МАТЕМАТИКА

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981

8

В. М. Буре, Е. В. Седунов

УДК 517.518

К ВОПРОСУ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

1. Для обобщенной полиномиальной аппроксимации непрерывной функции $f(x)$ в области Ω -мерного евклидова пространства обычно используется представление ее в виде отрезка яда Фурье:

$$f(x) \simeq \sum_{i=1}^{m_1} a_i(f)\ \varphi_i(x) \tag{1}$$

по системе функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{m_1}$, ортонормированных относительно скалярного произведения $(u, v) = \int\limits_{\Omega} p(x)\, u(x)\, v(x)\, dx$, где $p(x)$—неотрицательная весовая функция, $\int\limits_{\Omega} p(x)\, dx = 1$, $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$.

В целях экономии вычислений для одновременного нахождения коэффициентов Фурье $a_i(f) = \int\limits_{\Omega} p(x)\, f(x)\, \varphi_i(x)\, dx$ целесообразно использовать совокупность m_1 кубатурных формул

$$\int\limits_{\Omega} p^{(i)}(x)\, g(x)\, dx \simeq \sum_{j=1}^{N} A_j^{(i)} g(x_j), \quad i \in 1:m_1 \tag{2}$$

$(p^{(i)}(x) = p(x)\, \varphi_i(x))$, точных для обобщенных полиномов не выше заданного порядка m_2 $(m_2 > m_1)$ по системе функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{m_2}$. Очевидно, предпочтения заслуживают кубатурные формулы (2) с наименьшим числом узлов. Поскольку при $N = m_2$ решение задачи заведомо существует: для каждого индекса i $(i \in 1:m_1)$ можно построить на узлах $\{x_j\}_{j=1}^{N}$ свою интерполяционную формулу, то рассмотрению подлежит лишь случай $m_1 \leqslant N < m_2$.

Предполагается, что $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N}$ и $\{x_j\}_{j=1}^{N}$ таковы, что $F_{NN} = (\varphi_i(x_j))_{i,j=1}^{N}$ невырожденна (если $\Omega = [a, b]$, то $\varphi_i(x)$ образуют систему Чебышева).

Так как весовая функция $p^{(i)}(x)$, вообще говоря, не сохраняет знак в Ω, то общеизвестные результаты хорошо разработанной теории интерполяционных кубатурных формул со знакопостоянной весовой функцией и наименьшим числом узлов (см., напр., [1], [2]) здесь непосредственно неприменимы. Особенность задачи состоит также и в том, что по значениям функции $f(x)$ в наименьшем возможном числе точек требуется одновременно вычислить m_1 коэффициентов Фурье, удовлетворив требованиям точности. По этой причине не удается воспользоваться и результатами, которые получены к настоящему времени для кубатурных формул наивысшей степени точности с произвольной знакопеременной весовой функцией (см., напр., [3]).

2. В данной статье обсуждается связь поставленной задачи с задачей построения интерполяционной кубатурной формулы

$$\int\limits_{\Omega} p(x)\, g(x)\, dx \simeq \sum_{j=1}^{N} C_j\, g(x_j), \tag{3}$$

точной для попарных произведений $\varphi_i(x)\, \varphi_l(x)$, $i \in 1:m_1$, $l \in 1:m_2$.

Очевидно, что если принять в качестве узлов кубатурных формул (2) узлы формулы (3), то для весовых коэффициентов получим выражения

$$A_j^{(i)} = C_j\, \varphi_i(x_j), \quad j \in 1:N, \quad i \in 1:m_1.$$

Возникает вопрос: не существует ли другого решения задачи (2), которому соответствовало бы меньшее число узлов? Ответ на него не очевиден, поскольку условия точности совокупности кубатурных формул (2):

$$AF = (I_{m_1} \vdots\, 0),$$

где $A = (A_j^{(i)})_{i=1,\, j=1}^{m_1,\, N}$, $F = (F_{Nq} \vdots\, F_{N,\, m_2-q}) = (\varphi_1(x_j), \ldots, \varphi_q(x_j), \varphi_{q+1}(x_j), \ldots, \varphi_{m_2}(x_j))_{j=1}^{N}$, являются, вообще говоря, менее жесткими, чем условия точности интерполяционной кубатурной формулы (3):

$$F_{Nm_1}^{T}\, CF = (I_{m_1} \vdots\, 0),$$

где $C = (C_j\, \delta_{jr})_{j,\, r=1}^{N}$.

Действительно, равенства (5) и (6) можно представить соответственно в виде:

$$A = (I_{m_1} \vdots\, 0)\, F_{NN}^{-1}, \quad (I_{m_1} \vdots\, 0)\, F_{NN}^{-1} F_{N,\, m_2-N} = 0 \tag{7}$$

и

$$F_{Nm_1}^{T}\, CF_{NN} = (I_{m_1} \vdots\, 0), \quad (I_{m_1} \vdots\, 0)\, F_{NN}^{-1} F_{N,\, m_2-N} = 0.$$

Второе матричное равенство в (7) выражает требование к узлам совокупности кубатурных формул (2), а первое—однозначно определяет матрицу коэффициентов A при выбранн узлах. Сравнивая (7) и (8), легко видеть, что требования к узлам интерполяционной кубатурной формулы (3) содержат дополнительное условие, представленное первым равенством в (8). Это условие можно трактовать как требование точности кубатурной формулы (3) для произведения функций $\varphi_i(x)\,\varphi_l(x)$, $i \in 1:m_1$, $l \in 1:N$. Если указанное условие удается удовлетворить только за счет выбора коэффициентов C_j $(j \in 1:N)$, т. е. оно не является дополнительным ограничением на выбор узлов x_j $(j \in 1:N)$ кубатурной формулы (3), то рассматриваемая задача сводится к задаче построения кубатурной формулы (3).

3. Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{m_2}$ — полная система алгебраических многочленов степени не выше k_2, ортонормированных с весом $p(x)$ в Ω, $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{m_1}$ — подсистема алгебраических многочленов степени не выше $k_1 < k_2$. Как известно, имеет место соотношение $m_i = (k_i + n)!/(k!\,n!) \equiv M(k_i, n)$, $i = 1, 2$.

Сформулируем основные результаты для этого случая.

Теорема 1. *Пусть x_j и $A_j^{(i)}$ $(j \in 1:N,\ i \in 1:m_1)$ — узлы и коэффициенты кубатурных формул* (2), *точных для алгебраических многочленов степени не выше k_2, причем*

$$N \leqslant M(k_2 - 1,\ n). \tag{9}$$

Тогда на точках x_j $(j \in 1:N)$, как на узлах, можно построить интерполяционную кубатурную формулу (3) *алгебраической степени точности $k_1 + k_2$, коэффициенты которой связаны с $A_j^{(i)}$ равенствами* (4).

Следствие 1. Если существует интерполяционная кубатурная формула (3) с числом точек, удовлетворяющим условию (9), то задача построения совокупности кубатурных формул (2) эквивалентна задаче нахождения формулы (3) в том смысле, что их узлы совпадают, коэффициенты связаны соотношениями (4).

Следствие 2. Пусть N^* — наименьшее число узлов совокупности кубатурных формул (2), $\widetilde{N}$ — наименьшее число узлов соответствующей кубатурной формулы (3), тогда $M([(k_1+k_2)/2], n) \leqslant N^* = \widetilde{N}$, если $\widetilde{N} \leqslant M(k_2 - 1, n)$, и $M(k_2 - 1, n) < N^* \leqslant \widetilde{N}$, если $\widetilde{N} > M(k_2 - 1, n)$.

Легко привести пример, когда нарушение условия (9) делает неверным утверждение теоремы 1. Пусть $\Omega: (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 \leqslant 1$, $n = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 6$, $p(x) = 1/\pi$.

В качестве узлов совокупности кубатурных формул (2) подходят точки: $x_1 = (0,\ 1/2)$, $x_2 = (1/4, -1/2)$, $x_3 = (1/2,\ 1/2)$, $x_4 = (3/4, -1/2)$, $x_5 = (1/4,\ 1/2)$. При этом $N = 5 > M(k_2 - 1, n) = 3$. Невыполнение условия (9) приводит к тому, что ни при каком выборе коэффициентов C_j $(j \in 1:N)$ не удается удовлетворить первому равенству из (8), т. е. на указанных узлах нельзя построить кубатурную формулу (3) алгебраической степени точности $k_1 + k_2 = 3$.

Следует, однако, отметить, что условие (9) является лишь достаточным для справедливости утверждения теоремы 1. Проще всего убедиться в этом, если в условиях вышеприведенного примера выбрать $x_1 = (1/\sqrt{2},\ 0)$, $x_2 = (-1/\sqrt{2},\ 0)$, $x_3 = (0,\ 1/\sqrt{2})$, $x_4 = (0,\ -1/\sqrt{2})$ и проверить выполнение условий (7) и (8), несмотря на нарушение условия (9). Вполне аналогично может быть рассмотрен вопрос о связи тригонометрической аппроксимации на $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ периодических функций отрезком ряда Фурье и интерполяционными квадратурными формулами.

В заключение отметим, что обсуждаемые здесь вопросы находят приложение не только в задачах аппроксимации функций и вычисления коэффициентов Фурье, но и в некоторых задачах оптимизации численных экспериментов при неадекватных моделях [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов.—М., 1967.—500 с.
2. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы.—В сб.: Теория кубатурн. формул и прилож. функц. анализа к некотор. задачам матем. физ. Новосибирск, 1973, с. 73—90.
3. Riess R. D., Johnson L. W. On the determination of quadrature formulae of highest degree of precision for approximating Fourier coefficient.—J. Inst. Math. and Appl., 1974, v. 13, p. 345—351.
4. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы.—2-е изд.—М., 1975.—471 с.

Ленинград

Поступила
7 V 1979