

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ЧИТИНСКИЙ ИНСТИТУТ ПРИРОДНЫХ РЕСУРСОВ

*Математические*  
**МОДЕЛИ**  
*рационального*  
**ПРИРОДО-**  
**ПОЛЬЗОВАНИЯ**

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Ответственные редакторы  
доктор физико-математических наук  
*В. В. Пененко*  
доктор биологических наук  
*И. Б. Токин*



## Предисловие . . . . . 3

## ЧАСТЬ I

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В ЗАДАЧАХ ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

- Пененко В. В. Теоретические основы, системная организация и практическое использование математических моделей для решения природоохранных задач . . . . . 5
- Алоян А. Е., Фалейчик А. А., Фалейчик Л. М. Алгоритм численного решения мезометеорологических задач в случае криволинейной области . . . . . 14
- Найदेशкин А. Н., Плюхин Б. В., Фалейчик А. А. Динамика движения противоточного воздуха с проницаемой тонкой стенкой в условиях подземных выработок . . . . . 14
- Суриков В. Н., Кириллов А. Н. Синтез инвариантной системы управления процессом обработки осадка сточных вод на основе строения скользящих режимов . . . . . 35
- Рапута В. Ф., Быков А. В. Численные эксперименты по минимизации расхода пестицидных препаратов в задачах моделирования аэрозольной защиты растений . . . . . 38
- Савченко А. О. Численный метод выявления скрытых периодичностей с повышенной точностью . . . . . 46
- Плюхин Б. В. Структура региональной базы данных для решения климатических и природоохранных задач . . . . . 52
- Глазырин В. В., Плюхин Б. В. Решение уравнения конденсационной адiabаты в аналитическом виде . . . . . 57
- Бакланов А. А. Атмосфероохранные проблемы горной промышленности: возможности математического моделирования . . . . . 63
- Бакирбаев Б. Численное моделирование гидрометеорологического режима промышленных районов . . . . . 65

## ЧАСТЬ II

**ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ  
И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ЭКОЛОГИИ**

- Петросян Л. А. Математико-экологические модели и иерархические игры . . . . . 76
- Захаров В. В. Иерархические игры и их приложения в проблеме охраны окружающей среды . . . . . 86
- Еськова В. А. Парето-оптимальные решения в одной задаче оптимального управления экологически замкнутым регионом . . . . . 96
- Винниченко С. В., Мазалов В. В. Игровые модели в дражных системах . . . . . 105
- Глазырина И. П. Приложения некоторых теорем векторной двойственности к решению выпуклых экстремальных задач . . . . . 109
- Мазалов В. В. Экология и проблемы оптимальной остановки . . . . . 115
- Буре В. М. Критерий случайности, основанный на знаках разностей для временных рядов с конечным множеством допустимых значений переменной . . . . . 126
- Кердман Ф. С. Задача оптимизации контроля вектора качества . . . . . 128
- Иванов В. Н., Никитина Л. П., Иванова Л. В. Математический анализ в характеристике отдельных звеньев экологического равновесия . . . . . 135

В. М. БУРЕ

## КРИТЕРИЙ СЛУЧАЙНОСТИ, ОСНОВАННЫЙ НА ЗНАКАХ РАЗНОСТЕЙ

### ДЛЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В некоторых биологических приложениях временные ряды носят сугубо дискретный характер в том смысле, что переменная, меняющаяся во времени, может принимать лишь дискретные значения, причем часто совокупность этих значений конечна. Например, динамика урожайности сельскохозяйственной культуры или динамика численности популяции на заданной площади являются дискретными временными рядами, при этом очевидно, что множество допустимых значений конечно.

Простейшей гипотезой, которую можно выдвинуть относительно колеблющегося ряда, является предположение о том, что колебания случайны [1]. Такая задача возникает, например, при исследовании остатков, полученных вычитанием из исходного ряда систематических элементов, когда требуется установить, не осталось ли в них какой-либо систематизации. В случайных рядах наблюдения независимы и могут следовать в любом порядке. Выбор критерия проверки гипотезы зависит от того, какие выдвигаются альтернативные гипотезы. Когда в качестве альтернативной гипотезы рассматривается гипотеза о наличии линейного тренда, обычно используют критерий, основанный на знаках разностей [1], который состоит в подсчете числа положительных разностей первого порядка в ряде, т. е. числа точек возрастания ряда. Этот критерий приведен в [1] в предположении, что переменная может принимать любые вещественные значения. Покажем, как изменится нормированная статистика критерия, если исследуемый временной ряд является дискретным, причем множество допустимых значений переменной конечно. После чего, используя центральную предельную теорему для  $m$ -зависимых случайных величин [2], докажем асимптотическую нормальность нормированной статистики.

Итак, имеем последовательность дискретных случайных величин, принимающих конечное множество значений:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t, \dots, \xi_n$ ;  $\xi_t \in \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , где  $x_i < x_{i+1}$ . Проверяемая гипотеза  $H_0$  состоит в предположении о независимости и равномерной распределенности случайных величин  $\xi_t$ , т. е.

$$P\{\xi_t = x_i\} = 1/N,$$
$$P\{\xi_{i_1} = x_{i_1}, \xi_{i_2} = x_{i_2}, \dots, \xi_{i_k} = x_{i_k}\} =$$
$$= P\{\xi_{i_1} = x_{i_1}\} \cdot P\{\xi_{i_2} = x_{i_2}\} \cdot \dots \cdot P\{\xi_{i_k} = x_{i_k}\},$$

где  $k$  — произвольное целое число. Определим счетную перемен-

В предположении истинности гипотезы  $H_0$  вычислим вероятность  $P\{I_i = 1\}$ . Формируя выборку из двух элементов с возвращением, имеем  $N^2$  исходов, а число пар  $(y_1, y_2)$  таких, что  $y_1 < y_2$ , есть число сочетаний  $\binom{N}{2}$ . Таким образом,

$$P\{I_i = 1\} = (N-1)/2N;$$

$$P\{I_i = 0\} = P\{\xi_i \geq \xi_{i+1}\} = 1 - \frac{N-1}{2N} = \frac{N+1}{2N}.$$

Следовательно,

$$E(I_i) = \frac{N-1}{2N}, \quad E\left(\sum_{i=1}^{n-1} I_i\right) = (n-1) \frac{N-1}{2N}.$$

*Лемма. Если гипотеза  $H_0$  истинна, то случайные величины  $I_i$  и  $I_{i+1}$  являются зависимыми, в то время как  $I_i$  и  $I_{i+k}$  при  $k > 1$  — независимые случайные величины.*

*Доказательство. Очевидно*

$$\begin{aligned} P\{I_i = 1, I_{i+1} = 1\} &= P\{\xi_i < \xi_{i+1} < \xi_{i+2}\} = \\ &= \binom{N}{3} / N^3 = \frac{(N-1)(N-2)}{6N^2} \neq \frac{(N-1)^2}{(2N)^2}, \end{aligned}$$

откуда следует зависимость случайных величин  $I_i$  и  $I_{i+1}$ . При  $k > 1$  в предположении истинности гипотезы  $H_0$  имеем

$$\begin{aligned} P\{I_i = 1, I_{i+k} = 1\} &= P\{\xi_i < \xi_{i+1}, \xi_{i+k} < \xi_{i+k+1}\} = \\ &= \binom{N}{2} \binom{N}{2} / N^4 = P\{I_i = 1\} P\{I_{i+k} = 1\}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что случайные величины  $I_i, I_{i+k}$  независимы, так как из независимости событий  $A$  и  $B$  следует независимость событий  $\bar{A}$  и  $B, A$  и  $\bar{B}, \bar{A}$  и  $\bar{B}$ . Лемма доказана.

Вычислим дисперсию суммы случайных величин  $I_i$ :

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{i=1}^{n-1} I_i\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} D(I_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} E\{(I_i - EI_i)(I_{i+1} - EI_{i+1})\} = \\ &= (n-1)D(I_1) + 2(n-2)\{E(I_1 \cdot I_2) - E(I_1)E(I_2)\} = \\ &= (n-1)\left[\frac{N-1}{2N} - \frac{(N-1)^2}{4N^2}\right] + 2(n-2)\left[\frac{(N-1)(N-2)}{6N^2} - \frac{(N-1)^2}{4N^2}\right] = \\ &= n \frac{N^2 - 1}{12N^2} + \frac{N^2 - 1}{12N^2}. \end{aligned}$$

Из леммы следует, что последовательность случайных величин  $I_1, I_2, \dots, I_t, \dots, I_n$  является последовательностью  $m$ -зависимых ( $m$ -связанных) случайных величин при  $m = 1$  в смысле определения, данного в [2]. Там же имеется теорема, в которой показано, что к стационарной последовательности  $m$ -связанных

случайных величин применима центральная предельная теорема. Используя эту теорему, можно доказать следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть

$$\zeta_n = \left[ \sum_{i=1}^{n-1} I_i - E \left( \sum_{i=1}^{n-1} I_i \right) \right] / \sqrt{D \left( \sum_{i=1}^{n-1} I_i \right)}.$$

Если гипотеза  $H_0$  истинна, то статистика  $\zeta_n$  асимптотически нормальна с параметрами 0 и 1, т. е. для любого вещественного  $x$  имеем

$$P \{ \zeta_n < x \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

С помощью теоремы можно построить асимптотическую критическую область для гипотезы  $H_0$  с заданной величиной ошибки 1-го рода.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кендэл М. Временные ряды.— М.: Финансы и статистика, 1981.
2. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.