

ВЕСТНИК ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
ИЗДАЕТСЯ С 1946 ГОДА

Выходит 24 раза в год, по четыре номера каждой серии

7

МАТЕМАТИКА □ МЕХАНИКА □ АСТРОНОМИЯ

Выпуск 2

АПРЕЛЬ

1979



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД



5
0
4
0
3
3
1
1

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

<i>Адамян В. М., Павлов Б. С.</i> Формула следов для диссипативных операторов	5
<i>Антонов В. А., Холшевников К. В.</i> Оценка полиномов Якоби в комплексной области	
<i>Бергер Г.</i> Асимптотика спектра с оценкой остатка эллиптических операторов со слабым вырождением	10
<i>Ефимова Т. А.</i> О связи между некоторыми классами пространств, для которых справедлива теорема о замкнутом графике	14
<i>Лебедев Н. А.</i> Об одной постановке задачи чебышевского приближения	20
<i>Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.</i> О мультипликаторах в пространствах С. Л. Соболева	26
<i>Рябов В. М.</i> Применение аппроксимаций Паде к обращению преобразования Лапласа	33
<i>Фельштын А. Л.</i> О системах Морса — Смейла на трехмерной сфере	41
<i>Чебанов В. И.</i> Аппроксимационные свойства некоторых классов векторных полей	45
	50

Механика

<i>Буров А. В.</i> О решениях внутренних стационарных задач для уравнения Больцмана	54
<i>Демидова И. И.</i> Решение плоской температурной задачи методом фототермоползучести	58
<i>Львович А. Ю.</i> О выводе уравнений Лангранжа — Максвелла	62
<i>Полянский А. Ф., Скурин Л. И., Юрков А. В.</i> Методика приближенного расчета области, возмущенной телом, движущимся с гиперзвуковой скоростью	69
<i>Поляхов Н. Н., Шестернина З. Н.</i> К вопросу о сходимости метода дискретных вихрей	75
<i>Чебанова Н. А.</i> Асимптотика коэффициентов Фурье для задачи Дирихле в неограниченной области с криволинейным участком границы	82
<i>Яцеленко Л. И.</i> Плоские вынужденные несимметричные капиллярно-гравитационные волны конечной амплитуды на поверхности жидкости постоянной глубины	87

Астрономия

<i>Гриневицкая Л. К., Поляхова Е. Н.</i> Оценка погрешностей аналитического метода расчета геоцентрических траекторий аппарата с солнечным парусом	95
<i>Питьев Н. П.</i> Коэффициенты градиента поля направлений в системах, допускающих разделение переменных	99

Краткие научные сообщения

<i>Бондарева О. Н., Кулаковская Т. Е., Наумова Н. И.</i> Решение произвольной кооперативной игры четырех лиц	104
<i>Буре В. М.</i> Несмещенные процедуры планирования и анализа авторегрессионных экспериментов	105
<i>Кравцов Г. М.</i> Получение кинетического уравнения несущей фазы газозвеси из уравнения Больцмана	107
<i>Морозов Н. Ф.</i> Об одном варианте реологических соотношений	109
<i>Назаров С. А.</i> Асимптотика прогиба пластины с трещиной на упругом основании	111
<i>Полякова Л. Н.</i> Непрерывность нормальных конусов	112
<i>Семенова Н. Н.</i> Существование гомоклинических точек в окрестности центра	114
<i>Храмова Н. К.</i> Некоторые обобщения метода секущих плоскостей	116

Рефераты

	118
Аннотации депонированных статей	123

- 6) $v(i, j) + v(k, l) > 1, \{i, j\} \subset J$.
 7) $v(i, j) + v(k, l) < 1, \{i, j\} \subset J, 2v(i, j, k) + v(l, l) + v(j, l) + v(k, l) > 3$.

В случае 5 а) существует решение, объединяющее подмножество решения для случая 4 и две компоненты, в которых дискриминируются игроки 1 и 3. В случаях 5б), 5в) и 6 выполняется, как и в случае 7, условие $2v(1, 3, 4) + v(1, 2) + v(2, 3) + v(2, 4) > 3$.

Пусть V — решение в множестве $\bar{A} = \{x \in A, x(1, 3, 4) = v(1, 3, 4)\}$, выбранное произвольно во всех случаях, кроме случая 6, $P = A \setminus (V \cup \text{dom } V)$, $K^0 = \{x \in P, x_2 = \max_{x \in P} x_2\}$, $M = \{x \in A, x_1 = \delta_1, x_3 = \delta_3, x_4 \geq \delta_4\}$, где $\delta_l = \max_{x \in K^0} x_l$. Тогда $V \cup K^0 \cup M$

есть решение игры в случаях 5а), 5в), 6 и 7.

8) $v(i, j) + v(k, l) < 1$ для любых $\{i, j\} \subset J$ и существуют $i, j: v(J-i) + v(J-j) + v(i, j) > 2$.

Пусть $v(i, 2, 3) + v(1, 2, 4) + v(3, 4) \geq v(J-i) + v(J-j) + v(i, j)$ для всех $\{i, j\} \in J$ и $v(1, 2, 3) + v(1, 4) \geq v(1, 2, 4) + v(1, 3)$.

Решение состоит из следующих частей: 1) решения в гиперплоскости $x(1, 2, 3) = v(1, 2, 3)$ некоторого специального вида; 2) множества с дискриминацией игроков 1 и 4; 3) множества с дискриминацией игроков 1 и 2; 4) решения игры трех лиц на подмножестве, не являющемся симплексом; 5) псевдоядра в плоскости $x_2 = \text{const}$ и некоторых добавок более сложного вида.

Так как любая игра четырех лиц принадлежит по крайней мере одному из описанных выше классов, верно следующее утверждение.

Теорема. Любая кооперативная игра четырех лиц имеет решение.

Подробно решения будут приведены в последующих публикациях.

Summary

The solution for an arbitrary four-persons' cooperative game is described.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарева О. Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр. — Проблемы кибернетики, 1963, № 10, с. 119—139.
2. Lucas W. F. *n* person games with only 1, $n-1$ and n person coalitions. — Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Geb., 1966, Bd. 6, N 4, S. 287—292.

Статья поступила в редакцию 16 июня 1978 г.

УДК 519.24

В. М. Буре

НЕСМЕЩЕННЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рассматривается следующая схема авторегрессии:

$$y_{t+1} = L(y_t, u_t) + \varepsilon_t, t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где y_t — состояние системы в момент времени t , $u_t = (u_t^{(1)}, \dots, u_t^{(k)})$ — совокупность входных сигналов, $E\varepsilon_t = 0$, начальное значение y_0 — случайная величина, не зависящая от ε_0 .

Требуется так выбрать процедуру планирования и анализа эксперимента (ξ, s) , включающую план эксперимента $\xi = \{u_0, u_2, \dots, u_{2n}\}$, а также линейный относительно результатов наблюдений $y^T = (y_1, y_3, \dots, y_{2n+1})$ в точках плана ξ метод s получения оценок, чтобы аппроксимирующий оператор $\hat{L}_{m_1}(y, u, \xi, s)$, построенный в результате реализации (ξ, s) , приближал в $(k+1)$ -мерной области $Y \times U$ оператор $L(y, u)$ наилучшим образом в смысле критерия

$$(\xi^*, s^*) = \arg \inf_{\xi, s} B, \quad (2)$$

где

$$B = \int_Y \int_U W_1(y) W_2(u) [L(y, u) - \hat{L}_{m_1}(y, u, \xi, s)]^2 dy du,$$

При этом $W_1(y) \geq 0, W_2(u) \geq 0, \int_Y W_1(y) dy = 1, \int_U W_2(u) du = 1.$

$$L(y, u) = \theta^T \tilde{f},$$

$$\hat{L}_{m_1}(y, u, \xi, s) = (\hat{\theta}^{(1)})^T \tilde{f}^{(1)}, \quad (3)$$

где $\tilde{f}^T = (\tilde{f}_0(y), \tilde{f}_1(u), \dots, \tilde{f}_{m_1}(u) \mid \tilde{f}_{m_1+1}(u), \dots, \tilde{f}_{m_2}(u)) = ((\tilde{f}^{(1)})^T \mid (\tilde{f}^{(2)})^T)$ — вектор линейно-независимых функций, $\theta^T = (\theta_0, \dots, \theta_{m_1})$ — вектор неизвестных параметров, $(\hat{\theta}^{(1)})^T = (\hat{\theta}_0, \dots, \hat{\theta}_{m_1})$ — вектор оценок неизвестных параметров в модели 4). Очевидно, $m_1 < m_2, m_1 > 0$.

Производится $n+1$ «запуск» системы (1) на один такт в соответствии с планом ξ . Начальное состояние y_{2i} системы (1) в $i+1$ «запуске» не зависит от предшествующих состояний и является случайной величиной, измеряемой без ошибки. Имеется ограничение на число «запусков» $n < m_2$. Таким образом, имеем

$$y_{2t+1} = L(y_{2t}, u_{2t}) + \varepsilon_{2t}, \quad t = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

где u_{2t} — точка плана ξ , y_{2t} — начальное состояние.

Если условие (2) выполнено, то процедуру (ξ^*, s^*) будем, следуя [1], называть несмещенной процедурой планирования и анализа эксперимента.

Подобная задача в применении к регрессионным экспериментам ($\theta_0 = 0$) рассматривалась, например, в работах [1, 2, 3].

Используя $E(\hat{L}_{m_1}/\bar{y})$, $\bar{y}^T = (y_0, y_2, \dots, y_{2n})$, систематическую ошибку B запишем в виде

$$B = E(B_1 - V_1), \quad (6)$$

где

$$B_1 = \int_Y \int_U W_1(y) W_2(u) [L(y, u) - E(\hat{L}_{m_1}/\bar{y})]^2 dy du,$$

$$V_1 = \int_Y \int_U W_1(y) W_2(u) [E\hat{L}_{m_1}(y, u, \xi, s) - E(\hat{L}_{m_1}/\bar{y})]^2 dy du.$$

Легко видеть, что невырожденное линейное преобразование с треугольной матрицей P ($P_{ij} = 0, j > i$) системы функций \tilde{f} не влияет на план ξ^* , определяемый в (2). Поэтому перейдем к системе функций $f^T = (f_0(y), f_1(u), \dots, f_{m_1}(y, u) \mid f_{m_1+1}(y, u), \dots, f_{m_2}(y, u)) = ((f^{(1)})^T \mid (f^{(2)})^T)$, ортонормированных на $Y \times U$ с весом $W_1(y) W_2(u)$.

Выписывая выражение для B_1 , легко показать, что достаточным условием минимума функционала из (2) является условие

$$AF = (I_{m_1+1} \ 0), \quad (7)$$

где $\tilde{A} = P_1^T A$ — матрица коэффициентов в линейном методе оценивания s , P_1 — матрица перехода от $\tilde{f}^{(1)}$ к $f^{(1)}$, $F = (F_{(n+1) \times (n+1)} \mid F_{(n+1) \times (m_2-n)}) = (f_0(y_{2t}), f_1(y_{2t}, u_{2t}), \dots, f_n(y_{2t}, u_{2t}) \mid f_{n+1}(y_{2t}, u_{2t}), \dots, f_{m_2}(y_{2t}, u_{2t})), t \in \{0, \dots, n\}$.

Равенство (7) должно выполняться почти наверное по отношению к $\bar{y}^T = (y_0, y_2, \dots, y_{2n})$.

Замечание 1. Если $\int_Y W_1(y) f_0(y) dy = 0$, то $f^T = (f_0(y), f_1(u), \dots, f_{m_2}(y, u))$, в этом случае, используя п. 1 теоремы 1 из [2], нетрудно показать, что в качестве n точек $\{u_{2j}\}, j \in \{1: n\}$, плана ξ можно выбрать узлы кубатурной формулы, точной для попарных произведений $\{f_i(u) f_j(u)\}, i \in \{1: m_1\}, j \in \{1: m_2\}$, и одна точка может дублироваться, т. е. $u_0 = u_{2j}$ при произвольном $j \in \{1: n\}$. Используя п. 2 теоремы 1 из [2], а также соотношение $f_i(u_0) = f_i(u_{2j})$ (j — фиксировано), нетрудно указать способ построения матрицы A , такой, что при использовании плана $\xi^* = \{u_{2j}, u_2, \dots, u_{2n}\}$ почти наверное выполняется (7).

Если $\int_Y W_1(y) f_0(y) dy \neq 0$ и $f_1(u) = 1$, то, переходя к системе функций $f^T = (f_0(y), f_1(u), \dots, f_{m_2}(u))$, где функции $\{f_i(u)\}, i \in \{1: m_2\}$, ортонормированы на U с весом $W_2(u)$, нетрудно получить аналогичный результат. В общем случае справедлива теорема.

Теорема 1. Если $|F_{(n+1) \times (n+1)}| \neq 0$, (п.н.), то для того, чтобы процедура (ξ, s) была несмещенной, достаточно:

1) В качестве метода оценивания s^* брать линейный метод с матрицей

$$\tilde{A} = P_1^T \underbrace{(I_{m_1+1} 0)}_{n+1} F_{(n+1) \times (n+1)}^{-1} \quad (8)$$

2) в качестве точек $\{u_{2j}\}_{j=1}^n$ плана ξ использовать нули функций

$$\omega_{n+r}(y_{2j}, u) = f_{n+r}(y_{2j}, u) - \lambda_{m_1+1}^{(n+r)} f_{m_1+1}(y_{2j}, u) - \dots - \lambda_n^{(n+r)} f_n(y_{2j}, u), \quad (9)$$

$r \in \{1; m_2 - n, j \in \{0; n; \lambda_j^{(i)}\}$ — произвольные числа.

Доказательство проводится так же, как первая часть доказательства теоремы 2 из [2].

Summary

Plans of experiments minimizing bias error for the case of autoregressive models are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермаков С. М. Об оптимальных несмещенных планах регрессионных экспериментов. — Труды Мат. ин-та АН СССР, 1970, вып. III, с. 252—257. 2. Седунов Е. В., Буре В. М. Несмещенные в метрике L_2 процедуры планирования и анализа регрессионных экспериментов. — Вестн. Ленингр. ун-та, 1978, № 13, с. 53—57. 3. Седунов Е. В. Оптимальное планирование и анализ регрессионных экспериментов с учетом систематической ошибки. Препринт. М., 1978. 60 с.

Статья поступила в редакцию 30 сентября 1978 г.

УДК 533.70:541.12.12

Г. М. Кравцов

ПОЛУЧЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НЕСУЩЕЙ ФАЗЫ ГАЗОВЗВЕСИ ИЗ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

Рассмотрим газовзвесь, состоящую из молекул простого газа и твердых частиц. В ортогональной лабораторной системе координат (X_1, X_2, X_3) выберем произвольный элементарный объем газовой фазы $[\bar{r}, \bar{r} + d\bar{r}]$ и обозначим его через ΔV . Здесь \bar{r} — радиус-вектор в лабораторной системе координат. Далее, в момент времени t' возьмем точку с координатами $\bar{r}'(X_1', X_2', X_3') \in \Delta V$. Очевидно, возможны следующие три случая: 1) точка \bar{r}' находится в объеме ΔV_T , занятом газом, 2) точка $\bar{r}' \in \sigma_1$, где σ_1 — поверхность какой-либо твердой частицы, 3) точка $\bar{r}' \in \Delta V_T$, где ΔV_T — объем, занятый твердыми частицами.

Если $\bar{r}' \in \Delta V_T$, то всегда можно выделить элементарный объем $[\bar{r}', \bar{r}' + d\bar{r}']$, находящийся внутри газовой фазы. Изменение числа молекул газа, имеющих скорость из объема $[\bar{u}_1, \bar{u}_1 + d\bar{u}_1]$, который обозначим через $\Delta \bar{u}_1$, внутри этого элементарного объема за промежуток времени $[t', t' + dt']$, как известно [1, 2], описывается уравнением Больцмана

$$D' f' d\bar{r}' dt' d\bar{u}_1 = I(f' f') d\bar{r}' dt' d\bar{u}_1. \quad (1)$$

Здесь $f' = f'(\bar{r}', \bar{u}_1, t')$ — локальная в пространстве координат и времени функция распределения молекул газа, $D' = \partial/\partial t' + \bar{u}_1 \cdot (\partial/\partial \bar{r}') + \bar{F}_1 \cdot (\partial/\partial \bar{u}_1)$, \bar{F}_1 — напряженность поля массовых сил, действующих на молекулу газа, $I(f' f')$ — больцмановский оператор столкновений.

Изменение числа молекул газа, имеющих скорость из объема $\Delta \bar{u}_1$, вследствие столкновений с элементом ds поверхности твердой частицы за промежуток времени $[t', t' + dt']$ выражается следующим образом [3]:

$$(D' f')_s d\bar{r}' dt' d\bar{u}_1 = (\Psi'_s - N'_s) ds dt' d\bar{u}_1. \quad (2)$$

Здесь Ψ'_s — функция рождения, N'_s — функция столкновений, явный вид которых имеется в работах [1, 4].