БУРЕ В. М., КИРПИЧНИКОВ Б. К.

ДЕГРАДИРУЮЩИЙ ПРОЦЕСС ВОССТАНОВЛЕНИЯ КАК МОДЕЛЬ НАРУШЕНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

У объектов живой природы — отдельных особей или популяц... рассматриваемых как сложные системы, — имеется общее свойст... способность восстановления отказавших элементов. При этом био... ги отмечают, что динамические изменения в пределах популяции особ... во многом совпадают с процессами, протекающими в клеточных по... ляциях отдельных особей.

Продолжительность жизни отдельного элемента популяции мож... рассматриваться как случайная величина с тем или иным распреде... нием, характеризующим данную популяцию. Это приводит к тому, ч... динамика изменения популяций поддается описанию, в основе кото... го лежит математический аппарат теории восстановления. Соглас... основному результату теории восстановления статистические харак... ристики процесса восстановления стабилизируются с течением време... [1], что согласуется с наблюдениями за реальными процессами в эко... гически равновесной ситуации.

Нарушение экологического равновесия стабилизированной систем... можно описать упомянутой выше математической моделью, вводя в н... возмущающие параметры, соответствующие случайным или целенапр... вленным изменениям окружающей среды. К последним относятся, ... частности, радиационное облучение, сбросы токсичных веществ, эпи... мии, механические повреждения и тому подобное.

Временные характеристики этих внешних воздействий также нос... случайный характер. Эта случайность проявляется не только в сро... возникновения дестабилизирующих факторов в окружающей среде, но... в индивидуальной сопротивляемости элементов популяции по отно... нию к неблагоприятным внешним воздействиям.

В терминах статистической теории восстановления общий механи... динамики отдельной популяции можно описать как функционирова... конечного числа процессов восстановления, каждый из которых подве... гается опасности прекратить свое существование в случайный моме... времени в результате изменения параметров окружающей среды. С ... роятностной точки зрения речь идет о процессе восстановления, фу...

ционирующем на случайном промежутке времени.

Вид распределения этого промежутка зависит от упомянутой сопротивляемости отдельных элементов популяции разрушающим внешним воздействиям. Так, если предположить, что процесс восстановления может оборваться в любые равные достаточно малые промежутки времени с равными достаточно малыми вероятностями, то время ожидания обрыва процесса подчиняется экспоненциальному закону с некоторым параметром α. Если же наблюдается значительная тенденция к более или менее одновременной гибели элементов популяции, то естественно предполагать, что случайный промежуток времени, на котором функционирует процесс восстановления, имеет вероятностное распределение с явно выраженной модой, например, нормальное или гамма-распределение.

Изложенный подход позволяет, как будет показано дальше, проследить динамику убывания популяции во времени, если известны некоторые начальные распределения основных случайных величин, характеризующих функционирование соответствующих стандартных процессов восстановления.

Совершенно другими путями схожие проблемы исследовались в радиобиологии при построении кривых доза–эффект. Не ссылаясь на многочисленные статьи, посвященные данному вопросу, упомянем общую работу Хуга и Келлерера [2], в которой изложены результаты, полученные в этом направлении, и приведена обширная библиография. Отметим, что здесь в основе исследований лежит изучение влияния дозы облучения на количественные изменения в популяции. Однако сама популяция не рассматривается в ее развитии как самовосстанавливающаяся совокупность, количественный состав которой меняется во времени в результате полученных доз облучения. Что касается математического аппарата, то положенные в основу предположения приводят лишь к экспоненциальному распределению и его обобщению — распределению Эрланга, причем независимой переменной в соответствующих функциях распределения является не время, а доза облучения. Разумеется, продолжительность жизни отдельного индивидуума зависит от полученной дозы облучения, но эта зависимость может быть определена лишь статистическими методами.

Возвращаясь к рассмотрению вопроса построения математической модели динамики популяции как самовосстанавливающейся совокупности, укажем, что некоторые частные случаи собственно математической проблемы были изучены в [3]. Основное внимание там было уделено нахождению распределения числа восстановлений на случайном промежутке времени. Предложенный там искусственный прием, использующий представление преобразования Лапласа в виде производящей функции искомого распределения, позволил получить точные распределения в двух частных случаях.

Перейдем теперь непосредственно к изложению общей модели процесса восстановления, функционирующего на случайном промежутке времени. Будем считать, что случайные величины T_k, лежащие в основе стандартного процесса восстановления, имеют абсолютно непрерывное распределение, задаваемое общей функцией распределения $F(t)$, удовлетворяющей условию $F(0) = 0$.

Пусть S_n — время n-го восстановления, а N_t — число восстановлений в промежутке $(0, t]$. Распределения случайных величин S_n определяются рекуррентной формулой свертки

$$F_n(t) = \mathbf{P}\{S_n \leqslant t\} = \int_0^t F_1(t-\tau)\, dF_{n-1}(\tau).$$

Соответственно для плотностей $f_n(t)$ распределения случайных величин S_n получаем

$$f_n(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_{n-1}(\tau)\, d\tau.$$

Основной характеристикой процесса является функция восстановления $H(t)$, являющаяся математическим ожиданием случайной величины N_t. Она удовлетворяет уравнению

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-\tau)\, dF(\tau).$$

Производная $h(t)$ от функции восстановления, называемая плотностью восстановления, удовлетворяет уравнению

$$h(t) = f(t) + \int_0^t h(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

Если здесь перейти к преобразованию Лапласа, то получаем

$$h^*(s) = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)} \quad \text{и} \quad sH^*(s) = h^*(s).$$

Предположим теперь, что описанный стандартный процесс восстановления подвергается разрушительным внешним воздействиям, так что время ожидания обрыва процесса подчиняется экспоненциальному распределению с параметром α. Тогда величина $dF(\tau)$ является условной вероятностью того, что первый элемент выходит из строя в окрестности точки τ при условии, что он не подвергался внешнему воздействию на промежутке времени $[0, \tau]$, а величина $\exp(-\alpha\tau)dF(\tau)$ есть безусловная вероятность этого события. Суммирование этой вероятности по всем τ от нуля до t приводит к функции распределения времени жизни T_1 первого элемента деградирующего процесса

$$L(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}\, dF(\tau) \tag{1}$$

с дефектом

$$1 - L(\infty) = 1 - \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dF(t) = 1 - f^*(\alpha).$$

Дифференцируя (1), получаем плотность распределения $l(t)$ в виде

$$l(t) = f(t)e^{-\alpha t}. \tag{2}$$

Определим совместную плотность случайных величин $T_1, \ldots, T_k$, фигурирующих в деградирующем процессе, формулой

$$l(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1) \cdots f(t_k) e^{-\alpha(t_1 + \cdots + t_k)}.$$

Тогда условная плотность распределения времени жизни очередного элемента при условии, что процесс не оборвался до начала функционирования этого элемента, совпадает с (2), а соответствующая функция распределения совпадает с (1).

Для несобственного распределения L имеет место обычная формула свертки при суммировании случайных величин:

$$L_2(t) = \int_0^t L(t - t_1)\, dL(t_1). \tag{3}$$

Для плотности $l_2(t)$ дифференцированием соотношения (3) получаем

$$l_2(t) = \int_0^t l(t - t_1) l(t_1)\, dt_1,$$

откуда с учетом (2) имеем

$$l_2(t) = f_2(t)e^{-\alpha t}.$$

Последняя формула легко распространяется на произвольный номер отказа:

$$l_n(t) = f_n(t)e^{-\alpha t}. \tag{4}$$

Обозначая $L_n(t)$ функцию распределения времени n-го отказа, положим

$$U_d(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(t), \tag{5}$$

где $L_0(t)$ — вырожденное в нуле распределение, соответствующее отказу в момент времени $t = 0$. Функцию $U_d(t)$, означающую среднее число отказов на промежутке времени $[0, t]$, будем называть функцией восстановления деградирующего процесса.

Если T — время последнего восстановления перед обрывом процесса и $Z(t)$ — функция распределения этой случайной величины, то имеет место соотношение

$$Z(t) = [1 - f^*(\alpha)] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{S_n \leqslant t\},$$

или, с учетом формулы (5),

$$Z(t) = [1 - f^*(\alpha)] U_d(t). \tag{6}$$

Функция $Z(t)$ удовлетворяет несобственному уравнению восстановления

$$Z(t) = 1 - f^*(\alpha) + \int_0^t Z(t - \tau)\, dL(\tau), \tag{7}$$

а функция восстановления $U_d(t)$ удовлетворяет уравнению

$$U_d(t) = 1 + \int_0^t U_d(t - \tau)\, dL(\tau). \tag{8}$$

Для абсолютно непрерывного распределения F удобно ввести вариант функции восстановления в виде

$$H_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(t), \tag{9}$$

означающий число отказов в промежутке $(0, t]$, и плотность восстановления, определяемую равенством

$$h_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n(t), \tag{10}$$

где функция $l_n(t)$ определяется формулой (4). Тогда формулу (10) можно записать в виде

$$h_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) e^{-\alpha t} = h(t) e^{-\alpha t}. \tag{11}$$

Формула (11) устанавливает связь характеристик деградирующего и стандартного процессов восстановления и играет ключевую роль в построении кривых доза–эффект при надлежащей статистической интерпретации плотности восстановления. Следует особо подчеркнуть, что связь оказывается очень простой.

Обратимся теперь к вычислению среднего числа отказов на всем промежутке функционирования деградирующего процесса восстановления. Переходя к пределу при $t \to \infty$ в формуле (9), перепишем ее в виде

$$H_d(\infty) = \sum^{\infty} L_n(\infty). \tag{12}$$

Поскольку

$$L_n(t) = \int_0^t l_n(\tau)\, d\tau$$

или, с учетом формулы (4),

$$L_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) e^{-\alpha\tau}\, d\tau,$$

получаем

$$L_n(\infty) = f_n^*(\alpha) = [f^*(\alpha)]^n.$$

Последнее равенство имеет место в силу теоремы о свертке для преобразований Лапласа.

Теперь, возвращаясь к (12), имеем

$$H_d(\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} [f^*(\alpha)]^n = \frac{f^*(\alpha)}{1 - f^*(\alpha)},$$

или

$$H_d(\infty) = h^*(\alpha). \tag{13}$$

Этот же результат можно получить с помощью тауберовой теоремы для преобразований Лапласа–Стилтьеса. Приведем здесь формулировку этой теоремы [4]. Пусть

$$\varphi^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ — неотрицательная неубывающая функция. Если $\varphi^*(s)$ сходится при $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ и для некоторого $c \geqslant 0$ имеет место соотношение $\lim_{s\to 0} s^c \varphi^*(s) = A$, то выполняется также соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t^c} = \frac{A}{\Gamma(c+1)}.$$

В частности, если $c = 0$ и $\varphi^*(0) = A$, то $\Phi(\infty) = A$.

Применим преобразование Лапласа к обеим частям равенства (11). В результате получим $h_d^*(s) = h^*(s+\alpha)$. Если для преобразования Лапласа $h^*(s+\alpha)$ выполнены условия тауберовой теоремы и $h^*(s+\alpha)$ непрерывна в точке $s = 0$, т.е. $\lim_{s\to 0} h^*(s+\alpha) = h^*(\alpha)$, то $H_d(\infty) = h^*(\alpha)$, что повторяет формулу (13).

Если говорить о полном числе отказов $U_d(\infty)$ на полуоси $[0, \infty)$, то получаем следующий результат:

$$U_d(\infty) = 1 + H_d(\infty) = 1 + \frac{f^*(\alpha)}{1 - f^*(\alpha)} = \frac{1}{1 - f^*(\alpha)},$$

где $1 - f^*(\alpha)$ есть дефект распределения L.

Кроме важной формулы (11), связывающей плотности восстановления двух процессов, установим связь между их функциями восстановления $H_d(t)$ и H_t.

В формуле

$$H_d(t) = \int_0^t h_d(\tau)\,d\tau = \int_0^t h(\tau)e^{-\alpha\tau}\,d\tau$$

функция $e^{-\alpha\tau}$ представляет собой хвост экспоненциального распределения, и потому эту формулу можно записать в виде

$$H_d(t) = \int_0^t h(\tau)\int_\tau^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx\,d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$H_d(t) = \int_0^t \alpha e^{-\alpha x}\int_0^x h(\tau)\,d\tau\,dx + \int_t^\infty \alpha e^{-\alpha x}\,dx\int_0^t h(\tau)\,d\tau.$$

Поскольку $H(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau$, предыдущая формула принимает вид

$$H_d(t) = \int_0^t H(\tau)\alpha e^{-\alpha\tau}\,d\tau + H(t)e^{-\alpha t}. \tag{14}$$

Переходя здесь к пределу при $t \to \infty$ и имея в виду, что функция $H(t)$ растет на бесконечности линейно, получаем

$$H_d(\infty) = \int_0^\infty H(\tau)\alpha e^{-\alpha\tau}\,d\tau. \tag{15}$$

Если обозначить M время ожидания обрыва процесса восстановления, то формула (15) будет представлять собой математическое ожидание случайной величины $H(M)$, т.е.

$$H_d(\infty) = \mathbf{E}\,H(M). \tag{16}$$

Но последняя формула есть не что иное, как формула полного математического ожидания, ибо в формуле (15) функция $H(\tau)$ есть условное математическое ожидание при условии, что до момента τ процесс не оборвался в результате внешнего воздействия.

Формулу (15) можно интерпретировать и другим образом, имея в виду совпадение интеграла в (15) с преобразованием Лапласа функции $\alpha H(t)$, т.е.

$$H_d(\infty) = \alpha H^*(\alpha) = h^*(\alpha),$$

что уже было получено в (13).

Пусть теперь случайная величина M имеет произвольное распределение G. Плотность распределения $l(t)$ времени первого отказа определим формулой

$$l(t) = f(t)\overline{G}(t), \tag{17}$$

где $\overline{G}(t) = \mathbf{P}\{M > t\}$, а совместную плотность $l(t_1, \ldots, t_k)$ распределения случайных величин $S_1, \ldots, S_k$ — формулой

$$l(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1) \cdots f(t_k)\overline{G}(t), \tag{18}$$

где $t_1 + \cdots + t_k = t$. Таким образом,

$$l_n(t) = f_n(t)\overline{G}(t),$$

и

$$h_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\overline{G}(t),$$

или

$$h_d(t) = h(t)\overline{G}(t). \tag{19}$$

Обозначим $g(t)$ плотность распределения G. Тогда

$$H_d(t) = \int_0^t h_d(\tau)\,d\tau = \int_0^t h(\tau)\int_\tau^\infty g(x)\,dx\,d\tau.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$H_d(t) = \int_0^t g(x)\int_0^x h(\tau)\,d\tau\,dx + \int_t^\infty g(x)\,dx\int_0^t h(\tau)\,d\tau,$$

или

$$H_d(t) = \int_0^t H(\tau)g(\tau)\,d\tau + H(t)\overline{G}(t). \tag{20}$$

Переходя здесь к пределу при $t \to \infty$, имеем

$$H_d(\infty) = \int_0^\infty H(t)\,dG(t), \tag{21}$$

что обобщает формулу (15) и является формулой полного математического ожидания.

Возвращаясь к (17), найдем дефект p безусловного распределения L времени функционирования T_1 первого элемента. Имеем:

$$p = 1 - L(\infty) = 1 - \int_0^\infty f(t)\overline{G}(t)\,dt. \tag{22}$$

$$p = 1 - \frac{1}{\overline{G}(t)} \int_0^\infty f(\tau)\overline{G}(t+\tau)\, d\tau, \tag{23}$$

где t — суммарная наработка элементов, предшествующих данному.

Теперь можно перейти к отысканию функции распределения $Z(x)$ времени T последнего восстановления перед обрывом процесса. Событие $\{T \leqslant x\}$ осуществляется тогда и только тогда, когда после восстановления в точке $x = 0$ произошел обрыв процесса с вероятностью, определенной формулой (22), либо произошло одно из событий $\{S_n \leqslant x, n = 1, 2, \ldots\}$, и после этого процесс оборвался с вероятностью, определенной формулой (23). Следовательно,

$$Z(x) = 1 - \int_0^\infty f(t)\overline{G}(t)\, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x l_k(t) \left[1 - \int_0^\infty f(\tau) \frac{\overline{G}(t+\tau)}{\overline{G}(t)}\, d\tau \right] dt.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования и пользуясь формулой (19), получаем

$$Z(x) = 1 - \int_0^\infty f(t)\overline{G}(t)\, dt + \int_0^x h(t)\overline{G}(t)\, dt - \int_0^x h(t) \int_0^\infty f(\tau)\overline{G}(t+\tau)\, d\tau\, dt. \tag{24}$$

Покажем, что распределение Z — собственное, т.е. $Z(\infty) = 1$. Действительно, сделаем в соотношении

$$Z(\infty) = 1 + \int_0^\infty h(t)\overline{G}(t)\, dt - \int_0^\infty f(t)\overline{G}(t)\, dt - \int_0^\infty h(t) \int_0^\infty f(\tau)\overline{G}(t+\tau)\, d\tau\, dt$$

замену переменных в последнем интеграле по формулам $\tau = x$, $t = -x + y$. При этом область интегрирования трансформируется в область, определяемую неравенствами $x, y \geqslant 0$, $y \leqslant x$, в результате чего интеграл