Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 516, 2022 г.

А. А. Мишулович

УСРЕДНЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА КРАЮ ВНУТРЕННЕЙ ЛАКУНЫ

§1. Введение

1.1. Усреднение в пределе малого периода. Задачи об усреднении в пределе малого периода (гомогенизации) дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами чрезвычайно разнообразны; этим задачам посвящена обширная литература (см., например, [1–3]). Задачи об усреднении существенно различаются как своими постановками, так и используемыми методами и характером полученных результатов.

Обсудим типичную задачу теории усреднения. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим эллиптический оператор $\widehat{A}_\varepsilon$, формально заданный выражением

$$\widehat{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\nabla, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $g(\boldsymbol{x})$ – симметричная матрица-функция размера $d \times d$ с вещественными элементами; предполагается, что $g(\boldsymbol{x})$ положительно определена, ограничена и периодична относительно решетки $\mathbb{Z}^d$. Строгое определение оператора $\widehat{A}_\varepsilon$ дается через квадратичную форму. Пусть $u_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ – обобщенное решение эллиптического уравнения $\widehat{A}_\varepsilon u_\varepsilon + u_\varepsilon = f$, где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Базовый результат теории усреднения: при $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится к решению u_0 "усредненного" уравнения $\widehat{A}^0 u_0 + u_0 = f$. Здесь $\widehat{A}^0$ – так называемый *эффективный* оператор, имеющий вид $\widehat{A}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$; а g^0 – постоянная положительная матрица, называемая *эффективной матрицей.* Поскольку $u_\varepsilon = (\widehat{A}_\varepsilon + I)^{-1} f$, то в операторных терминах вопрос состоит в нахождении аппроксимаций резольвенты $(\widehat{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, спектральная лакуна, параболическое уравнение, усреднение, операторные оценки погрешности.

Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 22-11-00092).

Обсудим теперь задачу Коши для параболического уравнения. Пусть $v_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ – решение задачи $\partial_t v_\varepsilon = -\widehat{A}_\varepsilon v_\varepsilon$, $t > 0$; $v_\varepsilon|_{t=0} = \phi$, где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$. И снова базовый результат состоит в сходимости решения v_ε к решению v_0 "усредненной" задачи $\partial_t v_0 = -\widehat{A}^0 v_0$, $t > 0$; $v_0|_{t=0} = \phi$. Поскольку $v_\varepsilon(\cdot, t) = e^{-\widehat{A}_\varepsilon t}\phi$, то в операторных терминах вопрос состоит в нахождении аппроксимаций экспоненты $e^{-\widehat{A}_\varepsilon t}$ при $t > 0$ и малом ε.

1.2. Операторные оценки погрешности. В работах Бирмана и Суслиной [4–7] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам теории усреднения (вариант спектрального метода). В [4, 5] установлена оценка

$$\left\|(\widehat{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{A}^0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

В [6] получена более точная аппроксимация резольвенты оператора $\widehat{A}_\varepsilon$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ с учетом так называемого корректора; в работе [7] найдена аппроксимация резольвенты $\widehat{A}_\varepsilon$ по "энергетической" норме (т. е., по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$).

К усреднению параболических уравнений теоретико-операторный подход применялся в работах [8–11]. В [8, 9] была установлена оценка

$$\left\|e^{-\widehat{A}_\varepsilon t} - e^{-\widehat{A}^0 t}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\sqrt{t+\varepsilon^2}}, \quad t > 0,\ \varepsilon > 0. \tag{1.2}$$

В [10] получена более точная аппроксимация экспоненты $e^{-\widehat{A}_\varepsilon t}$ при учете корректора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ (при фиксированном t); в [11] найдена аппроксимация экспоненты по энергетической норме.

Отметим, что в процитированных выше работах аппроксимации для резольвенты и полугруппы были найдены не только для операторов вида (1.1), но для широкого класса матричных дифференциальных операторов второго порядка.

Теоретико-операторный метод основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. *Масштабным преобразованием* изучение оператора $(\widehat{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε сводится к изучению поведения резольвенты $(\widehat{A} + \varepsilon^2 I)^{-1}$. Здесь $\widehat{A} = \widehat{A}_1 = -\operatorname{div} g(\boldsymbol{x})\nabla$. Аналогично, изучение оператора $e^{-\widehat{A}_\varepsilon t}$ при малом ε сводится к изучению экспоненты $e^{-\widehat{A}\tau}$ при большом $\tau = \varepsilon^{-2}t$. С помощью теории Флоке–Блоха оператор

$\widehat{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{A}(\boldsymbol{\xi})$. Оператор $\widehat{A}(\boldsymbol{\xi})$ действует в $L_2((0,1)^d)$ и задается дифференциальным выражением $-\operatorname{div} g(\boldsymbol{x})\nabla$ при $\boldsymbol{\xi}$–квазипериодических граничных условиях. Параметр $\boldsymbol{\xi}$ называют *квазиимпульсом*. Спектр оператора $\widehat{A}(\boldsymbol{\xi})$ дискретен. Пусть $E_1(\boldsymbol{\xi})$ – первое собственное значение и $\psi_1(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi})$ – первая собственная функция оператора $\widehat{A}(\boldsymbol{\xi})$. Выясняется, что поведение резольвенты $(\widehat{A}+\varepsilon^2 I)^{-1}$ либо экспоненты $e^{-\widehat{A}\tau}$ можно описать в терминах спектральных характеристик оператора $\widehat{A}$ на краю спектра (имеются в виду асимптотики для $E_1(\boldsymbol{\xi})$ и $\psi_1(\mathbf{x};\boldsymbol{\xi})$ при $|\boldsymbol{\xi}|\to 0$). В частности, эффективная матрица g^0 получается из асимптотики первой зонной функции $E_1(\boldsymbol{\xi})$ при $|\boldsymbol{\xi}|\to 0$: $E_1(\boldsymbol{\xi})\sim\langle g^0\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}\rangle$. Таким образом, эффект усреднения можно трактовать как пороговый эффект на краю спектра периодического оператора $\widehat{A}$.

Другой подход к операторным оценкам погрешности при усреднении эллиптических и параболических уравнений в $\mathbb{R}^d$ (так называемый метод сдвига) был развит Жиковым и Пастуховой [12–14]; см. также обзор [15].

1.3. Усреднение на краю спектральной лакуны. Понимание порогового характера эффекта усреднения влечет вопрос: спектр периодического оператора $\widehat{A}$ имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Имеет ли смысл связывать с краями внутренних лакун аналоги задач усреднения? Этот вопрос изучался в работах [16, 17] в одномерном случае и в [18, 19] в случае произвольной размерности d.

Пусть $\lambda_+>0$ – край внутренней лакуны в спектре оператора $\widehat{A}$ (для определенности будем считать, что это правый край). Для оператора $\widehat{A}_\varepsilon$ этот край перейдет в точку $\varepsilon^{-2}\lambda_+$, то есть, в область высоких энергий. Фиксируем $\varkappa>0$ такое, что точка $\varepsilon^{-2}\lambda_+-\varkappa^2$ лежит в лакуне при $0<\varepsilon\leqslant 1$. Рассматривается эллиптическое уравнение $\widehat{A}_\varepsilon u_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\lambda_+-\varkappa^2)u_\varepsilon=f$, где $f\in L_2(\mathbb{R}^d)$. Вопрос о поведении решения u_ε при $\varepsilon\to 0$ сводится к изучению оператора $(\widehat{A}_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\lambda_+-\varkappa^2)I)^{-1}$, а после масштабного преобразования – к изучению резольвенты $(\widehat{A}-(\lambda_+-\varepsilon^2\varkappa^2)I)^{-1}$. Аппроксимация описывается в терминах спектральных характеристик оператора $\widehat{A}$ на данном краю лакуны. В работе [16] при $d=1$ была получена аппроксимация резольвенты $(\widehat{A}_\varepsilon-(\varepsilon^{-2}\lambda_+-\varkappa^2)I)^{-1}$ с погрешностью $O(\varepsilon)$. При этом выяснилось, что с каждым краем лакуны связан свой эффективный оператор. Приближение представляло собой резольвенту эффективного оператора, окаймленную некоторыми быстро осциллирующими множителями. В [17] этот результат был распространен на более общий оператор вида (1.3) (см. ниже), а также была установлена более точная аппроксимация резольвенты $\big(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I\big)^{-1}$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ при учете корректора. В произвольной размерности аппроксимация резольвенты в старшем порядке получена в [18], а более точное приближение – в [19].

Усреднение параболического уравнения на краю внутренней спектральной лакуны в одномерном случае рассматривалось в работе [20]. Мы рассмотрим многомерную задачу усреднения параболического уравнения на краю спектральной лакуны оператора A_ε.

1.4. Постановка задачи. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассматривается эллиптический дифференциальный оператор A_ε второго порядка, заданный выражением

$$A_\varepsilon = \mathbf{D}^* \widetilde{g}\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\mathbf{D} + \varepsilon^{-2} p\Big(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big), \quad \mathbf{D} = -i\nabla, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\widetilde{g}(\boldsymbol{x})$ – ограниченная и положительно определенная матрица-функция, периодическая относительно решетки $\mathbb{Z}^d$, $p(\boldsymbol{x})$ – вещественный $\mathbb{Z}^d$-периодический потенциал. Обозначим $A := A_1 = \mathbf{D}^*\widetilde{g}(\boldsymbol{x})\mathbf{D} + p(\boldsymbol{x})$. Введем масштабное преобразование – семейство унитарных операторов T_ε в $L_2(\mathbb{R}^d)$: $(T_\varepsilon u)(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^{d/2} u(\varepsilon \boldsymbol{x})$, $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что справедливо соотношение

$$A_\varepsilon = T_\varepsilon^* (\varepsilon^{-2} A) T_\varepsilon. \tag{1.4}$$

Спектр оператора A имеет зонную структуру: $\sigma(A) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} [\nu_s, \mu_s]$. В силу (1.4) спектр оператора A_ε имеет вид: $\sigma(A_\varepsilon) = \bigcup\limits_{s=1}^{\infty} [\varepsilon^{-2}\nu_s, \varepsilon^{-2}\mu_s]$. Предположим, что спектр оператора A имеет внутреннюю лакуну (λ_-, λ_+); тогда спектр оператора A_ε имеет лакуну $(\varepsilon^{-2}\lambda_-, \varepsilon^{-2}\lambda_+)$.

Основной объект изучения – полугруппа, порожденная оператором A_ε, срезанная спектральным проектором оператора A_ε на интервал вида $[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty)$. *Основная задача* – получить асимптотику срезанной полугруппы $e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}\big[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\big)$ при $t > 0$ и малых значениях ε.

Это соответствует изучению решения задачи Коши для параболического уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x},t) = -(A_\varepsilon u_\varepsilon)(\boldsymbol{x},t), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ t>0, \\ u_\varepsilon(\boldsymbol{x},0) = \left(E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\right) f\right)(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1.5}$$

при малом $\varepsilon > 0$. Мы находим старший член аппроксимации срезанной полугруппы $e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\right)$ (теорема 2.5), а также более точную аппроксимацию при учете корректора (теоремы 2.7 и 2.8). Результаты формулируются в терминах спектральных характеристик оператора A вблизи точки λ_+.

Работа состоит из введения и трех параграфов. В §2 обсуждается спектральное разложение оператора A и формулируются основные результаты работы; в §3 приведены доказательства основных результатов; в §4 результаты применяются к усреднению решений задачи Коши (1.5) и более общей задачи для неоднородного уравнения.

1.5. Обозначения. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$. Через $L_p(\mathcal{O})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначим стандартные L_p-классы в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$; через $\|\cdot\|_p$ – норму в L_p-классе. Для линейного ограниченного оператора $T\colon L_2 \longrightarrow L_2$ через $\|T\|$ обозначим стандартную операторную норму. Для измеримой функции f через $[f]$ или $[f(\boldsymbol{x})]$ обозначим оператор умножения на функцию f в пространстве L_2. Через $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями; через $H^1(\mathbb{R}^d)$ – стандартный класс Соболева; $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ – класс функций $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, для которых произведение $f\varphi$ принадлежит $H^1(\mathbb{R}^d)$ при всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Пусть $\Omega := (0,1)^d$ – ячейка решетки $\mathbb{Z}^d$; $\widetilde{H}^1(\Omega)$ – подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, периодическое продолжение которых принадлежит классу $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Если $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, то пространство $\widetilde{H}^1_{\boldsymbol{\xi}}(\Omega)$ определяется как класс функций вида $e^{i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} u(\boldsymbol{x})$, где $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.

Далее, если через $\mathcal{A}$ обозначить самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве, то $\sigma(\mathcal{A})$ обозначает спектр оператора $\mathcal{A}$. Если δ – борелевское множество на оси, то $E_{\mathcal{A}}(\delta)$ – спектральный проектор оператора $\mathcal{A}$, отвечающий множеству δ.

Для функций $f(\boldsymbol{x})$ в $\mathbb{R}^d$ положим $f^\varepsilon(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$. Пусть Φ – преобразование Фурье в $\mathbb{R}^d$:

$$(\Phi u)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d).$$

Символ $\mathbf{1}$ означает единичную $(d \times d)$-матрицу.

§2. Спектральное разложение периодического оператора в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Формулировка основных результатов

2.1. Определение оператора. Факторизация. Рассмотрим самосопряженный равномерно эллиптический оператор A (аналогичный тому, что был определен во введении), порожденный дифференциальным выражением

$$A = \mathbf{D}^* \widetilde{g}\,(\boldsymbol{x})\, \mathbf{D} + p\,(\boldsymbol{x})\,, \tag{2.1}$$

где $\widetilde{g}$ – симметричная $(d \times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, а p – вещественная функция, причем выполнены условия

$$\begin{gathered} c_0 \mathbf{1} \leqslant \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \leqslant c_1 \mathbf{1}, \quad 0 < c_0 \leqslant c_1 < \infty, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \\ \widetilde{g}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}) = \widetilde{g}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} p \in L_q\,(\Omega)\,, \quad 2q > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad q = 1 \text{ при } d = 1, \\ p(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{n}) = p(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^d. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Точное определение оператора A дается через полуограниченную замкнутую в $L_2(\mathbb{R}^d)$ квадратичную форму

$$a[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(\langle \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \nabla u, \nabla u\rangle + p(\boldsymbol{x})|u|^2\right) d\boldsymbol{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.4}$$

За счет добавления к $p(\boldsymbol{x})$ подходящей константы можно считать, что нижним краем спектра оператора A является точка $\lambda_0 = 0$:

$$\inf \sigma(A) = 0. \tag{2.5}$$

При условиях (2.2), (2.3) и (2.5) существует положительное $\mathbb{Z}^d$-периодическое решение $\omega(\boldsymbol{x})$ уравнения (см. [5, гл. 6, §1])

$$\mathbf{D}^* \widetilde{g}\,(\boldsymbol{x})\, \mathbf{D} \omega\,(\boldsymbol{x}) + p\,(\boldsymbol{x})\, \omega\,(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Решение ω определено с точностью до постоянного множителя, который можно фиксировать так, что

$$\int\limits_{\Omega} \omega^2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1. \tag{2.6}$$

При этом $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ и обладает свойством

$$0 < \omega_0 \leqslant \omega(\boldsymbol{x}) \leqslant \omega_1 < \infty. \tag{2.7}$$

Кроме того, $\omega \in C^\alpha$ при некотором $\alpha > 0$ и ω является мультипликатором в $H^1(\mathbb{R}^d)$, а также в $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Подстановка $u = \omega v$ преобразует форму (2.4) к виду

$$a[u,u] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\boldsymbol{x}) \left\langle \widetilde{g}(\boldsymbol{x}) \nabla v(\boldsymbol{x}), \nabla v(\boldsymbol{x}) \right\rangle \, d\boldsymbol{x}, \quad v = \omega^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2.8}$$

Тогда выражение (2.1) запишется в факторизованном виде

$$A = \omega^{-1} \mathbf{D}^* g \mathbf{D} \omega^{-1}, \quad g := \widetilde{g} \omega^2. \tag{2.9}$$

Замечание 2.1. Выражение (2.9) можно принять за определение оператора A, тогда можно считать, что ω – $\mathbb{Z}^d$-периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7). Именно это определение и будет принято за исходное. Ниже считаем, что A есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, порожденный квадратичной формой (2.8), где $\widetilde{g}$ – симметричная матрица-функция с вещественными элементами, удовлетворяющая условиям (2.2), а ω – $\mathbb{Z}^d$-периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7). Вернуться к записи вида (2.1) можно, полагая $p(\boldsymbol{x}) = -\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \mathbf{D}^* g\,(\boldsymbol{x})\, \mathbf{D} \omega(\boldsymbol{x})$. Получающийся при этом потенциал p может оказаться сингулярной обобщенной функцией.

2.2. Спектральные характеристики оператора A**.** Опишем спектральное разложение оператора A. Мы следуем работам [21,22], а также [23]. В $L_2(\Omega)$ введем семейство квадратичных форм

$$a_{\boldsymbol{\xi}}[u,u] = \int\limits_{\Omega} \left\langle g(\boldsymbol{x}) \nabla v, \nabla v \right\rangle \, d\boldsymbol{x}, \quad v = \omega^{-1} u \in \widetilde{H}^1_{\boldsymbol{\xi}}(\Omega), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.10}$$

Параметр $\boldsymbol{\xi}$ будем называть *квазиимпульсом.* Область определения $\mathcal{D}[a_{\boldsymbol{\xi}}]$ формы (2.10) состоит из функций $u(\boldsymbol{x})$, таких что $\omega^{-1} u \in \widetilde{H}^1_{\boldsymbol{\xi}}(\Omega)$.

Порожденный формой (2.10) самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$ обозначим через $A(\boldsymbol{\xi})$. Все операторы $A(\boldsymbol{\xi})$ имеют дискретный спектр. Пусть $E_l(\boldsymbol{\xi})$, $l \in \mathbb{N}$, – последовательные собственные значения оператора $A(\boldsymbol{\xi})$, занумерованные с учетом кратностей. Таким образом,

$$E_1(\boldsymbol{\xi}) \leqslant E_2(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \dots \leqslant E_s(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \dots, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma(A(\boldsymbol{\xi})) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{E_l(\boldsymbol{\xi})\}.$$

Функции $E_l(\boldsymbol{\xi})$, $l \in \mathbb{N}$, называют “зонными функциями”. Зонные функции непрерывны и периодичны с решеткой $(2\pi\mathbb{Z})^d$. Далее, через $\widetilde{\Omega} := [-\pi, \pi)^d$ обозначим ячейку двойственной решетки $(2\pi\mathbb{Z})^d$. Ячейку $\widetilde{\Omega}$ можно отождествить с d-мерным тором $\mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$.

Пусть $\psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ – ортонормированные собственные функции оператора $A(\boldsymbol{\xi})$. Они $(2\pi\mathbb{Z})^d$-периодические по $\boldsymbol{\xi}$, а также имеют представление

$$\psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \exp(i\,\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle)\varphi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}), \tag{2.11}$$

где $(\omega^{-1}\varphi_l)(\cdot, \boldsymbol{\xi})$, $l \in \mathbb{N}$, – функции из $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Функции $\omega^{-1}\psi_l$, $\omega^{-1}\varphi_l$ гельдеровски непрерывны по $\boldsymbol{x}$ (см. замечание 2.3 ниже). Определим интегральные операторы $\Psi_l\colon L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$ равенствами

$$(\Psi_l u)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d), \quad l \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Операторы Ψ_l – частично-изометрические отображения пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ на $L_2(\widetilde{\Omega})$. Операторы $\Psi_l^*\Psi_l$, $l \in \mathbb{N}$, суть ортопроекторы в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Они попарно ортогональны и $\sum\limits_{l \in \mathbb{N}} \Psi_l^* \Psi_l = I$.

Операторы, определенные в (2.12), частично диагонализуют оператор A. Именно, справедливо разложение Флоке–Блоха:

$$A = \sum_{l \in \mathbb{N}} \Psi_l^* [E_l] \Psi_l. \tag{2.13}$$

В силу (2.13) спектр оператора A имеет зонную структуру, т. е. справедливо равенство

$$\sigma(A) = \bigcup_{s=1}^{\infty} [\nu_s, \mu_s], \quad [\nu_s, \mu_s] = \operatorname{Ran} E_s, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Отрезки $[\nu_j, \mu_j]$ будем называть спектральными зонами. Разделяющие зоны интервалы будем называть спектральными лакунами. В многомерном случае зоны могут перекрываться (см. [23]). Снова отметим, что $\inf \sigma(A) = \min_{\boldsymbol{\xi}} E_1(\boldsymbol{\xi}) = 0$. Таким образом, спектр оператора A имеет полубесконечную лакуну $(-\infty, 0)$:

$$\sigma(A) \cap (-\infty, 0) = \varnothing.$$

Помимо полубесконечной лакуны в спектре оператора A также могут открываться внутренние лакуны. Пусть для некоторого $s \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\lambda_- = \max_{\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}} E_s(\boldsymbol{\xi}) < \min_{\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}} E_{s+1}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_+. \tag{2.14}$$

В этом случае справедливы соотношения:

$$\sigma(A) \cap (\lambda_-, \lambda_+) = \varnothing, \quad \lambda_\pm \in \sigma(A).$$

Примем обычное (ср. [21], [22]) условие регулярности правого края лакуны (λ_-, λ_+).

Условие 2.2. *Будем говорить, что правый край лакуны (λ_-, λ_+) регулярен, если выполнено следующее:*

(1) *Минимум функции $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$ достигается лишь в конечном числе точек $\boldsymbol{\xi}_j \in \widetilde{\Omega}$, $j = 1, \dots, m$, каждая из которых есть точка невырожденного минимума функции E_{s+1}.*

(2) $\min_{\boldsymbol{\xi} \in \widetilde{\Omega}} E_{s+2}(\boldsymbol{\xi}) > \lambda_+$.

В силу условия регулярности число $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$ является простым собственным значением оператора $A(\boldsymbol{\xi})$ в некоторых окрестностях точек $\boldsymbol{\xi}_j$, $j = 1, \dots, m$. Отсюда следует, что в некоторых малых окрестностях точек $\boldsymbol{\xi}_j$, $j = 1, \dots, m$, функция $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$ вещественно аналитична; далее предполагаем, что окрестности точек $\boldsymbol{\xi}_j$ являются шарами радиуса δ:

$$\mathcal{E}_j(\delta) := \left\{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j| < \delta \right\}, \quad j = 1, \dots, m, \tag{2.15}$$

где $\delta > 0$ достаточно мало. Тогда в силу условия 2.2 справедливо разложение

$$E_{s+1}(\boldsymbol{\xi}) = \lambda_+ + b_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + d_j(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j) + O(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j|^4),$$
$$\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta), \quad j = 1, \dots, m. \tag{2.16}$$

Здесь b_j – положительно определенные квадратичные формы в $\mathbb{R}^d$:

$$b_j(\boldsymbol{\eta}) = \langle g_j^0 \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \sum_{k,s=1}^{d} b_{j,ks} \eta^k \eta^s, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.17}$$

где $g_j^0 = \{b_{j,ks}\}$ – симметричные положительно определенные матрицы с вещественными элементами; а кубические формы d_j заданы выражениями

$$d_j(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{p,q,r=1}^{d} \alpha_{j,pqr}\eta^p\eta^q\eta^r, \quad \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.18}$$

где $\alpha_{j,pqr}$ – вещественные коэффициенты. Во всем дальнейшем лакуна (λ_-, λ_+) фиксирована, индекс $s+1$ часто опускается в обозначениях. Именно, $E_{s+1}(\boldsymbol{\xi})$ обозначим через $E(\boldsymbol{\xi})$, $\psi_{s+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ обозначим через $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, $\varphi_{s+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ – через $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ и Ψ_{s+1} – через Ψ. Кроме того, положим

$$\begin{aligned} &\psi_j(\boldsymbol{x}) := \psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_j), \quad \varphi_j(\boldsymbol{x}) := \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_j),\\ &\psi_j(\boldsymbol{x}) = \exp\left(i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_j\rangle\right)\varphi_j(\boldsymbol{x}), \quad j = 1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Введем обозначения

$$\mathcal{H}^1(\Omega) := \{f : \omega^{-1}f \in H^1(\Omega)\}, \quad \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) := \{f : \omega^{-1}f \in \widetilde{H}^1(\Omega)\}.$$

Отметим следующие факты (см. [19]). Функцию $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ можно выбрать измеримой по паре аргументов $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$, а также вещественно аналитической по $\boldsymbol{\xi}$ в окрестностях (2.15) со значениями в $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Тогда функция $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ оказывается вещественно аналитической по $\boldsymbol{\xi}$ в окрестностях (2.15) со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$.

Введем обозначения

$$\varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial}{\partial \xi^k}\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\bigg|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_j}, \quad \psi_{jk}(\boldsymbol{x}) := \varphi_{jk}(\boldsymbol{x})\exp(i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_j\rangle), \tag{2.20}$$

где $k = 1,\ldots,d$, $j = 1,\ldots,m$. Нам также понадобится формула Тейлора для φ:

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \varphi_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=1}^{d}\varphi_{jk}(\boldsymbol{x})(\xi^k - \xi_j^k) + O(|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2), \ \ \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta). \tag{2.21}$$

Можно показать, что (см. [19]) функцию $\psi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ можно выбрать так, чтобы функция $\varphi_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1,\ldots,m$, удовлетворяла нормировке $\|\varphi_j\|_{L_2(\Omega)} = 1$, являлась слабым $\mathbb{Z}^d$-периодическим решением уравнения

$$\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\right)^* g(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\right)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j(\boldsymbol{x}) = \lambda_+\varphi_j(\boldsymbol{x}), \tag{2.22}$$

и удовлетворяла тождеству

$$\sum_{l=1}^{d} \operatorname{Re} \int_{\Omega} \left(g_{kl}(\boldsymbol{x})(\mathrm{D}_l + \xi_j^l)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j(\boldsymbol{x})\right) \left(\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})}\right) d\boldsymbol{x} = 0, \quad (2.23)$$

где $g(\boldsymbol{x}) = \{g_{kl}(\boldsymbol{x})\}_{k,l=1}^{d}$.

Функция φ_{jk}, $k = 1, \dots, d$, $j = 1, \dots, m$, является слабым $\mathbb{Z}^d$-периодическим решением уравнения

$$\begin{aligned} &\left(\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\right)^* g(\boldsymbol{x}) \left(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi}_j\right) \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) - \lambda_+\right) \varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) \\ &\qquad = -\sum_{l=1}^{d} \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) g_{kl}(\boldsymbol{x}) \left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right) \omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j(\boldsymbol{x}) \\ &\qquad\quad - \sum_{l=1}^{d} \omega^{-1}(\boldsymbol{x}) \left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right) g_{kl}(\boldsymbol{x})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Тождество (2.23) играет роль условия разрешимости для уравнения (2.24). Общее решение уравнения (2.24) определяется с точностью до слагаемого вида $c\varphi_j(\boldsymbol{x})$, $c \in \mathbb{C}$. Выделим единственное $\mathbb{Z}^d$-периодическое решение $\widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющее условию ортогональности

$$\int_{\Omega} \widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x})\overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})}\, d\boldsymbol{x} = 0. \quad (2.25)$$

Тогда общее решение уравнения (2.24) можно записать в виде

$$\varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x}) + c\varphi_j(\boldsymbol{x}).$$

Используя условия нормировки $\|\varphi(\cdot, \boldsymbol{\xi})\| = 1$, $\|\varphi_j\| = 1$, и представление (2.21), можем заключить, что справедливо равенство

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \varphi_{jk}(\boldsymbol{x})\overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})}\, d\boldsymbol{x} = 0,$$

откуда вытекает, что $\operatorname{Re} c = 0$. Из сказанного следует, что существует константа $c_{jk} \in \mathbb{R}$, такая что

$$\varphi_{jk}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x}) + ic_{jk}\varphi_j(\boldsymbol{x}). \quad (2.26)$$

Положим

$$\widehat{\psi}_{jk}(\boldsymbol{x}) := \widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x}) \exp\left(i \left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j \right\rangle\right). \quad (2.27)$$

Из (2.19), (2.20), (2.26) и (2.27) следует, что

$$\psi_{jk}(\boldsymbol{x}) = \widehat{\psi}_{jk}(\boldsymbol{x}) + ic_{jk}\psi_j(\boldsymbol{x}), \quad c_{jk} \in \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

Замечание 2.3. 1°. Следуя [22, §4, пункт 9], заметим, что функция $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ является слабым $\mathbb{Z}^d$-периодическим решением уравнения

$$\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\,(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})^*\, g(\boldsymbol{x})\,(\mathbf{D} + \boldsymbol{\xi})\,\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = E(\boldsymbol{\xi})\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}). \tag{2.29}$$

Как отмечалось выше, в силу условия 2.2 при достаточно малом $\delta > 0$ функция $E(\boldsymbol{\xi})$ вещественно аналитична в шаре $\mathcal{E}_j(\delta)$, $j = 1, \dots, m$, а функцию $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ можно выбрать вещественно аналитической по $\boldsymbol{\xi}$ в окрестностях $\mathcal{E}_j(\delta)$, $j = 1, \dots, m$, со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$; при этом функция $\varphi(\cdot, \boldsymbol{\xi})$ нормирована в $L_2(\Omega)$. Тогда функцию $E(\boldsymbol{\xi})$ и решение $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ можно аналитически продолжить в некоторый *комплексный* шар $\mathcal{B}_j$ с центром в точке $\boldsymbol{\xi}_j$ так, что уравнение (2.29) сохранит свою силу (условие нормировки, вообще говоря, нарушится). Разделяя в (2.29) вещественную и мнимую части, получаем систему уравнений с одинаковыми диагональными главными частями. В [24, теорема 2.1 из гл. VII] для решений таких систем получены оценки максимума модуля при условиях Дирихле. Однако вывод этих оценок без существенных изменений переносится на случай периодических граничных условий. В нашем случае правая часть равна нулю, что подпадает под условия теоремы, упомянутой выше, откуда следует оценка

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \Omega} |\omega(\boldsymbol{x})^{-1}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant \check{C}_j \|\omega^{-1}\varphi(\cdot, \boldsymbol{\xi})\|_{L_2(\Omega)}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_j, \tag{2.30}$$

где константа $\check{C}_j$ зависит от c_0, c_1, ω_1 и $\max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_j} |E(\boldsymbol{\xi})|$. Более того, из результатов [24, гл. VII] следует, что функция $\omega(\boldsymbol{x})^{-1}\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ гельдеровски непрерывна по $\boldsymbol{x}$ с некоторым показателем $\alpha > 0$.

2°. В силу ограниченности ω, ω^{-1}, а также аналитичности $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ по $\boldsymbol{\xi}$ правая часть в (2.30) ограничена, а потому

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \Omega} |\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})| \leqslant C_j, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_j. \tag{2.31}$$

Из соотношения (2.31) следует, что $\varphi_j \in L_\infty(\Omega)$. Кроме того, из сказанного выше следует, что функция $\omega^{-1}\varphi_j$ гельдеровски непрерывна.

3°. Норма $\|\varphi(\cdot, \boldsymbol{\xi})\|_{L_\infty(\Omega)}$ равномерно ограничена по $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{B}_j$ (неравенство (2.31)). В силу интегрального представления для производной функции φ по ξ^k (формулы Коши), справедливо также включение $\varphi_{jk} \in L_\infty(\Omega)$.

Стандартными методами теории возмущений можно получить следующее утверждение.

Замечание 2.4. Коэффициенты $b_{j,ks}$ из (2.17) могут быть выражены в терминах решений вспомогательных задач:

$$\begin{aligned} b_{j,ks} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \Big\{ &\Big\langle g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{jk}}{\omega}\Big) + g_k^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_j}{\omega}\Big), g_s^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_j}{\omega}\Big)\Big\rangle \\ &+ \Big\langle g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{js}}{\omega}\Big) + g_s^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_j}{\omega}\Big), g_k^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_j}{\omega}\Big)\Big\rangle \\ &+ \Big\langle g_s^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{jk}}{\omega}\Big) + g_k^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{js}}{\omega}\Big), g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\Big(\frac{\psi_j}{\omega}\Big)\Big\rangle\Big\}\, d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Коэффициенты $\alpha_{j,ksp}$ из (2.18) могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_{j,ksp} = \frac{1}{3}\int\limits_{\Omega} \Big\{ &\Big\langle g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\Big(\frac{\psi_{jks}}{\omega}\Big) + \frac{1}{2}g_s^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{jk}}{\omega}\Big) + \frac{1}{2}g_k^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{js}}{\omega}\Big), g_p^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_j}{\omega}\Big)\Big\rangle \\ &+ \Big\langle g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\Big(\frac{\psi_{jps}}{\omega}\Big) + \frac{1}{2}g_p^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{js}}{\omega}\Big) + \frac{1}{2}g_s^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{jp}}{\omega}\Big), g_k^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_j}{\omega}\Big)\Big\rangle \\ &+ \Big\langle g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\Big(\frac{\psi_{jkp}}{\omega}\Big) + \frac{1}{2}g_k^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{jp}}{\omega}\Big) + \frac{1}{2}g_p^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\widehat{\psi}_{jk}}{\omega}\Big), g_s^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_j}{\omega}\Big)\Big\rangle \\ &+ \Big\langle g_s^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_{jkp}}{\omega}\Big) + g_k^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_{jsp}}{\omega}\Big) + g_p^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{\psi_{jsk}}{\omega}\Big), g^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\Big(\frac{\psi_j}{\omega}\Big)\Big\rangle\Big\}\, d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Здесь $g_k^{1/2}$ – k-ый столбец матрицы $g^{1/2}$; функции $\widehat{\psi}_{jk}$ определены в (2.27); функции $\psi_{jps} := \exp(i\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_j\rangle)\varphi_{jps}$, где φ_{jps} являются единственными слабыми $\mathbb{Z}^d$-периодическими решениями задач

$$\begin{aligned} &\Big(\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\right)^* g(\boldsymbol{x})\left(\mathbf{D}+\boldsymbol{\xi}_j\right)\omega^{-1}(\boldsymbol{x}) - \lambda_+\Big)\varphi_{jps}(\boldsymbol{x}) \\ &\quad = b_{j,ps}\varphi_j(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\Big\{\sum_{l=1}^{d}\omega^{-1}(\boldsymbol{x})g_{pl}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\widehat{\varphi}_{js}(\boldsymbol{x}) \\ &\qquad + \sum_{l=1}^{d}\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_l + \xi_j^l\right)g_{pl}(\boldsymbol{x})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\widehat{\varphi}_{js}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{l=1}^{d}\omega^{-1}(\boldsymbol{x})g_{sl}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_l+\xi_j^l\right)\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\widehat{\varphi}_{jp}(\boldsymbol{x})\\
&+\sum_{l=1}^{d}\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\left(\mathrm{D}_l+\xi_j^l\right)g_{sl}(\boldsymbol{x})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\widehat{\varphi}_{jp}(\boldsymbol{x})\Big\}\\
&-\omega^{-1}(\boldsymbol{x})g_{sp}(\boldsymbol{x})\omega^{-1}(\boldsymbol{x})\varphi_j(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}
$$

$$
\int_{\Omega}\varphi_{jps}(\boldsymbol{x})\overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})}\,d\boldsymbol{x}=0.
$$

2.3. Оператор A_ε. Основные результаты. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим самосопряженный оператор A_ε, $\varepsilon>0$, порожденный квадратичной формой

$$
\begin{aligned}
&a_\varepsilon[u,u]=\int_{\mathbb{R}^d}(\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}))^2\left\langle\widetilde{g}^\varepsilon(\boldsymbol{x})\nabla(\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}))^{-1}u(\boldsymbol{x}),\nabla(\omega^\varepsilon(\boldsymbol{x}))^{-1}u(\boldsymbol{x})\right\rangle\,d\boldsymbol{x},\\
&(\omega^\varepsilon)^{-1}u\in H^1(\mathbb{R}^d).
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Как и прежде, мы предполагаем, что $\widetilde{g}$ – симметричная матрица-функция с вещественными элементами, удовлетворяющая условиям (2.2), а ω – $\mathbb{Z}^d$-периодическая функция, удовлетворяющая условиям (2.6) и (2.7). Формально можно записать

$$
A_\varepsilon=(\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^*g^\varepsilon\mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1},\quad g=\omega^2\widetilde{g}.
\tag{2.33}
$$

В исходных терминах оператор (2.33) можно записать в виде (1.3).

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 2.5. *Пусть* (λ_-,λ_+) *– внутренняя лакуна в спектре оператора* A*, удовлетворяющая условию* (2.14). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.2. *Тогда справедлива оценка*

$$
\begin{aligned}
&\left\|e^{-tA_\varepsilon}E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+,+\infty\right)-e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\sum_{j=1}^{m}[\psi_j^\varepsilon]e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]\right\|\\
&\qquad\leqslant Ce^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\frac{\varepsilon}{\sqrt{t+\varepsilon^2}},\qquad\varepsilon,t>0,
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

где b_j *– квадратичные формы, определенные в разложениях* (2.16), *т. е.* $b_j(\mathbf{D})=\mathbf{D}^*g_j^0\mathbf{D}$, *а функции* ψ_j *определены в* (2.19).

Далее нам понадобится вспомогательный сглаживающий оператор $\Pi_\varepsilon := \Phi^*[\chi_{\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}}(\xi)]\Phi$; здесь $\chi_{\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}}(\xi)$ – характеристическая функция множества $(-\pi\varepsilon^{-1}, \pi\varepsilon^{-1})^d$, $\varepsilon > 0$.

Введем операторы

$$\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon, t) := \sum_{k=1}^{d} [\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon \, \mathrm{D}_k \, e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad \varepsilon, t > 0, \tag{2.35}$$

$$\widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon, t) := -t[\psi_j^\varepsilon]\Pi_\varepsilon d_j(\mathbf{D}) e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad \varepsilon, t > 0, \tag{2.36}$$

$$\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, t) := \sum_{j=1}^{m} \Big(\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon, t) + (\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon, t))^* + \widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon, t) \Big), \quad \varepsilon, t > 0. \tag{2.37}$$

Здесь

$$d_j(\mathbf{D}) = \sum_{p,q,r=1}^{d} \alpha_{j,pqr} \, \mathrm{D}_p \, \mathrm{D}_q \, \mathrm{D}_r,$$

а $\alpha_{j,pqr}$ – коэффициенты из (2.18). А также определим операторы

$$\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon, t) := \sum_{k=1}^{d} [\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon] \, \mathrm{D}_k \, e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad \varepsilon, t > 0, \tag{2.38}$$

$$\Gamma_j^{(3)}(\varepsilon, t) := -t[\psi_j^\varepsilon] d_j(\mathbf{D}) e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \quad \varepsilon, t > 0, \tag{2.39}$$

$$\Gamma(\varepsilon, t) := \sum_{j=1}^{m} \Big(\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon, t) + (\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon, t))^* + \Gamma_j^{(3)}(\varepsilon, t) \Big), \quad \varepsilon, t > 0. \tag{2.40}$$

Замечание 2.6. Отметим что для введенных операторов справедливы оценки $\big\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, t)\big\| \leqslant C\varepsilon/\sqrt{t + \varepsilon^2}$, $\big\|\varepsilon\Gamma(\varepsilon, t)\big\| \leqslant C\varepsilon/\sqrt{t}$, ε, $t > 0$.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Пусть* $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, t)$ – *оператор, определенный в* (2.35)–(2.37). *Тогда при* $\varepsilon, t > 0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\bigg\| e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}\big[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty\big) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} \bigg(\sum_{j=1}^{m} [\psi_j^\varepsilon] e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] + \varepsilon\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, t) \bigg) \bigg\| \\ &\qquad \leqslant C e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} \frac{\varepsilon^2}{t + \varepsilon^2}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Отказавшись от равномерной оценки при всех $\varepsilon > 0$ и $t > 0$, можно избавиться от сглаживающего оператора в корректоре.

Теорема 2.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Пусть* $\Gamma(\varepsilon, t)$ – *оператор, определенный в* (2.38)–(2.40). *Тогда при* $\varepsilon, t > 0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\Big\| e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\Big(\sum_{j=1}^m [\psi_j^\varepsilon] e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] + \varepsilon\Gamma(\varepsilon, t)\Big)\Big\| \\ &\qquad \leqslant C e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} \frac{\varepsilon^2}{t + \varepsilon\sqrt{t}}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Замечание 2.9. 1°. Сопоставим результат теоремы 2.5 с результатом об аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I)^{-1}$, полученным в [18]:

$$\Big\| (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I)^{-1} - \sum_{j=1}^m [\psi_j^\varepsilon](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]\Big\| \leqslant C\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Здесь операторы $b_j(\mathbf{D})$ и осциллирующие множители ψ_j^ε – те же, что в (2.34). И в эллиптическом, и в параболическом случае каждая точка $\boldsymbol{\xi}_j$, $j = 1, \dots, m$, в которой достигается минимум зонной функции $E(\boldsymbol{\xi})$, дает вклад в асимптотику.

2°. “Параболический” корректор $\Gamma(\varepsilon, t)$ имеет структуру, похожую на структуру “эллиптического” корректора $K(\varepsilon)$, полученного в работе [19] при усреднении резольвенты оператора A_ε вблизи края внутренней спектральной лакуны. В [19] установлена оценка

$$\Big\| (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\lambda_+ - \varkappa^2)I)^{-1} - \sum_{j=1}^m [\psi_j^\varepsilon](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] - \varepsilon K(\varepsilon)\Big\| \leqslant C\varepsilon^2, \qquad 0 < \varepsilon \leqslant 1,$$

где

$$\begin{aligned} K(\varepsilon) &:= \sum_{j=1}^m \left(K_j^{(1)}(\varepsilon) + (K_j^{(1)}(\varepsilon))^* + K_j^{(3)}(\varepsilon) \right), \\ K_j^{(1)}(\varepsilon) &:= \sum_{k=1}^d [\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon]\, \mathrm{D}_k (b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[\overline{\psi_j^\varepsilon}], \\ K_j^{(3)}(\varepsilon) &:= -[\psi_j^\varepsilon](b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1} d_j(\mathbf{D})(b_j(\mathbf{D}) + \varkappa^2 I)^{-1}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]. \end{aligned}$$

3°. Сопоставим теперь полученные результаты с результатами работ [8–10] по “обычному” усреднению операторной экспоненты e^{-tA_ε} (на нижнем краю спектра). Отметим, что на нижнем краю спектра, т. е. при $\lambda_+ = 0$, условие 2.2 выполнено автоматически: первая зонная функция $E_1(\boldsymbol{\xi})$ достигает минимума в единственной точке $\boldsymbol{\xi}_1 = 0$; этот минимум невырожден. Имеем $b_1(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^* g^0 \mathbf{D} = A^0$, $\psi_1 = \omega$. В этом случае оценка (2.34) превратится в известную оценку

$$\left\| e^{-tA_\varepsilon} - [\omega^\varepsilon] e^{-tA^0} [\omega^\varepsilon] \right\| \leqslant C \frac{\varepsilon}{\sqrt{t + \varepsilon^2}}, \qquad \varepsilon, t > 0,$$

а в случае оператора (1.1) (когда $\omega = 1$) – в оценку (1.2). Наши результаты с корректорами также согласуются с результатами работы [10]. Однако, подчеркнем разницу уже в старшем члене приближения: даже для оператора (1.1) (то есть при $p \equiv 0$ и $\omega = 1$) аппроксимации на краю внутренней лакуны обязательно содержат осциллирующие множители ψ_j^ε.

4°. Наши результаты также согласуются с результатами работы [20] при $d = 1$. Существенное отличие от случая $d = 1$ заключается в появлении члена $\Gamma_j^{(3)}(\varepsilon, t)$ в корректоре. В одномерном случае этот член равен нулю, так как функция $E(\boldsymbol{\xi})$ является четной при $d = 1$.

§3. Доказательство основных результатов

3.1. Предварительные замечания. Через $\chi_j(\boldsymbol{\xi})$ обозначим характеристические функции множеств $\mathcal{E}_j(\delta)$, $j = 1, \dots, m$; положим

$$\chi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{m} \chi_j(\boldsymbol{\xi}).$$

Определим операторы $X = [\chi(\boldsymbol{\xi})]\Psi$, $X_j = [\chi_j(\boldsymbol{\xi})]\Psi$, $j = 1, \dots, m$. Ниже мы считаем $\delta > 0$ настолько малым, что множества $\mathcal{E}_j(\delta)$ попарно не пересекаются.

В силу регулярности правого края лакуны (λ_-, λ_+), функция $E(\boldsymbol{\xi})$ допускает представление (2.16). При этом при достаточно малом $\delta > 0$ выполнены оценки

$$c_j|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2 \leqslant b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) \leqslant C_j|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d, \ 0<c_j\leqslant C_j<\infty, \tag{3.1}$$

$$\left|E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+-b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\right| \leqslant \frac{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}{2}, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathcal{E}_j(\delta), \tag{3.2}$$

$$\left|d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\right| \leqslant \frac{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}{4}, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathcal{E}_j(\delta), \tag{3.3}$$

$$|E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+-b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)-d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)| \leqslant \frac{b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}{4}, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathcal{E}_j(\delta). \tag{3.4}$$

3.2. Вспомогательные утверждения. Доказательству теорем предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.1. *При достаточно малом $\delta>0$ для подходящего $\nu(\delta)>0$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\left\|e^{-tA_\varepsilon}E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+,+\infty\right)-e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}T_\varepsilon^*X^*\left[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right]XT_\varepsilon\right\| \\ \leqslant 2e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\nu(\delta)}, \quad \varepsilon,t>0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Доказательство. Из соотношения (1.4) следует равенство

$$e^{-tA_\varepsilon}E_{A_\varepsilon}\left[\varepsilon^{-2}\lambda_+,+\infty\right) = T_\varepsilon^*e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A}E_A\left[\lambda_+,+\infty\right)T_\varepsilon. \tag{3.6}$$

Фиксируем число $\mu\in(\lambda_+,\min_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}}E_{s+2}(\boldsymbol{\xi}))$. Оператор $e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A}E_A[\lambda_+,+\infty)$ раскладывается в сумму

$$e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A}E_A\left[\lambda_+,+\infty\right) = e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A}E_A\left[\lambda_+,\mu\right]+e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A}E_A\left(\mu,+\infty\right). \tag{3.7}$$

Второе слагаемое в (3.7) допускает очевидную оценку

$$\left\|e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A}E_A\left(\mu,+\infty\right)\right\| \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\mu} = e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(\mu-\lambda_+)}. \tag{3.8}$$

В силу разложения Флоке–Блоха (2.13) первое слагаемое в формуле (3.7) представимо в виде

$$e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A}E_A\left[\lambda_+,\mu\right] = \Psi^*\left[\chi_\mu(\boldsymbol{\xi})e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}E(\boldsymbol{\xi})}\right]\Psi,$$

где $\chi_\mu(\boldsymbol{\xi})$ – характеристическая функция множества

$$\left\{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}:\ E(\boldsymbol{\xi})\in[\lambda_+,\mu]\right\}.$$

При достаточно малом $\delta > 0$ выполнено $\chi_\mu(\boldsymbol{\xi})\chi(\boldsymbol{\xi}) = \chi(\boldsymbol{\xi})$, а потому

$$e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}A}E_A\left[\lambda_+,\mu\right] = e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}X^*\left[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right]X \\ + e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\Psi^*\left[\chi_\mu(\boldsymbol{\xi})(1-\chi(\boldsymbol{\xi}))e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right]\Psi. \tag{3.9}$$

В силу очевидного неравенства

$$\left\|(1-\chi(\boldsymbol{\xi}))e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right\|_\infty \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\nu(\delta)},$$

где $\nu(\delta) = \min_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}\setminus\bigcup_{j=1}^m \mathcal{E}_j(\delta)}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)$, второе слагаемое в сумме (3.9) оценивается через

$$\left\|e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\Psi^*\left[(1-\chi(\boldsymbol{\xi}))e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right]\Psi\right\| \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\nu(\delta)}. \tag{3.10}$$

Из соотношений (3.6)–(3.10) вытекает оценка (3.5). □

Лемма 3.2. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\left\|X_j^*\left[e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)}\right]X_j - X_j^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j\right\| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau+1}}, \quad \tau > 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Введем обозначение $\Theta_j(\boldsymbol{\xi}) := E(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_+ - b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)$. В силу очевидного неравенства

$$|e^{-\alpha}-1| \leqslant |\alpha|e^{|\alpha|}, \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

справедливы соотношения

$$\left|e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right| = e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\left|e^{-\tau\Theta_j(\boldsymbol{\xi})}-1\right| \\ \leqslant \tau\left|\Theta_j(\boldsymbol{\xi})\right|e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}e^{\tau|\Theta_j(\boldsymbol{\xi})|}, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathcal{E}_j(\delta). \tag{3.12}$$

Из оценки $|\Theta_j(\boldsymbol{\xi})| \leqslant C\left|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j\right|^3$, $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{E}_j(\delta)$, а также неравенств (3.1), (3.2) и (3.12) вытекает оценка

$$\left|e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right| \leqslant C\tau|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^3 e^{-\frac{1}{2}\tau c_j|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2}, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathcal{E}_j(\delta). \tag{3.13}$$

Из (3.13) и очевидного неравенства $\left|\alpha^3 e^{-\frac{1}{2}\tau\beta\alpha^2}\right| \leqslant (\beta e/3)^{-3/2}\tau^{-3/2}$, $\beta>0$, следует, что

$$\left|e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau}}, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathcal{E}_j(\delta). \tag{3.14}$$

Кроме того, левая часть неравенства (3.14) не превосходит 2, а потому верно соотношение

$$\left|e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau+1}}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),\ \tau > 0,$$

откуда вытекает (3.11). □

Введем операторы $X_j^0 = [\chi_j(\boldsymbol{\xi})]\Phi[\overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})}]\colon L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$, действующие по правилу

$$(X_j^0 u)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\varphi_j(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d).$$

Лемма 3.3. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| X_j^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j - (X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 \right\| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau+1}}, \quad \tau > 0. \tag{3.15}$$

Доказательство. При достаточно малом $\delta > 0$ функция φ вещественно аналитична в шаре $\mathcal{E}_j(\delta)$ и справедливо представление

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - \varphi_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{d} (\xi^k - \xi_j^k)\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),$$

$$\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_0^1 \partial_k \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j + t(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))\, dt, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),$$

где $\partial_k\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta^k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})$. При этом $\gamma_{jk}(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ – $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$-значные функции, вещественно аналитические по $\boldsymbol{\xi}$ в шаре $\mathcal{E}_j(\delta)$. Следовательно (см. [6]), при достаточно малом $\delta > 0$ функции γ_{jk} допускают оценку в классе Соболева любого порядка (см. замечание 2.3, пункт 3°):

$$\sup_{\boldsymbol{x}} \|\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\cdot)\|_{H^r(\mathcal{E}_j(\delta))} < \infty, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Рассмотрим $U_{jk}\colon L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$ – интегральные операторы с ядрами

$$U_{jk}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}] := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}, \ \ j = 1,\dots,m,\ \ k = 1,\dots,d. \tag{3.17}$$

Ядра U_{jk} отличаются от ядра оператора Фурье лишь умножением на функции $\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}$. Из (3.16) вытекает (см. [18]), что функции $\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}$ являются мультипликаторами на множестве ядер ограниченных интегральных операторов из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\widetilde{\Omega})$. Следовательно, операторы U_{jk} ограничены, $\|U_{jk}\|\leqslant C_{jk}$. Далее, $X_j - X_j^0$ – интегральные операторы с ядрами

$$\left(X_j - X_j^0\right)[\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}] := (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\chi_j(\boldsymbol{\xi})\sum_{k=1}^{d}(\xi^k - \xi_j^k)\overline{\gamma_{jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}. \quad (3.18)$$

Из (3.17) и (3.18) вытекают равенства

$$X_j - X_j^0 = \sum_{k=1}^{d}\left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)\right]U_{jk}. \quad (3.19)$$

Таким образом, операторы

$$\begin{aligned} D_j(\tau) &:= X_j^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j - (X_j^0)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j^0 \\ &= (X_j - X_j^0)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j + (X_j^0)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right](X_j - X_j^0) \end{aligned}$$

допускают представление

$$\begin{aligned} D_j(\tau) = \sum_{k=1}^{d}\Big(U_{jk}^*&\left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j \\ &+ (X_j^0)^*\left[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]U_{jk}\Big). \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует оценка

$$\|D_j(\tau)\| \leqslant \sum_{k=1}^{d}\|U_{jk}\|\left(1 + \|\varphi_j\|_\infty\right)\left\|(\xi^k - \xi_j^k)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right\|_\infty. \quad (3.20)$$

Из (3.1) и (3.20) с учетом оценок $\|U_{jk}\| \leqslant C_{jk}$ вытекает неравенство

$$\|D_j(\tau)\| \leqslant C\sum_{k=1}^{d}\left\|(\xi^k - \xi_j^k)e^{-\tau c_j|\xi^k - \xi_j^k|^2}\right\|_\infty. \quad (3.21)$$

Элементарная оценка $\left|\alpha e^{-\frac{1}{2}\tau\beta\alpha^2}\right| \leqslant (\beta e)^{-1/2}\tau^{-1/2}$, $\beta > 0$, и (3.21) приводят к неравенству

$$\left\|X_j^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j - (X_j^0)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j^0\right\| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\tau}}. \quad (3.22)$$

Остается учесть, что левая часть неравенства (3.22) ограничена величиной $1 + \|\varphi_j\|_\infty^2$, а потому справедливо (3.15). □

Лемма 3.4. *При любом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\left\|(X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 - [\varphi_j]\Phi^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \Phi[\overline{\varphi_j}]\right\| \leqslant e^{-\tau c_j \delta^2} \|\varphi_j\|_\infty^2, \quad \tau > 0. \tag{3.23}$$

Доказательство. Оценка (3.23) следует из равенства

$$(X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 - [\varphi_j]\Phi^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \Phi[\overline{\varphi_j}] = [\varphi_j]\Phi^* \left[(\chi_j(\boldsymbol{\xi}) - 1)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \Phi[\overline{\varphi_j}],$$

и оценки $\left\|(\chi_j(\boldsymbol{\xi}) - 1)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right\|_\infty \leqslant e^{-\tau c_j \delta^2}$, вытекающей из (3.1). □

Введем операторы

$$X_j^1 := \sum_{k=1}^d [\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)]\Phi[\overline{\varphi_{jk}(\boldsymbol{x})}] \colon L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega}),$$

действующие по правилу

$$\left(X_j^1 u\right)(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \sum_{k=1}^d \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)\overline{\varphi_{jk}(\boldsymbol{x})} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap L_1(\mathbb{R}^d). \tag{3.24}$$

Лемма 3.5. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\Big\|X_j^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j - (X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 - (X_j^1)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 - (X_j^0)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^1\Big\| \leqslant \frac{C}{\tau + 1}, \quad \tau > 0. \tag{3.25}$$

Доказательство. Обозначим оператор под знаком нормы в (3.25) через $\Xi_j(\tau)$. Представим $\Xi_j(\tau)$ в виде

$$\begin{aligned}\Xi_j(\tau) &= \left(X_j - X_j^0 - X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j \\ &+ \left(X_j^0 + X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] \left(X_j - X_j^0 - X_j^1\right) + \left(X_j^1\right)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^1.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Оператор $X_j - X_j^0 - X_j^1$ – это интегральный оператор с ядром

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \chi_j(\boldsymbol{\xi}) e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \overline{\left(\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - \varphi_j(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^d \varphi_{jk}(\boldsymbol{x})(\xi^k - \xi_j^k)\right)}. \tag{3.27}$$

При достаточно малом $\delta > 0$ справедливо элементарное представление

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) - \varphi_j(\boldsymbol{x}) - \sum_{k=1}^{d} \varphi_{jk}(\boldsymbol{x})(\xi^k - \xi_j^k)$$
$$= \sum_{k,l=1}^{d} (\xi^k - \xi_j^k)(\xi^l - \xi_j^l)\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),$$
$$\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_0^1 dt \int\limits_0^t \partial_l\partial_k\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_j + s(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))\, ds, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta),$$

где $\partial_l\partial_k\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^l\partial\eta^k}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})$. Функции $\gamma_{jkl}(\cdot,\boldsymbol{\xi})$ являются $\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$-значными вещественно аналитическими по $\boldsymbol{\xi}$ в шаре $\mathcal{E}_j(\delta)$. Следовательно (см. [19]), при достаточно малом $\delta > 0$ функции γ_{jkl} допускают оценку в классе Соболева любого порядка (см. замечание 2.3, пункт 3°):

$$\sup_{\boldsymbol{x}} \|\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\cdot)\|_{H^r(\mathcal{E}_j(\delta))} < \infty, \quad \forall r \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

Из (3.28) следует, что каждая функция $\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}$ является мультипликатором на множестве ядер ограниченных интегральных операторов из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\widetilde{\Omega})$. Рассмотрим интегральные операторы $U_{jkl}\colon L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$ с ядрами

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} e^{-i\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})} \tag{3.29}$$

Ядро (3.29) отличается от ядра оператора Фурье множителем $\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\gamma_{jkl}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}$, который, как отмечалось выше, является мультипликатором. Следовательно, U_{jkl} являются ограниченными интегральными операторами из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\widetilde{\Omega})$. В силу (3.27) и (3.29) первое слагаемое в правой части равенства (3.26) записывается в виде

$$\big(X_j - X_j^0 - X_j^1\big)^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j$$
$$= \sum_{k,l=1}^{d} U_{jkl}^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k - \xi_j^k)(\xi^l - \xi_j^l)\right] X_j, \tag{3.30}$$

а второе слагаемое переписывается как

$$\begin{aligned}&\left(X_j^0+X_j^1\right)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\left(X_j-X_j^0-X_j^1\right)\\&\quad=\sum_{k,l=1}^{d}\left(X_j^0+X_j^1\right)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k-\xi_j^k)(\xi^l-\xi_j^l)\right]U_{jkl}.\end{aligned}\tag{3.31}$$

Из (3.1), (3.30), (3.31) и очевидного неравенства $\alpha^2e^{-\tau\beta\alpha^2}\leqslant(\beta e)^{-1}\tau^{-1}$, $\beta>0$, следуют оценки

$$\left\|\left(X_j-X_j^0-X_j^1\right)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j\right\|\leqslant\frac{C}{\tau},\tag{3.32}$$

$$\left\|\left(X_j^0+X_j^1\right)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\left(X_j-X_j^0-X_j^1\right)\right\|\leqslant\frac{\widetilde{C}}{\tau}.\tag{3.33}$$

Чтобы получить оценку для третьего слагаемого в правой части равенства (3.26), рассмотрим операторы V_{jk} – интегральные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с ядрами

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}e^{-i\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\chi_j(\boldsymbol{\xi})\overline{\varphi_{jk}(\boldsymbol{x})}.\tag{3.34}$$

Очевидно, что операторы V_{jk} ограничены, а из (3.24) и (3.34) следует, что

$$\left(X_j^1\right)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j^1=\sum_{k,l=1}^{d}V_{jl}^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k-\xi_j^k)(\xi^l-\xi_j^l)\right]V_{jk}.$$

Отсюда при учете неравенства $\alpha^2e^{-\tau\beta\alpha^2}\leqslant(\beta e)^{-1}\tau^{-1}$, $\beta>0$, вытекает оценка

$$\left\|\left(X_j^1\right)^*\left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j^1\right\|\leqslant\frac{C}{\tau}.\tag{3.35}$$

Из равенства (3.26) и неравенств (3.32), (3.33), (3.35) получаем, что

$$\|\Xi_j(\tau)\|\leqslant\frac{C}{\tau}.\tag{3.36}$$

С другой стороны, оператор $\Xi_j(\tau)$ равномерно ограничен:

$$\|\Xi_j(\tau)\|\leqslant 1+\|\varphi_j\|_\infty^2+2\delta\|\varphi_j\|_\infty\left(\sum_{k=1}^{d}\|\varphi_{jk}\|_\infty\right).$$

Вместе с (3.36) это приводит к оценке (3.25). □

Лемма 3.6. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$\Big\| X_j^* \left[e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} \right] X_j - X_j^* \left[e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right] X_j \\ + X_j^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \right] X_j \Big\| \leqslant \frac{C}{\tau+1}, \quad \tau > 0. \quad (3.37)$$

Доказательство. С учетом соотношений (2.16), (3.1), (3.3), (3.4), а также очевидной оценки $|e^\alpha - 1| \leqslant |\alpha| e^{|\alpha|}$ можем написать следующую цепочку соотношений

$$\begin{aligned} &\left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} \right| \\ &= e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} \left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+-b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)-d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} - 1 \right| \\ &\leqslant \tau \left| E(\boldsymbol{\xi}) - \lambda_+ - b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) - d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) \right| \\ &\qquad \times e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} e^{\tau|E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+-b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)-d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)|} \\ &\leqslant \widehat{C}\tau |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^4 e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} e^{\frac{\tau}{4} b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \\ &\leqslant \widehat{C}\tau |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^4 e^{-\frac{\tau}{2} b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant \widehat{C}\tau |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^4 e^{-\frac{\tau}{2} c_j |\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2}. \end{aligned}$$

В силу оценки $\alpha^4 e^{-\frac{\beta\tau}{2}\alpha^2} \leqslant 16(\beta e)^{-2}\tau^{-2}$, $\beta > 0$, отсюда следует, что

$$\left| e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} - e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} \right| \leqslant \frac{16\widehat{C}}{(c_j e)^2} \frac{1}{\tau}. \quad (3.38)$$

Беря в расчет оценку $|e^{-\alpha} - 1 + \alpha| \leqslant \frac{\alpha^2}{2} e^{|\alpha|}$, получаем

$$\begin{aligned} &e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} = e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} + e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} (e^{-\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} - 1) \\ &= e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} - \tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} + r_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}, \quad (3.39) \end{aligned}$$

где $r_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) = e^{-\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} - 1 + \tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)$, причем

$$\left| r_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j) \right| \leqslant \frac{\tau^2 d_j^2(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}{2} e^{\tau|d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)|}. \quad (3.40)$$

Из (3.1), (3.3), (3.39), (3.40) следуют соотношения

$$
\begin{aligned}
&\left|e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} + \tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right| \\
&\quad = \left|r_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\right| e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant \frac{\tau^2 d_j^2(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}{2} e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)-|d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)|)} \\
&\qquad \leqslant \frac{\tau^2 d_j^2(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}{2} e^{-\frac{3\tau}{4} b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant \widetilde{C}^2\tau^2|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^6 e^{-\frac{3\tau c_j}{4}|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2}.
\end{aligned}
$$

Учитывая неравенство $\alpha^6 e^{-\tau\beta\alpha^2} \leqslant 27(\beta e)^{-3}\tau^{-3}$, $\beta > 0$, получаем оценку

$$
\begin{aligned}
&\left|e^{-\tau(b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)+d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j))} - e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} + \tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right| \\
&\qquad \leqslant \frac{64\widetilde{C}^2}{(c_j e)^3}\frac{1}{\tau}.
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

Таким образом, в силу неравенств (3.38), (3.41), а также того факта, что операторы X_j ограничены, получаем, что выражение под знаком нормы в (3.37) не превосходит C/τ. С другой стороны, это выражение равномерно ограничено, благодаря тому, что $e^{-\tau(E(\boldsymbol{\xi})-\lambda_+)} \leqslant 1$, $e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \leqslant 1$, а также благодаря тому, что при $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{E}_j(\delta)$ справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
&\left|\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right| \leqslant C\tau\left|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j\right|^3 e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)} \\
&\qquad \leqslant C\tau\delta\left|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j\right|^2 e^{-\tau c_j\left|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j\right|^2} \leqslant \frac{C\delta}{c_j e}.
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

В последнем переходе использовано соотношение $\max_{\alpha\geqslant 0}\alpha e^{-\tau c_j\alpha} \leqslant (\tau c_j e)^{-1}$. В итоге приходим к оценке (3.37). $\square$

Лемма 3.7. *При достаточно малом $\delta > 0$ справедлива оценка*

$$
\begin{aligned}
&\left\|(X_j)^*\left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j - (X_j^0)^*\left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]X_j^0\right\| \\
&\qquad \leqslant \frac{C}{\tau+1}, \quad \tau > 0.
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

Доказательство. Лемма доказывается аналогично лемме 3.3. Напомним, что операторы $U_{jk}\colon L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\widetilde{\Omega})$ – это ограниченные интегральные операторы с ядрами (3.17). Справедливо равенство (3.19), из которого следует, что операторы

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_j(\tau) &:= (X_j)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j \\ &\quad - (X_j^0)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j^0 \\ &= (X_j - X_j^0)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] X_j \\ &\quad + (X_j^0)^* \left[\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right] (X_j - X_j^0)\end{aligned}$$

допускают представление

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_j(\tau) = \sum_{k=1}^{d} \Big(& U_{jk}^*[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k-\xi_j^k)\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}]X_j \\ &+ (X_j^0)^*[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k-\xi_j^k)\tau d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)e^{-\tau b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}]U_{jk}\Big).\end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (3.1) следует оценка

$$\|\widetilde{D}_j(\tau)\| \leqslant C\tau|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^4 e^{-\tau c_j|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j|^2}.$$

С учетом элементарной оценки $\alpha^4 e^{-\tau\beta\alpha^2} \leqslant 4(\beta e)^{-2}\tau^{-2}$, $\beta > 0$, это приводит к неравенству

$$\|\widetilde{D}_j(\tau)\| \leqslant \frac{C}{\tau}. \tag{3.44}$$

С другой стороны, оператор $\widetilde{D}_j(\tau)$ равномерно ограничен в силу ограниченности операторов X_j, X_j^0 и неравенства (3.42). Вместе с (3.44) это влечет оценку (3.43). □

3.3. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 2.5. Фиксируем достаточно малое $\delta > 0$, при котором выполнены оценки (3.5), (3.11) и (3.15). Из оценок (3.5), (3.11), (3.15) и (3.23) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}\Big\| e^{-tA_\varepsilon} E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} T_\varepsilon^* \Big(\sum_{j=1}^{m} [\varphi_j]\Phi^* \Big[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2} b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Big] \Phi[\overline{\varphi_j}]\Big) T_\varepsilon \Big\| \\ \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} \frac{C\varepsilon}{\sqrt{t+\varepsilon^2}}\end{aligned} \tag{3.45}$$

при $\varepsilon > 0$, $t > 0$. С учетом соотношений

$$
\begin{aligned}
T_\varepsilon^*[\varphi_j]T_\varepsilon &= [\varphi_j^\varepsilon],\\
T_\varepsilon^*\Phi^*\bigl[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\bigr]\Phi T_\varepsilon &= \bigl[e^{\frac{i}{\varepsilon}\langle\cdot,\boldsymbol{\xi}_j\rangle}\bigr]e^{-tb_j(\mathbf{D})}\bigl[e^{-\frac{i}{\varepsilon}\langle\cdot,\boldsymbol{\xi}_j\rangle}\bigr],
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

из (3.45) следует (2.34). □

Доказательство теоремы 2.7. Фиксируем достаточно малое $\delta > 0$, при котором выполнены оценки (3.5), (3.23), (3.25), (3.37) и (3.43); из данных неравенств вытекает соотношение

$$
\begin{aligned}
&\Bigl\|e^{-tA_\varepsilon}E_{A_\varepsilon}\bigl[\varepsilon^{-2}\lambda_+,+\infty\bigr) - e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}T_\varepsilon^*\Bigl(\sum_{j=1}^m[\varphi_j]\Phi^*\Bigl[e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Bigr]\Phi[\overline{\varphi_j}]\Bigr)T_\varepsilon\\
&- e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}T_\varepsilon^*\Bigl(\sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^d\Bigl([\varphi_{jk}]\Phi^*\Bigl[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k-\xi_j^k)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Bigr]\Phi[\overline{\varphi_j}]\\
&+ [\varphi_j]\Phi^*\Bigl[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k-\xi_j^k)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Bigr]\Phi[\overline{\varphi_{jk}}]\Bigr)\\
&- \sum_{j=1}^m[\varphi_j]\Phi^*\Bigl[\frac{t}{\varepsilon^2}d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\chi_j(\boldsymbol{\xi})e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Bigr]\Phi[\overline{\varphi_j}]\Bigr)T_\varepsilon\Bigr\| \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}\frac{C\varepsilon^2}{t+\varepsilon^2}.
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

С учетом очевидных соотношений

$$
\begin{aligned}
T_\varepsilon^*[f(\boldsymbol{x})]T_\varepsilon = [f^\varepsilon(\boldsymbol{x})],\quad T_\varepsilon[f(\boldsymbol{x})]T_\varepsilon^* = [f(\varepsilon\boldsymbol{x})],\\
T_\varepsilon\Phi f = \Phi T_\varepsilon^* f,\quad \forall f\in L_2(\mathbb{R}^d),
\end{aligned}
$$

можем записать равенства

$$
\begin{aligned}
&T_\varepsilon^*[\varphi_{jk}]\Phi^*\Bigl[\chi_j(\boldsymbol{\xi})(\xi^k-\xi_j^k)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Bigr]\Phi[\overline{\varphi_j}]T_\varepsilon\\
&\quad= [\varphi_{jk}^\varepsilon]\Phi^*\Bigl[\chi_j(\boldsymbol{\varepsilon\xi})(\varepsilon\xi^k-\xi_j^k)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Bigr]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}],
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

$$
\begin{aligned}
&T_\varepsilon^*[\varphi_j]\Phi^*\Bigl[\frac{t}{\varepsilon^2}d_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\chi_j(\boldsymbol{\xi})e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Bigr]\Phi[\overline{\varphi_j}]T_\varepsilon\\
&\quad= [\varphi_j^\varepsilon]\Phi^*\Bigl[\frac{t}{\varepsilon^2}d_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\chi_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi})e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Bigr]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}].
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

Далее, введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_j^\varepsilon(\delta) &= \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \,:\, |\boldsymbol{\xi} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j| < \varepsilon^{-1}\delta\right\}, \quad \varepsilon > 0, \\ Q_j^\varepsilon &= \left\{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \,:\, |\xi^k - \varepsilon^{-1}\xi_j^k| < \varepsilon^{-1}\pi,\, k = 1, \dots, d\right\}, \quad \varepsilon > 0, \\ \widehat{\mathcal{E}}_j^\varepsilon &= Q_j^\varepsilon \setminus \mathcal{E}_j^\varepsilon(\delta), \quad \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Кроме того, нам понадобятся оценки

$$\begin{aligned} \Big\|[\varphi_{jk}^\varepsilon]\Phi^* &\left[\chi_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi})(\varepsilon\xi^k - \xi_j^k)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}] \\ &- [\varphi_{jk}^\varepsilon]\Phi^*\left[\chi_{Q_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})(\varepsilon\xi^k - \xi_j^k)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}]\Big\| \\ &\leqslant \|\varphi_{jk}\|_\infty\|\varphi_j\|_\infty \varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi}\in\widehat{\mathcal{E}}_j^\varepsilon}\left|\xi^k - \varepsilon^{-1}\xi_j^k\right|e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j|^2} \\ &\qquad\qquad \leqslant \pi\|\varphi_{jk}\|_\infty\|\varphi_j\|_\infty e^{-\frac{tc_j\delta^2}{\varepsilon^2}}, \end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned} \Big\|[\varphi_j^\varepsilon]\Phi^* &\left[\chi_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi})\frac{t}{\varepsilon^2}d_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}] \\ &- [\varphi_j^\varepsilon]\Phi^*\left[\chi_{Q_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})\frac{t}{\varepsilon^2}d_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_j)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\right]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}]\Big\| \\ &\leqslant \|\varphi_j\|_\infty^2 t\varepsilon\widetilde{C}\max_{\boldsymbol{\xi}\in\widehat{\mathcal{E}}_j^\varepsilon}\left|\boldsymbol{\xi} - \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j\right|^3 e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j|^2} \\ = \|\varphi_j\|_\infty^2 t\varepsilon\widetilde{C}\max_{\boldsymbol{\xi}\in\widehat{\mathcal{E}}_j^\varepsilon}&\left(\left|\boldsymbol{\xi}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j\right|e^{-t\frac{c_j}{2}|\boldsymbol{\xi}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j|^2}\right)\left(\left|\boldsymbol{\xi}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j\right|^2 e^{-t\frac{c_j}{2}|\boldsymbol{\xi}-\varepsilon^{-1}\boldsymbol{\xi}_j|^2}\right) \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{2\widetilde{C}}{c_j e}\pi\sqrt{d}\|\varphi_j\|_\infty^2 e^{-\frac{tc_j\delta^2}{2\varepsilon^2}}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

В последнем переходе (3.51) использовалось неравенство

$$\alpha^2 e^{-t\beta\alpha^2} \leqslant (t\beta e)^{-1}, \quad \beta > 0.$$

Учтем очевидные тождества

$$\Phi^*[\chi_{Q_j^\varepsilon}]\Phi = \big[e^{\frac{i}{\varepsilon}\langle\cdot,\boldsymbol{\xi}_j\rangle}\big]\Pi_\varepsilon\big[e^{-\frac{i}{\varepsilon}\langle\cdot,\boldsymbol{\xi}_j\rangle}\big], \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}&[\varphi_{jk}^\varepsilon]\Phi^*[\chi_{Q_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})(\varepsilon\xi^k - \xi_j^k)e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}]\\ &\qquad = \varepsilon[\psi_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\,\mathrm{D}_k\,e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}],\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}&[\varphi_j^\varepsilon]\Phi^*\Big[\frac{t}{\varepsilon^2}d_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)\chi_{Q_j^\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}b_j(\varepsilon\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_j)}\Big]\Phi[\overline{\varphi_j^\varepsilon}]\\ &\qquad = \varepsilon t[\psi_j^\varepsilon]\Pi_\varepsilon d_j(\mathbf{D})e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}].\end{aligned} \tag{3.54}$$

Напомним, что $\Pi_\varepsilon = \Phi^*[\chi_{\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}}]\Phi$, где $\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega} = (-\varepsilon^{-1}\pi, \varepsilon^{-1}\pi)^d$. Нам также понадобится следующее тождество, вытекающее из (2.28):

$$\begin{aligned}&[\psi_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\,\mathrm{D}_k\,e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] + \Big([\psi_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\,\mathrm{D}_k\,e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]\Big)^*\\ &\qquad = [\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\,\mathrm{D}_k\,e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}] + \Big([\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\,\mathrm{D}_k\,e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]\Big)^*\end{aligned} \tag{3.55}$$

Из оценки (3.47) и соотношений (3.46), (3.48)–(3.55) вытекает искомый результат (2.41). □

Доказательство теоремы 2.8. Теорема 2.8 вытекает из теоремы 2.7 и следующих соотношений

$$\begin{aligned}&\big\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon,t) - \varepsilon\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon,t)\big\| \leqslant \sum_{k=1}^d \varepsilon\big\|[\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon]\,\mathrm{D}_k\,e^{-tb_j(\mathbf{D})}(I-\Pi_\varepsilon)[\overline{\psi_j^\varepsilon}]\big\|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^d \big\|\widehat{\psi}_{jk}\big\|_\infty \|\psi_j\|_\infty \varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi}\notin\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \big|\xi^k\big|e^{-tb_j(\boldsymbol{\xi})}\\ &\leqslant \sum_{k=1}^d \big\|\widehat{\psi}_{jk}\big\|_\infty \|\psi_j\|_\infty \varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi}\notin\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \big|\xi^k\big|e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\widehat{C}_j}{t/\varepsilon^2 + \sqrt{t/\varepsilon^2}},\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}&\big\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon,t) - \varepsilon\Gamma_j^{(3)}(\varepsilon,t)\big\| = t\varepsilon\big\|[\psi_j^\varepsilon]d_j(\mathbf{D})e^{-tb_j(\mathbf{D})}(I-\Pi_\varepsilon)[\overline{\psi_j^\varepsilon}]\big\|\\ &\leqslant \|\psi_j\|_\infty^2 \varepsilon t \max_{\boldsymbol{\xi}\notin\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \big|d_j(\boldsymbol{\xi})\big|e^{-tb_j(\boldsymbol{\xi})}\\ &\leqslant \widetilde{C}\|\psi_j\|_\infty^2 \varepsilon t \max_{\boldsymbol{\xi}\notin\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}|^3 e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\widetilde{C}_j}{t/\varepsilon^2 + \sqrt{t/\varepsilon^2}}.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Для доказательства оценки (3.56) мы оценили величину

$$\varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi}\notin\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \left|\xi^k\right| e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} = \max_{\boldsymbol{\eta}\notin\widetilde{\Omega}} \left|\eta^k\right| e^{-\tau c_j|\boldsymbol{\eta}|^2}, \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon^2},$$

следующим образом. При $0 < \tau \leqslant 1$ использовали элементарную оценку $\left|\eta^k\right| e^{-\tau c_j|\boldsymbol{\eta}|^2} \leqslant C\tau^{-1/2}$, $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$. При $\tau > 1$ применили соотношения

$$\max_{\boldsymbol{\eta}\notin\widetilde{\Omega}} \left|\eta^k\right| e^{-\tau c_j|\boldsymbol{\eta}|^2} \leqslant e^{-\frac{c_j}{2}\pi^2\tau} \max_{\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^d} \left|\eta^k\right| e^{-\frac{c_j}{2}|\boldsymbol{\eta}|^2} \leqslant \frac{C}{\tau}, \quad \tau > 1.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi}\notin\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} \left|\xi^k\right| e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\widehat{C}}{t/\varepsilon^2 + \sqrt{t/\varepsilon^2}}.$$

Аналогичным образом проверяется оценка

$$\varepsilon t \max_{\boldsymbol{\xi}\notin\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}|^3 e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\widehat{C}}{t/\varepsilon^2 + \sqrt{t/\varepsilon^2}},$$

которую мы использовали для доказательства неравенства (3.57). $\square$

Доказательство замечания 2.6. Получим искомую оценку для $\left\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j(\varepsilon,t)\right\|$. С одной стороны, выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
\left\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon,t)\right\| &\leqslant \sum_{k=1}^d \varepsilon \left\|[\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon]\, \mathrm{D}_k\, \Pi_\varepsilon e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^\varepsilon}]\right\| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^d \left\|\widehat{\psi}_{jk}\right\|_\infty \|\psi_j\|_\infty \varepsilon \max_{\boldsymbol{\xi}\in\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}| e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2c_j te}} \sum_{k=1}^d \left\|\widehat{\psi}_{jk}\right\|_\infty \|\psi_j\|_\infty, \\
\left\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon,t)\right\| &= \varepsilon t \left\|[\psi_j^\varepsilon] d_j(\mathbf{D}) e^{-tb_j(\mathbf{D})} \Pi_\varepsilon [\overline{\psi_j^\varepsilon}]\right\| \\
&\leqslant \widetilde{C} \|\psi_j\|_\infty^2 \varepsilon t \max_{\boldsymbol{\xi}\in\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}|^3 e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{3^{\frac{3}{2}} \widetilde{C}\varepsilon \|\psi_j\|_\infty^2}{(2c_j e)^{\frac{3}{2}} \sqrt{t}}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, нормы равномерны ограничены:

$$\begin{aligned}
\big\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(1)}(\varepsilon,t)\big\| &\leqslant \sum_{k=1}^{d}\varepsilon\big\|[\widehat{\psi}_{jk}^{\varepsilon}]\,\mathrm{D}_k\,\Pi_\varepsilon e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^{\varepsilon}}]\big\| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{d}\big\|\widehat{\psi}_{jk}\big\|_\infty\|\psi_j\|_\infty\varepsilon\max_{\boldsymbol{\xi}\in\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}}|\xi^k|e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \pi\sum_{k=1}^{d}\big\|\widehat{\psi}_{jk}\big\|_\infty\|\psi_j\|_\infty, \\
\big\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}_j^{(3)}(\varepsilon,t)\big\| &= \varepsilon t\big\|[\psi_j^{\varepsilon}]d_j(\mathbf{D})e^{-tb_j(\mathbf{D})}\Pi_\varepsilon[\overline{\psi_j^{\varepsilon}}]\big\| \\
&\leqslant \widetilde{C}\|\psi_j\|_\infty^2 t\max_{\boldsymbol{\xi}\in\varepsilon^{-1}\widetilde{\Omega}}(\varepsilon|\boldsymbol{\xi}|)\left(|\boldsymbol{\xi}|^2e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2}\right) \leqslant \frac{\pi\sqrt{d}\widetilde{C}\|\psi_j\|_\infty^2}{c_je}.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает утверждение замечания 2.6 для $\big\|\varepsilon\widetilde{\Gamma}(\varepsilon,t)\big\|$. Для $\big\|\varepsilon\Gamma(\varepsilon,t)\big\|$ нужная оценка из замечания 2.6, в свою очередь, следует из соотношений

$$\begin{aligned}
\big\|\varepsilon\Gamma_j^{(1)}(\varepsilon,t)\big\| &\leqslant \sum_{k=1}^{d}\varepsilon\big\|[\widehat{\psi}_{jk}^{\varepsilon}]\,\mathrm{D}_k\,e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^{\varepsilon}}]\big\| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{d}\big\|\widehat{\psi}_{jk}\big\|_\infty\|\psi_j\|_\infty\varepsilon\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2c_jte}}\sum_{k=1}^{d}\big\|\widehat{\psi}_{jk}\big\|_\infty\|\psi_j\|_\infty, \\
\big\|\varepsilon\Gamma_j^{(3)}(\varepsilon,t)\big\| &= \varepsilon t\big\|[\psi_j^{\varepsilon}]d_j(\mathbf{D})e^{-tb_j(\mathbf{D})}[\overline{\psi_j^{\varepsilon}}]\big\| \\
&\leqslant \widetilde{C}\|\psi_j\|_\infty^2\varepsilon t\max_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|^3e^{-tc_j|\boldsymbol{\xi}|^2} \leqslant \frac{3^{\frac{3}{2}}\widetilde{C}\varepsilon\|\psi_j\|_\infty^2}{(2c_je)^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}}. \qquad \square
\end{aligned}$$

§4. Усреднение решений задачи Коши

Применим полученные результаты к вопросу о поведении решения $v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ задачи Коши

$$\begin{aligned}
&\partial_t v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t) = -(A_\varepsilon v_\varepsilon)(\boldsymbol{x},t) + e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}F_\varepsilon(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, \quad t\in(0,T), \\
&v_\varepsilon(\boldsymbol{x},0) = f_\varepsilon(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $0 < T \leqslant \infty$ и

$$f_\varepsilon = E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+,+\infty)f, \quad f\in L_2(\mathbb{R}^d), \tag{4.2}$$

$$F_\varepsilon(\cdot,t) = E_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_+,+\infty)F(\cdot,t), \quad F\in L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d)) \text{ при } t\in(0,T),$$

при некотором $p \in [1, \infty]$. Здесь λ_+ – фиксированный правый край лакуны в спектре оператора A. Решение представляется в виде

$$v_\varepsilon(\cdot, t) = e^{-A_\varepsilon t} f_\varepsilon + \int_0^t e^{-A_\varepsilon (t-s)} e^{-\frac{s}{\varepsilon^2}\lambda_+} F_\varepsilon(\cdot, s)\, ds. \tag{4.3}$$

Удобно приближать не само решение $v_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$, а произведение $e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$.

4.1. Приближение решения в старшем порядке. Используя теорему 2.5, приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Пусть* (λ_-, λ_+) *– внутренняя лакуна в спектре оператора* A*, удовлетворяющая условию* (2.14)*. Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.2*. Пусть* $v_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ *– решение задачи Коши* (4.1)*, где* $0 < T \leqslant \infty$*,* $f_\varepsilon, F_\varepsilon$ *удовлетворяют условиям* (4.2)*, причем* $1 < p \leqslant \infty$*. Пусть* $w_{j\varepsilon}^{(0)}(\boldsymbol{x}, t)$ *– решение задачи Коши*

$$\begin{aligned} &\partial_t w_{j\varepsilon}^{(0)}(\boldsymbol{x}, t) = -b_j(\mathbf{D}) w_{j\varepsilon}^{(0)}(\boldsymbol{x}, t) + \overline{\psi_j^\varepsilon(\boldsymbol{x})} F(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t \in (0, T), \\ &w_{j\varepsilon}^{(0)}(\boldsymbol{x}, 0) = \overline{\psi_j^\varepsilon(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь b_j *– квадратичная форма из разложения* (2.16)*, т.е.* $b_j(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^* g_j^0 \mathbf{D}$; $\psi_j(\boldsymbol{x}) = \exp(i \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j \rangle) \varphi_j(\boldsymbol{x})$*, где* φ_j *– нормированное* $\mathbb{Z}^d$*-периодическое решение уравнения* (2.22)*. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\Big\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\cdot, t) - \sum_{j=1}^m \psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}(\cdot, t) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad \leqslant C \frac{\varepsilon}{\sqrt{t + \varepsilon^2}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon \rho(p; t, \varepsilon) \|F\|_{L_p((0,t); L_2(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь

$$\rho(p; t, \varepsilon) := \begin{cases} c_p \varepsilon^{1-2/p}, & 1 < p < 2, \\ \left(\ln\left(1 + \frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right)^{1/2}, & p = 2, \\ c_p t^{1/2 - 1/p}, & 2 < p \leqslant \infty, \end{cases}$$

а c_p *– постоянная, зависящая только от* p*.*

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.34), получаем неравенство

$$\Big\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - \sum_{j=1}^{m} \psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}(\,\cdot\,,t) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{t+\varepsilon^2}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \int\limits_0^t \frac{\|F(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{t-s+\varepsilon^2}}\, ds \right).$$

Из оценки второго слагаемого в скобках, данного в работе [20, §4, доказательство теоремы 4.1] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$), следует искомая оценка (4.5). $\square$

Заметим, что при фиксированном $t > 0$ коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в правой части (4.5) имеет порядок $O(\varepsilon)$; коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon)$ при $2 < p \leqslant \infty$, $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2})$ при $p = 2$, а при $1 < p < 2$ его порядок $O(\varepsilon^{2-2/p})$ зависит от p.

Теорема 2.5 также позволяет получить приближение по норме в пространстве $L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$, где $0 < T < \infty$, для функции $e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon$.

Теорема 4.2. *Пусть (λ_-, λ_+) – внутренняя лакуна в спектре оператора A, удовлетворяющая условию* (2.14)*. Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.2*. Пусть $v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ – решение задачи Коши* (4.1)*, где $0 < T < \infty$, $f_\varepsilon, F_\varepsilon$ удовлетворяют условиям* (4.2)*, причем $F \in L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$ при $1 \leqslant p < \infty$. Пусть $\psi_j(\boldsymbol{x}) = \exp(i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j\rangle)\varphi_j(\boldsymbol{x})$, где φ_j – нормированное $\mathbb{Z}^d$-периодическое решение уравнения* (2.22)*, а $w_{j\varepsilon}^{(0)}$ – решение задачи Коши* (4.4)*. Тогда при $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\Big\| [e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}] v_\varepsilon - \sum_{j=1}^{m} \psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)} \Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon\Upsilon(p;T,\varepsilon)\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + CT^{1/2}\varepsilon\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{4.6}$$

Здесь

$$\Upsilon(p;T,\varepsilon) := \begin{cases} c_p T^{1/p-1/2}, & 1 \leqslant p < 2, \\ \big(\ln(1+T/\varepsilon^2)\big)^{1/2}, & p = 2, \\ c_p \varepsilon^{2/p-1}, & 2 < p < \infty, \end{cases}$$

а c_p – постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.34), получаем неравенство

$$\Big\|[e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}]v_\varepsilon - \sum_{j=1}^{m} \psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}\Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon(\mathcal{I}_p(T))^{1/p}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon(\mathcal{L}_p(T;F))^{1/p}, \quad (4.7)$$

где

$$\mathcal{I}_p(T) := \int_0^T \frac{dt}{(t+\varepsilon^2)^{p/2}}, \quad \mathcal{L}_p(T;F) := \int_0^T dt \left(\int_0^t \frac{\|F(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{t-s+\varepsilon^2}}\, ds \right)^p.$$

В работе [20, §4, доказательство теоремы 4.2] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$) получены оценки

$$(\mathcal{I}_p(T))^{1/p} \leqslant \Upsilon(p;T,\varepsilon), \ \ (\mathcal{L}_p(T;F))^{1/p} \leqslant 2T^{1/2}\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (4.8)$$

Из соотношений (4.7), (4.8) следует искомая оценка (4.6). □

Заметим, что коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ в правой части (4.6) имеет порядок $O(\varepsilon)$; коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ есть $O(\varepsilon)$ при $1 \leqslant p < 2$, $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{1/2})$ при $p = 2$, а при $2 < p < \infty$ его порядок $O(\varepsilon^{2/p})$ зависит от p.

4.2. Приближение решения с корректором. Получим более точное приближение к решению задачи (4.1). Определим $w_{jk\varepsilon}^{(1)}(\boldsymbol{x},t)$ как решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &\partial_t w_{jk\varepsilon}^{(1)}(\boldsymbol{x},t) = -b_j(\mathbf{D})w_{jk\varepsilon}^{(1)}(\boldsymbol{x},t) + \overline{\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon(\boldsymbol{x})}F(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d, \quad t\in(0,T), \\ &\quad w_{jk\varepsilon}^{(1)}(\boldsymbol{x},0) = \overline{\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon(\boldsymbol{x})}f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь b_j – квадратичная форма из разложения (2.16), т. е.

$$b_j(\mathbf{D}) = \mathbf{D}^* g_j^0 \mathbf{D}; \ \widehat{\psi}_{jk}(\boldsymbol{x}) = \exp\big(i\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}_j\rangle\big)\widehat{\varphi}_{jk}(\boldsymbol{x}),$$

где $\widehat{\varphi}_{jk}$ – $\mathbb{Z}^d$-периодическое решение уравнения (2.24), удовлетворяющее условию ортогональности (2.25).

Используя теорему 2.8, приходим к следующему результату.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *причем* $2 < p \leqslant \infty$. *Положим*

$$V_\varepsilon(\,\cdot\,,t) = \sum_{j=1}^{m} \Bigl(\psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}(\,\cdot\,,t) + \varepsilon \sum_{k=1}^{d} \widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon \, \mathrm{D}_k \, w_{j\varepsilon}^{(0)}(\,\cdot\,,t) + \varepsilon \sum_{k=1}^{d} \psi_j^\varepsilon \, \mathrm{D}_k \, w_{jk\varepsilon}^{(1)}(\,\cdot\,,t) - \varepsilon t \psi_j^\varepsilon d_j(\mathbf{D}) w_{j\varepsilon}^{(0)}(\,\cdot\,,t) \Bigr), \quad (4.10)$$

где $w_{j\varepsilon}^{(0)}$ *и* $w_{jk\varepsilon}^{(1)}$ *– решения задач Коши* (4.4) *и* (4.9), *соответственно, а* d_j *– кубическая форма из разложения* (2.16). *Тогда при* $t \in (0,T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\Bigl\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - V_\varepsilon(\,\cdot\,,t) \Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C \frac{\varepsilon^2}{t + \varepsilon\sqrt{t}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2 \kappa(p;t,\varepsilon) \|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (4.11)$$

Здесь

$$\kappa(p;t,\varepsilon) = \begin{cases} c_p \varepsilon^{-2/p}, & 2 < p < \infty, \\ \ln\bigl(1 + \frac{\sqrt{t}}{\varepsilon}\bigr), & p = \infty. \end{cases}$$

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.42), получаем неравенство

$$\Bigl\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - V_\varepsilon(\,\cdot\,,t) \Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2 \biggl(\frac{1}{t + \varepsilon\sqrt{t}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^t \frac{\|F(\,\cdot\,,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{t - s + \varepsilon\sqrt{t-s}} \, ds \biggr).$$

Из оценки второго слагаемого, данного в работе [20, §4, доказательство теоремы 4.3] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$), следует искомая оценка (4.11). ☐

Замечание 4.4. 1°. При $f \neq 0$ оценка (4.11) содержательна, если $\frac{\varepsilon^2}{t}$ мало, тогда коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$ имеет порядок $O(\frac{\varepsilon^2}{t})$.
2°. Коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$ в оценке (4.11) зависит от p: при $2 < p < \infty$ этот коэффициент есть $O(\varepsilon^{2-2/p})$, а в случае $p = \infty$ этот коэффициент имеет порядок $O(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|)$ при фиксированном t.

Применение теоремы 2.7 позволяет снять ограничение $p > 2$ (за счет включения сглаживающего оператора Π_ε в корректор).

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *причем* $1 < p \leqslant \infty$. *Положим*

$$\widetilde{V}_\varepsilon(\,\cdot\,,t) = \sum_{j=1}^{m}\biggl(\psi_j^\varepsilon w_{j\varepsilon}^{(0)}(\,\cdot\,,t) + \varepsilon\sum_{k=1}^{d}\widehat{\psi}_{jk}^\varepsilon \Pi_\varepsilon \,\mathrm{D}_k\, w_{j\varepsilon}^{(0)}(\,\cdot\,,t)$$

$$+\,\varepsilon\sum_{k=1}^{d}\psi_j^\varepsilon \Pi_\varepsilon \,\mathrm{D}_k\, w_{jk\varepsilon}^{(1)}(\,\cdot\,,t) - \varepsilon t\psi_j^\varepsilon \Pi_\varepsilon d_j(\mathbf{D}) w_{j\varepsilon}^{(0)}(\,\cdot\,,t)\biggr), \qquad (4.12)$$

где $w_{j\varepsilon}^{(0)}$ *и* $w_{jk\varepsilon}^{(1)}$ *– решения задач Коши* (4.4) *и* (4.9), *соответственно, а* d_j *– кубическая форма из разложения* (2.16). *Тогда при* $t \in (0,T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\Bigl\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\,\cdot\,,t) - \widetilde{V}_\varepsilon(\,\cdot\,,t)\Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leqslant C\frac{\varepsilon^2}{t+\varepsilon^2}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2\widetilde{\kappa}(p;t,\varepsilon)\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}. \qquad (4.13)$$

Здесь

$$\widetilde{\kappa}(p;t,\varepsilon) = \begin{cases} c_p\varepsilon^{-2/p}, & 1 < p < \infty, \\ \ln\bigl(1+\frac{t}{\varepsilon^2}\bigr), & p = \infty, \end{cases}$$

а c_p *– постоянная, зависящая только от* p.

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.41), получаем неравенство

$$\Bigl\| e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+} v_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{V}_\varepsilon(\cdot,t)\Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2\biggl(\frac{1}{t+\varepsilon^2}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^t \frac{\|F(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{t-s+\varepsilon^2}\,ds\biggr).$$

Из оценки второго слагаемого, данного в работе [20, §4, доказательство теоремы 4.4] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$), следует искомая оценка (4.13). $\square$

Заметим, что при фиксированном $t > 0$ коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в правой части (4.13) имеет порядок $O(\varepsilon^2)$; коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon^{2-2/p})$ при $1 < p < \infty$ и $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$ при $p = \infty$.

Получим теперь аппроксимацию с корректором функции $e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}v_\varepsilon$ в классе $L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$, где $0<T<\infty$. Сначала воспользуемся теоремой 2.8.

Теорема 4.6. *Пусть* (λ_-,λ_+) – *внутренняя лакуна в спектре оператора* A*, удовлетворяющая условию* (2.14)*. Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.2*. Пусть* $v_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ – *решение задачи Коши* (4.1)*, где* $0<T<\infty$*,* $f_\varepsilon, F_\varepsilon$ *удовлетворяют условиям* (4.2)*, причем* $F\in L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))$ *при* $1\leqslant p<2$*. Пусть функция* $V_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$ *определена в* (4.10)*. Тогда при* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\Big\|[e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}]v_\varepsilon - V_\varepsilon\Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\\ \leqslant C\varepsilon^2\vartheta(p;T,\varepsilon)\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2\ln(1+\sqrt{T}/\varepsilon)\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \qquad (4.14)\end{gathered}$$

Здесь

$$\vartheta(p;T,\varepsilon)=\begin{cases} c_p\varepsilon^{2/p-2}, & 1<p<2,\\ \ln\big(1+\frac{\sqrt{T}}{\varepsilon}\big), & p=1.\end{cases}$$

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.42), получаем неравенство

$$\begin{gathered}\Big\|[e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}]v_\varepsilon - V_\varepsilon\Big\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\\ \leqslant C\varepsilon^2(\mathcal{J}_p(T))^{1/p}\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2(\mathcal{M}_p(T;F))^{1/p}, \qquad (4.15)\end{gathered}$$

где

$$\mathcal{J}_p(T):=\int_0^T\frac{dt}{(t+\varepsilon\sqrt{t})^p},\quad \mathcal{M}_p(T;F):=\int_0^T dt\left(\int_0^t\frac{\|F(\cdot,s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{t-s+\varepsilon\sqrt{t-s}}\,ds\right)^p.$$

В работе [20, §4, доказательство теоремы 4.5] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$) получены оценки

$$\begin{aligned}&(\mathcal{J}_p(T))^{1/p}\leqslant\vartheta(p;T,\varepsilon),\\ &(\mathcal{M}_p(T;F))^{1/p}\leqslant 2\ln(1+\sqrt{T}/\varepsilon)\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}\qquad (4.16)$$

Из соотношений (4.15), (4.16) следует искомая оценка (4.14). $\square$

Заметим, что коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в правой части (4.14) имеет порядок $O(\varepsilon^{2/p})$ при $1<p<2$ и $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$ при $p=1$; коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|)$.

Применение теоремы 2.7 позволяет снять ограничение $p < 2$ (за счет включения сглаживающего оператора Π_ε в корректор).

Теорема 4.7. *Пусть* (λ_-, λ_+) – *внутренняя лакуна в спектре оператора* A, *удовлетворяющая условию* (2.14). *Предполагается, что правый край лакуны регулярен, т.е. выполнено условие* 2.2. *Пусть* $v_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ – *решение задачи Коши* (4.1), *где* $0 < T < \infty$, $f_\varepsilon, F_\varepsilon$ *удовлетворяют условиям* (4.2), *причем* $F \in L_p((0,T); L_2(\mathbb{R}^d))$ *при* $1 \leqslant p < \infty$. *Пусть функция* $\widetilde{V}_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ *определена в* (4.12). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| [e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}] v_\varepsilon - \widetilde{V}_\varepsilon \right\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon^2 \widetilde{\vartheta}(p; T, \varepsilon) \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2 \ln(1 + T/\varepsilon^2) \|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \quad (4.17)$$

Здесь

$$\widetilde{\vartheta}(p; T, \varepsilon) = \begin{cases} c_p \varepsilon^{2/p-2}, & 1 < p < \infty, \\ \ln\left(1 + \frac{T}{\varepsilon^2}\right), & p = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Используя представление (4.3) и оценку (2.41), получаем неравенство

$$\left\| [e^{\frac{t}{\varepsilon^2}\lambda_+}] v_\varepsilon - \widetilde{V}_\varepsilon \right\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon^2 (\widetilde{\mathcal{J}}_p(T))^{1/p} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C\varepsilon^2 (\widetilde{\mathcal{M}}_p(T; F))^{1/p}, \quad (4.18)$$

где

$$\widetilde{\mathcal{J}}_p(T) := \int_0^T \frac{dt}{(t + \varepsilon^2)^p}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_p(T; F) := \int_0^T dt \left(\int_0^t \frac{\|F(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{t - s + \varepsilon^2} \, ds \right)^p.$$

В работе [20, §4, доказательство теоремы 4.6] (с точностью до замены $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}))}$ на $\|F\|_{L_p((0,t);L_2(\mathbb{R}^d))}$) получены оценки

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathcal{J}}_p(T))^{1/p} &\leqslant \widetilde{\vartheta}(p; T, \varepsilon), \\ (\widetilde{\mathcal{M}}_p(T; F))^{1/p} &\leqslant \ln(1 + T/\varepsilon^2) \|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Из соотношений (4.18), (4.19) следует искомая оценка (4.17). $\square$

Заметим, что коэффициент при $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в правой части (4.17) имеет порядок $O(\varepsilon^{2/p})$ при $1 < p < \infty$ и $O(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|)$ при $p = 1$; коэффициент при $\|F\|_{L_p((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon^2 |\ln \varepsilon|)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Т. А. Суслиной за постановку задачи и внимание к работе и В. А. Слоущу за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
2. A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., 1978.
3. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.
4. M. Sh. Birman, T. A. Suslina, *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, In: Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.
5. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения.* — Алгебра и анализ **15**, No. 5 (2003), 1–108.
6. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора.* — Алгебра и анализ **17**, No. 6 (2005), 1–104.
7. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$. — Алгебра и анализ **18**, No. 6 (2006), 1–130.
8. Т. А. Суслина, *Об усреднении периодических параболических систем.* — Функц. анализ и его прил. **38**, No. 4 (2004), 86–90.
9. T. A. Suslina, *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, pp. 201–233.
10. Е. С. Василевская, *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора.* — Алгебра и анализ **21**, No. 1 (2009), 3–60.
11. T. A. Suslina, *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom. **5**, No. 4 (2010), 390–447.
12. В. В. Жиков, *Об операторных оценках в теории усреднения.* — Докл. РАН **403**, No. 3 (2005), 305–308.
13. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *On operator estimates for some problems in homogenization theory.* — Russ. J. Math. Phys. **12**, No. 4 (2005), 515–524.
14. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients.* — Russ. J. Math. Phys. **13**, No. 2 (2006), 224–237.
15. В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, *Об операторных оценках в теории усреднения.* — Успехи матем. наук **71**, No. 3 (2016), 27–122.
16. М. Ш. Бирман, *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны.* — Алгебра и анализ **15**, No. 4 (2003), 61–71.

17. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны.* — Проблемы математического анализа **41** (2009), 127–141.
18. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **318** (2004), 60–74.
19. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны.* — Проблемы математического анализа **59** (2011), 177–193.
20. A. R. Akhmatova, E. S. Aksenova, V. A. Sloushch, T. A. Suslina, *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap.* — Complex Variables and Elliptic Equations **67**, No. 3 (2022), 523–555.
21. M. Sh. Birman, *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator. I. Regular perturbations*, In: Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization, Math. Top., vol. 8. Adv. Partial Differential Equations, Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp. 334–352.
22. М. Ш. Бирман, *Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шрёдингера. II. Нерегулярные возмущения.* — Алгебра и анализ **9**, No. 6 (1997), 62–89.
23. М. М. Скриганов, *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов.* — Тр. МИАН СССР **171** (1985), 3—122.
24. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973.

Mishulovich A. A. Homogenization of the multidimensional parabolic equations with periodic coefficients at the edge of a spectral gap.

In $L_2(\mathbb{R}^d)$, we consider a second-order elliptic differential operator $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\mathbf{D} + \varepsilon^{-2} p(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, with periodic coefficients. For small ε, we study the behavior of the semigroup $e^{-A_\varepsilon t}$, $t > 0$, cut by the spectral projection of the operator A_ε for the interval $[\varepsilon^{-2}\lambda_+, +\infty)$. Here $\varepsilon^{-2}\lambda_+$ is the right edge of a spectral gap for the operator A_ε. We obtain approximation for the 'cut semigroup' in the operator norm in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with error $O(\varepsilon)$, and also a more accurate approximation with error $O(\varepsilon^2)$ (after singling out the factor $e^{-t\lambda_+/\varepsilon^2}$). The results are applied to homogenization of the Cauchy problem $\partial_t v_\varepsilon = -A_\varepsilon v_\varepsilon$, $v_\varepsilon|_{t=0} = f_\varepsilon$, with the initial data f_ε from a special class.

С.-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7/9, 199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: st062829@student.spbu.ru

Поступило 31 октября 2022 г.