенностей) функциях и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Шамолин Максим Владимирович, Институт механики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории навигации и управления, эксперт РАН, E-mail: shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru

Спектральные свойства одного дифференциального оператора с нелокальными краевыми условиями, Шелковой Александр Николаевич

Ключевые слова: спектр оператора, дифференциальный оператор второго порядка, асимптотика спектра, метод подобных операторов.

В работе исследуются спектральные свойства дифференциального оператора второго порядка с нелокальными краевыми условиями. Получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций этого оператора. Методом исследования является метод подобных операторов.

Шелковой Александр Николаевич, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования, e-mail: shelkovej.aleksandr@mail.ru

Математическое моделирование иммунотерапии, Шмелева Анастасия Анатольевна, Колпак Евгений Петрович, Виль Мария Юрьевна

Ключевые слова: математическое моделирование, заболеваемость, лечение, новообразование

Разработана математическая модель иммунного ответа на появление в организме новообразования. Модель представлена задачей Коши для системы трех дифференциальных уравнений. Иммунотерапия рассматривается как изменение скоростей биохимических реакций за счет введения химических препаратов.

Шмелева Анастасия Анатольевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, студент факультета прикладной математики-процессов управления, st062238@student.spbu.ru

Колпак Евгений Петрович, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор факультета прикладной математики-процессов управления, petrovich_pmpu@mail.ru.

Виль Мария Юрьевна, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, аспирант факультета прикладной математики-процессов управления, st054723@student.spbu.ru

Социально-личностные аспекта и социализация образования, Юрьева Анна Александровна.

Ключевые слова: образование, общество, личность.

Образование имеет два стратегических ориентира: на личность и на общество. Взаимодействие человека и общества в сфере образования осуществляется через: усвоение и переработка информации, знаний и социального опыта, соблюдение духовно-нравственной преемственности поколений, социализация личности, Описанию упомянутых аспектов посвящена доклад автора.

Юрьева Анна Александровна, Воронежский государственный аграрный университет им. императора Петра I, г. Воронеж, Россия, кандидат исторических наук, доцент кафедры истории, философии и русского языка.

Именной указатель

А

Абрамов Г.В..... 81
Антипова Е.С..... 3

Асташова И.В..... 5
Афанасенкова Ю.В..... 6

Б

Богатов Е.М..... 7

Бусько Е.А..... 29

В

Вартазарова А.Э..... 52
Виль М.Ю..... 13, 100

Воробьев А.А..... 10

Г

Гладышев Ю.А..... 6, 12
Григорьев А.А..... 87

Гончарова А.Б..... 13, 29
Гунькина А.С..... 15

Е

Ежак С.С..... 17
Ерин О.Л..... 18, 20

Ермухамбетов Т.М..... 84

Ж

Жабко А.П..... 23
Жидких И.В..... 77

Журавлев А.А..... 10, 87, 89

З

Забабурина И.Г..... 70

Зубова С.П..... 24

К

Казанцева С.А..... 27
Камгуя Ф.Х..... 29
Каплиева Н.А..... 81
Каримова Р.Т..... 27, 60
Катрахова А.А..... 36
Кашников В.И..... 30
Козубова К.В..... 29

Колпак Е.П..... 27, 59, 60, 100
Корчагина О.Р..... 30, 33, 54
Котина Е.Д..... 35, 50, 57
Кузнецов С.А..... 18, 20
Куксов Д.Ю..... 10
Купцов В.С..... 36
Курниавати А.С.Д..... 39

Л

Легкова И.А..... 40
Лошкарева Е.А..... 12

Люттов Н.С..... 77

М

Мишина Д.Г..... 42
Мозговой М.И..... 84

Моисеев И.А..... 44
Мухсинов Е.М..... 48

Н

Никитченко А.А..... 87

О

Овсянников Д.А..... 50

П

Панов О.И.....	52
Парт А.А.....	33, 54
Перова И.В.....	56, 69
Петруханова А.А.....	57

Полина С.Г.....	59
Полина С.Ю.....	60
Приходько И.В.....	62
Провоторова Е.Н.....	23

Р

Раецкая Е.В.....	24
Раецкий К.А.....	64
Распопов А.Д.....	18, 20
Репрынцев Е.С.....	79

Рогачев В.В.....	65
Рудый С.В.....	77, 84
Ряжских В.И.....	89
Ряжских А.В.....	89

С

Савченко Г.Б.....	70
Семенихин О.А.....	89

Старченко А.Д.....	52
--------------------	----

Т

Таволжанский А.В.....	67
Тельнова М.Ю.....	17
Тимошенко В.В.....	56, 69
Ткачева С.А.....	70

Тран З.....	71
Трибунских О.А.....	73
Тусупбекова Э.Е.....	76

У

Урывская Т.Ю.....	52, 77, 79, 84
-------------------	----------------

Ускова О.Ф.....	81
-----------------	----

Ф

Федутинов К.А.....	81
--------------------	----

Филиновский А.В.....	83
----------------------	----

Х

Харченко Д.С.....	35
Харченко В.В.....	52, 79, 84
Хвостов А.А.....	10, 67, 87, 89

Хоанг В.Н.....	93
Хоменко И.Е.....	95

Ч

Черноротов П.О.....	79
---------------------	----

Ш

Шамолин М.В.....	97
Шелковой А.Н.....	99

Шмелева А.А.....	100
------------------	-----

Щ

Щербатов Д.С.....	79
-------------------	----

Ю

Юрьева А.А.....	102
-----------------	-----

Для заметок

Научное издание

**СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ,
ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И КОМПЬЮТЕРНЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ (ПМТУКТ-2022)**

*Сборник трудов
Международной научной конференции
(Воронеж, 13–16 декабря 2022 г.)*

В авторской редакции
Изготовление оригинала-макета: *А.А. Парт, О.Р. Корчагина*

Подписано в печать 02.12.22. Формат 60 x 84 ¹/₁₆. Печать трафаретная.

Гарнитура «Гаймс». Усл.-печ. л. 7,75. Уч.-изд. л. 7,20.

Тираж 25. Заказ 252.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Воронежский государственный педагогический университет».

Отпечатано с готового оригинала-макета в издательско-полиграфическом центре ВГПУ.

394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86. Тел. (473) 255-58-32; 255-61-83.