АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ЭКОЛОГИИ И ЭКОТОКСИКОЛОГИИ

Санкт – Петербург
1998

Содержание

Буре В.М., Кирпичников Б.К.
Санкт-Петербургский государственный университет

Динамика изменения численности самовосстанавливающейся популяции при нарушении экологического равновесия

У ряда объектов живой природы имеется общее свойство: способность восстановления отказавших элементов. Это приводит к тому, что численность тех или иных популяций остается постоянной в течении некоторого временного промежутка [4], [5].

Динамические изменения в пределах отдельной популяции особей во многом совпадают с процессами, протекающими в клеточных популяциях самих особей.

Так, некоторые элементы крови, например, эритроциты, представляют собой самовосстанавливающуюся клеточную популяцию, сохраняющую среднюю численность в периоды устойчивого состояния отдельной особи.

Продолжительность жизни отдельного элемента популяции может рассматриваться как случайная величина с распределением, характеризующим данную популяцию. Таким образом, динамика изменения численности популяции поддается описанию при помощи математической модели, в основе которой лежит теория восстановления [3]. Согласно основному результату теории восстановления статистические характеристики процесса восстановления стабилизируются с течением времени, что соответствует количественному постоянству элементов в рассматриваемой популяции.

Это равновесие начинает нарушаться, если изменяются параметры окружающей среды. В частности, радиационное облучение, сбросы токсичных веществ, эпидемии и т.п. приводят к постепенному или резкому уменьшению количества элементов в популяции.

Ранее предлагались различные математические модели для описания изменения численности популяции в результате нарушения экологического равновесия. Не ссылаясь на многочисленные статьи, посвященные этому вопросу, упомянем работу Хуга О. и Келлерера А. [7], в которой изложены результаты, полученные в этом направлении, и приведена обширная библиография.

Математические модели, предложенные в работе [7], как и в другой широко известной статье П. Лесли [8], описывают экспоненциальное убывание численности популяции либо убывание, соответствующие хвосту распределения Эрланга, которое является обобщением экспоненциального распределения.

В настоящей статье предлагается новый подход к описанию динамики изменения численности популяции при изменении параметров окружающей среды, базирующийся на теории деградирующих процессов восстановления [2].

Основной характеристикой процесса восстановления является функция восстановления $H(t)$, равная числу восстановлений на промежутке времени $(0, t]$. Ее производная $h(t)$, называемая плотностью восстановления, может быть интерпретирована как скорость восстановления, так что величина $h(t)\delta t$ означает число восстановлений на промежутке времени длиной δt.

Если же процесс подвергается разрушительным внешним воздействиям, то это означает, что он функционирует на случайном промежутке времени $(0, \xi]$, а дальше происходит обрыв процесса. При этом, если ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром α, то плотность восстановления $h_0(t)$ такого процесса связана с плотностью восстановления $h(t)$ стандартного процесса формулой

$$h_0(t) = h(t)e^{-\alpha t}. \tag{1}$$

Пусть в описанной ситуации N означает число процессов восстановления, функционирующих в период стабильной устойчивой популяции. Тогда с началом изменения параметров окружающей среды число их $N(t)$ дается формулой

$$N(t) = N e^{-\alpha t}, \tag{2}$$

то есть убывание численности описывается экспоненциальной кривой, что совпадает с результатами, цитированными выше.

В общем случае, когда случайная величина ξ имеет произвольное распределение $G(t)$, формула (1) принимает вид

$$h_0(t) = h(t)[1 - G(t)],$$

откуда следует, что число выживших элементов $N(t)$ к моменту времени t дается формулой

$$N(t) = N[1 - G(t)].$$

Можно получить обобщение этих результатов, рассматривая чередование периодов убывания численности популяции с периодом регенерации, когда воздействие разрушающих воздействий внешней среды прекращается, и популяция вновь приводится к первоначальному состоянию.

Математическая модель этой ситуации может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $\{S_n\}$ — стандартный процесс восстановления, образованный последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин $T_i, i = 1, 2, K$, и $H(t)$ — функция восстановления этого процесса. Предположим, что процесс функционирует на случайном промежутке времени $(0, \xi]$, так что в момент времени ξ происходит обрыв процесса, и далее через случайный промежуток времени η процесс возобновляет функционирование, причем с момента регенерации функционирование процесса совпадает с начальным. Иными словами, периоды активности процесса чередуются с периодами регенерации, образуя альтернирующий процесс [3]. При этом все случайные величины, определяющие введенный процесс, предполагаются взаимно независимыми.

Введем функцию восстановления $H_r(t)$ описанного процесса как математическое ожидание числа восстановлений на промежутке $(0, t]$. Пусть G и K — функции распределения случайных величин ξ и η соответственно, а $\Phi = G * K$ — свертка этих функций. Тогда, используя формулу полного математического ожидания, можно получить интегральное уравнение восстановления

$$H_r(t) = H(t)\overline{G(t)} + \int_0^t H(x)dG(x) + \int_0^t H_r(t-\tau)d\Phi(\tau), \tag{3}$$

где $\overline{G(t)} = 1 - G(t)$.

Решение уравнения (3) нетрудно получить методом преобразования Лапласа-Стилтьеса. С этой целью положим

$$u_1(t) = H(t)\overline{G(t)}, \quad u_2(t) = \int_0^t H(x)dG(x), \quad u_i^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}du_i(t), i = 1, 2,$$

$$\phi^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}d\Phi(t), \quad h^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}dH(t).$$

Тогда

$$h_r^* = \frac{u_1^*(s) + u_2^*(s)}{1 - \phi^*(s)}. \qquad (4)$$

Основные результаты теории восстановления содержатся в предельных теоремах, описывающих поведение функции восстановления при $t \to \infty$. Использование тауберовой теоремы Караматы [6] для преобразования Лапласа–Стилтьеса позволяет сформулировать следующее утверждение [1].

Теорема. Если вторые моменты случайных величин ξ и η конечны, то справедливо соотношение

$$H_r(t) \sim \frac{EH(\xi)}{\mu_1 + \mu_2} t \quad (t \to \infty),$$

где $\mu_1 = E\xi, \mu_2 = E\eta$.

Следствие 1. Если стандартный процесс восстановления является пуассоновским, то

$$H_r(t) \sim \frac{1}{\mu} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} t,$$

где $\mu = ET_i$. Коэффициент в правой части есть произведение плотности пуассоновского процесса восстановления и предельного значения так называемого коэффициента готовности альтернирующего процесса.

Следствие 2. Если случайная величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром α, то

$$H_r(t) \sim \frac{h^*(\alpha)}{\mu_1 + \mu_2} t,$$

где $h^*(\alpha)$ есть преобразование Лапласа–Стилтьеса функции восстановления стандартного процесса. Утверждение следует из формулы $EH(\xi) = h^*(\alpha)$.

Рассмотренная модификация процесса восстановления может быть использована в качестве математической модели функционирования некоторой самовосстанавливающейся популяции в условиях нарушения экологического равновесия [2].

Литература

1. Буре В.М., Кирпичников Б.К. Интегральное уравнение и предельная теорема в модифицированной модели процесса восстановления //Вестник СПбГУ, 1979, сер. 1, вып.4: 3–5.
2. Буре В.М., Кирпичников Б.К. Деградирующий процесс восстановления как модель нарушения экологического равновесия. //Обозрение прикладной и промышленной математики, 1994, т. 1: 850–859.
3. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М., 1967.
4. Кофман Г.Б., Кравцов Б.А., Хлебопрос Р.Г. Анализ динамики численности популяций с неперекрывающимися поколениями на фазовой плоскости.//Проблемы экологического мониторинга и моделирование экосистем, 1978, т. 1, 128–136.
5. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М., 1978.
6. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М., 1985.
7. Хуг О., Келлерер А. Стохастическая радиобиология. М., 1969.
8. Leslie P. On the use of matrices in certain population mathematics. Biometrika, 1945, vol. 33: 183–212.

V.M. Boure, B.K. Kirpichnikov

Dynamics of the quantity variation of self-renewing population under upset of ecological balance

Summary

A model of dynamics of the quantity variation of self-renewing population is suggested. The reason of the quantity variation is an upset of ecological balance. The model uses a modification of a renewal process. Integral equation for a modification renewal process is derived and a limit theorem is given.