САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Издается с 1977 г.

Выпуск 20

УПРАВЛЕНИЕ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Под редакцией проф. *В. В. Захарова*

Издательство С.-Петербургского университета
2002

СОДЕРЖАНИЕ

В. М. Буре

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ СТОХАСТИЧЕСКОГО СПРОСА

Анализ задач, связанных с принятием экономических решений, показывает, что игнорирование стохастической природы массовых явлений в социально-экономической сфере, с одной стороны, приводит к весьма идеализированным математическим моделям, неприменимым к реальным экономическим ситуациям, а с другой стороны, оставляет за пределами исследования широкий комплекс проблем, порождаемых наличием принципиально неустранимой неопределенности, характеризующей поведение отдельных людей и целых коллективов. В этой связи представляет интерес изучение задач принятия решений с учетом стохастической неопределенности поведения участников экономического процесса.

Формализации различных управленческих задач, учитывающих стохастический аспект функционирования экономических систем, содержатся в монографиях [1–3] и др.

В данной статье рассматривается модель рынка одного товара при наличии стохастического спроса. В первой части статьи исследуется игровая модель поведения двух продавцов однотипного товара, когда стратегией продавца является выбор величины запаса товара. Предполагается, что товар должен быть продан в течение определенного промежутка времени. Нереализованный товар приносит убыток, например, связанный с транспортными расходами. Подобная ситуация является типичной и часто встречается на практике. Постановка задачи и некоторые результаты были изложены в [4, 5]. Во второй части рассматривается аналогичная постановка в неигровом варианте для одного продавца.

1. Предположим, что имеется рынок одного товара и два продавца. Весь запас товара должен быть продан за время τ.

Пусть m_i — доход продавца i от реализации одной единицы товара, c_i — убыток (расход) продавца i от нереализованной единицы товара. Пусть ξ — случайный спрос на товар в течение времени τ, $F_\xi(x)$ — функция распределения случайной величины ξ.

Предположим, что каждый покупатель выбирает продавца случайным образом и, если у продавца нет товара, то покупатель переходит к другому продавцу. Пусть ξ_i — первичный спрос у продавца i, очевидно, что $\xi = \xi_1 + \xi_2$. Полный спрос на товар у продавца i может оказаться выше, чем ξ_i.

Предположим, что $\xi_i = \nu_i \xi$, где ν_i и ξ — независимые случайные величины и ν_i имеет равномерное распределение на отрезке [0,1], $i = 1, 2$. Очевидно, что $\nu_1 + \nu_2 = 1$. Равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины ν_i, $i = 1, 2$, моделируют случайный выбор продавца покупателем.

Пусть x_i — запас товара у продавца i, $i = 1, 2$, и продавец i выбирает x_i произвольно. Таким образом, $X_i = \{x_i : x_i \geq 0\}$ — множество стратегий продавца i.

Полный спрос на товар η_i у продавца i определяется выражением

$$\eta_i = \xi_i + \max\{0, \xi_{3-i} - x_{3-i}\}, \quad i = 1, 2.$$

Функция распределения $F_{\eta_i}(z/x_{3-i})$ случайной величины η_i зависит от запаса x_{3-i}. Функция распределения имеет вид ($i = 1, 2$):

$$F_{\eta_i}(z/x_{3-i}) = P\{\eta_i \leq z\} =$$

$$= P\{\nu_i \xi \leq z, \xi - x_{3-i} \leq z\} = \int\limits_{D_i} f_{\nu_i}(t_1) f_\xi(t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \int\limits_{a_i}^{1} F_\xi\left(\frac{z}{t_1}\right) dt_1 + \frac{z}{z + x_{3-i}} F_\xi(z + x_{3-i}),$$

где $f_{\nu_i}(t_1)$, $f_\xi(t_2)$ — функции плотности распределений соответствующих случайных величин, $a_1 = \frac{z}{z+x_2}$, $a_2 = \frac{z}{z+x_1}$, $D_i = \{t_1 t_2 \leq z, 0 \leq t_2 \leq z + x_{3-i}, 0 \leq t_1 \leq 1\}$.

Очевидно, что случайный доход Q_i продавца i определяется выражением $Q_i = m_i \min\{\eta_i, x_i\} - c_i \max\{0, x_i - \eta_i\}$.

Пусть $H_i(x_1, x_2) = MQ_i$ — ожидаемый доход продавца i.

Таким образом, мы получили игру $\Gamma = (I; X_1, X_2; H_1, H_2)$, где $I = 1, 2$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия: $F_\xi(0) = 0$, функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна и строго возрастает при $x \geq 0$, тогда равновесие по Нэшу в игре Γ существует в чистых стратегиях и единственно, точка равновесия является решением системы уравнений*

$$F_{\eta_1}(x_1/x_2) = \frac{m_1}{m_1 + c_1}, F_{\eta_2}(x_2/x_1) = \frac{m_2}{m_2 + c_2}.$$

Доказательство. Ожидаемый доход продавца i определяется формулой

$$H_i(x_1, x_2) = m_i \int_0^\infty \min(y, x_i) f_{\eta_i}(y) dy -$$

$$-c_i \int_0^\infty \max(0, x_i - y) f_{\eta_i}(y) dy =$$

$$= m_i x_i - (m_i + c_i) \int_0^{x_i} F_{\eta_i}(y) dy.$$

Условие максимума функции H_i имеет вид $(i = 1, 2)$

$$F_{\eta_i}(x_i/x_{3-i}) = \frac{m_i}{m_i + c_i}.$$

Игрок i выбирает x_i так, чтобы было выполнено равенство. Очевидно, что при любом значении параметра $x_{3-i} \geq 0$ существует единственное $x_i = \xi_i(x_{3-i})$, при котором

$$F_{\eta_i}(\xi_i(x_{3-i})/x_{3-i}) = \frac{m_i}{m_i + c_i},$$

а так как по условию теоремы функция распределения $F_\xi(x)$ строго монотонна, то и функции распределения $F_{\eta_i}(x_i/x_{3-i})$, $i = 1, 2$, строго монотонны. Последнее утверждение следует из того, что при возрастании аргументов множество D_i увеличивается, а интеграл возрастает. Функции $\xi_i(x_{3-i})$ непрерывны и монотонно убывают с возрастанием аргумента. Рассмотрим функцию $F_{\eta_2}(x_2/\xi_1(x_2))$. Она непрерывна, и справедливы следующие свойства: $F_{\eta_2}(0/\xi_1(0)) = 0$, $\lim\limits_{x_2\to\infty} F_{\eta_2}(x_2/\xi_1(x_2)) = 1$. Следовательно, существует $x_2^{(0)}$, при котором необходимое и достаточное условие максимума функции дохода второго игрока выполнено, но это означает, что точка $\left(\xi_1\left(x_2^{(0)}\right), x_2^{(0)}\right)$ является точкой равновесия по Нэшу. Теорема доказана.

Утверждение теоремы сохранится, если предположить, что существует константа $k > 0$, такая, что $F_\xi(k) = 1$ и функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна и строго возрастает при $0 \le x \le k$, $F_\xi(0) = 0$.

2. Предположим, что имеется один продавец и m — доход продавца от реализации одной единицы товара, а c — убыток (расход) продавца от нереализованной единицы товара. Пусть ξ — случайный спрос на товар. Другими словами, сохраняется рассмотренная выше постановка за исключением того, что вместо двух продавцов теперь на рынке имеется только один и ставится задача оптимального поведения продавца в условиях стохастического спроса при сделанных выше предположениях о доходах и возможных потерях.

Пусть x — запас товара у продавца, $X = \{x : x \ge 0\}$ — как и прежде, множество стратегий продавца.

Очевидно, что случайный доход продавца определяется выражением

$$Q(\xi, x) = m\min\{\xi, x\} - c\max\{0, x - \xi\}.$$

В качестве критерия оптимальности выберем, как и раньше, функцию $H(x)$ вида $H(x) = MQ(\xi, x)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия: $F_\xi(0) = 0$, функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна и строго возрастает при $x \ge 0$, тогда решение уравнения $F_\xi(x) = \frac{m}{m+c}$ является оптимальной стратегией продавца по критерию $H(x)$.*

Доказательство теоремы следует из теоремы 1.

Очевидно, что доход продавца может принимать отрицательные значения. Подобная ситуация, вообще говоря, вполне возможна и при оптимальном выборе величины запаса x по критерию $H(x)$. По этой причине возможен альтернативный подход к выбору величины запаса товара. В качестве x можно выбирать такую величину запаса товара, при которой вероятность того, что доход $Q(\xi, x)$ окажется отрицательным, не превосходит заданного уровня p. Тем самым уровень риска не превосходит заранее выбранного значения. Под уровнем риска здесь естественно понимать вероятность события, когда расходы превосходят доходы, т. е. когда $Q(\xi, x) < 0$.

Теорема 3. *Пусть y_p — p-квантиль функции распределения F_ξ, т. е. $F_\xi(y_p) = p$, тогда для $x_p = \frac{c+m}{c} y_p$ выполняется $P\{Q(\xi, x_p) > 0\} = 1 - p$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $P\{Q(\xi, x) \leq z\} = F_\xi\left(\frac{c}{m+c}x + \frac{1}{m+c}z\right)$, если $z < mx$, и $P\{Q(\xi, x) \leq z\} = 1$, если $z \geq mx$.

Следовательно, $P\{Q(\xi, x) > 0\} = 1 - F_\xi\left(\frac{c}{m+c}x\right)$. Теорема доказана.

В теореме 2 доказано, что $\frac{m}{m+c}$-квантиль функции распределения $F_\xi(x)$ является оптимальной стратегией по критерию $H(x)$. С помощью выражений из теоремы 3 можно определить уровень риска при использовании соответствующего решения.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ross S.M.* Introduction to stochastic dynamic programming. N. Y.: Acad. Press, 1984. 161 p.

2. *Уолрэнд Дж.* Введение в теорию сетей массового обслуживания. М.: Мир, 1993. 331 с.

3. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 491 с.

4. *Boure V.M.* Game-theoretical model of a market for random demand // Game Theory and Economics N. N. Vorob'ev Memorial Conference: Abstracts. 1996. P. 39.

5. *Буре В.М.* Стохастический спрос и равновесие по Нэшу // Третья Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам: Тез. докл. М., 1996. С. 40.