Алгебра и логика, 61, № 1 (2022), 93—97

СООБЩЕНИЯ

DOI: 10.33048/alglog.2022.61.105 УДК 512.554

ОПЕРАТОРЫ РОТЫ–БАКСТЕРА НЕНУЛЕВОГО ВЕСА НА ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ ЛИ ПОРЯДКА 2*)

М. Е. ГОНЧАРОВ, Д. Е. КОЖУХАРЬ

Представлено Программным комитетом конференции „Мальцевские чтения“

§ 1. Предварительные сведения

Операторы Роты–Бакстера для ассоциативных алгебр возникли в работе Г. Бакстера [1] в связи с изучением интегральных операторов, возникающих в теории вероятностей и математической статистике. Независимо от этого, в начале 80-х гг. операторы Роты–Бакстера на алгебрах Ли естественно возникли в работах А. А. Белавина и В. Г. Дринфельда [2] с одной стороны и М. А. Семенова-Тян-Шанского [3] с другой при изучении решений классического уравнения Янга–Бакстера — одного из важнейших на данный момент уравнения математической физики. В [4] была установлена связь между операторами Роты–Бакстера ненулевого веса на алгебрах Ли и некососимметрическими решениями классического уравнения Янга–Бакстера, у которых симметрическая часть ad-инвариантна. Кроме того, к данному моменту обнаружены глубокие связи операторов Роты–Бакстера с теорией чисел, теорией операд, в частности пре- и посталгебрами.

*)Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № 0314-2019-0001.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A — произвольная алгебра над полем F, $R : A \to A$ — линейное отображение, $\lambda \in F$ — скаляр. Отображение R называется *оператором Роты–Бакстера веса* λ, если для любых $x, y \in A$ выполнено:

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy).$$

Заметим, что в случае $\lambda \neq 0$ можно рассматривать операторы веса 1, т. к. для любого $\alpha \neq 0$ оператор αR является оператором Роты–Бакстера веса $\alpha\lambda$. Таким образом, домножая на скаляр, можем получать любой ненулевой вес. Данное замечание сводит изучение операторов Роты–Бакстера к двум различным случаям, а именно нулевого и ненулевого весов.

Следующее хорошо известное утверждение даёт важные примеры операторов Роты–Бакстера ненулевого веса на произвольной алгебре A.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Пусть A_1, A_2 — подалгебры в A, $A_1 \bigcap A_2 = 0$ и $A = A_1 \bigoplus A_2$. Предположим также, что R — оператор проецирования на A_1 параллельно A_2, т. е. $R(a_1 + a_2) = a_1$ для любых $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$. Тогда R — оператор Роты–Бакстера веса -1 на алгебре A.*

Операторы Роты–Бакстера из утверждения 1 называются *расщепляемыми.*

Одной из важнейших задач в данной области является задача описания операторов Роты–Бакстера на различных алгебрах. В частности, операторы Роты–Бакстера на алгебре $sl_2(\mathbb{C})$ изучались в [5–7], на алгебре матриц $M_2(\mathbb{C})$ — в [8, 9]. Классификацию операторов Роты–Бакстера ненулевого веса на алгебре $sl_3(\mathbb{C})$ привёл В. В. Соколов [10]. В [11] классифицированы нерасщепляемые операторы Роты–Бакстера ненулевого веса на алгебре матриц $M_3(F)$, где F — алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

Пусть A — произвольная алгебра, и $R : A \mapsto A$ — оператор Роты–Бакстера произвольного веса λ, φ — автоморфизм или антиавтоморфизм алгебры A. Тогда оператор $\varphi \circ R \circ \varphi^{-1}$ — снова оператор Роты–Бакстера того же самого веса λ на A. Это означает, что можно проводить описание операторов Роты–Бакстера на алгебре A с точностью до действия группы, порождённой автоморфизмами и антиавтоморфизмами алгебры A.

§ 2. Основной результат

В данной работе в качестве алгебры Ли L мы берём полную линейную алгебру Ли $gl_2(F) = (M_2(F), [\cdot,\cdot])$ над алгебраически замкнутым полем F с лиевым умножением

$$[x, y] = xy - yx.$$

Цель состоит в описании операторов Роты–Бакстера веса 1 на $gl_2(F)$. Заметим, что если отображение φ является антиавтоморфизмом алгебры Ли, то и отображение $-\varphi$ будет автоморфизмом той же алгебры. Таким образом, классификацию мы будем проводить с точностью до действия группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,(gl_2(\mathbb{C}))$.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathrm{E} \in gl_2(\mathbb{C})$ — единичная матрица, e_{ij} — обычные матричные единички, $h = e_{11} - e_{22}$. В качестве базиса алгебры $gl_2(\mathbb{C})$ выберем множество $\mathrm{E}, h, e_{12}, e_{21}$.

Заметим, что если $R(\mathrm{E})_J$ — жорданова форма матрицы $R(\mathrm{E})$, а T — матрица перехода, то отображение $\varphi_T : gl_2(\mathbb{C}) \mapsto gl_2(\mathbb{C})$, действующее как

$$\varphi_T(A) = T^{-1}AT,$$

является автоморфизмом алгебры матриц $gl_2(\mathbb{C})$. При этом,

$$\varphi_T \circ R \circ \varphi_{T^{-1}}(\mathrm{E}) = T^{-1}R(T\mathrm{E}T^{-1})T = T^{-1}R(\mathrm{E})T = R(\mathrm{E})_J.$$

Следовательно, с точностью до действия группы, порождённой автоморфизмами, можно считать, что $R(\mathrm{E})$ находится в своей жордановой форме. Для $R(\mathrm{E})_J$ возможны следующие варианты:

$R(\mathrm{E}) = \lambda E + e_{12}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ — жорданова клетка размера 2;

$R(\mathrm{E}) = \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{22}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ — две клетки, отвечающие различным собственным значениям;

$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E}$, $\lambda \in E$ — две клетки, отвечающие одному собственному значению.

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть R — оператор Роты–Бакстера веса* 1 *на полной линейной алгебре Ли* $gl_2(\mathbb{C})$*. Тогда, с точностью до действия группы автоморфизмов,* R *равен одному из следующих операторов*:

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E} + e_{12},\ R(h) = R(e_{12}) = R(e_{21}) = 0; \tag{1}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E} + e_{12},\ R(e_{12}) = -e_{12},\ R(e_{21}) = -e_{21}, R(h) = -h; \tag{2}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E} + h,\ R(h) = 0,\ R(e_{12}) = R(e_{21}) = 0; \tag{3}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E} + h,\ R(h) = -h,\ R(e_{12}) = -e_{12},\ R(e_{21}) = -e_{21}; \tag{4}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E} + h,\ R(h) = \alpha_1 E + \alpha_2 h,\ R(e_{12}) = -e_{12},\ R(e_{21}) = 0; \tag{5}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E},\ R(h) = R(e_{21}) = 0,\ R(e_{12}) = -e_{12} + th,\ t \in \{0, 1\}; \tag{6}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E},\ R(h) = R(e_{21}) = 0,\ R(e_{12}) = -e_{12} + th + \mathrm{E},\ t \in \{0, 1\}; \tag{7}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E},\ R(h) = \mathrm{E},\ R(e_{12}) = -e_{12} + h + \alpha\mathrm{E};\ R(e_{21}) = 0; \tag{8}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E},\ R(h) = \mathrm{E},\ R(e_{12}) = -e_{12} + \mathrm{E},\ R(e_{21}) = 0; \tag{9}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E},\ R(h) = th,\ R(e_{21}) = 0,\ R(e_{12}) = -e_{12},\ t \in \mathbb{C}^*; \tag{10}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E},\ R(h) = th + \mathrm{E},\ R(e_{21}) = 0,\ R(e_{12}) = -e_{12},\ t \in \mathbb{C}^*; \tag{11}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E},\ R(h) = -h + \alpha\mathrm{E},\ R(e_{21}) = \mathrm{E},\ R(e_{12}) = -e_{12}; \tag{12}$$

$$R(\mathrm{E}) = \lambda\mathrm{E}, R(h) = th,\ R(e_{12}) = te_{12},\ R(e_{21}) = te_{21},\ t \in \{0, -1\}. \tag{13}$$

Здесь $\lambda, \alpha, \alpha_i \in \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 2. *Операторы* (1) – (13) *лежат в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов алгебры* $gl_2(\mathbb{C})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Baxter*, An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity, Pac. J. Math., **10** (1960), 731—742.
2. *А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд*, О решениях классического уравнения Янга–Бакстера для простых алгебр Ли, Функц. анализ и его прил., **16**, № 3 (1982), 1—29.

3. *М. А. Семенов-Тян-Шанский*, Что такое классическая r-матрица, Функц. анализ и его прил., **17**, № 4 (1983), 17—33.
4. *M. E. Goncharov*, On Rota-Baxter operators of non-zero weight arisen from the solutions of the classical Yang-Baxter equation, Сиб. электрон. матем. изв., **14** (2017) 1533—1544;

   `http://semr.math.nsc.ru/v14/p1533-1544.pdf`
5. *Е. И. Коновалова*, Двойные алгебры Ли, дисс. канд. физ.-мат. наук, Ульяновск, 2009.
6. *Yu Pan, Q. Liu, C. Bai, L. Guo*, PostLie algebra structures on the Lie algebra sl$(2,\mathbb{C})$, Electron. J. Linear Algebra, **23** (2012), 180—197.
7. *J. Pei, C. Bai, L. Guo*, Rota-Baxter operators on sl$(2,\mathbb{C})$ and solutions of the classical Yang-Baxter equation, J. Math. Phys., **55**, No. 2 (2014), 021701, 17 p.
8. *P. Benito, V. Gubarev, A. Pozhidaev*, Rota-Baxter operators on quadratic algebras, Mediterr. J. Math., **15**, No. 5 (2018), Paper No. 189, 23 p.
9. *X. Tang, Y. Zhang, Q. Sun*, Rota-Baxter operators on 4-dimensional complex simple associative algebras, Appl. Math. Comput., **229** (2014), 173—186.
10. *V. V. Sokolov*, Classification of constant solutions of the associative Yang-Baxter equation on Mat_3, Theor. Math. Phys., **176**, No. 3 (2013), 1156—1162.
11. *M. Goncharov, V. Gubarev*, Rota-Baxter operators of nonzero weight on the matrix algebra of order three, Linear Multilinear Algebra, **70**, No. 6 (2022), 1055—1080.

Поступило 22 ноября 2021 г.

Окончательный вариант 7 июня 2022 г.

Адреса авторов:

ГОНЧАРОВ Максим Евгеньевич,

Ин-т матем. им. С.Л.Соболева СО РАН,

Новосибирский гос. ун-т,

г. Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: gme@math.nsc.ru

КОЖУХАРЬ Дарья Евгеньевна, Новосибирский гос. ун-т, г. Новосибирск, РОССИЯ. e-mail: dariareznina@gmail.com