Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 512, 2022 г.

С. В. Кисляков, А. С. Скворцов

ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ И КЛАССЫ ХАРДИ

Эта статья – небольшой обзор (с несколькими новыми элементами) примеров применения теорем о неподвижной точке к некоторым аспектам теории пространств Харди. За последние четверть века такие применения были многочисленны, что, может быть, несколько удивительно. Очень эффективны теоремы о неподвижной точке оказались в теории интерполяции и в задачах, связанных с теоремой о короне.

Изложение построено следующим образом. В §1 мы формулируем удобный вариант теоремы о неподвижной точке для многозначных отображений, а в §2 мы перечисляем основные ее приложения в обозначенных выше вопросах. В §3 приведено простое доказательство теоремы о неподвижной точке, вероятно, не встречавшееся ранее в литературе. Наконец, в §4 в качестве иллюстрации рассмотрены подробно два приложения этой теоремы. Материал §4 тоже в какой-то мере нов.

§1. Теорема о неподвижной точке

Нас будут интересовать неподвижные точки у многозначных отображений.

Определение. *Пусть K и L – непустые множества, $\Phi : K \to 2^L$ – отображение. Графиком отображения Φ называется множество $\{(x, y) \in K \times L : y \in \Phi(x)\}$. При $K = L$ точка $x \in K$ называется неподвижной для Φ, если $x \in \Phi(x)$.*

Если K и L – топологические пространства, мы часто будем требовать, чтобы график отображения Φ был замкнут. Если Φ – однозначное непрерывное отображение из K в L, то, разумеется, его график замкнут.

Если K и L – выпуклые компакты в каких-нибудь хаусдорфовых локально выпуклых пространствах, а $\Phi : K \to 2^L$ – отображение с

Ключевые слова: пространства Харди, интерполяция, теорема о короне.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 18-11-00053, `https://rscf.ru/project/18-11-00053`.

замкнутым графиком такое, что все множества $\Phi(x)$, $x \in K$, выпуклы и непусты, мы будем говорить, что Φ есть FGK-отображение (название в честь Ки Фана, И. Гликсберга и С. Какутани; причина такого наименования скоро станет ясна).

Композиция двух многозначных отображений $\Phi_1 : K \to 2^L$ и $\Phi_2 : L \to 2^M$ определяется естественным образом:

$$\Phi_2 \circ \Phi_1(x) = \cup\{\Phi_2(y) : y \in \Phi_1(x)\}.$$

Теорема 1. *Пусть K_j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, – выпуклые компакты в хаусдорфовых* ЛВП, *а $\Phi_j : K_j \to 2^{K_{j+1}}$, $j = 1, \dots n$, –* FGK*-отображения. Если $K_1 = K_{n+1}$, то композиция $\Phi = \Phi_n \circ \dots \circ \Phi_1$ имеет неподвижную точку.*

Если $n = 1$ (имеется только одно многозначное отображение), мы получаем знаменитую теорему Ки Фана–Гликсберга–Какутани. Какутани принадлежит конечномерный случай, см. [1]. Бесконечномерное обобщение независимо опубликовали в 1952 г. Ки Фан [2] и Гликсберг [3].

Если $n = 1$ и отображение Φ_1 однозначно, получается, кстати, классический принцип Шаудера (или Шаудера–Тихонова, или Лере–Шаудера).

У композиции отображений – таких, как в теореме 1, – значения могут уже не быть выпуклыми множествами, поэтому непосредственно случай $n > 1$ к случаю $n = 1$ не сводится. В действительности, теорема 1 – далеко не самый сильный из результатов такого рода: см., например, статью Пауэрса [4] с дополнениями и уточнениями в работах Парка [5, 6]. Не приводя точных и самых общих формулировок, отметим лишь, что выпуклость образов $\Phi_j(x)$ не обязательна, ее можно заменить (при некоторых естественных ограничениях) требованием тривиальности всех редуцированных групп когомологий Чеха с рациональными коэффициентами. Однако во всех приложениях, которые мы собираемся обсуждать, приведенной прозрачной формулировки с выпуклыми образами достаточно. Кроме того, мы увидим (см. §3), что доказать теорему 1 для произвольного n можно на том же уровне сложности (скорее, впрочем, простоты), как это было сделано в 1952 г. для $n = 1$.

§2. Ретроспектива

Мы обсудим два сорта приложений теоремы о неподвижной точке – в теории интерполяции пространств Харди и в задаче о короне, а точнее, в родственной и более общей задаче об идеалах.

2.1. Интерполяция. Мы стремимся следовать основному сюжету, поэтому сведения собственно об интерполяции будут поневоле фрагментарны и даны несколько непоследовательно. Более систематические недавние обзоры предмета содержатся, например, в [7,8]. Там же есть исторические сведения и ссылки на более ранние обзорные статьи.

2.1.1. *Постранства Кётэ.* BMO-*регулярность.* Пусть (S, Σ, μ) – пространство с мерой. Пространство Кётэ – это квазибанахово пространство X измеримых функций на S, удовлетворяющее условию

$$|f| \leqslant |g|, \quad g \in X \Rightarrow f \in X \quad \text{и} \quad \|f\|_X \leqslant C\|g\|_X,$$

если только функция f измерима.

Следующее понятие оказалось очень важным в теории интерполяции пространств Харди на окружности $\mathbb{T}$. Чтобы иметь возможность рассматривать пространства последовательностей аналитических функций, в качестве основного пространства с мерой S мы возьмем $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$, где окружность $\mathbb{T}$ наделена мерой Лебега, а множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ – считающей мерой. Пространство Кётэ X на S называется BMO-регулярным, если для всякой функции $0 \neq f \in X$ найдется такая функция $g \in X$, что $|f| \leqslant g$, $\|g\|_X \leqslant C\|f\|_X$ и $\sup_n \|\log g(\cdot, n)\|_{BMO} \leqslant C$ (константа C зависит только от X).

Напомним, что пространство Кётэ удовлетворяет условию Фату, если его единичный шар замкнут относительно сходимости по мере на всех множествах конечной меры.

Следующая теорема была доказана в [9] с помощью теоремы 1 при $n = 1$.

Теорема 2. *Пусть X – банахово пространство Кётэ на $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$, удовлетворяющее условию Фату. Пусть еще $0 < \beta < 1$.*

Следующие утверждения эквивалентны.

1°. *Пространство X* BMO-*регулярно.*

2°. *Порядковое сопряженное X'* BMO-*регулярно.*

3°. *Для всех достаточно малых* α, $0<\alpha<1$ (*эквивалентно: для какого-то одного*), *оператор гармонического сопряжения, применяемый по первой переменной, ограничен в пространстве* $[X^{\alpha}(L^1)^{1-\alpha}]^{\beta}$.

Поясним использованные обозначения. Под пространством L^1 понимается $L^1(\mathbb{T}\times\mathbb{N})=L^1(\mathbb{T},l^1)$. Порядковое сопряженное X' по определению состоит из тех функционалов из X^*, которые представимы интегралом с измеримой функцией. Определение степени пространства Кётэ X ясно из формулы $\|f\|_{X^{\alpha}}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\|\,|f|^{1/\alpha}\|_X^{\alpha}$. Определение произведения пространств Кётэ E и F снова ясно из формулы для соответствующей квазинормы:

$$\|u\|_{EF}=\inf\big\{\|v\|_E\|w\|_F;\ u=vw\big\}.$$

2.1.2. BMO-*регулярность для пар.* Пусть X и Y – два пространства Кётэ на $\mathbb{T}\times\mathbb{N}$. Пара (X,Y) называется BMO-регулярной, если для всяких ненулевых функций $x\in X$, $y\in Y$ найдутся функции $u\in X$ и $v\in Y$ такие, что $|x|\leqslant u$, $|y|\leqslant v$, $\|u\|_X\leqslant C\|x\|_X$, $\|v\|_Y\leqslant C\|y\|_Y$ и $\sup\limits_n\Big\|\log\frac{u(\,\cdot\,,n)}{v(\,\cdot\,,n)}\Big\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C$.

Ясно, что если X и Y BMO-регулярны порознь, то BMO-регулярна и пара (X,Y). Обратное неверно.

В [10] по техническим причинам было введено еще одно условие для пар: пара (X,Y) называлась слабо BMO-регулярной, если BMO-регулярна пара (XL^1,YL^1). С этим условием было несколько проще работать, а с другой стороны в вопросах интерполяции оно вполне заменяло обычную BMO-регулярность. Однако позже Д. В. Руцкий доказал, что слабая BMO-регулярность эквивалентна обычной, причем для этого он снова использовал теорему 1 при $n=1$.

Сейчас этот пример носит, скорее, иллюстративный характер (см. п. 2.1.5 ниже). Мы привели его, в частности, потому, что идею доказательства нетривиальной импликации (слабая BMO-регулярность влечет обычную) здесь легко объяснить.

Пусть $x\in X$, $y\in Y$. Для каждой пары п.в. положительных функций $u_1,u_2\in L^1$, $\|u_1\|_{L^1}=\|u_2\|_{L^1}=1$, можно образовать пару (xu_1,yu_2) функций из пространств XL^1 и YL^1. По условию, для нее можно найти пару функций (w_1,w_2) как в определении BMO-регулярности:

$$|xu_1|\leqslant w_1,\quad |yu_2|\leqslant w_2,\quad \Big\|\log\frac{w_1}{w_2}\Big\|_{\mathrm{BMO}}\leqslant C,$$
$$\|w_1\|_{XL^1}\leqslant C\|x\|_X\|u_1\|_{L^1}=C\|x\|_X,\quad \|w_2\|_{YL^1}\leqslant C\|y\|_Y.$$

Тогда найдутся положительные функции v_1 и v_2 из L^1 с единичными нормами и такие, что

$$\|w_1 v_1^{-1}\|_X \leqslant C\|x\|_X, \quad \|w_2 v_2^{-1}\|_Y \leqslant C\|y\|_Y$$

и $\log v_1 v_2^{-1} \in \mathrm{BMO}$ (последнее – потому, что пространство L^1 BMO-регулярно). Эти функции v_1 и v_2 можно выбрать многими способами. Но если удастся для некоторой пары (u_1, u_2) устроить так, чтобы $v_1 = u_1$ и $v_2 = u_2$, наша задача будет решена.

Разумеется, это лишь идея; конкретный способ применения теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани в этой ситуации требует серьезной дополнительной работы. См. п. 4.1 по поводу другой подобной постановки (тоже простая идея и не очень простая реализация).

2.1.3. *Зачем все это?* Фрагменты теории, изложенные выше, возникли из очень старого вопроса о том, как интерполировать вещественным методом между классами Харди H^p на единичной окружности, $p \in (0, +\infty]$. Разумеется, здесь прежде всего приходит в голову попытаться воспользоваться готовой формулой

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{\theta,q} = L^{p,q}, \quad p^{-1} = (1-\theta)p_0^{-1} + \theta p_1^{-1}.$$

Однако окончательно понято, что верна аналогичная формула

$$(H^{p_0}, H^{p_1})_{\theta,q} = H^{p,q}, \tag{$*$}$$

было только в 1980-е годы.

Один из общих подходов к такого рода задачам состоит в следующем. Пусть (X, Y) – совместимая пара квазибанаховых пространств, а X_0 и Y_0 – замкнутые подпространства, соответственно, в X и Y. Говорят, что пара (X_0, Y_0) K-замкнута в (X, Y), если для всякого вектора $f \in X_0 + Y_0$ и всякого его разложения $f = x + y$ с $x \in X$, $y \in Y$ существует другое разложение $f = g + h$, где $g \in X_0$, $h \in Y_0$ и $\|g\|_X \leqslant C\|x\|_X$, $\|h\|_Y \leqslant C\|y\|_Y$. Здесь C не зависит от участвующих векторов.

Определение интерполяционных пространств вещественного метода в терминах K-функционала сразу показывает, что из K-замкнутости следует формула

$$(X_0, Y_0)_{\theta,q} = (X, Y)_{\theta,q} \cap (X_0 + Y_0).$$

В шкалах $H^p(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ K-замкнутость имеет место для любых пар показателей (те же 1980-е годы), именно поэтому справедлива формула $(*)$. Для пространств последовательностей функций (когда основное пространство с мерой есть $\mathbb{T} \times \mathbb{N}$) ситуация аналогична: при переходе от измеримых функций из $L^p(\mathbb{T}\times\mathbb{N})$ к функциям из классов Харди по первой переменной тоже возникает K-замкнутость. Естественно спросить теперь, что происходит за пределами шкалы L^p?

Пусть X – пространство Кётэ на $\mathbb{T}\times\mathbb{N}$, на которое обычно накладывают некоторые необременительные условия. (Мы не будем обсуждать их; отметим только, что часто накладывается условие Фату.) Тогда возникает пространство типа Харди

$$X_A = \{f \in X : f(\,\cdot\,,k) \in N^+ \ \text{ при } \ k \in \mathbb{N}\},$$

где N^+ – граничный класс В. И. Смирнова. Ясно, что $L^p_A = H^p$. Естественно интересоваться тем, когда пара (X_A, Y_A) K-замкнута в (X, Y) (Y – еще одно пространство Кётэ).

Оказалось, что это верно всякий раз, когда пара (X, Y) BMO-регулярна (доказательство довольно просто, но мы на нем не останавливаемся). Далее, уже отмечалось, что пара (X, Y) BMO-регулярна, если пространства X и Y BMO-регулярны по отдельности. Последнее: BMO-регулярные пространства встречаются очень часто – тем самым, и интерполировать между пространствами вида X_A очень часто можно так же, как и между породившими их пространствами Кётэ.

Одна из причин появления результатов о BMO-регулярности, цитированных выше, состояла в желании расширить число доступных примеров. Так, в частности, BMO-регулярность пространства $L^\infty(\mathbb{T}, l^p)$ при $p < +\infty$ вряд ли видна непосредственно из определения – однако она легко следует из эквивалентности $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ в теореме 2. Другой причиной было выяснение того, насколько BMO-регулярность в той или иной форме необходима для упомянутой K-замкнутости или даже просто для "хорошей" интерполяции пространств типа Харди. Бытовала, среди прочего, гипотеза об эквивалентности BMO-регулярности пары (X, Y) и K-замкнутости пары (X_A, Y_A) в (X, Y). Эта гипотеза оказалась неверной, пример см. в [8].

2.1.4. *Теорема Д. В. Руцкого.* Удовлетворительное описание "хорошей" интерполяции в терминах BMO-регулярности было получено Д. В. Руцким в той же работе [8]. В доказательстве основных результатов там снова очень существенно используется теорема 1 – несколько раз на разных этапах рассуждения, причем с $n > 1$ (т.е. классической теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани здесь недостаточно). Приведем формулировку, несколько разгрузив ее в сравнение с [8] и ограничившись для простоты банаховыми пространствами Кётэ X и Y, на которые наложено условие Фату.

Теорема 3 (см. [8, теорема 2.7]). *Пусть* $\theta \in (0,1)$. *Следующие условия эквивалентны.*

(i) $[(X,Y)_{\theta,s}]_A = (X_A, Y_A)_{\theta,s}$ *для некоторого (экивалентным образом, для всех)* $s \in [1,\infty)$.

(ii) *Пара* (X_A, Y_A) K*-замкнута в паре* (X,Y).

(iii) *При некоторых* $0 < \alpha < \theta < \beta < 1$ *(эквивалентно, при всех* $0 < \alpha < \beta < 1$*) и* $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$ *пара* $((X,Y)_{\alpha,p}, (X,Y)_{\beta,q})$ BMO-*регулярна.*

(iv) *Пространство* $(L^1, X'Y)_{\eta,s}$ BMO-*регулярно при некоторых* $0 < \eta < 1$ *и* $1 \leqslant s \leqslant +\infty$.

(v) *Имеет место вложение* $(X^{1-\theta}Y^\theta)_A \subset (X_A, Y_A)_{\theta,\infty}$.

Стоит отметить, что условие (iv) связывает “хорошую” интерполяцию с BMO-регулярностью одного пространства (а не пары).

2.1.5. BMO-*регулярность и операторы гармонического анализа.* Связь между этими вещами можно усмотреть уже из эквивалентности $1^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$ в теореме 2.

Заметим, что определения BMO-регулярности (что для отдельных пространств, что для пар) можно буквально перенести на пространства Кётэ на $\mathbb{R}^d$ с мерой Лебега. Эти новые понятия уже не связаны с комплексным анализом, во всяком случае при $d > 1$. Тем не менее, хочется иметь что-то вроде теоремы 2 и в этом случае.

Комплексный анализ был очень глубоко вплетен в доказательство теоремы 2, которое представлено в работе [9], так что перенести те рассуждения на $\mathbb{R}^n$ не представляется возможным. Тем не менее, нечто похожее на теорему 2 в этой ситуации было доказано в [12]. Это снова было сделано с помощью теоремы 1 при $n = 1$.

Именно, пусть T – какой-нибудь невырожденый оператор типа Кальдерона–Зигмунда или максимальный оператор Харди–Литлвуда. (“Невырожденный” более или менее означает, что сингулярное ядро действительно имеет характерную для таких операторов особенность; в общем, надо обязательно исключить 0, а с ним и все похожее.) Если X – банахово пространство Кётэ на $\mathbb{R}^n$, то BMO-регулярность пространства X эквивалентна тому, что оператор T ограничен в пространстве $(X^\alpha (L^1)^{1-\alpha})^\beta$ при некотором $\beta > 0$ и всех достаточно малых $\alpha \in (0,1)$ (эквивалентно, при одном α).

В той же работе имеется похожий результат про BMO-регулярность пар (теорема 8 в [12]). Он покрывает уже упоминавшийся в п. 2.1.2 результат работы [11]. В доказательстве опять была применена теорема 1 с $n = 1$.

Другое применение теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани можно найти в [13]. Там речь шла об ограниченности сингулярных интегральных операторов и максимальной функции в пространствах вида $X(Y)$, где X – пространство Кётэ на $\mathbb{R}^n$, а Y – пространство Кётэ на другом пространстве с мерой. Мы не приводим формулировок, чтобы не перегружать изложение.

2.2. Теорема о короне и задача об идеалах. Как и в случае интерполяции, мы опускаем исторические сведения и мотивировки: о них можно прочитать в цитированных далее источниках. Начнем с задачи об идеалах.

Пусть E – какое-нибудь пространство Кётэ на множестве $\mathbb{N}$ ("идеальное пространство последовательностей"). Будем предполагать, что норма в нем порядково абсолютно непрерывна (в нашей ситуации это просто означает, что стандартные координатные орты образуют базис в E).

Будем говорить, что для решетки E разрешима задача об идеалах с показателем α и константой C, если для всякой функции h из $H^\infty(\mathbb{D})$ и всякой вектор-функции f из $H^\infty(\mathbb{D}; E)$, удовлетворяющих условию

$$|h(z)| \leqslant \|f(z)\|_E^\alpha \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

существует функция g из $H^\infty(E')$, для которой

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f(z,j)g(z,j) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(z), g(z)\rangle, \quad z \in \mathbb{D},$$

при этом $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D},E')} \leqslant C$.

И. К. Злотников в [14], снова с помощью теоремы 1 при $n = 1$, доказал, что если E – q-вогнутая решетка, то задача об идеалах для E разрешима с показателем $(1+\varepsilon)q$ и с константой C, зависящей только от q и ε.

В действительности Злотников вывел этот результат из очень давно известного случая, когда $E = l^2$. Схема его рассуждений была аналогична методу из статьи Руцкого [15], в которой нечто похожее (переход от одной решетки E к любой другой) было сделано в *задаче о короне.*

Задача о короне – это более известный вариант задачи об идеалах, относящийся к случаю, когда h – ненулевая константа. Иными словами, условие задачи о короне состоит в том, что

$$0 < \delta \leqslant \|f(z)\|_E \leqslant 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

а найти требуется функцию g из $H^\infty(E')$ такую, что $1 \equiv \langle f(z),\, g(z)\rangle$, с оценкой $\|g\|_{H^\infty(E')} \leqslant C(E,\delta)$.

И снова в [15] использовалась теорема 1 с $n = 1$.

Полезно придать рассматриваемым постановкам более общий вид. Для простоты ограничимся случаем, который в контексте предыдущего обсуждения потребовал бы конечномерности пространства E.

Пусть E_1 и E_2 – два конечномерных банаховых пространства (не обязательно Кётэ). Читатель легко поймет, что в примерах выше нужно брать $E_2 = \mathbb{C}$. Далее, пусть F – ограниченная аналитическая функция в круге со значениями в пространстве линейных непрерывных операторов из E_1 в E_2.

Общая задача о короне состоит в отыскании условий на F, при которых

$$H^\infty(E_2) = \big\{F(z)g(z) : g \in H^\infty(E_1)\big\} \qquad (**)$$

В этой формуле $F(z)g(z)$ означает действие оператора $F(z)$ на вектор $g(z)$, $z \in \mathbb{D}$.

Общая задача об идеалах (тут, скорее, надо было бы говорить о "задаче о модулях", но мы не будем так делать) состоит в описании множества $F \cdot H^\infty(E_1)$ для заданной и фиксированной функции F.

Разумеется (и, пожалуй, даже прежде всего) интересны и оценки решений g уравнения $F(z)g(z) = h(z)$, и по разным причинам (как уже говорилось, объяснения и ссылки имеются в цитированных в этом пункте источниках) полезно не ограничиваться L^∞-метрикой в формулах типа $(**)$. В связи со сказанным, введем еще одно понятие.

Определение. *Пусть задана операторнозначная функция F как выше. Говорят, что L^p-задача о короне $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ разрешима с константой C, если для всякой функции $u \in H^p(E_2)$ найдется такая функция $v \in H^p(E_1)$, что*

$$F(z)v(z) = u(z), z \in \mathbb{D}, \quad и \quad \|v\|_{H^p(E_1)} \leqslant C\|u\|_{H^p(E_2)}.$$

Следующий результат был доказан в [16] с помощью теоремы 1 при $n = 1$.

Теорема 4. *Если для заданной функции F L^p-задача о короне разрешима с константой C при одном $p \in [1, +\infty]$, то она разрешима с той же константой при любом другом значении $p \in [1, +\infty]$.*

Разумеется, труден здесь переход от конечного p к $p = +\infty$. В действительности в [16] было доказано более сильное утверждение, мы на нем не останавливаемся.

Аналог теоремы 4 для общей задачи об идеалах придумать не так легко – по той причине, что там мы зачастую не знаем, из чего в точности состоит образ $F \cdot H^p(E_1)$ (обычно доступны лишь достаточные условия принадлежности этому образу). В §4 мы все же приведем одно (новое) утверждение такого характера в порядке иллюстрации.

§3. Простое доказательство теоремы 1

В приведенных примерах только в одном случае – в [8] – теорема 1 использовалась в полной общности. Во всех остальных хватило классического результата Ки Фана–Гликсберга–Какутани. Более того (см. подробнее п. 4.2), иногда даже предпринимались специальные усилия, чтобы не выйти за рамки той классической теоремы. Причина в том, что результаты Пауэрса [4] и более поздние, упомянутые в §1, – вещи более высокого уровня сложности, чем теорема Ки Фана– Гликсберга–Какутани, и казалось, что путь к теореме 1 с $n > 1$ имеется только через эти результаты.

Однако мы сейчас покажем, что теорема 1 в полной общности (то есть случай, когда все отображения переводят точки в *выпуклые* множества) на самом деле не сложнее теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани и может быть получена той же техникой, которая использовалась в 1952 г.

Заметим сначала, что если S_1, S_2 и S_3 – произвольные хаусдорфовы компакты, а отображения $a : S_1 \to 2^{S_2}$ и $b : S_2 \to 2^{S_3}$ имеют замкнутый график, то замкнут и график отображения $b \circ a$. (В частности, все множества $(b \circ a)(s)$, $s \in S_1$, замкнуты.)

Действительно, возьмем два сходящиеся направления $s_\alpha \to s$ в S_1 и $t_\alpha \to t$ в S_3 так, чтобы $t_\alpha \in (b \circ a)(s_\alpha)$. Найдутся такие точки $u_\alpha \in S_2$, что $u_\alpha \in a(s_\alpha)$ и $t_\alpha \in b(u_\alpha)$. Перейдя к поднаправлениям, можно считать, что $u_\alpha \to u$. Тогда $u \in a(s)$ и $t \in b(u)$ в силу замкнутости графиков отображений a и b. Поэтому $t \in (b \circ a)(s)$, что и требовалось.

По индукции это утверждение распространяется на композицию конечного числа отображений.

Доказательство теоремы 1. Рассуждаем по индукции. База ($n = 1$) – это теорема Ки Фана–Гликсберга–Какутани, однако мы передокажем и ее – для полноты и поскольку так удобней. Итак, у нас имеются выпуклые компакты $K_1, \dots, K_{n+1}$ в хаусдорфовых ЛВП $X_1, \dots, X_{n+1}$, а также FGK-отображения $\Phi_j : K_j \to 2^{K_{j+1}}$, $j = 1, \dots, n$. Кроме того, предполагается, что $K_{n+1} = K_1$. Тогда можно считать, что и $X_1 = X_{n+1}$ по составу элементов (просто заменим эти пространства линейной оболочкой множества K_1).

Надо доказать, что отображение $\Psi = \Phi_n \circ \cdots \circ \Phi_1$ имеет неподвижную точку. Подчеркнем, что при $n = 1$ предыдущая формула для Ψ неправильная, а именно, $\Psi = \Phi_1$ (а не $\Psi = \Phi_1 \circ \Phi_1$). Эту небрежность, впрочем, допускают всегда; мы сделали оговорку, поскольку собираемся проверять базу и индукционный переход параллельно.

Сначала модифицируем отображение Φ_n. Пусть $\mathcal{V}$ – база абсолютно выпуклых открытых окрестностей нуля в X_{n+1}. Для $V \in \mathcal{V}$ определим отображение $G_V : K_n \to 2^{K_{n+1}} = 2^{K_1}$:

$$G_V(x) = (\Phi_n(x) + \overline{V}) \cap K_1.$$

Проверим, что отображение G_V имеет замкнутый график. Пусть x_α и y_α – сходящиеся обобщенные последовательности точек из K_n и из K_1 соответственно, причем $x_\alpha \to x$, $y_\alpha \to y$ и $y_\alpha \in G_V(x_\alpha)$. Запишем $y_\alpha = u_\alpha + v_\alpha$, где $u_\alpha \in \Phi_n(x)$, $v_\alpha \in \overline{V}$. Поскольку точки u_α лежат в компактном множестве K_1, можно считать, что $u_\alpha \to u$. Тогда и $v_\alpha \to v \overset{\text{def}}{=} y - u$, причем $v \in \overline{V}$. Так как $u \in \Phi_n(x)$ в силу замкнутости графика отображения Φ_n, получаем отсюда, что $y = u + v \in G_V(x)$.

Пусть теперь T_V – множество неподвижных точек отображения $\Delta = G_V \circ \cdots \circ \Phi_1$ (соответственно, $\Delta = G_V$ при $n = 1$). Это множество замкнуто в силу замкнутости графика отображения Δ. Если все множества T_V непусты, то в силу компактности их пересечение тоже непусто, а любая его точка неподвижна для Ψ.

Таким образом, надо проверить наличие неподвижных точек у отображения Δ при любом V. С этого момента считаем окрестность V фиксированной.

Множества $\{x + V\}_{x \in K_1}$ покрывают компакт K_1 и открыты. Выберем конечное подпокрытие $z_1 + V, \dots, z_p + V$ из этого покрытия. Пусть $C = \operatorname{conv}\{z_1, \dots, z_p\}$ (это – компактное подмножество множества K_1). Определим отображение

$$\widetilde{\Phi}_n : K_n \to 2^C, \quad \widetilde{\Phi}_n(x) = G_V(x) \cap C, \quad x \in K_n.$$

Все значения отображения $\widetilde{\Phi}_n$ – компактные выпуклые множества. Проверим, что они непусты. Действительно, при любом x из K_n имеем

$$\varnothing \neq \Phi_n(x) \subset K_1 \subset C + V \subset C + \overline{V},$$

откуда $(\Phi_n(x) - \overline{V}) \cap C \neq \varnothing$. Но $\overline{V} = -\overline{V}$, поэтому множество $G_V(x)$ пересекает C. Далее, замкнутость графика отображения $\widetilde{\Phi}_n$ очевидна.

Для удобства дальнейших обозначений, мы переименуем отображения Φ_j с $j < n$ (если таковые есть) в $\widetilde{\Phi}_j$ и будем писать $\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Phi}_n \circ \dots \circ \widetilde{\Phi}_1$, при $n > 1$ (или $\widetilde{\Psi} = \widetilde{\Phi}_1$ при $n = 1$).

Натянем на множество C аффинное подпространство (оно конечномерно), в котором найдем замкнутый симплекс B, содержащий C. Беря в C внутреннюю точку относительно указанного аффинного подпространства, устроим стандартную ретракцию $r : B \to C$ вдоль лучей, исходящих из этой внутренней точки как из центра. Мы найдем неподвижную точку у отображения $\widetilde{\Psi} \circ r : B \to 2^B$ (оно действует даже в 2^C). Разумеется, этого будет достаточно.

На следующем шаге мы в каком-то смысле заменим отображение $\widetilde{\Phi}_1$ серией однозначных отображений.

Рассмотрим k-е симплициальное разбиение симплекса B. Сопоставим ему отображение $\varphi_k : B \to K_2$ (при $n > 1$; если $n = 1$, φ_k действует в множество $C \subset B$) следующим образом. Если x – одна из вершин выбранного симплициального разбиения, то в качестве $\varphi_k(x)$ назначаем любую точку множества $\widetilde{\Phi}_1(rx)$. После этого продолжаем φ_k на все симплексы разбиения с вершин линейно. Ясно, что все отображения φ_k непрерывны.

Далее рассуждения очень ненадолго теряют единообразность.

База ($n = 1$). Каждое отображение $\varphi_k : B \to B$ имеет неподвижную точку w_k по теореме Брауэра.

Индукционный переход ($n > 1$, для композиции из $n - 1$ отображения теорема уже доказана).

В этом случае $\widetilde{\Phi}_2 \circ \varphi_k$ есть FGK-отображение, а его композиция с оставшимися (которых может и не быть: при $n = 2$) удовлетворяет индукционному предположению. Для единообразия будем записывать эту композицию в виде $A \circ \widetilde{\Phi}_2 \circ \varphi_k$, где A – тождественное отображение при $n = 2$. Таким образом, найдется точка $w_k \in B$, для которой $w_k \in A \circ \widetilde{\Phi}_2 \circ \varphi_k(w_k)$.

Дальше мы некоторое время снова можем рассуждать единообразно для случаев $n = 1$ и $n > 1$. Перейдя к подпоследовательности, можем считать, что $w_k \to w \in B$. Пусть $x_1^{(k)}, \ldots, x_s^{(k)}$ – вершины того симплекса k-го разбиения для B, который содержит w_k, тогда $w_k = \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j^{(k)} x_j^{(k)}$, $\lambda_j^{(k)} \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j^{(k)} = 1$. Отметим, что $s \leqslant \dim B + 1$, поэтому, повторив какие-то вершины с нулевыми коэффициентами, можно считать, что число s одинаково во всех таких представлениях.

Ясно, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)} = w$, и мы можем считать, что пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_j^{(k)}$ тоже существуют и равны λ_j. Тогда $\lambda_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j = 1$. Пусть $y_j^{(k)} = \varphi_k(x_j^{(k)})$, $j = 1, \ldots, s$. Можно считать (на этот раз перейдя к поднаправлениям, а не к обычным подпоследовательностям), что и векторы $y_j^{(k)}$ сходятся к некоторым векторам y_j. Поскольку $y_j^{(k)} \in \widetilde{\Phi}_1(rx_j^{(k)})$, из замкнутости графика отображения $\widetilde{\Phi}_1$ вытекает, что $y_j \in \widetilde{\Phi}_1(rw)$, откуда получается, что

$$\varphi_k(w_k) \to \sum_{j=1}^{s} \lambda_j y_j \in \widetilde{\Phi}_1(rw). \qquad (+)$$

База индукции ($n = 1$). Тогда $w_k = \varphi_k(w_k)$, поэтому из соотношения $(+)$ получается, что $w \in \widetilde{\Phi}_1(rw)$. Это и есть то, что нам надо.

Индукционный переход ($n > 1$). Мы видели, что тогда $w_k \in A \circ \widetilde{\Phi}_2 \circ \varphi_k(w_k)$. Из соотношения $(+)$ и замкнутости графика отображения $A \circ \widetilde{\Phi}_2$ тода получается, что

$$w \in A \circ \widetilde{\Phi}_2 \circ \widetilde{\Phi}_1(rw).$$

Это – снова то, что нам нужно. □

Замечание. Если интересоваться только случаем $n = 1$, рассуждение незначительно, но все же сокращается. Уже отмечалось, что если применить эту конструкцию к одному однозначному отображению, получается знаменитый принцип Шаудера, и похоже, что это – самое быстрое его доказательство. Стоит заметить, что привлечение многозначности по существу: даже если отображение Φ_1 однозначно и нет других, вспомогательные отображения G_V все равно многозначны.

§4. Иллюстративные примеры

В этом разделе мы в качестве иллюстрации опишем две конструкции в задаче об идеалах, которая обсуждалась в п. 2.2.

4.1. L^p-оценки решений. В теореме 4 (см. п. 2.2) мы уже видели, что в общей задаче о короне все равно, в какой метрике оценивать соответствующее решение – L^∞ или L^p с $p < +\infty$. Подобное (правда, не столь удовлетворительное) утверждение можно доказать и в случае задачи об идеалах. Причины, по которым трудно здесь надеяться на полный аналог теоремы 4, уже объяснялись.

Пусть E_1 и E_2 – конечномерные банаховы пространства, и пусть $F \in H^\infty(\mathcal{L}(E_1, E_2))$ – ограниченная в круге $\mathbb{D}$ аналитическая функция. Пусть еще h – скалярная функция из $H^\infty(E_2)$. Рассмотрим следующие требования (параметр $p \in [1, \infty]$ в каждом из них фиксирован):

(S_p) найдется такая константа C, что для любой скалярной функции $f \in H^p$ найдется такая функция $g \in H^p(E_1)$, что $f(z)h(z) = F(z)g(z)$, $z \in \mathbb{D}$ и $\|g\|_{H^p(E_1)} \leqslant C\|f\|_{H^p}$.

В соответствии со сказанным ранее, мы пытаемся описать не все пространство $F \cdot H^p(E_1)$, а только "главный модуль", порожденный функцией h. Разумеется, при $p < \infty$ не следует понимать слово "модуль" буквально.

Теорема 5. *Условия S_p при разных p эквивалентны. Константа C не меняется при изменении p.*

Понятно, что если нам удалось разрешить уравнение

$$F(z)g(z) = h(z) \quad \text{с} \quad \|g\|_{H^\infty(E_1)} \leqslant C, \tag{++}$$

то все условия S_p выполнены с той же константой C. Трудности возникают при движении от $p < +\infty$ к $p = +\infty$. Условие S_p с $p < \infty$ дает, конечно, разрешимость уравнения $F(z)g(z) = h(z)$, однако лишь с $g \in H^p(E_1)$ вместо $g \in H^\infty(E_1)$.

Идея того, что необходимо проделать, довольно проста. Обозначим через B единичный шар пространства $H^p(E_1)$ и построим многозначное отображение этого шара в себя следующим образом. Взяв $f \in B$, построим "масштабированную" внешнюю функцию по функции $f_*\colon \zeta \mapsto \|f(\zeta)\|_{E_1}$, $\zeta \in \mathbb{T}$ (вопросов о граничных значениях не возникает, поскольку пространство E_1 конечномерно):

$$g_f = \frac{1}{C}\exp(\log f_* + i\,\widetilde{\log f_*})$$

(волна обозначает комплексное сопряжение). В качестве $\Phi(f)$ возьмем множество всех решений v уравнения $F(z)v(z) = g_f(z)h(z)$, принадлежащих шару B. Все значения отображения Φ – непустые выпуклые множества. Если удастся гарантировать существование ненулевой неподвижной точки $f \in \Phi(f)$, то окажется, что $F(z)\Big[\frac{f(z)}{g_f(z)}\Big] = h(z)$ и останется заметить, что $f(g_f)^{-1} \in H^\infty(E_1)$ и $\|f(g_f)^{-1}\|_{L^\infty(E_1)} \leqslant C$.

Однако реализация этого плана более замысловата. Нам нужно обеспечить замкнутость графика отображения Φ, а для этого хочется сначала ввести в шаре B топологию, в которой он будет компактным. Напрашивается слабая топология пространства $H^p(E_1)$ при $1 < p < +\infty$ или w^* топология пространства $H^1(E_1)$. Но тогда нам захочется, чтобы внешние функции g_f выдерживали слабую сходимость функций f, что довольно проблематично.

Обойти препятствие можно примерно как в [16]. Зафиксируем число $\delta > 0$ и пусть $0 < r < 1$. Единичный шар B пространства $H^p(E_1)$ наделим слабой (или $*$-слабой) топологией τ, о которой говорилось выше. Хорошо известно и легко проверяется, что эта топология эквивалентна топологии равномерной сходимости на компактах внутри круга.

Пусть $f \in B$; положим $f^{(r)}(\zeta) = f(r\zeta)$, $|\zeta| = 1$. Построим внешнюю функцию по функции $\zeta \mapsto \|f^{(r)}(\zeta)\|_{E_1} + \delta \overset{\text{def}}{=} u^{(r)}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{T}$:

$$g_f^{(r)} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{C(1+\delta)} \exp(\log u^{(r)} + i\,\widetilde{\log u^{(r)}}).$$

Заметим, что если последовательность функций f_n сходится к f в топологии τ, то $f_n^{(r)} \to f^{(r)}$ равномерно. Соответствующие функции $u_n^{(r)}$ тоже сходятся (к $u^{(r)}$) равномерно и отделены от нуля. Поэтому функции $\log u_n^{(r)}$ сходятся к $\log u^{(r)}$ в L^2, а тогда имеет место и сходимость в L^2 для их гармонических сопряженных. Отсюда следует, что $g_{f_n^{(r)}}$ сходятся к $g_{f^{(r)}}$ равномерно на компактах внутри круга.

Далее, определим отображение $\Phi : B \to 2^B$ формулой

$$\Phi(f) = \big\{v \in B : Fv = g_{f^{(r)}} h\big\}.$$

Множество $\Phi(f)$ непусто по условию S_p и выпукло. Замкнутость графика отображения Φ получается предельным переходом внутри круга, в соответствии со сказанным выше.

Значит, у отображения Φ есть неподвижная точка, то есть функция $f_r \in B$, для которой $Ff_r = g_{f_r^{(r)}} h$.

Теперь “разморозим” r, взяв последовательность $r_n \to 1$, $r_n < 1$. Можно без потери общности считать, что $f_{r_n} \to \varphi \in B$ в топологии τ. В соответствии с описанной выше конструкцией, образуем функции $u^{(r_n)}(\zeta) = \|f_{r_n}^{(r_n)}(\zeta)\|_{L^\infty(E_1)} + \delta$ и $a_n = \log u^{(r_n)}$. Функции a_n равномерно ограничены в $L^2(\mathbb{T})$, поэтому можно считать, что $a_n \to a$ слабо в

$L^2(\mathbb{T})$, а тогда и $\widetilde{a}_n \to \widetilde{a}$ слабо в $L^2(\mathbb{T})$. Поэтому аналитические функции $a_k + i\widetilde{a}_n$ (как обычно, имеются в виду интегралы Пуассона от этих граничных значений) сходятся к $a + i\widetilde{a}$ равномерно на компактах внутри круга $\mathbb{D}$.

Тем самым, внешние функции $g_{f_{r_n}}^{(r_n)}$ сходятся равномерно на компактах внутри круга к внешней функции

$$\Delta = \frac{1}{C(1+\delta)} \exp(a + i\widetilde{a}),$$

при этом, разумеется, $F\varphi = \Delta h$. Мы покажем, что $\|\varphi\delta^{-1}\|_{H^\infty(E_1)} \leqslant C(1+\delta)$. Это практически завершит доказательство: избавиться от множителя $1+\delta$ можно, еще раз взяв предельные точки при $\delta \to 0$.

Разумеется, искомая оценка получится из неравенства

$$\|f_{r_n}^{(r_n)}(\,\cdot\,)\|_{E_1} \leqslant C(1+\delta)|g_{f_{r_n}^{(r_n)}}(\,\cdot\,)|$$

(оно справедливо во всем круге, поскольку справа стоит внешняя функция, построенная по левой части). Надо только проверить, что $f_{r_n}^{(r_n)} \to \varphi$ (хотя бы вдоль подпоследовательности) равномерно на компактах в круге. Пока мы знаем, что $f_{r_n} \to \varphi$, а это не то же самое.

Однако снова без потери общности мы можем обеспечить сходимость функций $f_{r_n}^{(r_n)}$ к какой-то (может быть, отличной от φ) функции ψ в топологии τ. Чтобы показать, что $\psi = \varphi$, для $|\zeta| \leqslant 1$ напишем

$$\psi^{(r)}(\zeta) = \psi(r\zeta) = \lim_{n\to\infty} f_{r_n}(r_n r\zeta).$$

Последний предел равен $\varphi^{(r)}(\zeta)$ в силу равномерной сходимости. Действительно, при всяком $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что

$$\|f_{r_n}(z) - \varphi(z)\|_{E_1} < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N \quad \text{и} \quad |z| \leqslant r.$$

Тогда и $\|f_{r_n}(r_n z) - \varphi(r_n z)\| < \varepsilon$ при $|z| \leqslant r$. Поскольку $\varphi(r_n z) \to \varphi(z)$ равномерно на компактах в круге, все сделано.

4.2. О теореме И. К. Злотникова [14]. Формулировка была приведена в начале п. 2.2. Здесь мы не повторяем все сопутствующие и подготовительные рассуждения из статьи [14], а обсудим только утверждение, в доказательстве которого используется теорема о неподвижной точке.

Пусть E_0 и E_1 – банаховы пространства Кётэ на множестве $\{1, 2, \dots, k\}$. Для простоты (и без потери общности) считаем, что E_1

и E_2 вложены в $l^\infty_{(k)}$ с константой 1. Предположим, что пространство E_0E_1 тоже банахово.

Теорема 6. *Пусть задача об идеалах разрешима для пространства E_0 с постоянной C и показателем α. Тогда при всяком $\varepsilon > 0$ задача об идеалах разрешима для пространства E_0E_1 с тем же показателем α и с постоянной $(1+\varepsilon)2^\alpha C$.*

В [14] это утверждение было получено с помощью классической теоремы Ки Фана–Гликсберга–Какутани (случай $n = 1$ в теореме 1), однако там были предприняты специальные усилия, чтобы избежать теоремы 1 с бо́льшим n. Для этого по дороге использовалась теорема Майкла о непрерывном выборе. Мотивом для такого образа действий был кажущийся скачок сложности между случаями $n = 1$ и $n > 1$ в теореме 1. Поскольку, как мы видели, этого скачка на самом деле нет, теорема Майкла превращается в “сущность, привлеченную без надобности”: без нее проще.

Рассуждение, которое мы сейчас приведем, восходит к первоначальному неопубликованному варианту статьи Руцкого [15] про задачу о короне. Отметим еще, что рассуждение из [14] с теоремой Майкла восходит к опубликованному варианту статьи [15].

Доказательство теоремы 6. Обозначим произведение E_0E_1 через E.

Лемма 1. $E_0' = E'E_1$.

Не останавливаемся на доказательстве. Объяснения имеются в [14] и [15], но известно это соотношение было гораздо раньше.

Пусть $k \in H^\infty$, $f \in H^\infty(E)$ и $|(k(z)| \leqslant \|f(z)\|_E^\alpha \leqslant 1$, $z \in \mathbb{D}$. Надо найти такую функцию $g \in H^\infty(E')$, что

$$k(z) \equiv \langle f(z), g(z)\rangle \quad \text{и} \quad \|g(\,\cdot\,)\|_{E'} \leqslant (1+\varepsilon)2^\alpha C.$$

Из определения нормы в произведении E_0E_1 следует, что мы можем найти такие функции $u \in L^\infty(E_0)$ и $v \in L^\infty(E_1)$, u, $v \geqslant 0$, что

$$\|u\|_{L^\infty(E_0)}, \|v\|_{L^\infty(E_1)} \leqslant 1, \quad f = uv, \|u\|_{L^\infty(E_0)}\|v\|_{L^\infty(E_1)} = \|f\|_{L^\infty(E)}.$$

Далее, можно считать, что все компоненты $f_1, \dots, f_k$ вектор-функции f ненулевые (просто уменьшим носитель $\{1, \dots, k\}$ наших пространств Кётэ в противном случае).

Тогда функции $\log|f_j|$ суммируемы. Поскольку $-\log|f_j| = -\log u_j - \log v_j \geqslant -\log v_j \geqslant 0$ (через u_j и v_j обозначены компоненты функций u и v), получаем, что $\log v_j \in L^1$.

Введем множество

$$B = \bigl\{(\log w_1, \dots, \log w_k) : w = (w_1, \dots, w_k) \in L^\infty(E_1), \\ w_j \geqslant v_j \ \text{ при всех } \ j \ \text{ и } \ \|w\|_{L^\infty(E_1)} \leqslant 2\bigr\}.$$

Из неравенства Юнга

$$w_j^{(1)}(\zeta)^{1-\alpha} w_j^{(2)}(\zeta)^\alpha \leqslant (1-\alpha) w_j^{(1)}(\zeta) + \alpha w_j^{(2)}(\zeta))$$

(т.е. просто из выпуклости экспоненты) вытекает выпуклость множества B. Наделим множество B слабой топологией пространства $L^1(E_1)$, тогда B компактно.

1°. Пусть U – замкнутый шар радиуса $2^\alpha C$ пространства $H^\infty(E_0')$, наделенный w^*-топологией. Сейчас мы построим отображение Φ_1 из B в 2^U. Определение дается в несколько шагов. Для функции $\rho \in B$ построим внешнюю функцию $\psi = e^{\rho + i\widetilde{\rho}}$ (имеется в виду покомпонентное равенство: $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$; $\psi_j = e^{\rho_j + i\widetilde{\rho}_j}$). По ней построим функции $\varphi = f/\psi$ (опять имеем в виду равенства $\varphi_j = f_j/\psi_j$, $j = 1, \dots, k$).

Тогда функция φ представляет собой данные задачи об идеалах, разрешимость которой гарантирована условиями теоремы. Действительно, $|\Psi| \geqslant v$ по определению множества B, откуда $|\varphi| \leqslant \frac{|f|}{v} \leqslant u$, так что $\|\varphi\|_{L^\infty(E_0)} \leqslant 1$. С другой стороны,

$$|k(z)| \leqslant \|f(z)\|_E^\alpha \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(E_0)}^\alpha \|\psi\|_{L^\infty(E_1)}^\alpha \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(E_0)}^\alpha \cdot 2^\alpha.$$

Таким образом, по условию теоремы найдется такая функция $h \in H^\infty(E_0')$, что

$$k(z) \equiv \langle \varphi(z), h(z) \rangle \quad \text{и} \quad \|h(z)\|_{E_0'} \leqslant 2^\alpha C.$$

Множество $\Phi_1(\rho)$ – это, по определению, совокупность всех таких функций h. Ясно, что это множество выпукло и замкнуто. Замкнутость графика отображения Φ_1 мы проверим позже.

2°. Обозначим шар радиуса 2^α в пространстве $H^\infty(E_0')$ через V (так что Φ_1 действует из B в 2^V). Сейчас мы определим еще одно отображение $\Phi_2 : V \to 2^B$. Именно, если $\sigma \in V$, то

$$\Phi_2(\sigma) = \Bigl\{ \log w \in B : \bigl\|\frac{\sigma}{w}\bigr\|_{L^\infty(E')} \leqslant (1+\varepsilon) 2^\alpha C \Bigr\}.$$

То, что функции $w \geqslant 0$, удовлетворяющие неравенствам $\|w\|_{L^\infty(E_1)} \leqslant 1$ и $\|\frac{\sigma}{w}\|_{L^\infty(E')} \leqslant (1+\varepsilon)2^\alpha C$, существуют, следует из леммы 1. Добиться неравенства $w \geqslant v$ можно, например, заменив функцию w, упомянутую выше, на $w+v$: тогда $\|w+v\|_{L^\infty(E_1)} \leqslant 2$, и мы находимся в B. Каждое множество $\Phi_2(\sigma)$ выпукло, поскольку множество B выпукло, а условие $\|\sigma/w\|_{L^\infty(E')} \leqslant A$ тоже выпукло относительно $\log w$ (см. соответствующее место в доказательстве выпуклости множества B). Замкнутость графика отображения Φ_2 снова докажем позже.

Если все объявленное доказано, то по теореме 1 у отображения $\Phi_2 \circ \Phi_1 : B \to 2^B$ есть неподвижная точка $\log w$. Построим внешнюю функцию $W = \exp(\log w + i\widetilde{\log w})$, тогда найдется такое решение $h \in V$ уравнения $k(z) = \langle \frac{f(z)}{W(z)}, h(z)\rangle$, что

$$\Big\|\frac{h}{W}\Big\|_{H^\infty(E')} = \Big\|\frac{h}{w}\Big\|_{L^\infty(E')} \leqslant (1+\varepsilon)^{2\alpha} C.$$

Тем самым, h/W – решение нужной нам задачи об идеалах.

Осталось проверить недоказанные утверждения.

Лемма 2. *График отображения $\Phi_1 : B \to 2^V$ замкнут.*

Доказательство. Естественным образом, $\Phi_1 = \alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1$, где отображения α_j, $j = 1, 2, 3$, мы сейчас опишем. Из них только α_3 многозначно, а α_2 и α_1 однозначны и непрерывны. У α_3 будет замкнутый график, а про α_2 и α_1 это очевидно, так что тем самым мы докажем лемму 2.

При этом не все области определения указанных отображений будут выпуклы, так что по отдельности α_1, α_2 и α_3 не следует включать в парадигму теоремы 1.

Итак, для $\rho \in B$ пусть $\alpha_1(\rho) = e^{\rho + i\widetilde{\rho}}$. Пусть $D = \alpha_1(B)$. Отображение α_2 определено на D формулой $\alpha_2(\psi) = f/\psi$. Наконец, отображение α_3 определено на образе отображения α_2 так: $\alpha_3(\varphi)$ – это множество всех функций h из $L^\infty(E_0')$ таких, что

$$k(z) = \langle \varphi(z), h(z)\rangle \quad \text{и} \quad \|h(z)\|_{E_0'} \leqslant 2^\alpha C$$

при всех z.

(i) Отображение α_1 непрерывно действует из B в пространство $L^\infty(E_1)$, наделенное w^*-топологией.

Действительно, распространяя функции из $L^\infty(E_1)$ до гармонических функций в круге с помощью интеграла Пуассона, мы видим, что на любом ограниченном множестве в $L^\infty(E_1)$ эта слабая топология эквивалентна топологии поточечной сходимости в открытом круге.

Далее, если $\rho_n \in B$ и $\rho_n \to \rho$ слабо в L^1, то аналитические функции $\rho_n + i\widetilde{\rho}_n$ (а с ними и внешние функции $\alpha_1(\rho_n)$) сходятся поточечно в круге $\mathbb{D}$ к $\rho + i\widetilde{\rho}$. Действительно, для $z \in \mathbb{D}$ значение $\widetilde{\rho}_n(z)$ есть интеграл от ρ_n с сопряженным ядром Пуассона в точке z, а это ядро при фиксированном z – ограниченная функция.

Итак, отображение α_1 непрерывно, а его образ D компактен.

(ii) Непрерывность отображения α_2 из D в единичный шар пространства $L^\infty(E_0)$ с w^*-топологией мгновенно получается после перехода к поточечной сходимости в круге. Таким образом, и множество $G = \alpha_2(D)$ компактно.

(iii) Замкнутость графика отображения α_3 тоже немедленно следует из того, что если $\varphi_n \to \varphi$ и $h_n \to h$ поточечно в единичном круге, а $\langle \varphi_n(z), h_n(z)\rangle = k(z)$, то и $\langle \varphi(z), h(z)\rangle = k(z)$, $z \in \mathbb{D}$. □

Лемма 3. *Отображение Φ_2 имеет замкнутый график.*

Доказательство. Пусть $\sigma_n \in V$, $\log w_n \in \Phi_2(\sigma_n)$. Предположим, что $\sigma_n \to \sigma$ в пространстве V, а $\log w_n \to \log w$ слабо в $L^1(E')$. Нужно доказать, что $\log w \in \Phi_2(\sigma)$, т.е. перейти к пределу в неравенстве

$$\|\sigma_n/w_n\|_{L^\infty(E')} \leqslant (1+\varepsilon)2^\alpha C.$$

Построим внешние функции $W_n = e^{\log w_n + i\widetilde{\log w_n}}$. Мы находимся в компакте B, так что из части (i) доказательства леммы 2 следует, что $W_n \to W \stackrel{\text{def}}{=} e^{\log w + i\widetilde{\log w}}$ поточечно в $\mathbb{D}$. Функции τ_n тоже сходятся к σ поточечно в $\mathbb{D}$. Остается заметить, что выписанное выше неравенство эквивалентно неравенству

$$\Big\|\frac{\sigma_n(z)}{W_n(z)}\Big\|_{E'} \leqslant (1+\varepsilon)2^\alpha C, \quad z \in \mathbb{D},$$

в котором можно перейти к пределу при $n \to \infty$. □

Список литературы

1. S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem.* —Duke Math. J. **8** (1941), 457–459.
2. Ky Fan, *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces.* — Proc. Natl. Acad. Sci. USA **38** (1952), 121–126.
3. I. Glicksberg, *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium.* — Proc. Amer. Math. Soc. **3(1)** (1952), 170–174.

4. M. J. Powers, *Lefschetz fixed point theorems and a new class of multi-valued maps.* — Pac. J. Math. **42(I)** (1972), 211–220.
5. S. Park, *A unified fixed point theory of multimaps on topological vector spaces.* — J. Korean Math. Soc. **35**, No. 4 (1998), 803–829.
6. S. Park, *A unified fixed point theory in generalized convex spaces.* — Acta Mathematica Sinica **23**, No. 8 (2007), 1509–1526.
7. Д. В. Руцкий, *Вещественная интерполяция пространств типа Харди: анонс и некоторые замечания.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **480** (2019), 70–190.
8. D. V. Rutsky, *Real interpolation of Hardy-type spaces and BMO-regularity.* — J. Fourier analysis and applications **26**, No. 4 (2020), article No. 61.
9. С. В. Кисляков, *О BMO-регулярных решетках измеримых функций.* — Алгебра и анализ **14**, No. 2 (2002), 117–135.
10. S. V. Kislyakov, *On BMO-regular couples of lattices of measurable functions.* — Stud. Math. **159**, No. 2 (2003), 277–289.
11. Д. В. Руцкий, *Замечания о BMO-регулярности и AK-устойчивости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **376** (2010), 116–166.
12. Д. В. Руцкий, *BMO-регулярность в решетках измеримых функций на пространствах однородного типа.* — Алгебра и анализ **23**, No. 2 (2011), 248–295.
13. Д. В. Руцкий, *Векторнозначная ограниченность операторов гармонического анализа.* — Алгебра и анализ **28**, No. 6 (2016), 91–117.
14. И. К. Злотников, *Задача об идеалах алгебры H^∞ в случае некоторых пространств последовательностей.* — Алгебра и анализ **29**, No. 5 (2017), 51–67.
15. D. V. Rutsky, *Corona problem with data in ideal spaces of sequences.* — Archiv der Mathematik **108** (2017), 609–619.
16. С. В. Кисляков, Д. В. Руцкий, *Несколько замечаний к теореме о короне.* — Алгебра и анализ **24**, No. 2 (2012), 171–191.

Kislyakov S. V., Skvortsov A. S. Fixed point theorems and Hardy classes.

A survey of several recent applications of fixed point theorems for multivalued maps to interpolation of Hardy classes and to certain topics related to the corona theorem.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: `skis@pdmi.ras.ru`
E-mail: `st076169@student.spbu.ru`

Поступило 22 августа 2022 г.