ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С 1946 ГОДА

Выходит 24 раза в год, по четыре номера каждой серии

7

МАТЕМАТИКА ▫ МЕХАНИКА ▫ АСТРОНОМИЯ

Выпуск 2

АПРЕЛЬ

1979

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД

СОДЕРЖАНИЕ

6) $v(i, j) + v(k, l) > 1$, $\{i, j\} \subset J$.

7) $v(i, j) + v(k, l) < 1$, $\{i, j\} \subset J$, $2v(i, j, k) + v(i, l) + v(j, l) + v(k, l) > 3$.

В случае 5 а) существует решение, объединяющее подмножество решения для случая 4 и две компоненты, в которых дискриминируются игроки 1 и 3. В случаях 5б), 5в) и 6 выполняется, как и в случае 7, условие $2v(1, 3, 4) + v(1, 2) + v(2, 3) + v(2, 4) > 3$.

Пусть V — решение в множестве $\overline{A} = \{x \in A,\ x(1, 3, 4) = v(1, 3, 4)\}$, выбранное произвольно во всех случаях, кроме случая 6, $P = A \setminus (V \cup \mathrm{dom}\, V)$, $K^0 = \{x \in P,\ x_2 = \max\limits_{x \in P} x_2\}$, $M = \{x \in \overline{A},\ x_1 = \delta_1,\ x_3 = \delta_3,\ x_4 \geqslant \delta_4\}$, где $\delta_l = \max\limits_{x \in K^0} x_l$. Тогда $V \cup K_0 \cup M$ есть решение игры в случаях 5а), 5в), 6 и 7.

8) $v(i, j) + v(k, l) < 1$ для любых $\{i, j\} \subset J$ и существуют i, j: $v(J - i) + (J - j) + v(i, j) > 2$.

Пусть $v(i, 2, 3) + v(1, 2, 4) + v(3, 4) \geqslant v(J - i) + v(J - j) + v(i, j)$ для всех $\{i, j\} \in J$ и $v(1, 2, 3) + v(1, 4) \geqslant v(1, 2, 4) + v(1, 3)$.

Решение состоит из следующих частей: 1) решения в гиперплоскости $x(1, 2, 3) = v(1, 2, 3)$ некоторого специального вида; 2) множества с дискриминацией игроков 1 и 4; 3) множества с дискриминацией игроков 1 и 2; 4) решения игры трех лиц на подмножестве, не являющемся симплексом; 5) псевдоядра в плоскости $x_2 = \mathrm{const}$ и некоторых добавок более сложного вида.

Так как любая игра четырех лиц принадлежит по крайней мере одному из описанных выше классов, верно следующее утверждение.

Теорема. *Любая кооперативная игра четырех лиц имеет решение.*

Подробно решения будут приведены в последующих публикациях.

Summary

The solution for an arbitrary four-persons' cooperative game is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарева О. Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр. — Проблемы кибернетики, 1963, № 10, с. 119—139.
2. Lucas W. F. n person games with only 1, $n - 1$ and n person coalitions. — Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb., 1966, Bd. 6, N 4, S. 287—292.

Статья поступила в редакцию 16 июня 1978 г.

УДК 519.24

В. М. Буре

НЕСМЕЩЕННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рассматривается следующая схема авторегрессии:

$$y_{t+1} = L(y_t, u_t) + \varepsilon_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где y_t — состояние системы в момент времени t, $u_t = \left(u_t^{(1)}, \ldots, u_t^{(k)}\right)$ — совокупность входных сигналов, $E\varepsilon_t = 0$, начальное значение y_0 — случайная величина, не зависимая от ε_0.

Требуется так выбрать процедуру планирования и анализа эксперимента (ξ, s), включающую план эксперимента $\xi = \{u_0, u_2, \ldots, u_{2n}\}$, а также линейный относительно результатов наблюдений $y^T = (y_1, y_3, \ldots, y_{2n+1})$ в точках плана ξ метод s получения оценок, чтобы аппроксимирующий оператор $\widehat{L}_{m_1}(y, u, \xi, s)$, построенный в результате реализации (ξ, s), приближал в $(k+1)$-мерной области $Y \times U$ оператор $L(y, u)$ наилучшим образом в смысле критерия

$$(\xi^*, s^*) = \arg \inf_{\xi,\, s} B, \tag{2}$$

где

$$B = \int\limits_Y \int\limits_U W_1(y)\, W_2(u) \left[L(y, u) - E\widehat{L}_{m_1}(y, u, \xi, s)\right]^2 dy\,du,$$

При этом

$$W_1(y) \geqslant 0, \quad W_2(u) \geqslant 0, \quad \int\limits_Y W_1(y)\, dy = 1, \quad \int\limits_U W_2(u)\, du = 1.$$

$$L(y, u) = \theta^T \tilde{f},$$

$$\hat{L}_{m_1}(y, u, \xi, s) = \left(\hat{\theta}^{(1)}\right)^T \tilde{f}^{(1)}, \tag{3}$$

где $\tilde{f}^T = \left(\tilde{f}_0(y), \tilde{f}_1(u), \ldots, \tilde{f}_{m_1}(u) \,\vdots\, \tilde{f}_{m_1+1}(u), \ldots, \tilde{f}_{m_2}(u)\right) = \left(\left(\tilde{f}^{(1)}\right)^T \vdots \left(\tilde{f}^{(2)}\right)^T\right)$ — (4)
вектор линейно-независимых функций, $\theta^T = (\theta_0, \ldots, \theta_{m_2})$ — вектор неизвестных пара-
метров, $\left(\hat{\theta}^{(1)}\right)^T = \left(\hat{\theta}_0, \ldots, \hat{\theta}_{m_1}\right)$ — вектор оценок неизвестных параметров в модели
4). Очевидно, $m_1 < m_2$, $m_1 > 0$.

Производится $n+1$ «запуск» системы (1) на один такт в соответствии с пла-
ном ξ. Начальное состояние y_{2i} системы (1) в $i+1$ «запуске» не зависит от пред-
шествующих состояний и является случайной величиной, измеряемой без ошибки.
Имеется ограничение на число «запусков» $n < m_2$. Таким образом, имеем

$$y_{2t+1} = L(y_{2t}, u_{2t}) + \varepsilon_{2t}, \quad t = 0, 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где u_{2t} — точка плана ξ, y_{2t} — начальное состояние.

Если условие (2) выполнено, то процедуру (ξ^*, s^*) будем, следуя [1], называть несмещенной процедурой планирования и анализа эксперимента.

Подобная задача в применении к регрессионным экспериментам $(\theta_0 = 0)$ рассматривалась, например, в работах [1, 2, 3].

Используя $E\left(\hat{L}_{m_1}/\bar{y}\right)$, $\bar{y}^T = (y_0, y_2, \ldots, y_{2n})$, систематическую ошибку B запишем в виде

$$B = E(B_1 - V_1), \tag{6}$$

где

$$B_1 = \int\limits_Y \int\limits_U W_1(y) W_2(u) \left[L(y, u) - E\left(\hat{L}_{m_1}/\bar{y}\right)\right]^2 dy\,du,$$

$$V_1 = \int\limits_Y \int\limits_U W_1(y) W_2(u) \left[E\hat{L}_{m_1}(y, u, \xi, s) - E\left(\hat{L}_{m_1}/\bar{y}\right)\right]^2 dy\,du.$$

Легко видеть, что невырожденное линейное преобразование с треугольной матрицей $P\,(P_{ij} = 0,\ j > i)$ системы функций $\tilde{f}$ не влияет на план ξ^*, определяемый в (2). Поэтому перейдем к системе функций $f^T = (f_0(y), f_1(y, u), \ldots, f_{m_1}(y, u) \,\vdots\, f_{m_1+1}(y, u), \ldots, f_{m_2}(y, u)) = \left(\left(f^{(1)}\right)^T \vdots \left(f^{(2)}\right)^T\right)$, ортонормированных на $Y \times U$ с весом $W_1(y) W_2(u)$.

Выписывая выражение для B_1, легко показать, что достаточным условием минимума функционала из (2) является условие

$$AF = (I_{m_1+1} 0), \tag{7}$$

где $\tilde{A} = P_1^T A$ — матрица коэффициентов в линейном методе оценивания s, P_1 — матрица перехода от $\tilde{f}^{(1)}$ к $f^{(1)}$. $F = \left(F_{(n+1)\times(n+1)} \,\vdots\, F_{(n+1)\times(m_2-n)}\right) = (f_0(y_{2t}), f_1(y_{2t}, u_{2t}), \ldots, f_n(y_{2t}, u_{2t}) \,\vdots\, f_{n+1}(y_{2t}, u_{2t}), \ldots, f_{m_2}(y_{2t}, u_{2t}))$, $t \in 0:n$.

Равенство (7) должно выполняться почти наверное по отношению к $\bar{y}^T = (y_0, y_2, \ldots, y_{2n})$.

Замечание 1. Если $\int\limits_Y W_1(y) f_0(y)\, dy = 0$, то $f^T = (f_0(y), f_1(u), \ldots f_{m_2}(u))$,
в этом случае, используя п. 1 теоремы 1 из [2], нетрудно показать, что в качестве n
точек $\{u_{2j}\}$, $j \in 1:n$, плана ξ можно выбрать узлы кубатурной формулы, точной для
попарных произведений $\{f_i(u) f_j(u)\}$, $i \in 1:m_1$, $j \in 1:m_2$, и одна точка может дубли-
роваться, т. е. $u_0 = u_{2j}$ при произвольном $j \in 1:n$. Используя п. 2 теоремы 1 из [2],
а также соотношение $f_i(u_0) = f_i(u_{2j})$ (j — фиксировано), нетрудно указать способ
построения матрицы A, такой, что при использовании плана $\xi^* = \{u_{2j}, u_2, \ldots, u_{2n}\}$
почти наверное выполняется (7).

Если $\int\limits_Y W_1(y) \tilde{f}_0(y)\, dy \neq 0$ и $\tilde{f}_1(u) = 1$, то, переходя к системе функций $f^T = \left(\tilde{f}_0(y), f_1(u), \ldots, f_{m_2}(u)\right)$, где функции $\{f_i(u)\}$, $i \in 1:m_2$, ортонормированы на U с весом $W_2(u)$, нетрудно получить аналогичный результат.

В общем случае справедлива теорема.

Теорема 1. *Если* $|F_{(n+1)\times(n+1)}| \neq 0$, (п.н.), *то для того, чтобы процедура* (ξ, s) *была несмещенной, достаточно:*

1) *В качестве метода оценивания* s^* *брать линейный метод с матрицей*

$$\tilde{A} = P_1^T \underbrace{(I_{m_1+1} 0)}_{n+1} F^{-1}_{(n+1)\times(n+1)}, \qquad (8)$$

2) *в качестве точек* $\{u_{2j}\}_{j=1}^{n}$ *плана* ξ *использовать нули функций*

$$\omega_{n+r}(y_{2j}, u) = f_{n+r}(y_{2j}, u) - \lambda_{m_1+1}^{(n+r)} f_{m_1+1}(y_{2j}, u) - \ldots - \lambda_n^{(n+r)} f_n(y_{2j}, u), \qquad (9)$$

$r \in 1 : m_2 - n$, $j \in 0 : n$; $\lambda_v^{(i)}$ — *произвольные числа.*

Доказательство проводится так же, как первая часть доказательства теоремы 2 из [2].

Summary

Plans of experiments minimizing bias error for the case of autoregressive models are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермаков С. М. Об оптимальных несмещенных планах регрессионных экспериментов. — Труды Мат. ин-та АН СССР, 1970, вып. III, с. 252—257. 2. Седунов Е. В., Буре В. М. Несмещенные в метрике L_2 процедуры планирования и анализа регрессионных экспериментов. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1978, № 13, с. 53—57. 3. Седунов Е. В. Оптимальное планирование и анализ регрессионных экспериментов с учетом систематической ошибки. Препринт. М., 1978. 60 с.

Статья поступила в редакцию 30 сентября 1978 г.

УДК 533.70:541.12.012

Г. М. Кравцов

ПОЛУЧЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НЕСУЩЕЙ ФАЗЫ ГАЗОВЗВЕСИ ИЗ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Рассмотрим газовзвесь, состоящую из молекул простого газа и твердых частиц. В ортогональной лабораторной системе координат (X_1, X_2, X_3) выберем произвольный элементарный объем газовзвеси $[\bar{r}, \bar{r}+d\bar{r}]$ и обозначим его через ΔV. Здесь $\bar{r}$ — радиус-вектор в лабораторной системе координат. Далее, в момент времени t' возьмем точку с координатами $\bar{r}'(X_1', X_2', X_3') \in \Delta V$. Очевидно, возможны следующие три случая: 1) точка $\bar{r}'$ находится в объеме $\Delta V_г$, занятом газом, 2) точка $\bar{r}' \in \sigma_i$, где σ_i — поверхность какой-либо твердой частицы, 3) точка $\bar{r}' \in \Delta V_т$, где $\Delta V_т$ — объем, занятый твердыми частицами.

Если $\bar{r}' \in \Delta V_г$, то всегда можно выделить элементарный объем $[\bar{r}', \bar{r}' + d\bar{r}']$, находящийся внутри газовой фазы. Изменение числа молекул газа, имеющих скорости из объема $[\bar{u}_1, \bar{u}_1 + d\bar{u}_1]$, который обозначим через $\Delta\bar{u}_1$, внутри этого элементарного объема за промежуток времени $[t', t' + dt']$, как известно [1, 2], описывается уравнением Больцмана

$$D'f'd\bar{r}'dt'd\bar{u}_1 = I(f'f')\,d\bar{r}'dt'd\bar{u}_1. \qquad (1)$$

Здесь $f' = f'(\bar{r}', \bar{u}_1, t')$ — локальная в пространстве координат и времени функция распределения молекул газа, $D' = \partial/\partial t' + \bar{u}_1 \cdot (\partial/\partial\bar{r}') + \bar{F}_1 \cdot (\partial/\partial\bar{u}_1)$, $\bar{F}_1$ — напряженность поля массовых сил, действующих на молекулу газа, $I(f'f')$ — больцмановский оператор столкновений.

Изменение числа молекул газа, имеющих скорости из объема $\Delta\bar{u}_1$, вследствие столкновений с элементом ds поверхности твердой частицы за промежуток времени $[t', t' + dt']$ выражается следующим образом [3]:

$$(D'f')_s d\bar{r}'_s dt'd\bar{u}_1 = \left(\Psi_s' - N_s'\right) ds\,dt'd\bar{u}_1. \qquad (2)$$

Здесь Ψ_s' — функция рождения, N_s' — функция столкновений, явный вид которых имеется в работах [1, 4].