

В. М. Буре, С. Ш. Кумачева

## МОДЕЛЬ АУДИТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ О ДОХОДАХ НАЛОГОПЛАТЕЛЬЩИКОВ

В литературе имеется несколько моделей уклонения от уплаты налогов, из которых укажем предложенные в [1] (в данной трактовке задача именуется «игрой между преступником и полицейским») и в [2,3]. Отметим, что в указанных моделях под аудитом понимаются налоговые проверки, осуществляемые правительством или государственными налоговыми органами (см., например, [2]). В настоящей статье рассматривается модель аудита, в которой предполагается, что налоговые власти обладают некоторой статистической информацией о распределении доходов населения (это также присуще более ранним моделям). Подобный подход был применен в [3], однако предлагаемая в данной работе модель имеет ряд существенных отличий, обусловленных не только стремлением приблизить модель к реальности, но и иной математической постановкой задачи. Близкая к ней модель была опубликована в [4], но в ней не были изучены вопросы, связанные с затратами налоговых органов.

В рассматриваемой модели, следуя [3], предполагается, что истинная налоговая ответственность каждого налогоплательщика  $i$  принимает конечный набор возможных значений и представляет собой безразмерную относительную величину, при этом единице соответствует некоторый возможный размер налоговых отчислений с одного налогоплательщика, измеряемый в рублях. Такая дискретизация, конечно, огрубляет схему налоговых отчислений, однако подобные схемы встречаются на практике. Кроме того, учитывая, что величина дохода физического лица часто измеряется с большой ошибкой, можно надеяться, что дискретизация уменьшит воздействие подобных ошибок. Дискретизацию целесообразно проводить, разбивая диапазон возможных налоговых отчислений на интервалы. Каждому интервалу соответствует определенная группа налогоплательщиков. Пусть  $H_0, H_1, \dots, H_{N-1}$  – средние уровни дохода в этих группах, измеряемые в рублях, где  $N$  – число групп,  $m_0, m_1, \dots, m_{N-1}$  – соответствующие значения налоговой ответственности, определяемые следующими равенствами:  $m_l = \frac{H_l}{H_{N-1}}$ ,  $l = \overline{1, N-1}$ ,  $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_{N-1} \leq 1$ . Для простоты и наглядности изложения будем рассматривать  $N = 7$ , результаты полностью аналогичны и при большем числе групп. Тогда множество значений истинной налоговой ответственности представляет собой  $\{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$ , где  $(0 \leq m_0 < m_1 < m_2 < m_3 < m_4 < m_5 < m_6 \leq 1)$ . Такое количество групп выбрано неслучайно: оно соответствует сведениям об индексации подоходного налога в РФ до введения единой ставки налога на доходы физических лиц [5]. В численном эксперименте границы интервалов были выбраны в соответствии с этой индексацией. Вопросы экономической целесообразности подобной налоговой шкалы, установленной государственными налоговыми органами РФ, в данной работе анализироваться не будут. Даже при использовании непрерывной налоговой шкалы для определения разумной политики налоговых проверок целесообразно проведение предварительной группировки налогоплательщиков по размерам налоговых отчислений. В частности это можно сделать подобным образом.

Налоговую ответственность, которую декларирует налогоплательщик, обозначим  $r$ . Далее будем рассматривать  $r(i)$  – функцию, принимающую значения из того же множества, что и аргумент (истинная налоговая ответственность). Для перехода к единой системе измерения величин (денежным средствам) домножим налоговые ответственности на  $h$  – денежный эквивалент налога с наибольшего уровня дохода (т.е.  $h = 0,13 \cdot H_{N-1}$ ). Предполагаем далее, что проведенный аудит с вероятностью единица обнаруживает уклонение налогоплательщика от уплаты налогов в соответствии с его истинной налоговой ответственностью. Если был произведен аудит, то в случае уклонения налогоплательщик должен выплатить уровень своего уклонения  $(i - r)h$  и штраф. Предполагается, что предельная штрафная ставка  $\pi$  постоянна. Таким образом, штраф составит  $\pi(i - r)h$ .

Аналогично [3], в данной работе исследуются уклонения от уплаты налогов целых групп граждан с одинаковым уровнем дохода, при этом постулируется рациональность поведения налогоплательщиков, т. е. в частности одинаковость поведения всех налогоплательщиков, входящих в одну и ту же группу. Для большей наглядности изложения модель изучают в предположении, что уклонение налогоплательщиков возможно только до уровня налоговой ответственности группы с более низким доходом и только тогда, когда уклоняются граждане с более высоким уровнем дохода. Отказ от этого предположения принципиально не изменит характер дальнейшего рассмотрения модели, однако количество вариантов резко возрастет, при необходимости анализ большего количества вариантов может быть проведен аналогичным образом. Вместе с тем данные предположения представляются довольно естественными, по крайней мере, в условиях действующего Налогового кодекса (НК) РФ [5]. В рамках сделанных предположений возможны семь различных ситуаций, связанные с тем, какие значения принимает декларируемая налоговая ответственность  $r$  при конкретных значениях  $i$ . Каждую из ситуаций будем называть профилем согласованности налоговой политики с истинным уровнем дохода:

- A:  $r(m_1) = m_0; r(m_2) = m_1; r(m_3) = m_2; r(m_4) = m_3; r(m_5) = m_4; r(m_6) = m_5;$
- B:  $r(m_1) = m_1; r(m_2) = m_1; r(m_3) = m_2; r(m_4) = m_3; r(m_5) = m_4; r(m_6) = m_5;$
- C:  $r(m_1) = m_1; r(m_2) = m_2; r(m_3) = m_2; r(m_4) = m_3; r(m_5) = m_4; r(m_6) = m_5;$
- D:  $r(m_1) = m_1; r(m_2) = m_2; r(m_3) = m_3; r(m_4) = m_3; r(m_5) = m_4; r(m_6) = m_5;$
- E:  $r(m_1) = m_1; r(m_2) = m_2; r(m_3) = m_3; r(m_4) = m_4; r(m_5) = m_4; r(m_6) = m_5;$
- F:  $r(m_1) = m_1; r(m_2) = m_2; r(m_3) = m_3; r(m_4) = m_4; r(m_5) = m_5; r(m_6) = m_5;$
- G:  $r(m_1) = m_1; r(m_2) = m_2; r(m_3) = m_3; r(m_4) = m_4; r(m_5) = m_5; r(m_6) = m_6.$

Профили расположены в порядке возрастания согласованности. Профиль А является самым несогласованным: в нем от честной уплаты налогов уклоняются все группы налогоплательщиков. В более согласованном профиле В перестает уклоняться группа налогоплательщиков с низкой налоговой ответственностью  $m_1$ , в следующем по согласованности профиле С – группы с истинной налоговой ответственностью  $m_1$  и  $m_2$  и т. д. Самым согласованным является профиль G, в котором все группы налогоплательщиков декларируют свою истинную налоговую ответственность.

На практике [6] из-за отсутствия достоверных данных о размере полных доходов населения, включающих скрытую от статистических и налоговых органов часть, в качестве статистической информации о доходах налогоплательщиков могут быть использованы, например, сведения об их расходах (статьи 86.1–86.3 НК РФ [5]). В [3] подобная

статистическая информация названа сигналом. Будем придерживаться той же терминологии. Сигнал  $s$  может принимать два значения  $s \in \{d, u\}$ , где  $d$  – сигнал о том, что данный налогоплательщик имеет низкий уровень дохода,  $u$  – сигнал о том, что у него высокий уровень дохода. В рассматриваемой модели будем использовать условные вероятности. Введем

$$P(s = d|r = m_0) = \frac{|\{r = m_0\} \cap \{s = d\}|}{|\{r = m_0\}|}$$

– долю лиц, на которых пришел сигнал  $s = d$  среди декларировавших  $r = m_0$ , где  $|M|$  – количество элементов, входящих во множество  $M$ . Аналогично вводятся  $P(s = u|r = m_0)$  и соответствующие величины  $P(s = d|r = l)$  и  $P(s = u|r = l)$  (где  $l = \overline{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5}$ ) для налогоплательщиков, декларировавших  $r = \overline{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5}$ .

Введем также параметры

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= P\{“m_0”\}, & \gamma_1 &= P\{“m_1”\}, & \gamma_2 &= P\{“m_2”\}, & \gamma_3 &= P\{“m_3”\}, \\ \gamma_4 &= P\{“m_4”\}, & \gamma_5 &= P\{“m_5”\}, & \gamma_6 &= P\{“m_6”\}, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь доли  $\gamma_l$ ,  $l = \overline{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}$  соответствуют статистическим сведениям о распределении доходов среди населения. Величина  $\delta(m_6, m_5) = P(“m_6”|A, r = m_5)$  – доля лиц с налоговой ответственностью “ $m_6$ ” среди лиц, декларировавших  $r = m_5$  и подвергнутых аудиту. Аналогично введены величины

$$\delta(m_5, m_4), \delta(m_4, m_3), \delta(m_3, m_2), \delta(m_2, m_1), \delta(m_1, m_0). \quad (2)$$

Вычислив их, получим, что в каждом профиле они зависят только от соотношения параметров (1). Для  $\delta(m_6, m_5)$  справедливо следующее выражение:  $\delta(m_6, m_5) P(A|r = m_5) = P(“m_6” \cap A|r = m_5)$ , где  $P(A|r = m_5)$  – вероятность аудита лиц, декларировавших  $r = m_5$ , а  $P(“m_6” \cap A|r = m_5)$  – вероятность аудита лиц, декларировавших  $r = m_5$ , с выявлением в результате истинной налоговой ответственности “ $m_6$ ”. Те же соотношения аналогичных величин справедливы для налогоплательщиков, декларировавших все другие значения налоговой ответственности. Применив формулу полной вероятности, получим

$$P(A|r = l) = P(A|r = l, s = d) P(s = d|r = l) + P(A|r = l, s = u) P(s = u|r = l) \quad (3)$$

для  $l = \overline{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6}$ , где  $P(A|r = l, s = d)$  и  $P(A|r = l, s = u)$  – доли лиц, подвергшихся аудиту при условии, что они декларировали  $r = l$  и на них поступили соответствующие сигналы. Естественно предположить, что  $P(A|r = l, s = u) \geq P(A|r = l, s = d)$ . В рассматриваемой модели эти вероятности определяют политику налоговых органов и могут быть выбраны произвольным образом, т. е. если некоторый налогоплательщик декларировал налоговую ответственность  $r = l$  и на него поступил сигнал  $s = u$ , то с вероятностью  $P(A|r = l, s = u)$  он будет подвергнут аудиту.

Все налогооблагаемое население примем за единицу. Обозначим  $k_l$  часть налогоплательщиков, декларировавших свой доход как  $r = l$  для  $l = \overline{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6}$ , тогда

$$\sum_{l=\overline{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6}} k_l = 1.$$

Определим доход налоговых органов, полученный в результате сбора налогов и штрафов:  $R = T + P - C$ , где  $P$  – штрафы,  $C$  – общая стоимость аудита,  $T$  – налоги, причем  $T = T_1 + T_2$ , где  $T_1$  – налоги, выплаченные налогоплательщиками в соответствии с декларируемым уровнем налоговой ответственности,  $T_2$  – налоговые уклонения, выплаченные в результате аудита. Таким образом,

$$T_1 = \sum_{l=m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6} k_l l h,$$

$$P + T_2 = \sum_{l=m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6} k_l \delta(l+1, l) P(A|r=l) ((l+1) - l) (1 + \pi) h,$$

$$C = n_a c,$$

здесь  $c > 0$  – стоимость одного аудита, а  $n_a$  – доля проведенных аудитов (полная вероятность проведения аудита) из общего числа налогоплательщиков:

$$n_a = \sum_{l=m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6} k_l P(A|r=l).$$

Рассмотрим ситуацию, когда все налогоплательщики уклоняются от честной уплаты налогов, декларируя свою налоговую ответственность на уровень ниже истинной (ей соответствует профиль А). Выход из данного профиля становится возможным, если выплаченные налогоплательщиком в результате аудита налоги и штрафы будут превышать его ожидаемый выигрыш, полученный в результате уклонения от выплаты налогов в соответствии с истинным уровнем налоговой ответственности ( $(i - r)h$ ):

$$\delta(m_1, m_0)P(A|r=m_0)(1 + \pi)(m_1 - m_0)h \geq (m_1 - m_0)h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A|r=m_0) \geq \frac{1}{1 + \pi} (\delta(m_1, m_0))^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A|r=m_0) \geq \frac{1}{1 + \pi}. \quad (4)$$

Математический смысл вероятности требует, чтобы величина, стоящая в правой части выражения (4), была меньше единицы, т. е.  $\frac{1}{1 + \pi} \leq 1$ . Данное условие выполняется при любых неотрицательных значениях устанавливаемой государственными органами штрафной ставки  $\pi$ . Это дает основания сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.** *Выход из профиля с наименьшей согласованностью возможен тогда и только тогда, когда выполняется условие  $P(A|r=m_0) \geq \frac{1}{1 + \pi}$ .*

Аналогично проводим рассуждения о других профилях, итог которых сформулирован в виде следующих двух теорем, первая из которых говорит о теоретической допустимости самого согласованного профиля в зависимости от значений штрафной ставки.

**Теорема 2.** *Для осуществления самого согласованного профиля G необходимо, чтобы значение штрафной ставки удовлетворяло следующему условию:*

$$\pi \geq \max \left\{ \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \frac{\gamma_2}{\gamma_3}, \frac{\gamma_3}{\gamma_4}, \frac{\gamma_4}{\gamma_5}, \frac{\gamma_5}{\gamma_6} \right\}. \quad (5)$$

**З а м е ч а н и е.** Если значение штрафной ставки  $\pi$  позволяет говорить о допустимости самого согласованного профиля  $G$ , то можно указать необходимое и достаточное условие его реализации при выполнении (5).

**Теорема 3.** Пусть выполнено условие (5), тогда для реализации самого согласованного профиля  $G$  необходимо и достаточно совместное выполнение условий

$$\begin{aligned} P(A|r = m_0) &\geq \frac{1}{1 + \pi}, \\ P(A|r = m_1) &\geq \frac{1}{1 + \pi} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_2}, \\ P(A|r = m_2) &\geq \frac{1}{1 + \pi} \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{\gamma_3}, \\ P(A|r = m_3) &\geq \frac{1}{1 + \pi} \frac{\gamma_3 + \gamma_4}{\gamma_4}, \\ P(A|r = m_4) &\geq \frac{1}{1 + \pi} \frac{\gamma_4 + \gamma_5}{\gamma_5}, \\ P(A|r = m_5) &\geq \frac{1}{1 + \pi} \frac{\gamma_5 + \gamma_6}{\gamma_6}. \end{aligned} \quad (6)$$

**З а м е ч а н и е.** В то время как штрафная ставка устанавливается государством, налоговые органы могут самостоятельно регулировать величины  $P(A|r = l, s = d)$  и  $P(A|r = l, s = u)$ , где  $l = \overline{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6}$ , стремясь достичь совместного выполнения условий (6).

Принимая во внимание особенности самого согласованного профиля, можно получить оценку общей стоимости аудита для данной ситуации и, следовательно, оценить соотношение между затратами и доходами налоговых органов.

Таким образом, однозначно говорить об оптимальности полностью согласованного профиля, с точки зрения величины дохода налоговых властей, возможно, владея точной статистической информацией о соотношении величин (1). Наряду с этим вопросом представляет интерес другой: какой профиль может считаться более подходящим, с точки зрения соотношения затрат и доходов налоговых органов? Чтобы ответить на эти вопросы, нужно изучить, как меняется доход налоговых органов с изменением значений экзогенных величин (1). С этой целью на языке Borland Delphi 5.0 была реализована программа, которая в форме диалога с пользователем отвечает на данные вопросы, позволяя пользователю самостоятельно вводить величины (1), а также регулировать штрафную ставку  $\pi$ .

В результате численного эксперимента было обнаружено пять вариантов, в каждом из которых максимальный доход налоговых органов  $R = T + P - C$  достигался не при самом согласованном профиле  $G$ , а при менее согласованном профиле  $F$ .

## Summary

*Boure V. M., Kumacheva S. Sh.* The model of auditing with the use of statistical information of taxpayer income.

The model of tax auditing in assumption of tax authorities having some statistical information,

well-correlated with true income, is investigated. The question of compliance of the tax policy with true taxpayers income and the problem of tax authorities expenses are considered.

### Литература

1. *Sakaguchi M.* A Non-Zero-Sum Repeated Game – Criminal vs. Police // *Math. Japonica*. 1998. Vol. 48. P. 427–436.
2. *Васин А. А., Васина П. А.* Оптимизация налоговой системы в условиях уклонения от налогов: роль ограничений на штраф // Консорциум экономических исследований и образования (ЕЕRC). Сер. Научные доклады. 2002. С. 1–48.
3. *Macho-Stadler I., Perez-Castrillo J. D.* Auditing with signals // *Economica*. 02. 2002. P. 1–20.
4. *Буре В. М., Кумачева С. Ш.* Модель аудита // Математические методы исследования экономики / Под ред. Н. А. Зенкевича. СПб., 2004. С. 148–160.
5. *Материалы* Интернет-сайта Министерства налогов и сборов РФ <http://www.nalog.ru>.
6. *Материалы* Интернет-сайта Института экономики переходного периода <http://www.iet.ru>.

Статья поступила в редакцию 21 апреля 2005 г.