АННОТАЦИИ

Список Докладов

Время вырождения докритического двуполого ветвящегося процесса с большим начальным числом частиц.

Абдюшев Марат
marazaur13rus@gmail.com

В данной работе рассматривается предельная теорема для двуполых ветвящихся процессов. Пусть $(X_{n,i}, Y_{n,i})$ *– независимые одинаково распределенные (н.о.р.) случайные векторы с целыми неотрицательными компонентами и* $\mathbb{E}X := \mathbb{E}X_{i,j}$, $\mathbb{E}Y := \mathbb{E}Y_{i,j}$, *положим*

$$N_0 = N, \quad N_{n+1} = \min\Big(\sum_{i=1}^{N_n} X_{n,i}, \sum_{i=1}^{N_n} Y_{n,i}\Big).$$

Назовем N_n *двуполым ветвящимся процессом.*
Двуполый ветвящийся процесс, являющийся модификацией стандартного процесса Гальтона-Ватсона, был введен в 1968 году в статье [1] D.J. Daley. В 1986 году J.H. Bagley в работе [2] исследовал асимптотические свойства надкритического ветвящегося процесса, то есть в случае $\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y > 1$. *Отметим также работу [3] M. Gonzalez и M. Molina, описывающую сходимость двуполого надкритического ветвящегося процесса почти наверное и в* L^1. *Обзор литературы, касающейся двуполых ветвящихся процессов, актуальной на начало XXI века можно посмотреть в статье [4] D. M. Hull.*
Большинство исследований асимптотического поведения двуполого ветвящегося процесса посвящены надкритическому случаю, мы же рассмотрим предельную теорему для докритического случая $\mathbb{E}X < 1$, $\mathbb{E}X \leqslant \mathbb{E}Y$.

Теорема 1. *Пусть* N_n *– двуполый ветвящийся процесс с начальным числом частиц обоих полов* $N_0 = N$, T_N *– время вырождения процесса. Тогда при выполнении условий* $\mathbb{D}X := \mathbb{D}X_{i,j} < \infty$, $\mathbb{D}Y := \mathbb{D}Y_{i,j} < \infty$, *для любой расходящейся к* $+\infty$ *последовательности* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ *выполнено соотношение:*

$$\frac{T_N - \log_{\frac{1}{\mathbb{E}X}} N}{a_N} \to 0, \quad N \to \infty.$$

В докладе также будут обсуждены принципиальные отличия между обычными ветвящимися процессами и двуполыми.

Список литературы

[1] D. J. Daley. *Extinction Conditions for Certain Bisexual Galton-Watson Branching Processes.*, 1968.

[2] J. H. Bagley. *On the Asymptotic Properties of a Supercritical Bisexual Branching Process.*, Journal of Applied Probability, Vol. 23, No. 3 (Sep., 1986), pp. 820-826.

[3] M. Gonzalez and M. Molina. *On the Asymptotic Properties of a Supercritical Bisexual Branching Process.*, Journal of Applied Probability, Vol. 33, No. 4 (Dec., 1996), pp. 960-967.

[4] David M. Hull. *A Survey of the Literature Associated with the Bisexual Galton-Watson Branching Process.*, Extracta Mathematicae, Vol. 18, Num. 3, 321 – 343 (200).

Вероятностное представление резольвенты оператора дробного дифференцирования.

Абильдаев Темирлан
t.abildaev23@gmail.com

Рассмотрим стандартный симметричный устойчивый процесс $\xi(t)$ *с показателем устойчивости* $\alpha \in (1, 2)$, *то есть такой процесс Леви, что*

$$\mathbb{E}e^{ip\xi(t)} = e^{-t|p|^{\alpha}}.$$

Процесс $\xi(t)$ *порождает полугруппу операторов, генератором которой является оператор дробного дифференцирования* $\mathcal{D}^{\alpha}$,

$$\big(\mathcal{D}^{\alpha} g\big)(x) = -\frac{1}{2\cos\big(\frac{\pi\alpha}{2}\big)\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}} \big(g(x+y) - g(x) - yg'(x)\big) \frac{1}{|y|^{1+\alpha}}\, dy.$$

Мы представляем работу, в которой строится вероятностное представление оператора $(-\mathcal{D}^{\alpha} - \lambda)^{-1}$ *при* $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0$.

Список литературы

[1] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, 2009.

[2] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одном семействе комплексных стохастических процессов*, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. **501** (2021), 38–41.

[3] М. С. Агранович, *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей*, М., МЦНМО, 2013.

[4] А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*, Тр. МИАН СССР **195** (1994), 3–285.

[5] Т. Е. Абильдаев, *Аналог локального времени для некоторого класса процессов Леви*, Зап. научн. сем. ПОМИ **505** (2021), 5–16.

О гауссовских эндоморфизмах.

Афонин Константин
wert8394@gmail.com

В докладе будет приведен ряд обобщений известной характеризации гауссовских операторов перехода. Как показано в работах А.С. Холево, гауссовские эндоморфизмы на пространстве мер на конечномерном пространстве имеют специальный вид. Этот результат обобщен в нескольких направлениях: 1) показано, что достаточно иметь гауссовость образов только одномерных *гауссовских мер; 2) получен бесконечномерный аналог; 3) ослаблено свойство непрерывности, в частности, достаточно секвенциальной непрерывности.*

О классических решениях системы уравнений Власова-Пуассона с внешним магнитным полем.

Беляева Юлия
yilia-b@yandex.ru

Рассматривается первая смешанная задача для системы уравнений Власова-Пуассона в бесконечном цилиндре. Эта задача описывает кинетику высокотемпературной двукомпонентной плазмы в установках, осуществляющих управляемый термоядерный синтез. Доказаны существование и единственность классического решения такой задачи. Получены новые достаточные условия на внешнее магнитное поле и начальные функции распределения заряженных частиц, гарантирующие, что носители функций распределения лежат строго во внутреннем цилиндре. Решение с таким свойством соответствуют процессу удержания плазмы внутри реактора.

Неравенство для пространства Соболева $H^{-1}(\mathbb{R})$ и его применение к нелинейному уравнению Шрёдингера.

Бессонов Роман
bessonov@pdmi.ras.ru

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда 19-71-30002.
Мы обсуждаем элементарное неравенство, характеризующее функции в пространстве Соболева $H^{-1}(\mathbb{R})$ в терминах колебаний. Затем мы используем его при изучении нелинейного уравнения Шредингера (NLS), чтобы показать, что $H^{-1}(\mathbb{R})$-норма решения эквивалентна интегралу движения от начальных данных из $L^2(\mathbb{R})$. Это расширяет недавние результаты H.Koch, D.Tataru (2016) и R. Killip, M. Vişan и X. Zhang (2018). Совместная работа с Сергеем Денисовым, University of Wisconsin-Madison.

Опеределители операторов Эйри и Бесселя.

Горбунов Сергей
gorbunov.sm@phystech.edu

Рассматривается 2 семейства операторов $A_\alpha(f)$ и $B_\tau(f)$. Их соответствующие интегральные ядра:

$$f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\int_0^\infty A(x+z)A(y+z)dz,$$

$$\int_0^\tau t\sqrt{xy}J_\nu(xt)J_\nu(xy)f(t)dt,$$

где $J_\nu(x)$ обозначает функцию Бесселя порядка ν, а $A(x)$ — функцию Эйри. Оказывается, что эти операторы, при определенных условиях на f, стремятся к операторам Винера-Хопфа в пределе $\tau, \alpha \to \infty$ и имеют похожие коэффициенты в первых членах асимптотического разложения определителя. Похожие коэффициенты получаются и для самих обрезанных операторов Винера-Хопфа. В этом случае они известны из формулы Ахиезера-Каца: непрерывного аналога теоремы Сегё.

Операторы Дирака с экспоненциально убывающей энтропией.

Губкин Павел
pasha_gubkin_v@mail.ru

На докладе будет рассказано о результатах, связывающих скорость экспоненциального убывания энтропии Дирака с размером области, в которую может быть мероморфно продолжена функция Вейля этого оператора. Кроме того, будет показана связь этих результатов с теорией ортогональных многочленов на окружности и теорией резонансов дифференциальных операторов.

Локальная асимптотика нижних уклонений строго надкритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков.

Денисов Константин
denisovkonstan@yandex.ru

Рассматриваются вероятности нижних уклонений ветвящегося процесса $Z_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,Z_{n-1}}$ в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$, представляющей собой последовательность независимых одинаково распределенных величин. В предположении, что случайные величины $X_{i,j}$ при фиксации среды имеют геометрическое распределение, а приращения ξ_i сопровождающего случайного блуждания имеют среднее $\mu > 0$ и удовлетворяют левостороннему условию Крамера $\mathbb{E}\exp(h\xi_i) < \infty$ при $h^- < h < 0$ для некоторого $h^- < -1$, найдена асимптотика локальных вероятностей $\mathbb{P}(Z_n = \lfloor \exp(\theta n) \rfloor)$ во второй зоне уклонений, то есть при $\theta \in (\max(m^-, 0); m(-1))$, а также в некоторой окрестности $m(-1)$, где m^- и $m(-1)$ — некоторые константы.

Смешанный объем бесконечномерных выпуклых компактов.

Досполова Мария
dospolova.maria@yandex.ru

Пусть K – выпуклое компактное GB-подмножество сепарабельного гильбертова пространства H. Обозначим через $\mathrm{Spec}_k K$ множество $\{(\xi_1(h), \ldots, \xi_k(h))\colon h \in K\} \subset \mathbb{R}^k$, где $\xi_1, \ldots, \xi_k$ – независимые копии изонормального гауссовского процесса. Цирельсон показал, что в этом случае для внутренних объемов K верна формула

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k} \mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K),$$

где $\mathbb{E}\,\mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K)$ – средний объем $\mathrm{Spec}_k K$ и κ_k – объем k-мерного единичного шара.
В данном докладе мы обобщим теорему Цирельсона на случай смешанных объемов бесконечномерных выпуклых GB-компактов в H, предварительно введя понятие смешанного объема для бесконечномерных выпуклых подмножеств H.
Кроме того, с помощью полученного результата мы вычислим смешанный объем замкнутых выпуклых оболочек двух ортогональных спиралей Винера.

Асимптотика времени вырождения двуполого критического ветвящегося процесса в случайной среде.

Жиянов Антон
zhiyanovap@gmail.com

В работе рассматривается двуполый критический ветвящийся процесс $\{Z_n^N = L(F_n, M_n),\ n \geq 0\}$ в случайной среде $\eta = \{\eta_n, n \geq 0\}$, начинающийся с большого числа пар $Z_0^N = N$.
Предполагается, что приращения сопровождающего случайного блуждания $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $\xi_n = \ln L(\mathbb{E}\,(F_n \mid \eta)\,, \mathbb{E}\,(M_n \mid \eta))$ имеют нулевое среднее и конечную дисперсию.
Показано, что при довольно общих ограничениях на порождающую пары функцию $L(x, y)$ имеет место сходимость по распределению $\tau(N)/\ln^2(N) \xrightarrow{d} \zeta$, $N \to \infty$, где $\tau(N) = \min\{n \geq 0 : Z_n^N = 0\}$ – время вырождения ветвящегося процесса.
Найдено точное распределение невырожденной случайной величины ζ.

Сравнение устойчивости алгоритмов отбора значимых факторов.

Захаров Даниил
zakharov.daniil@gmail.com

В настоящее время исследователям всё чаще приходится использовать данные больших размерностей. Отбор значимых факторов является довольно популярным и эффективным способом *борьбы с проблемами вычислительной сложности работы с большими данными и с переобучением алгоритмов. В последние годы число алгоритмов отбора значимых факторов многократно возросло (см., например, [1]), в связи с чем начался поиск методов сравнения их результативности и эффективности. Одним из важных показателей качества алгоритмов является устойчивость (стабильность). Обычно устойчивость показывает, насколько меняется результат работы алгоритма при небольшом изменении исходных данных (см., например, [2]).*

Пусть в стохастической модели изучаемая величина Y зависит от признаков $X_1, \ldots, X_d$. В результате работы некоторого алгоритма (который назовем основным и обозначим $base$) на i-ом наборе данных выбирается подмножество $S(i)$, описывающее набор значимых факторов, $i \in \{1, \ldots, L\}$ (имеются различные определения значимости набора факторов, см., например, [3]). Нами рассматривается модификация основного алгоритма (аналогично [4]), работающая по следующему правилу: для каждого признака X_f, $f \in \{1, \ldots, d\}$

$$X_f \in S^{mod} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{L} \mathbb{1}\{X_f \in S(i)\} \ \geq l_0,$$

где l_0 является заданным пороговым значением, $1 \leq l_0 \leq L$ и S^{mod} есть набор признаков, отобранных новым алгоритмом.

Рассмотрим величину $p_f = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \mathbb{1}\{f \in S(i)\}$ – частоту отбора признака X_f в результате применения основного алгоритма к L наборам данных наблюдений. Тогда одна из самых известных частотных мер стабильности (см. [5]) определяется следующей формулой:

$$\Phi = 1 - \frac{\sum_{f=1}^{d} s_f^2}{\bar{k}(1 - \frac{\bar{k}}{d})}, \tag{1}$$

где $s_f^2 = \frac{L}{L-1} p_f(1 - p_f)$ и $\bar{k} = \sum_{f=1}^{d} p_f$ есть среднее число отобранных факторов среди L наборов. С помощью (1) нами получена оценка вероятности соотношения, связывающего меры устойчивости Φ^{base}, Φ^{mod} основного и модифицированного алгоритмов по $T \cdot L$ результатам их работы, $T, L \in \mathbb{N}$. В частности, при выполнении некоторых условий верно следующее неравенство: для любого $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1 - \Phi^{base}}{1 - \Phi^{mod}} \geq t\right) \leq C(t; d, l_0, L, T) \cdot \sum_{f=1}^{d} \exp(-L\mathbb{D}(p_0, p_f)), \tag{2}$$

где $C(t; d, l_0, L, T)$ есть алгебраическая дробь от переменной t с коэффициентами, зависящими от d, l_0, L, T; $p_0 = \frac{l_0}{L}$ и $\mathbb{D}(a, b)$ есть дивергенция Кульбака-Лейблера между двумя бернуллиевскими случайными величинами с параметрами a и b. Неравенство (2) может быть использовано для изучения стабильности модифицированного алгоритма при изменении параметров исходного. Мы иллюстрируем этот подход результатами применения алгоритма LASSO (см., например, [6]) к данным, описываемым как линейной, так и нелинейной моделями.

Список литературы

[1] Li, J. et al. *Feature Selection: A Data Perspective*, ACM Comput. Surv., Vol. 50, Issue 6, 2018, 45 pp.

[2] Naik, A.K., Kuppili, V., Edla, D.R. *A new hybrid stability measure for feature selection*, Applied Intelligence, Vol. 50, Issue 10, 2020, pp. 3471-3486.

[3] Brezočnik, L., Fister, I., Podgorelec, V. *Swarm Intelligence Algorithms for Feature Selection: A Review*, Applied Sciences, Vol. 8, 2018, 1521.

[4] Beinrucker, A., Dogan, Ü., Blanchard, G. *Extensions of stability selection using subsamples of observations and covariates*, Statistics and Computing, Vol. 26, Issue 5, 2016, pp. 1059-1077.

[5] Nogueira S., Sechidis K., Brown G. *On the Stability of Feature Selection Algorithms*, J. Mach. Learn. Res., Vol. 18 (174), 2018, pp. 1–54.

[6] Hastie T., Tibshirani R., Wainwright M. *Statistical Learning with Sparsity. The Lasso and generalizations*, Boca Raton, CRC Press, 2015, 335 pp.

Голономно-инвариантные резонансы Рюэлля диффеоморфизмов Аносова.

Зубов Дмитрий
dmitry.zubov.93@gmail.com

Я расскажу о недавних (и не очень) продвижениях в задаче о классификации голономно-инвариантных собственных функций купмановских трансфер-операторов, ассоциированных с диффеорморфизмами Аносова, и их приложениях к асимптотикам эргодических интегралов потоков Джульетти-Ливерани в случае, когда трансверсальное инвариантное слоение имеет размерность не меньше двух.

Эргодические свойства Перекладываний отрезков.

Кобзев Алексей
kobzev-00@inbox.ru

Одним из возможных обобщений поворота окружности является перекладывание отрезков. Перекладывания отрезков возникают как отображения первого возвращения на трансверсаль в случае ориентируемого измеримого слоения на ориентируемой поверхности. М. Кин доказал, что почти все перекладывания отрезков являются минимальными и сформулировал гипотезу, которая в дальнейшем была независимо доказана Х. Мазуром и В. Вичем, что почти все перекладывания отрезков являются строго эргодичными. В своём докладе я расскажу о примерах перекладываний отрезков, допускающих более одной инвариантной эргодической меры и о методах, позволяющих их построить.

Ветвящиеся процессы в случайной среде с заморозками.

Коршунов Иван
idkorshunov@mail.ru

Известно, что ветвящийся процесс в случайной среде хорошо описывается соответствующим случайным блужданием

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где $\xi_k = \ln \varphi'_{\eta_k}(1)$, $\varphi_x(t)$ и η_k – производящая функция числа потомков и случайная среда. В докладе будут рассмотрены вопросы вырождения ветвящегося процесса в случайной среде с заморозками при $\mathbb{E}\xi_1 > 0$ и $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, отличающегося от обычного ВПСС тем, что каждая среда устанавливается на несколько поколений. Оказывается, что данный вопрос так же тесно связан со случайным блужданием

$$S_n = \tau_1\xi_1 + \ldots + \tau_n\xi_n,$$

где $\xi_k = \ln \varphi'_{\eta_k}(1)$, $\varphi_x(t)$ и η_k – производящая функция числа потомков и случайная среда, а η_k – длительность k-ой заморозки.
В докладе будет показано, что если $\mathbb{E}\xi_1 > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\varepsilon\xi_1 < -\frac{\tau_1 + \ldots + \tau_n}{\tau_n}\right)$$

расходится, то процесс с вероятностью 1 вырождается. Также будет показано, что при $\mathbb{E}\xi_1 > 0$, $0 < \mathbb{D}\xi_1, \infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n^2}{\tau_1^2 + \ldots + \tau_n^2} < \infty$$

процесс вырождается с вероятностью, меньшей 1.

Замена координат и принцип суперпозиции для уравнения Колмогорова.

Красовицкий Тихон
tik714@yandex.ru

Доклад посвящен принципу суперпозиции для уравнения Колмогорова $\partial_t\mu_t = L^*\mu_t$. Мы представим новые достаточные условия для случая неограниченного коэффициента сноса. Также мы обсудим некоторые вспомогательные результаты о принципе суперпозиции для случая уравнения Колмогорова на области и о преобразовании решения соответствующей мартингальной задачи при замене координат.

Условия существования моментов численности частиц в симметричном ветвящемся случайном блуждании в случайной среде.

Куценко Владимир
vlakutsenko@ya.ru

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание в случайной среде. Решетка полагается целочисленной и многомерной, время – непрерывным. Частица за малое время может переместиться в произвольный узел решетки, произвести двух потомков или погибнуть. Случайная среда определяется случайными интенсивностями деления и гибели частиц в каждой точке решетки, которые есть неотрицательные, пространственно независимые и одинаково распределенные случайные величины. Генератор блуждания задается произвольным симметричным оператором. Эволюция частиц происходит независимо друга от друга и от всей предыстории. Предполагается, что в начальный момент времени на решетке находится одна частица. В докладе будет описаны условия на генератор случайного блуждания, необходимые для существования моментов численности частиц при фиксированной реализации среды.

Вероятностный подход к анализу информационной сложности аппроксимации в многопараметрических задачах, связанных с гауссовским ядром, в минимаксном случае и постановке в среднем.

Лимар Иван
ivan.limar95@gmail.com

В докладе рассматриваются мотивация и постановка задачи анализа информационной сложности аппроксимации в многопараметрических задачах, приводится обзор классических результатов. Особо уделяется внимание вероятностному подходу к анализу информационной сложности в минимаксном случае и постановке в среднем, в том числе и в задачах, связанных с гауссовским ядром, и приводятся результаты, полученные вероятностным способом.

Ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbb{Z}_+$. Подход с использованием ортогональных многочленов.

Люлинцев Андрей
lav_100k@mail.ru

Рассматриваются ветвящиеся случайные блуждания с непрерывным временем на $\mathbb{Z}_+$. *Предполагается, что за один шаг блуждания частица может изменить свою координату не более, чем на единицу. Блуждание предполагается симметричным во всех точках, кроме* 0, *но пространственная однородность не предполагается. Источники ветвления могут находиться в каждой точке* $\mathbb{Z}_+$. *Изучается асимптотическое поведение среднего числа частиц в фиксированной точке* $\mathbb{Z}_+$. *Для решения используется теория ортогональных многочленов.*

Асимптотики максимального размера и максимального элемента пересечений множеств Ципфа.

Лялинов Иван
lyalinov239@yandex.ru

В докладе рассматриваются мотивация и постановка задачи анализа пересечений множеств Ципфа. Будут сформулированы: предельная теорема для максимального элемента пересечений множеств Ципфа, следствие о максимальной сумме экспонент элементов пересечения множеств Ципфа, а также некоторые ранее полученные в этой области результаты.

Усреднение одномерного периодического эллиптического дифференциального оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме.

Мишулович Арсений
st062829@student.spbu.ru

Доклад основан на совместной работе с Т. А. Суслиной и В. А. Слоущем. В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается эллиптический дифференциальный оператор A_ε, $\varepsilon > 0$, второго порядка вида $A_\varepsilon = -\frac{d}{dx} g(x/\varepsilon) \frac{d}{dx} + \varepsilon^{-2} p(x/\varepsilon)$ с периодическими коэффициентами. Изучается поведение при малом ε резольвенты оператора A_ε в точке, близкой к краю спектральной лакуны.
Будет дана аппроксимация данной резольвенты в «энергетической» норме (т.е. по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R})$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R})$) с погрешностью порядка $O(\varepsilon)$. Аппроксимация описывается в терминах спектральных характеристик оператора $A := A_1$ на краю спектральной лакуны.

Интегральные тождества для границы выпуклого тела.

Мосеева Татьяна
polezina@yandex.ru

Полученное в 1956 году Плейелем интегральное тождество позволяет выразить среднее значение функции от длины случайной хорды плоского выпуклого тела K, перейдя к интегрированию по границе K. С помощью тождества Плейеля легко можно выразить дефект в изопериметрическом неравенстве на плоскости и показать, что он неотрицателен.
Амбарцумяном в 1990 году была получена версия тождества Плейеля для выпуклых плоских многоугольников, также известная как тождество Амбарцумяна-Плейеля.
Существует также аналог тождества Плейеля для выпуклых тел с гладкой границей в трёхмерном пространстве.
Доклад посвящён обобщениям тождеств Плейеля и Амбарцумяна-Плейеля на случай большей

размерности пространства, а также другим интегральным тождествам, связанным с границей выпуклого тела.

Свойства выпуклых оболочек случайных блужданий. Алгоритмы моделирования.

Мыслюк Александр
sanya.mysliuk@mail.ru

Первые результаты в исследовании выпуклых оболочек случайных множеств точек относятся к 60-м годам. Они начались со статьи Альфреда Реньи и Рольфа Саланке. Ими были рассмотрены основные характеристики плоской выпуклой оболочки равномерно распределённых точек в некоторых выпуклых областях, а также для нормального распределения точек на плоскости. Дальнейшие аналитические результаты для многомерных случаев были получены рядом авторов, из которых хочется отметить результаты, опубликованные Ирен Хойтер в 1999 году. Параллельно изучались асимптотические свойства выпуклых оболочек случайных блужданий. В этом направлении основные результаты связаны с именами Глена Бакстера, Спицера, Видома. Основным представленным результатом данной работы является обобщение комбинаторной леммы Бакстера (1961) и обобщением её следствия, позволяющее получить асимптотики некоторых характеристик выпуклых оболочек случайных блужданий, как пример, математического ожидания числа $(d-1)$-мерных граней выпуклой оболочки случайного блуждания в d-мерном евклидовом пространстве или суммарного объёма граней выпуклой оболочки. Кроме того, в докладе будет затронут вопрос исследования соответствующих асимптотик для ветвящихся случайных блужданий на многомерных решётках с одним источником ветвления, а также описаны алгоритмы моделирования ветвящихся случайных блужданий и вычислений многомерных выпуклых оболочек. Помимо этого будут описаны алгоритмы моделирования выпуклых оболочек в d-мерном пространстве.

Усреднение Боголюбова-Крылова в системах, подверженных действию случайной ударной силы.

Наумов Никита
nannayal@yandex.ru

Классический метод усреднения Крылова–Боголюбова позволяет проводить приближенный анализ нелинейных колебательных процессов. В статье 2020 года С. Б. Куксиным и его коллегами был описан новый метод доказательства теоремы Крылова–Боголюбова об усреднении и предложена возможность распространения подобного подхода на стохастически возмущенные системы. В моем выступлении будет показана возможность применения этого подхода для анализа системы, находящейся под воздействием специфического случайного возмущения.

О вероятностном представлении резольвенты двумерного оператора Лапласа.

Николаев Артем
nikolaiev.96@bk.ru

В докладе будет рассмотрено семейство случайных линейных операторов, возникающее при построении вероятностного представления резольвенты двумерного оператора Лапласа. Будет показано, что с вероятностью единица операторы этого семейства являются интегральными операторами в $L_2(\mathbb{R}^2)$, и исследованы свойства их ядер.

Представление решения уравнения типа Блэка-Шоулза в виде формулы Фейнмана.

Пантелеева Полина
p.y.panteleeva@yandex.ru

Уравнение Блэка-Шоулза – это параболическое уравнение

$$u_t(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}(t,x) + rxu_x(t,x) - ru(t,x), \tag{1}$$

описывающее изменение цены $u(t,x) > 0$ опциона на некоторый финансовый актив с течением времени $t > 0$, при этом $x > 0$ — это цена на актив, $\sigma > 0$ — это волатильность актива, а $r > 0$ — это безрисковая процентная ставка. За открытие этого уравнения в 1997 году была присуждена Нобелевская премия, и оно является одним из основных уравнений финансовой математики. Видно, что коэффициенты уравнения (1) — это неограниченные функции, что доставляет определённые сложности при работе с этим уравнением. Кроме того, неограниченными могут быть и его решения. Формула, явно выражающая решение уравнения (1) через константы r и σ, приведена, например, в [4].
Мы рассмотрим модификацию уравнения (1), взяв вместо постоянных коэффициентов σ и r ограниченные непрерывные функции $x \mapsto \sigma(x)$, $x \mapsto r(x)$:

$$u_t(t,x) = \frac{1}{2}(\sigma(x))^2 x^2 u_{xx}(t,x) + r(x)xu_x(t,x) - r(x)u(t,x). \tag{2}$$

В докладе будет представлена полученная автором доклада формула, выражающая явным образом решение задачи Коши для модифицированного уравнения Блэка-Шоулза (2) через начальное условие $u_0(x) = u(0,x)$ (или конечное условие $u_T(x) = u(T,x)$) и функции $x \mapsto \sigma(x)$, $x \mapsto r(x)$. Эта формула представляет собой предел кратных интегралов по $\mathbb{R}$ при стремящейся к бесконечности кратности, формулы такого вида называются формулами Фейнмана, см. [3], [5, 6]. В качестве математического обоснования полученной формулы будет использована теорема Чернова об аппроксимации операторных полугрупп, см. обзор [1]. В целом, ход доказательства повторяет рассуждения из работы [2] с той лишь разницей, что коэффициенты и решения оказываются неограниченными.
Более того, предел кратных интегралов по $\mathbb{R}^1$ при стремящейся к бесконечности кратности

можно при соблюдении должной осторожности интерпретировать как «интеграл бесконечной кратности», т.е. континуальный (функциональный) интеграл по пространству функций, в котором ищутся решения. Этот интеграл, также известный как интеграл Фейнмана по траекториям, и предшествующие ему формулы Фейнмана можно использовать для описания вероятностных характеристик случайного процесса, траекториями которого являются решения уравнения (2). Всё это делает предлагаемые результаты интересными как с точки зрения теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрении теории случайных процессов и функционального интегрирования.

Автор благодарит И.Д.Ремизова за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] Butko Y. A. *The method of Chernoff approximation*, Conference on Semigroups of Operators: Theory and Applications. – Springer, Cham, 2018. – C. 19-46.

[2] Butko Y. A., Grothaus M., Smolyanov O. G. *Lagrangian Feynman formulas for second-order parabolic equations in bounded and unbounded domains*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics. – 2010. – Т. 13. – №. 03. – С. 377-392.

[3] Feynman R. P. *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Reviews of modern physics. – 1948. – Т. 20. – №. 2. – С. 367.

[4] Goldstein J. A., Mininni R. M., Romanelli S. *A new explicit formula for the solution of the Black-Merton-Scholes equation*, Infinite Dimensional Stochastic Analysis: In Honor of Hui-Hsiung Kuo. – 2008. – С. 226-235.

[5] Remizov I. D. *Quasi-Feynman formulas–a method of obtaining the evolution operator for the Schrödinger equation*, Journal of Functional Analysis. – 2016. – Т. 270. – №. 12. – С. 4540-4557.

[6] Smolyanov O. G., Tokarev A. G., Truman A. *Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula*, Journal of Mathematical Physics. – 2002. – Т. 43. – №. 10. – С. 5161-5171.

Существование решений нелинейной задачи Канторовича оптимальной транспортировки.

Резбаев Айрат
aratyo@yandex.ru

Рассматривается задача Канторовича оптимальной транспортировки с нелинейным функционалом стоимости, порожденным функцией стоимости, которая зависит от плана транспортировки. Также рассмотрен случай функции стоимости, зависящей от условных мер плана транспортировки. Получены широкие достаточные условия существования оптимальных планов для радоновских маргинальных распределений на вполне регулярных пространствах и полунепрерывной снизу функции стоимости.

Неравенства для Характеристик Cusum Процедуры в Задаче Обнаружения Разладки.

Тарасенко Антон
dkanus@gmail.com

Получены оценки в виде неравенств для среднего времени задержки с реагированием на наличие разладки и для среднего времени до ложной тревоги при обнаружении разладки с помощью CUSUM процедуры.

Вероятность достижения удаляющейся границы случайным семейством случайных блужданий с тяжёлым хвостом распределения скачков.

Тесемников Павел
tesemnikov.p@gmail.com

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2022-282.

Рассмотрим набор независимых случайных величин $\{\xi, \xi_{i,j}\}_{i,j \geq 1}$, *распределённых согласно закону* F. *Будем предполагать, что распределение* F *центрировано, т.е.* $\mathbb{E}\xi = 0$, *и имеет тяжёлый правый хвост, т.е.*

$$\mathbb{E}e^{\lambda\xi} = \infty \qquad \text{при любом } \lambda > 0.$$

Мы изучаем точную асимптотику хвоста распределения случайной величины

$$R^g_{\mu,Q} = \max_{1 \leq i \leq Q} \max_{0 \leq n \leq \mu} (S_{i,n} - g(n)),$$

где μ, Q *– положительные целочисленные случайные величины,* g *– произвольная неотрицательная функция, стремящаяся к бесконечности с ростом* n, *а семейство случайных блужданий* $S_{i,n}$ *определено следующим образом:*

$$S_{i,0} = 0, \qquad S_{i,n} = \sum_{j=1}^{n} \xi_{i,j} \text{ при } n \geq 1.$$

В докладе мы приведём условия, при которых асимптотическая форма хвоста распределения $R^g_{\mu,Q}$ *определяется т.н. «принципом одного большого скачка», характерным для тяжелохвостных распределений.*
Доклад основан на совместной работе с С. Г. Фоссом.

Среднее расстояние между двумя точками на границе выпуклой фигуры.

Токмачев Александр
chief.tokma4eff@yandex.ru

Рассмотрим выпуклую фигуру K на плоскости. Пусть $\theta(K)$ обозначает среднее расстояние между двумя случайными точками, независимо и равномерно выбранными на границе K. В докладе будет доказано, что среди всех выпуклых фигур фиксированного периметра максимальное значение $\theta(K)$ достигается на круге и только на нем.

Новый критерий оценки выборки по значимости на примере кодов МПП.

Угловский Артем
uglovskii.aiu@phystech.edu

Коды МПП, широко распространенные в современных технологиях передачи данных, ввиду своей высокой корректирующей способности требуют оценивать вероятность ошибки методами, отличающимися от оценки Монте-Карло. Одним из таких методов является выборка по значимости, применение которой освещено во множестве статей. Нами будет предложен альтернативный метод оценки вероятности ошибки декодирования и показано его преимущество перед старым. Однако, для такого метода существующий критерий оценки является далеко не оптимальным. Одним из основных результатов доклада является предоставление критерия для оценки качества данного метода. Основным его преимуществом является то, что он подходит для большого числа статистик и, в некотором смысле, оценивает второй порядок аппроксимации малости, что дает представление об асимптотических интервалах.
Доклад основан на совместной работе с И.А. Алексеевым, В.Ю. Щукиным и А.А. Куреевым

Ветвящиеся случайные блуждания с одним центром генерации частиц в моделях с конечным и бесконечным числом поглощающих источников.

Филичкина Елена
elena.filichkina1999@yandex.ru

В докладе будут сравниваться ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) по многомерным решеткам с одним центром генерации частиц и различным числом поглощающих источников. ВСБ без поглощающих источников изучено, например, в монографии Яровой (2007), ВСБ с конечным числом поглощающих источников может быть получено как частный случай ВСБ со знакопеременными источниками, которое рассмотрено, например, в совместной работе Яровой, Балашовой и Христолюбова (2021). Основное внимание будет уделено процессу с бесконечным числом поглощающих источников. Оказалось, что несмотря на возможное поглощение в каждой точке, при достаточно большой интенсивности генерации частиц и постоянной интенсивности поглощения, которая предполагается равной в каждой точке решетки, в таком ВСБ может наблюдаться экспоненциальный рост численностей частиц. В этом случае происходит регу-

лярный рост моментов и доказывается слабая сходимость численностей частиц к некоторой случайной величине. Кроме того, в таком процессе может наблюдаться экспоненциальное убывание моментов, что отличает его от рассмотренных ранее моделей ВСБ.

Асимптотика вероятности невырождения почти критических ветвящихся процессов в случайной среде.

Харламов Виктор
vi.v.kharlamov@gmail.com

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №19-11-00111-П, https://rscf.ru/project/19-11-00111/.

Рассмотрим два семейства производящих функций

$$\{f_y, y \in Y\}, \quad \{f_{y,i,n}, y \in Y, 0 \le i < n\},$$

где $(Y, \mathcal{G})$ – *измеримое пространство. Последовательность* $\Xi = \{\xi_i, i \in \mathbb{N}\}$ *независимых и одинаково распределённых случайных элементов со значениями в* $(Y, \mathcal{G})$ *будем называть* случайной средой.

Введём последовательно ветвящийся процесс в случайной среде. Положим $Z_0 = 1$. *При заданных* Z_{k-1} *и* ξ_k, $0 \le k < n$, *определим* Z_k *следующим образом.*

1. *Положим* $F_{k-1} := f_{\xi_k}$.
2. *Пусть* $Y_{i,k}, i \in \{1, \ldots, Z_{k-1}\}$, *являются независимыми случайными величинами с функцией распределения* F_{k-1}. *Предположим, что* $Y_{i,k}, i \in \{1, \ldots, Z_{k-1}\}$, *независимы от прошлого.*
3. *Положим* $Z_k := \sum_{i=1}^{Z_{k-1}} Y_{i,k}$.

Последовательность $\mathcal{Z} = \{Z_k, k \ge 0\}$ *будем называть* ветвящимся процессом в случайной среде (ВПСС).

Положим

$$X_i := \log F'_{i-1}(1), \quad S_0 := 0, \quad S_k := X_1 + \ldots + X_k, \quad i, k \in \mathbb{N}.$$

Последовательность $\{S_k, k \ge 0\}$ *будем называть* сопровождающим случайным блужданием *(ССБ) для ВПСС* $\mathcal{Z}$.

Предположение 1.

$$\mathbb{E}X_1 = 0, \quad \mathbb{D}X_1 \in (0, \infty).$$

Если предположение 1 выполнено, то ВПСС $\mathcal{Z}$ *будем называть* критическим. *Козлов в работе [1] получил асимптотическое поведение* $\mathbb{P}(Z_n > 0)$ *для критического ВПСС с дробно-линейной производящей функцией. Общий случай был рассмотрен Geiger, Kersting в работе [2].*

Введём последовательно возмущённый ветвящийся процесс в случайной среде. Положим $Z_{0,n} = 1, n \ge 1$. *При заданных* $Z_{k-1,n}$ *и* ξ_k, $0 \le k < n$ *определим* $Z_{k,n}$ *следующим образом.*

1. *Положим* $F_{k-1,n} := f_{\xi_k,k-1,n}$.

2. *Пусть* $Y_{i,k,n}, i \in \{1, \dots, Z_{k-1,n}\}$, *являются независимыми случайными величинами с функцией распределения* $F_{k-1,n}$. *Предположим, что* $Y_{i,k,n}, i \in \{1, \dots, Z_{k-1,n}\}$, *независимы от прошлого.*

3. *Положим* $Z_{k,n} := \sum_{i=1}^{Z_{k-1,n}} Y_{i,k,n}$.

Множества $\{Z_{k,n}, 0 \le k \le n\}$ *будем называть возмущённым ветвящимся процессом в случайной среде* (ВВПСС).

Предположение 2. *При всех* $y \in Y$, $0 \le i < n$, $s \in [0,1]$

$$f_{y,i,n}(s) \to f_y(s),\ n \to \infty.$$

ССБ для ВВПСС $\{Z_{k,n}, 0 \le k \le n\}$ *определяется соотношением*

$$S_{0,n} := 0, \quad S_{k,n} := \sum_{i=1}^{k} \log F'_{i-1,n}(1) = \sum_{i=1}^{k} (X_i + a_{i,n}) = S_k + b_{k,n},$$

где $a_{i,n} := \log F'_{i-1,n}(1) - \log F'_{i-1}(1)$, $b_{k,n} := \sum_{i=1}^{k} a_{i,n}$.

Предположение 3. *Введём обозначение*

$$Q_n(C, \delta) := \bigcap_{k=1}^{n} \left\{ |b_{k,n}| \le C k^{1/2-\delta} \right\}.$$

При некоторых $\delta \in (0, 1/2)$, $C > 0$

$$\sqrt{n}\,(1 - \mathbb{P}(Q_n(C,\delta))) \to 0,\ n \to \infty.$$

Из предположения 3 следует, что разность между ССБ для $Z_{k,n}$ *и* Z_k *ограничена с вероятностью, близкой к* 1.
Основной результат этой работы состоит в следующем утверждении.

Теорема 2. *При выполнении предположений 1, 2, 3 и некоторых технических предположениях справедлива эквивалентность*

$$\mathbb{P}(Z_{n,n} > 0) \sim \mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \Upsilon \frac{e^{-c_-}}{\sqrt{\pi n}},\ n \to \infty,$$

где Υ *и* c_- *являются положительными константами.*

Автор глубоко признателен А.В. Шкляеву за постоянную поддержку работы.

Список литературы

[1] Козлов М. В. *Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде*, Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Т. 21. – №. 4. – С. 813-825.

[2] Geiger J., Kersting G. *The survival probability of a critical branching process in a random environment*, Theory of Probability & Its Applications. – 2001. – Т. 45. – №. 3. – С. 517-525.

Некоторые свойства вероятностных дивергенций.

Хлюстов Дмитрий
hlustov.d@gmail.com

Различные классы дивергенций часто применяются для характеризации близости вероятностных мер. Они используются как в теоретических исследованиях (например, посвященных большим уклонениям), так и на практике (в машинном обучении, статистике, обработке сигналов). В последние годы появляется много работ, посвященных так называемым f-дивергенциям, которые определены для мер, имеющих плотность. В данном докладе приводятся новые результаты, описывающие связь различных дивергенций. Исследования в этой области важны для приложений, поскольку в некоторые дивергенции могут обладать свойствами, полезными для решения той или иной задачи - к примеру, ограниченностью или факторизуемостью.

О максимизации суммарной силы команды в конце битвы в модели игры гладиаторов.

Ходякова Мария
khodyakova.mari@mail.ru

Каминским, Люксом и Нельсоном в 1984 году была сформулирована модель, в которой каждый из двух игроков обладает командой гладиаторов с заданными силами. Сражение команд происходит путем индивидуальных поединков. При этом считается, что в каждом поединке вероятность победы гладиатора пропорциональна его силе. Игра происходит, пока в обеих командах есть хотя бы один гладиатор. Ринотт в 2012 году сформулировал в модели Каминского оптимизационную задачу о распределении сил между гладиаторами в начале сражения. В настоящей работе исследуется стратегия команды, при которой по окончании игры её средняя сила максимальна, а также рассматривается случай, когда перераспределение сил происходит перед каждым боем. Для сражения с перераспределением исследуются равновесия Нэша, следуя которым сама команда максимизирует свою силу, а вторая команда либо максимизирует свою силу, либо минимизирует силу первой.

ОРГАНИЗАЦИИ

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург

Математический центр мирового уровня «Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера» (МЦМУ им. Л.Эйлера), г. Санкт-Петербург

Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург

Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН), г. Москва

Математический Институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук, г. Москва

Конференция проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант на создание и развитие МЦМУ им. Л.Эйлера, соглашение № 075–15–2022–287, грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2022-265).