ISSN 0132—4624
ISSN 0024—0850

ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА '97

серия 1 МАТЕМАТИКА МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ выпуск 4

1997 ВЕСТНИК САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. Сер. 1. Вып. 4 (№ 22)

МАТЕМАТИКА

УДК 681.324

В. М. Буре, Б. К. Кирпичников

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть $\{S_n\}$ — стандартный процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин T_i, $i = 1, 2, \ldots$, и $H(t)$ — функция восстановления этого процесса. Предположим, что процесс функционирует на случайном промежутке времени $(0, \xi]$, так что в момент времени ξ происходит обрыв процесса, и далее через случайный промежуток времени η процесс возобновляет функционирование, причем с момента регенерации функционирование процесса совпадает с начальным. Иными словами, периоды активности процесса чередуются с периодами регенерации, образуя альтернирующий процесс [1]. При этом все случайные величины, определяющие введенный процесс, предполагаются взаимно независимыми.

Введем функцию восстановления $H_r(t)$ описанного процесса как математическое ожидание числа восстановлений на промежутке $(0, t]$. Пусть G и K — функции распределения случайных величин ξ и η соответственно, а $\Phi = G * K$ — свертка этих функций. Тогда, используя формулу полного математического ожидания, можно получить интегральное уравнение восстановления

$$H_r(t) = H(t)\overline{G(t)} + \int_0^t H(x)dG(x) + \int_0^t H_r(t-\tau)d\Phi(\tau), \tag{1}$$

где $\overline{G(t)} = 1 - G(t)$.

Решение уравнения (1) нетрудно получить методом преобразования Лапласа-Стилтьеса. С этой целью положим

$$u_1(t) = H(t)\overline{G(t)}, \quad u_2(t) = \int_0^t H(x)dG(x),$$

$$u_i^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}du_i(t), \quad i = 1, 2,$$

$$\phi^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}d\Phi(t), \quad h^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}dH(t).$$

Тогда

$$h_r^* = \frac{u_1^*(s) + u_2^*(s)}{1 - \phi^*(s)}. \tag{2}$$

Основные результаты теории восстановления содержатся в предельных теоремах, описывающих поведение функции восстановления при $t \to \infty$. Использование тауберовой теоремы Караматы [2] для преобразования Лапласа-Стилтьеса позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема. *Если вторые моменты случайных величин ξ и η конечны, то справедливо соотношение*

$$H_r(t) \sim \frac{EH(\xi)}{\mu_1 + \mu_2} t \quad (t \to \infty),$$

где $\mu_1 = E\xi, \mu_2 = E\eta$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что при сделанных предположениях

$$\lim_{s \to 0} u_1^*(s) = 0, \quad \lim_{s \to 0} u_2^*(s) = \int_0^\infty H(x) dG(x),$$
$$1 - \phi^*(s) \sim (\mu_1 + \mu_2)s, \quad (s \to 0).$$

Таким образом,

$$h_r^*(s) \sim \frac{\int_0^\infty H(x) dG(x)}{\mu_1 + \mu_2} \frac{1}{s} \quad (s \to 0). \tag{3}$$

Коэффициент при $1/s$ является медленно меняющейся функцией, и, следовательно, применима тауберова теорема, откуда следует доказываемое утверждение.

Следствие 1. Если стандартный процесс восстановления является пуассоновским, то

$$H_r(t) \sim \frac{1}{\mu} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} t,$$

где $\mu = ET_i$. Коэффициент в правой части есть произведение плотности пуассоновского процесса восстановления и предельного значения так называемого коэффициента готовности альтернирующего процесса.

Следствие 2. Если случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром α , то

$$H_r(t) \sim \frac{h^*(\alpha)}{\mu_1 + \mu_2} t,$$

где $h^*(\alpha)$ есть преобразование Лапласа-Стилтьеса функции восстановления стандартного процесса. Утверждение следует из формулы $EH(\xi) = h^*(\alpha)$.

Рассмотренная модификация процесса восстановления может быть использована в качестве математической модели, например, неустойчивой производственной, финансовой деятельности, либо модели функционирования некоторой самовосстанавливающейся популяции в условиях нарушения экологического равновесия [3].

SUMMARY

V. M. Boure, B. K. Kirpichnikov. An integral equation and a limit theorem for a modificated model of a renewal process.

A limit theorem is proved for a modificated renewal process.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кокс Д., Смит В.* Теория восстановления. М., 1967. 300 с.
2. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М., 1985. 142 с.
3. *Буре В. М., Кирпичников Б. К.* Деградирующий процесс восстановления как модель нарушения экологического равновесия // Обозр. прикл. и промышл. математики. 1994. Т. 1, вып. 6. С. 850–859.

Статья поступила в редакцию 5 ноября 1996 г.