

Методические указания по курсу математической статистики

Составители: П.В. Антонова
В.М. Буре
Н.В. Тихонова

Санкт-Петербург
2001

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета
факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ

**Методические указания по курсу
математической статистики**

Утверждено на заседании кафедры математической статистики, теории
надежности и массового обслуживания

Составители: П.В.Антонова
В.М.Буре
Н.В.Тихонова

Рецензент: Н.К.Кривулин (мат.-мех. ф-т СПбГУ)

В методических указаниях содержатся практические задания по курсу математической статистики, предназначенные для самостоятельной внеаудиторной работы студентов. Представленные задания охватывают значительную часть курса математической статистики, снабжены теоретическими пояснениями и ссылками на учебную и научную литературу.

1. Критерий согласия Пирсона χ^2 для проверки простых гипотез.

В математической статистике часто требуется проверить гипотезу о том, что выборка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ взята из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$. Относительно альтернативной гипотезы, кроме независимости x_i , других предположений не делается.

Одним из наиболее известных критериев является критерий Пирсона χ^2 . Выберем точки $z_0 = -\infty < z_1 < \dots < z_{r-1} < z_r = +\infty$. По известной функции $F(x)$ вычислим вероятности $p_k = F(z_k) - F(z_{k-1})$, $k = \overline{1; r}$.

Обозначим через ν_k число тех x_i из выборки, которые попали в интервал $(z_{k-1}, z_k]$. Тогда при справедливости основной гипотезы случайные величины $\nu_1, \dots, \nu_r$ имеют полиномиальное распределение

$$P\{\nu_i = n_i, i = \overline{1; r}\} = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r} \left(\sum_{i=1}^r n_i = n \right).$$

Первоначальную задачу мы редуцируем теперь к проверке гипотезы о том, что частоты ν_i ($i = \overline{1; r}$) получены из полиномиального распределения с вероятностями исходов p_i ($i = \overline{1; r}$).

Статистика, на основе которой строится критерий, определяется выражением

$$\chi_n^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(\nu_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Если основная гипотеза верна, то распределение случайной величины χ_n^2 при $n \rightarrow \infty$ сходится к χ^2 -распределению с $(r-1)$ степенями свободы.

Зададим уровень значимости α и найдем процентную точку $c_{\alpha, (r-1)}$ распределения χ^2 с $(r-1)$ степенями свободы ($\xi \sim \chi_{(r-1)}^2$, $P\{\xi \geq c_{\alpha, (r-1)}\} = \alpha$).

Если $\chi_n^2 < c_{\alpha, (r-1)}$, то основную гипотезу принимаем, если выполнено обратное, то основную гипотезу следует отвергнуть. На практике обычно требуют, чтобы $np_i \geq 10, \nu_i \geq 10$.

Задание: смоделировать выборку из нормального распределения и проверить гипотезу согласия; смоделировать выборку из экспоненциального распределения с плотностью $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, и проверить гипотезу.

Литература: [7], [11].

