Карельский научный центр
Российской академии наук
Институт прикладных
Математических исследований

# Математические методы в экологии

**Тезисы докладов**
**Всероссийской научной школы**
**Петрозаводск, 10-16 июня 2001 г.**

Петрозаводск
2001

# Задача оценки момента времени проведения агротехнических мероприятий

В.П.Якушев, В.М.Буре
Санкт-Петербург, Агрофизический НИИ РАСХН

При планировании агротехнических мероприятий часто возникает задача оценивания оптимального момента времени проведения того или иного мероприятия [1]. При этом заданы временные границы проведения мероприятий. Как правило, в подобных задачах можно задать ожидаемые потери за единицу времени, связанные с занижением или, наоборот, с завышением оценки оптимального момента времени проведения агротехнического мероприятия. Пусть $c$ и $l$ — величины соответствующих потерь.

Предположим, что в качестве оценки момента времени проведения агротехнического мероприятия выбран момент времени $x \in [a, b]$, внутри заданного временного интервала $[a, b]$. Оптимальный момент времени проведения этого мероприятия $\tau$ является случайной величиной с известной функцией распределения $F(t)$. Реализация случайной величины $\tau$, вообще говоря, может не принадлежать промежутку $[a, b]$.

При сделанных предположениях потери $\tilde{Q}(\tau, x)$, вызванные выбором оценки $x \in [a, b]$ оптимального момента времени проведения агротехнического мероприятия, в то время как истинное значение оптимального момента времени равно $\tau$, зависят от реализации случайной величины и потому сами являются случайными.

Можно показать, что ожидаемые потери (математическое ожидание потерь) составят величину

$$Q(x) = c\int_x^{\infty}(\min(t, b) - x)dF(t) + l\int_{-\infty}^{x}(x - \max(t, a))dF(t),$$

где $Q(x) = M\tilde{Q}(\tau, x)$.

Поставим задачу минимизации потерь

$$x^* = \arg\min_{x\in[a,b]} Q(x).$$

Пусть $x_p$ — решение уравнения: $F(x_p) = c/(c + l)$.

**Теорема 1** *Если функция распределения $F(t)$ непрерывна и строго монотонна, то $x^*$ определяется выражением*

$$x^* = \begin{cases} b, & x_p > b, \\ x_p, & a \le x_p \le b, \\ a, & x_p < a. \end{cases}$$

Если функция распределения неизвестна, то следует либо построить статистическую оценку функции распределения по имеющимся эмпирическим данным, либо использовать минимаксный подход. Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$x^{**} = \arg \inf_{x \in [a,b]} \sup_{F \in \Phi} Q(x, F),$$

где $\Phi$— множество всех функций распределения, $Q(x, F) = Q(x)$.

**Теорема 2** *Решение $x^{**}$ определяется выражением*

$$x^{**} = \frac{c}{(c+l)} b + \frac{l}{(c+l)} a.$$

Отдельно рассмотрим случай, когда функция распределения $F(t)$ представима в виде конечной смеси распределений $F_1(t), ..., F_m(t)$:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} p_i F_i(t),$$

где $p_i \ge 0, i = 1, ..., m, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Введем определения:

$$x^* = \arg \min_{x \in [a,b]} Q(x, F),$$

$$x_i^* = \arg \min_{x \in [a,b]} Q(x, F_i),$$

$$\tilde{x^*} = x_1^* I\{\nu = 1\} + x_2^* I\{\nu = 2\} + ... + x_m^* I\{\nu = m\},$$

где $I\{\nu = i\} = 1$, если $\nu = i$ и $I\{\nu = i\} = 0$, если $\nu \ne i$.

**Теорема 3** *Если функции распределения $F_1(t), ..., F_m(t)$ непрерывны и строго монотонны, то*

$$M\tilde{Q}(\tau, \tilde{x^*}) \le Q(x^*, F).$$

Из теоремы 3 следует, что в условиях идентифицируемости событий $\{\nu = i\}$ оптимальное решение $\tilde{x^*}$ предпочтительнее решения $x^*$.

# Литература

[1] Якушев В.П., Буре В.М. О задаче оптимальной оценки момента времени проведения агротехнических мероприятий.— Современные проблемы опытного дела.(Санкт-Петербург, 6-9 июня 2000 г.): Материалы международной научно-практической конференции.С.-Петерб.: АФИ,РАСХН,т.2,с.139-140.