УДК 681.324

Буре В.М., Кирпичников Б.К. Об одной модификации процесса восстановления при воздействии "катастрофических" отказов // Управление динамическими системами / Под ред.

В.М.Буре, Б.К.Кирпичников

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ "КАТАСТРОФИЧЕСКИХ" ОТКАЗОВ

Пусть $\{S_n\}$ - процесс восстановления и F - распределение составляющих его независимых случайных величин T_i, $i=1,2,\ldots$. Согласно основному результату теории восстановления статистические характеристики процесса восстановления стабилизируются с течением времени, что в целом согласуется с наблюдениями за реальными процессами.

Однако в ряде случаев мы вынуждены констатировать, что характеристики реального процесса теряют устойчивость и процесс начинает деградировать. Этот феномен можно объяснить тем, что на функционирование процесса оказывают влияние внешние случайные факторы, такие, как изменение параметров окружающей среды или целенаправленное воздействие, не воспроизводимые в условиях стендовых испытаний.

Предположим, что в результате внешнего воздействия процесс может оборваться в любые равные достаточно малые промежутки времени с равными вероятностями. Иными словами, пусть время ожида-

Пусть L_0 – вырожденное в нуле распределение, соответствующее восстановлению в точке $t=0$ временной оси, и L_n – n-кратная свертка распределения L. Положим

$$U(t)=\sum_{n=0}^{\infty} L_n(t).$$

Функция $U(t)$, называемая функцией восстановления деградирующего процесса, является основной его характеристикой. Нетрудно видеть, что она удовлетворяет интегральному уравнению

$$U(t)=1+\int_0^t U(t-\tau)\,dL(\tau).$$

В приложениях удобной характеристикой является плотность восстановления $u(t)=U'(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$u(t)=e^{-\alpha t}f(t)+\int_0^t u(t-\tau)e^{-\alpha\tau}f(\tau)\,d\tau,$$

что соответствует следующему уравнению в преобразованиях Лап-ласа:

$$u^*(s)=f^*(s+\alpha)/[1-f^*(s+\alpha)]. \qquad (3$$

Проявление внешнего воздействия на процесс восстановлен может не совпадать с началом функционирования последнего, и приходим к модели деградирующего процесса восстановления с з паздыванием. А именно, в дополнение к случайным величинам T_i определим новую случайную величину T_0 с распределением F_0, так что деградирующий процесс восстановления с запаздыванием определяется несобственным распределением

$$G(t)=\int_0^t e^{-\alpha\tau}dF_0(\tau)$$

и ранее введенным распределением L.

В отличие от обычного деградирующего процесса точка $t=0$ не является моментом восстановления, и потому функция восстановления $V(t)$ деградирующего процесса с запаздыванием определяется соотношением

$$V(t)=\sum_{n=0}^{\infty} G*L_n(t).$$

Отсюда следует, что функция $V(t)$ удовлетворяет уравнению

$$V(t)=G(t)+\int_0^t V(t-\tau)dL(\tau),$$

а соответствующая плотность восстановления $v(t)$ является решением уравнения

$$v(t)=e^{-\alpha t}f_0(t)+\int_0^t v(t-\tau)e^{-\alpha t}f(\tau)d\tau,$$

или в преобразованиях Лапласа

$$v^*(s)=f_0^*(s+\alpha)/[1-f^*(s+\alpha)]. \qquad (2)$$

Предположим теперь, что случайные величины T_i' имеют общее несобственное распределение L, а случайные величины T_i'' – общее собственное распределение R. Положим $T_k=T_k'+T_k''$. Тогда последовательность случайных величин $S_n=T_1+...+T_n$ образует альтернирующий деградирующий процесс восстановления, в котором случайные величины T_k имеют общее несобственное распределение Φ, являющееся сверткой распределений L и R.

Обозначим через $u_2(t)$ плотность восстановления введенного процесса $\{S_n\}$. Тогда согласно формуле (1) имеем

$$u_2^*(s)=f^*(s+\alpha)r^*(s)/[1-f^*(s+\alpha)r^*(s)]. \qquad (3)$$

Покажем применение изложенной математической модели к расчету основной характеристики надежности восстанавливаемого прибора – коэффициента готовности. Пусть восстанавливаемый прибор функционирует согласно модели альтернирующего процесса восстановления, где под случайными величинами T_i' понимается время исправной работы прибора, а под T_i'' – время ремонта или восстановления прибора после отказа.

Будем считать, что внешнее воздействие на прибор проявляется в виде "катастрофических" отказов, которые происходят в соответствии с пуассоновским процессом с параметром α. Тогда функционирование прибора полностью описывается моделью альтернирующего деградирующего процесса восстановления.

Обозначим через $\pi(t)$ вероятность того, что в момент времени t прибор находится в исправном состоянии. Иными словами, $\pi(t)$ – это коэффициент готовности, удовлетворяющий уравнению

$$\pi(t)=\bar{L}(t)+\int_0^t \bar{L}(t-\tau)u_2(\tau)d\tau,$$

где $\bar{L}(t)=L(\infty)-L(t)$.

В преобразованиях Лапласа это уравнение с учетом формулы (3) принимает вид

$$\pi^*(s)=\frac{f^*(\alpha)-f^*(s+\alpha)}{s[1-f^*(s+\alpha)r^*(s)]}.$$

Если здесь положить $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ и $r(t)=\mu e^{-\mu t}$, то получаем

$$\pi^*(s)=\frac{\lambda}{(\lambda+\alpha)}\frac{\mu+s}{s^2+(\lambda+\alpha+\mu)s+\alpha\mu}.$$

Разложение на простейшие дроби дает

$$\pi^*(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{\mu+s_1}{s-s_1}-\frac{\mu+s_2}{s-s_2}\right),$$

где s_1 и s_2 – корни знаменателя

$$s_{1,2}=-(\alpha+\lambda+\mu)\pm\sqrt{(\alpha+\lambda+\mu)^2-4\alpha\mu}/2.$$

Следовательно,

$$\pi(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\frac{1}{s_1-s_2}\left[(\mu+s_1)e^{s_1t}-(\mu+s_2)e^{s_2t}\right]. \qquad (4)$$

Отсюда видно, что $\lim_{t\to\infty}\pi(t)=0$. Если $t=0$, то $\pi(0)=L(\infty)$. Такое значение коэффициента готовности в нуле легко объясняется вероятностными соображениями: если процесс начинается на отрицательной полуоси, то начало наблюдения за процессом совмещается с каким-либо моментом восстановления, которое осуществляется с вероятностью $L(\infty)$ согласно вышеизложенному.

Если $\alpha=0$, т.е. внешнее воздействие отсутствует, то мы получаем хорошо известное выражение коэффицинета готовности

$$\pi(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Пусть теперь восстанавливаемый прибор функционирует согласно модели альтернирующего процесса восстановления, а начиная с некоторого момента времени T на процесс оказывает влияние внешнее воздействие согласно предложенной ранее схеме.

Совместим начало отсчета с моментом времени T. Тогда если в момент T прибор исправен, то коэффициент готовности определяется формулой

$$\pi_{11}(t)=\bar{G}_0(t)+\int_0^t \bar{L}(t-\tau)v_1(\tau)d\tau,$$

где $G_0(t)=\int_0^t e^{-\alpha\tau}dF_0(\tau)$, а F_0 - распределение "хвоста" времени исправной работы прибора. Плотность восстановления $v_1(t)$ в соответствии с (2) удовлетворяет уравнению

$$v_1^*(s)=f_0^*(s+\alpha)r^*(s)/[1-f^*(s+\alpha)r^*(s)].$$

Если же в момент T происходит восстановление, то коэффициент готовности находится по формуле

$$\pi_{21}(t)=\int_0^t \bar{L}(t-\tau)v_2(\tau)d\tau,$$

где плотность восстановления $v_2(t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_2^*(s)=r_0^*(s)/[1-f^*(s+\alpha)r^*(s)].$$

Здесь $r_0(t)$ есть плотность распределения "хвоста" времени восстановления.

Будем считать, что точка T, выбранная за начало отсчета, достаточно удалена от начала координат, так что процесс восстановления можно рассматривать как стабилизированный. Это соответствует тому, что

$$F_0(t)=(1/m_1)\int_0^t[1-F(\tau)]\,d\tau,$$

$$R_0(t)=(1/m_2)\int_0^t[1-R(\tau)]\,d\tau,$$

где $m_1=E(T_k^{\prime})$, $m_2=E(T_k^{\prime\prime})$. Тогда получаем следующие выражения для коэффициентов готовности:

$$\pi_{11}^*(s)=\frac{1}{m_1 s}\left[\frac{1-f^*(\alpha)}{\alpha}-\frac{1-f^*(s+\alpha)}{s+\alpha}\,\frac{1-f^*(\alpha)r^*(s)}{1-f^*(s+\alpha)r^*(s)}\right], \qquad (5)$$

$$\pi_{21}^*(s)=\frac{f^*(\alpha)-f^*(s+\alpha)}{m_2 s^2}\,\frac{1-r^*(s)}{1-f^*(s+\alpha)r^*(s)}. \qquad (6)$$

Возвращаясь к экспериментальным распределениям для времени исправной работы и времени восстановления, получаем для (5)

$$\pi_{11}^*(s)=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\,\frac{\mu+s}{s^2+(\alpha+\lambda+\mu)s+\alpha\mu},$$

т.е. уже полученную ранее формулу для $\pi^*(s)$, и, следовательно,

$$\pi_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\,\frac{1}{s_1-s_2}\left[(\mu+s_1)e^{s_1 t}-(\mu+s_2)e^{s_2 t}\right].$$

Для выражения (6) получаем

$$\pi_{21}^*(s)=\frac{\lambda_m}{\lambda+\alpha}\,\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{1}{s_1-s_1}-\frac{1}{s-s_2}\right),$$

где сохранены прежние обозначения. Это приводит к формуле

$$\pi_{21}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}\,\frac{\mu}{s_1-s_2}\,(e^{s_1 t}-e^{s_2 t}).$$

Комбинация полученных коэффициентов готовности по формуле полной вероятности позволяет получить окончательный результат для безусловной вероятности:

$$\pi_1(t)=\pi(\infty)\pi_{11}(t)+[1-\pi(\infty)]\pi_{21}(t)=$$

$$=\frac{\lambda\mu}{(\lambda+\alpha)(s_1-s_2)}\left[\left(1+\frac{s_1}{\lambda+\mu}\right)e^{s_1 t}-\left(1+\frac{s_2}{\lambda+\mu}\right)e^{s_2 t}\right].$$