Законодательное собрание Ленинградской области

Санкт-Петербургский государственный университет

Инвестиционно- строительная группа компаний «Мавис»

НО «Фонд содействия математическому образованию и
поддержки исследований в области точных наук «УниШанс»

Третья межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом «Математика — это просто!»

23 – 25 марта 2022 г.

Сборник учебно-методических материалов конференции

Санкт-Петербург

2022

В00 **Третья межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом «Математика –– это просто!».** 23 – 25 марта 2022 г. Сборник учебно-методических материалов конференции. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2022. — 141 с.

ISBN 978-5-9651-1440-5

Организаторы конференции

НО «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс»,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Профсоюзный комитет сотрудников Санкт-Петербургского государственного университета,

Законодательное собрание Ленинградской области,

Академия педагогического мастерства.

Третья межрегиональная научно-практическая конференция преподавателей математики и физики под девизом «Математика – это просто!» проводится при финансовой поддержке Инвестиционно-строительной группы компаний «Мавис».

(грант № 03-03-2022-г)

Организационный комитет конференции

Сопредседатели Оргкоммитета:
Востоков С.В. («УниШанс», СПбГУ, д. ф.-м. н., профессор),
Павилайнен Г.В. («УниШанс», СПбГУ, к. ф.-м. н., доцент)

Технические секретари:
Зуева Е.С. («УниШанс»), Кумпан В.В. («УниШанс»)

Редакторы сборника учебно-методических материалов конференции:
Павилайнен Г.В. («УниШанс», СПбГУ, к. ф.-м. н., доцент),
Орехов А.В. («УниШанс», СПбГУ)

Члены оргкомитета:

Франус Д.В., к. ф.-м. н., исполнительный директор («УниШанс»)

Некрасов В.Б., Заслуженный учитель РФ, (СПб АППО)

Петров Ф.В., д. ф.-м. н., профессор (СПбГУ)

Гладкая А.В., к. ф.-м. н., доцент (СПбГУ)

Кропачева Н.Ю., к. ф.-м. н., доцент (СПбГУ)

Стукалова Н.П., («УниШанс»)

Ференс-Сороцкий Е.В., («УниШанс»)

Шведова О.Н., учитель математики лицея № 393, победитель Всероссийского конкурса учителей 2020 г.

Секция 1.

Вопросы педагогики и дистанционного обучения

УДК 531.8

Востоков С.В.,[1] *Франус Д.В.,*[2] *Новикова Е.В.*[3]

Развитие и популяризация математического образования и математической культуры при поддержке частных пожертвований

Аннотация. В статье рассматриваются актуальные вопросы популяризации математических знаний, вопросы совершенствования математического образования школьников и участие в данной деятельности благотворительных фондов и частных лиц.

Ключевые слова: развитие математического образования, популяризация математики.

1. Введение. Математика занимает особое место в науке, культуре и общественной жизни, являясь одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, в том числе к логическому мышлению, влияя на преподавание других дисциплин. Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе. Успех нашей страны в XXI веке, эффективность использования природных ресурсов, развитие экономики, обороноспособность, создание современных технологий зависят от уровня математической науки, математического образования и математической грамотности всего населения, от эффективного использования современных математических методов. Без высокого уровня математического образования невозможны выполнение поставленной задачи по созданию инновационной экономики, реализация долгосрочный целей и задач социально-экономического развития Российской Федерации, модернизация 25 млн. высокопроизводительных рабочих мест. Развитые страны и страны, совершающие в настоящее время технологический рывок, вкладывают существенные ресурсы в развитие математики и математического образования.

Россия имеет значительный опыт в математическом образовании и науке, накопленный в 1950–1980 годах. Форсированное развитие математического образования и науки, обеспечивающее прорыв в таких ёмких стратегических направлениях, как

---

[1] д.ф-м.н., Президент Фонда Эйлера, Председатель правления Фонда «УниШанс»

[2] к.ф.-м.н., исполнительный директор НО Фонда «УниШанс», e-mail: franusd@gmail.com

[3] координатор Фонда Эйлера

информационные технологии, моделирование в машиностроении, энергетике и экономике, прогнозирование природных и техногенных катастроф, биомедицина, будет способствовать улучшению положения и повышению престижа России в мире. Система математического образования, сложившаяся в России, является прямой наследницей советской системы. Необходимо сохранить её достоинства и преодолеть серьёзные недостатки. Повышение уровня математической образованности сделает более полноценной жизнь россиян в современном обществе, обеспечит потребности в квалифицированных специалистах для наукоёмкого и высокотехнологичного производства [1].

Таким образом, математика не только является государственным приоритетом развития, но и является одним из основных факторов развития познавательных способностей каждого конкретного индивидуума, в том числе логического мышления. Это является особенно актуальным в эпоху цифровой трансформации, проявляющейся в уберизации и геймификации отношений экономических субъектов. Математическая грамотность становится обязательным атрибутом повышения качества жизни.

Математическая культура личности — это система обретенных личностью математических знаний, форм и методов математической деятельности, а также способов их присвоения, которые, совершенствуясь в социокультурном процессе, оказывают влияние на структуру и внутренний мир личности [2].

Несмотря на различные аспекты определений сущности, признаков, компонентов, условий, большинство исследователей рассматривают математическую культуру школьников как личностное образование. Отметим также и тот важный факт, что математическая культура в определениях учёных неразрывно связана с математическими знаниями, умениями и навыками, а также, что особенно важно, с практической деятельностью школьников, с умением переносить полученные математические знания в различные жизненные повседневные ситуации, с творческой и исследовательской деятельностью [3].

При этом развитие математической культуры и популяризация математического образования возможна только при активном участии членов профессионального математического сообщества.

Большинство благотворительных фондов начинались именно с частной инициативы человека, который сам прошел через трудную жизненную ситуацию. При этом очень ценно, когда зародившаяся частная инициатива становится профессиональной организацией, которая может уже не только оказать адресную помощь, но и добиваться системных изменений.

Именно так появляются новые благотворительные фонды, которые ставят своей целью повысить уровень математического образования и математической культуры, которые считают, что математика в России должна стать передовой и привлекательной областью знания и деятельности, а получение математических знаний - осознанным и внутренне мотивированным процессом.

Далее в данной статье речь пойдёт именно про такие благотворительные некоммерческие фонды, созданные и работающие при непосредственном участии авторов настоящей статьи.

2. История и основные направления работы Фонда Эйлера. Международный благотворительный фонд поддержки математики имени Леонарда Эйлера был создан к празднованию 300-летия со дня рождения великого учёного Леонарда Эйлера в 2006 году и объединенил людей, желающих и имеющих возможность оказать финансовую поддержку Петербургской математической школе в её стремлении к просветительской и образовательной деятельности.

Основу фонда составили выпускники математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ, ЛГУ) разных лет. Создание Фонда, наверное, было бы невозможно без активной организационной деятельности профессора СПбГУ С.В. Востокова, который был избран Президентом Фонда и переизбирался на этот пост в течение многих лет вплоть до настоящего времени.

Учредителями Фонда также выступили: профессор А.М. Вершик, в то время президент Математического общества Санкт-Петербурга, академик И.А. Ибрагимов, директор ПОМИ РАН, академик Л.Д. Фаддеев, директор ММИ им. Л. Эйлера.

В Попечительский совет Фонда вошли видные учёные, кстати, не только математики — А.М. Вершик, Ю.В. Матиясевич, Л.А. Вербицкая, Г.А. Леонов и другие.

Значительную финансовую и организационную поддержку оказали: члены Правления Фонда А.А. Евневич, В.М. Сербин и Ф.В. Длин, а также Р.С. Леонтьев, Д.В. Франус и другие.

Фонд активно участвовал в организации и проведении Математического Эйлеровского конгресса в 2007 году, установке бюста Л. Эйлера около здания Международного математического института имени Леонарда Эйлера, выпуске документальных фильмов, посвящённых жизни и творчеству Л. Эйлера и Эйлеровскому конгрессу.

Фонд ведёт многообразную работу в области поддержки математического (и не только математического) образования и науки, решает задачи развития интереса к точным наукам, в том числе лиц, проживающих в отдалённых районах, имеющих ограниченные материальные возможности либо ограничения по состоянию здоровья; поддержки перспективных студентов и молодых учёных; поддержки нуждающихся математиков и членов их семей.

У Фонда нет чётких географических ограничений: студенческие программы и очные кружки работают в Санкт-Петербурге, тогда как в олимпиадах и многопрофильных лагерях могут принимать участие школьники всего мира.

За время существования Фонда разработаны программы для школьников, студентов, преподавателей, учёных и их семей. Для сохранения исторической памяти Фонд поддерживает публикацию исторических материалов, выступил организатором установки мемориальной доски Георгу Кантору на 11-ой линии Васильевского острова г. Санкт-Петербурга.

Проекты «Успешный абитуриент», «Стипендия успешного первокурсника», «Стипендия математика-активиста сообщества разработчиков программного обеспечения с открытым исходным кодом и открытых стандартов» заработали с первых лет существования Фонда. Эти программы предусматривали выплаты стипендий соответствующим категориям студентов в течение учебного года. В дальнейшем возникли программы поддержки студентов с ограничениями по состоянию здоровья.

Под эгидой Фонда Эйлера с 2010 по 2020 год осуществлялся проект «Стипендии имени В.А. Рохлина для молодых математиков», организованный профессором А.М. Вершиком, бессменным председателем жюри конкурса. Проект предназначался для студентов, аспирантов и молодых математиков Санкт-Петербурга. На основе конкурсного отбора назначались стипендии и оплачивались поездки на зарубежные конференции для научных докладов.

Начиная с 2007 года ежегодно проводятся Олимпиады Эйлера для учителей математики Санкт-Петербурга, Ленинградской области и Северо-Запада. Проведено 15 олимпиад, победители награждаются денежными премиями на торжественных заседаниях Законодательного собрания Санкт-Петербурга и Законодательного собрания Ленинградской области. Также Фонд принимает участие в организации Олимпиады имени Леонарда Эйлера для учащихся 8 классов школ России.

С 2012 года в Фонде Эйлера осуществляется социально-педагогическая программа «Формула Единства», бессменным руководителем которой является профессор СПбГУ И.Б. Жуков. Программа включает организацию сезонных образовательных лагерей, проведение олимпиады «Формула Единства»/«Третье тысячелетие» по математике, физике, химии и английскому языку, дистанционные кружки, кружок «УниверсУм» для младших школьников, Школу Педагогического Мастерства, открытые бесплатные онлайн-курсы.

С 2017 года в Фонде Эйлера заработала программа помощи нуждающимся математикам и членам их семей, программа поддержки учащихся Академической гимназии и музея гимназии.

В 2020 году появился проект «Передвижная модульная мастерская», направленный на восполнение дефицита доступности ремесленного труда, развивающего мелкую моторику, координацию, образное и наглядно-действенное мышление, изобретательность и смекалку для детей с ограничениями в развитии, а также для небольших групп детей 7–14 лет, лишенных доступа к подобным мастерским в связи с их удалённостью или финансовой недоступностью для семьи.

В 2021 году организован клуб «Знак равенства». В клубе проводятся тематические встречи: Загадочное Средневековье, Космос, Учителя человечества и другие; работают кружки по математике, физике, лингвистике, астрономии и информатике, а также мастерские для детей с ограниченными возможностями здоровья, из многодетных и малообеспеченных семей и для всех желающих. Клубные встречи проходят в образовательном пространстве Фонда Эйлера.

Фонд Эйлера существует благодаря постоянной поддержке со стороны государственных органов, коммерческих компаний, частных лиц. Фонд Эйлера шесть раз получал гранты Президента Российской Федерации на развитие гражданского общества, предоставленные Фондом Президентских Грантов. Все годы существования Фонд получал поддержку ООО «Максидом». Большую поддержку оказали ОАО «РВК», инвестиционная компания «Евроинвест», ООО «В Контакте» и др.

3. История и основные направления работы «УниШанс». В 2007 году группой энтузиастов и единомышленников, сотрудников и выпускников СПбГУ, по инициативе С.В. Востокова было решено расширить благотворительную деятельность по поддержке школьников и студентов, увлекающихся математикой. Так возник новый проект Интернет-школы «УниШанс», который впоследствии получил развитие в виде Некоммерческой Организации Фонда содействия математическому образованию и исследований в области точных наук «УниШанс» (НО Фонд «УниШанс») в 2009 году. Первоначальная цель создания школы «УниШанс» заключалась в помощи старшеклассникам в подготовке к вступительным экзаменам (до введения ЕГЭ) по математике в ВУЗы с учётом традиций и культуры математического образования Петербургской школы математики. Фонд Эйлера поддержал создание Интернет-школы «УниШанс» и взял на себя на первых порах научно-методическое и организационное сопровождение этого проекта. Руководителем Интернет-школы стал профессор С.В. Востоков, он же возглавил Правление Фонда. Среди инициаторов и первых преподавателей Интернет-школы следует отметить профессора СПбГУ О.А. Иванова, Заслуженного учителя Российской Федерации В.Б. Некрасова, эксперта-консультанта ЕГЭ, победителя конкурса «Педагогический дебют» (Москва, 2010) Г.И. Вольфсона, профессора СПбГУ Ф.В. Петрова, аспиранта кафедры высшей алгебры и теории чисел СПбГУ Е.В. Сороцкого.

На первом этапе жизни школы «УниШанс» была создана платформа онлайн обучения для того, чтобы любой желающий школьник, независимо от места проживания, имел возможность изучать математику и готовиться к поступлению в лучшие математические ВУЗы страны. Для этого была разработана программа обучения начиная с 8-го класса. В рамках пошагового прохождения программы обучаемый проходил как теоретические занятия, так и практические. Причём в случае совершения ошибки в процессе решения, обучаемый получал обратную связь от педагога с указанием места и причины ошибки. Стимулирование прохождения программы, как элемент геймификации процесса обучения и повышения вовлечённости обучаемого, осуществлялось через систему присвоения рейтингов (в зависимости от скорости и качества решения) среди учащихся и общим процентом прохождения программы. При этом рейтинг был общедоступным, что позволяло учащемуся иметь представление об уровне своих знаний и навыков в области математики. На первом этапе жизни проекта «УниШанс» основной упор в работе делался на углубление математических знаний и усиление математической культуры школьников.

В связи с введением ЕГЭ программа подготовки школьников к вступительным экзаменам устарела и было принято решение о смене формата развития и популяризации математических знаний и математической культуры. С 2009 года Фонд «УниШанс» начал программу очного обучения школьников Ленинградской области и Северо-Запада России. Несколько раз в семинарах принимали участие учителя и школьники из республики Крым, Свердловской области (г. Екатеринбург). Постоянными участниками семинаров являются школьники и учителя из Вологды, Апатит, Петрозаводска. В рамках этого формата семинары учителей и школьников проводятся в дни осенних и весенних школьных каникул на базе Санкт-Петербургского государственного университета в Оздоровительном комплексе «Университетский» Профсоюзного комитета СПбГУ [4]. За период с 2009 по 2022 год было проведено 26 очных семинаров, десять Летних математических кружков «Геогебра», девять Зимних школ по математике, физике, информатике и химии, и три Межрегиональные научно-практические конференции учителей математики и физики. Очный формат обучение расширяет целевую аудиторию проекта «УниШанс»:

- «Геогебра» позволяет знакомиться с геометрией и компьютером в юном возрасте начиная с 7 лет;
- Очные семинары дают возможность проводить занятия для учителей с целью повышения их квалификации в области методики преподавания математики;
- Научно-практические конференции позволяют учителям расширить кругозор, обменяться опытом, найти единомышленников, обсудить острые вопросы развития системы ЕГЭ и ИГА;
- Школьники погружаются в атмосферу вузовского преподавания, имеют возможность протестировать свои знания, сдружиться с ребятами разных регионов, сменить школьную обстановку строгого регламента на свободную и творческую.

Начиная с 2015 года Фонд «УниШанс» финансирует публикацию трудов семинара «Компьютерные Методы в Механике Сплошной Среды» [5]. Семинар проводится кафедрой теоретической и прикладной механики математико-механического факультетом СПбГУ совместно с Институтом проблем машиноведения Российской Академии Наук. Данный научный семинар является открытым для всех студентов, аспирантов и молодых учёных, с возможностью удалённого участия с он-лайн докладом и последующей научной дискуссией по теме доклада, а также возможностью опубликования статьи в индексируемый сборник трудов. Таким образом, Фонд «УниШанс» оказывает поддержку молодым учёным в публикации научных результатов в индексируемом сборнике,получая в итоге мнение профессионалов математического сообщества при подготовке диссертаций.

Начиная с 2018 года Фонд «УниШанс» также заключил договор с СПбГУ, в рамках которого регулярно проходят конкурсы на именные стипендии Фонда «УниШанс» среди бакалавров, специалистов и магистров, обучающихся в университете по программам «Фундаментальная механика» и «Механика и математическое моделирование». Такая поддержка позволяет молодым специалистам сконцентрироваться на обучении и за счёт большей вовлечённости в процесс обучения повысить качество общей инженерной подготовки и получаемых математических знаний.

Коллектив преподавателей Фонда «УниШанс» сформировался из профессоров и доцентов СПбГУ и студентов математико-механического, физического факультетов и факультета ПМ-ПУ. В настоящее время в составе преподавателей студенты и аспиранты нескольких вузов города, таких как ИТМО, Горный университет,Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, Политех им. Петра Великого, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения. Студенты и аспиранты проходят педагогическую практику на базе Фонда, занимаясь математикой, физикой, химией и информатикой со школьниками Ленинградской области. Кроме этого, в период 2020–2022 годов активно развивается онлайн обучение школьников. Преподаватели Фонда А. Голубева и К. Некрасов систематически ведут занятия в 4-х группах школьников 8–11 классов.

Деятельность Фонда имеет эффект вовлечения в математическую культуру и образовательный процесс молодых специалистов и будущих учёных в области математики. Более того появляется синергетический эффект от вовлечения молодых специалистов к обучению школьников, который заключается в том, что молодые специалисты (учёные) повышают уровень своей математической культуры одновременно с популяризацией математики среди школьников. Здесь интересно отметить отсутствие возрастного барьера (по сравнению со школьными учителями) между студентами-преподавателями и школьниками. В итоге школьники легче идут на общение, видят реальные итоги обучения в вузе, могут задать «трудный» вопрос, например, о собственном развитии, о шансах поступления в тот или иной вуз. В результате такого общения получается дополнительный эффект психологической подготовки будущего абитуриента.

За 15 лет деятельности Фонд «УниШанс» объединил более пяти тысяч школьников, более сотни неравнодушных и увлеченных учителей. Выпускники школы «УниШанс» успешно поступают в вузы города, в том числе и в СПбГУ, а некоторые из них уже в качестве студентов приходят в Фонд и успешно пополняют коллектив преподавателей [6].

Всё это было бы невозможно без государственной поддержки и частных пожертвований. Фонд «УниШанс» административно поддерживается Законодательным Собранием Ленинградской области, СПбГУ, Профсоюзным комитетом СПбГУ, а также профессиональным математическим сообществом Санкт-Петербурга. Фонд «УниШанс» с 2013 года работает по совместному Договору о сотрудничестве и поддержке профориентационной деятельности с Санкт-Петербургским государственным университетом.

Финансовую поддержку НО Фонд «УниШанс» единолично осуществляет Инвестиционно-строительная группа компаний «МАВИС». В рамках своей корпоративной социальной ответственности «МАВИС» считает, что благотворительность в области развития математического образования и популяризации математики является инструментом повышения качества трудовых резервов в нашей стране в соответствии с современными вызовами цифровой трансформации социально-экономических отношений страны.

4. Заключение. С точки зрения государства Фонд Эйлера и Фонд «УниШанс» являются инструментами в достижении цели в рамках повышения качества жизни и цифровой трансформации экономики, в том числе автоматизации рабочих мест, роботизации промышленности и производств, цифровизации услуг и сервисов. С точки зрения частных спонсоров, осуществляющих благотворительность, — это повышение образованности и компетентности молодых людей в нашей стране и социальная справедливость на рынке труда.

Список литературы

[1] Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 года №2506-р.

[2] Викулова Н.А. Формирование математической культуры студента колледжа. //Сборник статей «EurasiaScience» XXVI Международная научно-практическая конференция, Москва, 2019, с. 144–145.

[3] Насыпаная В.А. Математическая культура учащихся: основные характеристики, функции и компоненты. Аспекты и тенденции педагогической науки. // Материалы II Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, июль 2017 г.). Санкт-Петербург: Свое издательство, 2017. С. 42–45.

[4] Павилайнен Г.В., Франус Д.В. Опыт работы Фонда «УниШанс» по построению свободного интеллектуального пространства для формирования личности. //Сборник статей Второй межрегиональной научно-практической конференции преподавателей математики и физики под девизом «Математика — это просто!» Санкт-Петербург: ВВМ, 2019, с. 14–19.

[5] http://www.kmmss.ru — ISSN 2218-7421, ISBN 978-5-02-040494-6

[6] Рудакова Т.В., Павилайнен Г.В. Проблема формирования целостного мировоззрения личности в контексте глобальных вызовов XXI века. // В материалах Межрегиональной конференции «Математика — это просто!», СПб: ВВМ, 2017, с. 92–106

УДК 37.032

Франус Д.В.[1], *Муртазова А.С.*[2]

Цифровая трансформация социально-трудовых отношений в разрезе теории поколений

Аннотация. В статье рассматриваются особенности формирования социально-трудовых отношений нового трудового поколения при устройстве на место работы после получения образования. Отдельное внимание уделяется вопросам цифровой трансформации корпоративной культуры. Сформулированы новые подходы для нового поколения и к образованию, и к обучению, и к формированию новых условий труда.

Ключевые слова: цифровая трансформация, теория поколений, уберизация, геймификация, экономика впечатлений.

1. Введение. В данной работе рассматриваются вопросы о современных тенденциях изменений отношений молодого работника нового поколения (выпускника ВУЗа) и работодателя с точки зрения теории поколений в рамках развития цифровых технологий и цифровой культуры. Практически всё, о чем пойдёт речь применимо и к школьникам, и к выпускникам вузов; основным отличием является лишь уровень формирования личности, на котором находится человек до поступления в ВУЗ и после его окончания.

[1]НО Фонд «УниШанс», e-mail: franusd@gmail.com

[2]Инвестиционно-строительная группа «МАВИС», e-mail: murtazova@mavis.ru

Основной целью исследования является формирование новых подходов и рекомендаций к трудовым отношениям с новым трудовым поколением, которое предъявляет принципиально новые требования к работодателю и механизмам взаимодействия с коллегами старших поколений. Особенностью процесса «вливания» нового поколения является целенаправленное изменение некоторых принципов построения личности старших поколений. В частности, у старших трудовых поколений менее развит в рамках личности навык обучения — одна профессия на всю жизнь. В то время как для нового поколения свойственно постоянное обучение новым профессиональным навыкам в поисках того, что им «действительно» нравится. Как сказал признанный профессионал в области менеджмента Питер Друкер: «Единственный навык, который будет иметь значение в XXI веке, — это навык приобретения новых навыков. Все прочие со временем устареют». Таким образом, он подчёркивал важность непрерывного обучения в эпоху активного развития информационных технологий и цифровой трансформации.

Одной из основных сил, коренным образом изменяющей правила глобального бизнеса, является технологическая революция, подпитываемая экспоненциальным ростом глобальных объемов данных и цифровых технологий.

Глобализация переходит на цифровой уровень. Данные перетекают между странами, а их объём удваивается каждые два года, всё более стирая национальные границы:

- В 2020 году мировые потоки данных, согласно прогнозам, превысят 60000 Гб в секунду — втрое больше, чем в 2015 году. Ожидается, что трансграничные потоки данных будут удваиваться каждые два года, как минимум, вплоть до 2025 года [1].

- С 2013 по 2020 год количество постоянно подключённых к сети устройств увеличилось на 400%.

- В 2020 году число активных пользователей интернета достигло 66% населения Земли [2].

- За последние десятилетие себестоимость проводного широкополосного доступа в интернет сократилась более, чем на 40% [3].

- К 2022 году количество постоянно подключённых к сети устройств, генерирующих данные, достигнет 29 миллиардов [4].

- Себестоимость облачной инфраструктуры сократилась за последнее десятилетие на 66% [5].
- С 2011 года объём генерируемых в мире данных удваивается каждые три года и к 2025 году достигнет 175 триллионов ГБ [6].

На этом фоне в развитии крупнейших компаний мира появились новые стратегии, касающиеся вопросов развития трудовых ресурсов:

- формирование глобальной архитектуры данных и аналитических навыков,
- отказ от традиционной матричной организационной модели в пользу гибких и адаптивных, ориентированных на потребителя команд,
- построение культуры непрерывной трансформации взамен традиционных обособленных инициатив проведения изменений,
- привлечение, удержание, вдохновение и развитие технологически подкованных и заинтересованных сотрудников-цифровых талантов.

Сегодня, когда меняется само определение таланта, а конкуренция за толковых специалистов остра, как никогда, желаниям и потребностям нового поколения работников необходимо уделять гораздо больше внимания, начиная с самых ранних этапов становления личности цифрового таланта.

Одним из существенных этапов становления личности является первичное устройство на работу после получения образования. Эта веха развития личности связана с тем, что социальная обстановка/окружение существенно изменяется. Вместо однокурсников появляются коллеги, которые очень сильно различаются, как минимум, по возрасту, соответственно, по культуре, соответствующей данному поколению. Мы видим очередной сдвиг социальной и культурной парадигмы личности человека. Более того, если смотреть на изменения окружения при переходе человека от учебы к трудовой деятельности, то можно увидеть существенное изменение и в «авторитетном» круге. Под «авторитетным» кругом общения в университете подразумевается, как авторитарное, так и социально-педагогическое влияние, которое ощутимо сказывается на развитии личности. При устройстве на работу личность человека также испытывает сдвиг парадигмы в рамках «авторитарного» круга, в котором ранее находились только более взрослые, умные и титулованные (учёные степени и научные звания). После сдвига в этот круг попадают руководители, которые очень часто имеют меньше знаний по той специальности, на которую устраивается человек; при этом руководители обладают значительно более широким кругом навыков и компетенций. Получается, что у человека в рамках «авторитетного» круга произошел сдвиг с очень глубоких знаний, и умений его использования, в сторону широких знаний и навыков их применения [7].

Перечислим новые аспекты вхождения нового поколения в трудовые отношения:

- Цифровая трансформация, проявляющаяся в уберизации и геймификации отношений экономических субъектов;
- Непрерывность разнопрофильного профессионального обучения.

2. Теория поколений. Основы теории поколений, в эссе «Проблема поколений» («Das Problem der Generationen») [8], которое было опубликовано в 1928 году, заложил немецкий учёный Карл Маннхейм. Он выделял поколения с помощью когортов (см. рис.1) на основе исторических событий, в результате которых формировались поколения сверстников со схожими чертами [9]. Следующий основной труд по теории поколений был опубликован в США в 1991 году учёными Уильямом Штраусом (William Strauss) и Нилом Хау (Neil Howe) в книге «Поколения» (Generations). Их исследование охватывает временной период с 1584 до 2069 год в рамках истории США. Они выделили цикличность смены поколений из 4 ступеней (архитипов), для которых определили свои роли. При этом циклическая смена 4-х архитипов образует больший цикл длиной в человеческую жизнь от 80 до 100 лет. Авторы расширили определение поколения тремя критериями:

1. Исторические события и социальные веяния, в том числе развитие технологий;
2. Общие убеждения и модели поведения;
3. Чувство принадлежности к конкретному поколению.

Авторы выделили цикличность смены поколений в рамках четырех фаз жизни: детство (рождение нового поколения), молодость, средний возраст, и старость. В нашем исследовании мы

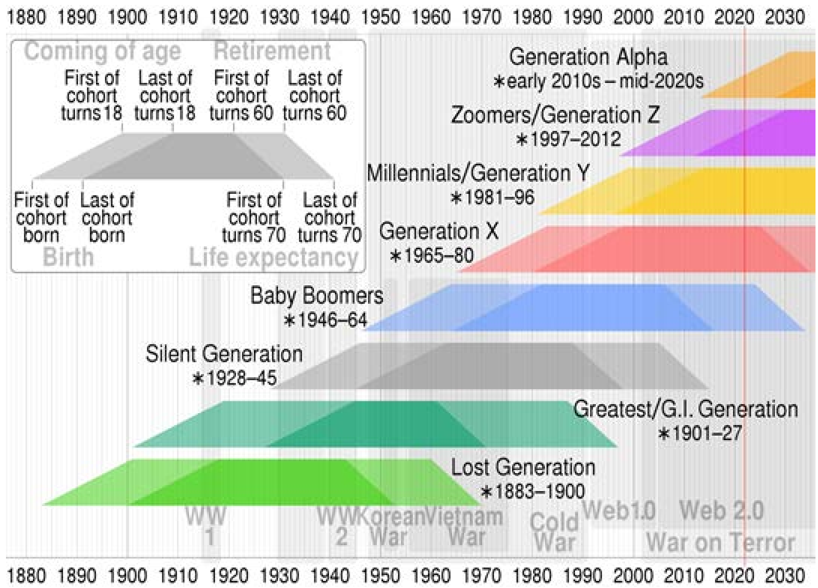

Рис. 1. Временная шкала поколений в западном мире.

обращаем внимание на две фазы — это молодость и средний возраст, поскольку это максимально активные рабочие периоды жизни каждого человека – основы трудового ресурса.

Рассматриваются временные рамки трёх последних взрослых поколений, исключается самое молодое поколение Alpha (Альфа) с 2012 года рождения и позже, так как они ещё не сформировались, как личности, и не вступили в трудовые отношения. Установление чётких границ в теории поколений — нетривиальная задача. На данные разграничения влияет совокупность экономических, социальных, политических и культурных факторов. В таком контексте, а также в связи с различным научным подходом границы могут сдвигаться на десятилетия в различных странах. Например, развитие Интернета в нашей стране происходило на 10-15 лет позже, чем в США.

Основные характеристики представителей поколений X, Y, Z.

1. ***Поколение X, лозунг «Мой дом — моя крепость».***

   Люди, родившиеся в 1963–1983 гг. прошли эпоху глобальных изменений в политической и экономической области. Люди, пережившие некоторые общие события, такие как холодная война, война в Афганистане, перестройка, СПИД, Берлинская стена, распад СССР приобретают общий опыт, который сказывается на их ценностях. Падение железного занавеса в 90-х показало, что весь мир живёт иначе, другими приоритетами и другими ценностями, а также породило настоящий субкультурный бум.

В итоге, совокупность глобальных факторов сформировала характерные ценности поколения — готовность к изменениям, глобальная информированность, техническая грамотность, индивидуализм, стремление учиться в течение всей жизни, прагматизм и надежда только на себя, выживание, семейное благополучие. «Иксы» привыкли строить карьеру всю жизнь, постепенно и последовательно двигаясь к намеченной цели. Основные черты Поколения X можно описать следующим образом. Это аполитичные и стойкие духом люди, трудолюбивые и нацеленные на результат, готовые к длинному пути в карьере и достижению индивидуального успеха. Во многих жизненных аспектах консервативны, легче других переживают перемены, но плохо адаптируются в периоды стабильности. Предпочитают чёткий и фиксированный график работы, без ущерба для личной и семейной жизни. Могут работать абсолютно автономно, также обладают хорошими организаторскими способностями.

Представители этого поколения способны воспринимать большой объем информации, могут оценить преимущества и недостатки цифровизации, так как знают жизнь вне интернета, предпочитают общение офф-лайн, считают, что живое общение никогда не заменит встречи в Zoom и переписки в мессенджерах. Представители поколения X стали прародителями платформенной экономики. Такие компании как Tesla, Google, Uber, Самокат, Яндекс были созданы именно «Иксами». Несмотря на такие достижения, по данным American Association of Retired Person (AARP), 76% профессионалов данной возрастной группы испытывали на себе дискриминацию по возрасту в отношении трудовой занятости.

2. ***Поколение Y, лозунг — «Жизнь — игра».***

Поколение миллениалов или сетевое поколение родились примерно с 1984–1999 гг. Особенностью поколения «Игреков» стали теракты в разных городах РФ, военные конфликты, атипичная пневмония. Существенное влияние оказали развитие цифровых технологий, сотовой связи, интернета, смартфоны, что позволяет всегда быть онлайн и быть в информационном потоке 24/7. Поколение миллениалов стало цифровыми эмигрантами. Именно в эту эпоху появились термины «геймификация», «уберизация» и т.д. Представитель данного поколения создал Facebook и VK.

Ценности и характерные черты сложились под влиянием экономического подъема, но из опыта детства у «Игреков» присутствует огромных страх бедности. Родители их учили, что всё достается тяжелым трудом, знаниями и временем, поэтому эти люди готовы работать 24/7, без выходных и отпусков. Именно в период активной трудовой деятельности «Игреков» появился термин эмоциональное и профессиональное выгорание, так как когда садишься в поезд «достигатора», остановиться уже невозможно. Вследствие подобного отношения к работе, миллениалы хотят всё и сразу, большие зарплаты и почётные должности имеют крайне большое значение. Тем не менее, вдохновение и свобода мысли одни из основных характеристик поколения миллениалов, их можно и нужно черпать в путешествиях и изучении всего нового, поэтому появились свободный график, фриланс и теория вечной молодости. Не важно, где ты находишься, как ты выглядишь и как ты организуешь свой рабочий график, главное — достигать цели.

Вместе с поколением миллениалов в нашу жизнь крепко вошли социальные сети и компьютерные игры. Жизнь в сети иногда стала важней и привлекательней реальной жизни. В данном контексте появляется риск быстрой потери интереса в случае «затягивания» действия или процесса, поэтому им тяжело работать в одной сфере и в одной компании всю жизнь. В работе над любым проектом или задачей для поколения миллениалов важно самоутвердиться, выразить «свою» точку зрения и быть услышанным. В решении сложных задач и в спорных вопросах они предпочитают компромиссы. Отличаются гибкостью и толерантностью к изменениям.

Основным отличием поколения миллениалов стало появления сетевого мышления. До времен миллениалов говорили о иерархии, структурном подходе и только с миллениалами появилось понятие сети, не только в разрезе интернет-сети, но и про сетевой подход в построении бизнес-моделей, трудовых отношений, системы обучения и так далее. Командный подход в решении задач стал важнее индивидуальных заслуг, коллективный разум позволяет достигнуть результатов быстрее и эффективнее.

3. ***Поколение Z — 2000–2011 года рождения.***

   Если миллениалы помнят какую-то жизнь без Интернета, поколение Z родились с телефоном в руках. Zеты являются коренными жителями цифрового мира. Цифровой мир для Zетов принимается основным, в сети строятся отношения, проходит обучение и добываются знания, цифровые развлечения также вытесняют живое взаимодействие. Развитие цифровых технологий в жизни Zетов заставляет их быть всегда «в тренде» и не отставать от последних новинок, поэтому еще детьми Zеты иногда лучше родителей разбираются в цифровых устройствах и имеют возможность очень рано начинать зарабатывать свои первые деньги. Это поколение очень остро чувствует «легкие деньги» и умеет монетизировать свои увлечения. Блогеры и обзоры плотно вошли в их жизнь. Образ в социальных сетях и достижения в виртуальном мире имеют огромное значение для ощущения целостности личности. Пережив не один экономический кризис, ценность владения и материальных благ отошла на второй план. Именно с Zетами появилась шеринговая экономика. Zеты, в большинстве своем, начали стремиться к балансу ценностей:

   – зарплата важна, но не является решающим фактором при принятии решении или выборе компании;

   – работа важна, но не должна занимать все время, работа уже не является признаком успешности;

   – обучение и развитие важно, но должно быть адаптировано под график и интерес и т.д;

   – репутация компании и корпоративная социальная ответственность иногда важнее оффер (коммерческое предложение, в котором детально описано, в чем состоит ценность приобретения товара или услуги компании для целевого сегмента или конкретного покупателя), почти 70% молодых специалистов готовы уйти от работодателя, если он не будет разделять их ценности.

Безусловно обстоятельства внешней среды формировали у поколений различное отношение к балансу между работой, учебой и личной жизнью. Если провести анализ баланса работы и личной жизни по рис. 2: «Work-life balance в размере теории поколений», то чётко прослеживается путь, встроенный в жизненную модель каждого конкретного индивида. Возможно, это является особо рода реакцией на большой процент переработок, появление эмоционального выгорания и так далее. Если посмотреть на статистику по данным исследования HeadHunter, в России перерабатывают 73% сотрудников. Чаще всего остаются на работе топ-менеджеры (88%), строители (83%), рабочие (79%) и логисты (78%), ИТ-специалисты и работники сельского хозяйства.

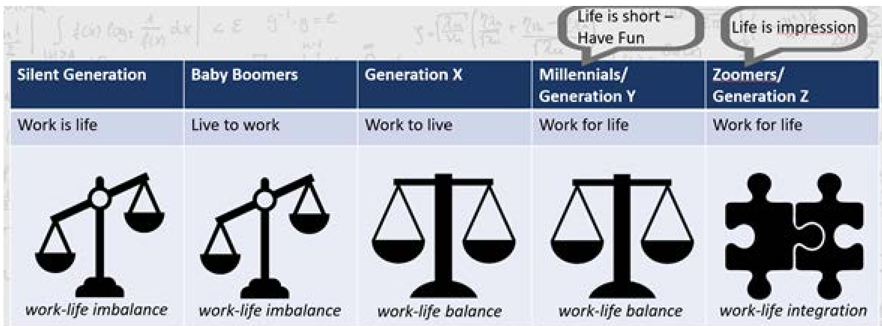

Рис. 2. Work-life balance в размере теории поколений.

К 2025 году доля молодых профессионалов уменьшится, тогда как спрос на технологические и цифровые навыки будет расти. Специалистов в возрасте 23–35 лет на рынке труда станет в 2 раза меньше, чем представителей старшего поколения. Это приведет к нехватке трудовых кадров, отвечающих требованиям современных тенденций и диджитал эры. Для устранения данного разрыва работодатели вкладываются в обучение сотрудников и развитие не только hard, но и soft skills. Поэтому обучаемость стала неотъемлемой частью навыков, которыми должен обладать сотрудник. Не важно, что именно ты знаешь, важно, как быстро ты можешь обучиться и начать применять знания на практике. Возможно, понимая это, поколение Z теряет много фундаментальных знаний в школе и университетах, считая их несовременными, неактуальными и сложно применимыми на практике.

Постоянно изменяющиеся обстоятельства внешней среды заставляют формировать более актуальные требования ко всем сотрудникам и цифровым вызовам вне зависимости от поколений. Это требует новой эффективной системы управления человеческими ресурсами и готовности организации к изменениям. Создавать статичные данные в наше время не актуально, так как скорость изменений опережает осознание в некоторых случаях. Несмотря на это, важна концентрация на основных условиях, таких как:

- Высокая мобильность — это способность сотрудника быстро адаптироваться к условиям внешней среды, к изменению трудовых обязанностей и спектру поставленных задач;

- Глобальная ориентация и мультикультурные компетенции — это широта мышления, способность видеть глубокие взаимосвязи и формировать новые подходи в построении систем и решении задач;

- Готовность работать в ситуации неопределенности и в ситуации переизбытка информации — умение сконцентрироваться на важном и основном из всего информационного шума, способность принимать решения в условиях отсутствия информации;

- Предпринимательские навыки — достижение результата с помощью поиска новых инструментов в постоянной меняющихся условиях;

- Готовность к работе в командах — умение взаимодействовать с разными людьми, способность достигать компромисса, эмоциональный интеллект.

3. Уберизация. Изменяется не только новое поколение работников, но и происходят активные изменения у работодателей. Массовая цифровизация продуктов (товаров и услуг) компаний в начале 21-го века сформировала цифровые «привычки» (культуру), которая в свою очередь требовала ещё большей цифровизации продукта. Таким образом, в течении последних трёх поколений сформировалась «спираль» цифрового развития продуктов и культуры.

Сегодня многие глобальные компании в дополнение к обычным цепочкам снабжения создают цифровые экосистемы. В этих сетях прирастает ценность компании: разрабатываются и на практике воплощаются действительно интересные потребителю решения и продукты, совершенствуется опыт взаимодействия с клиентами.

Глобализация в совокупности с цифровой трансформацией приводит к эволюции корпораций (см. табл.1). Компаниям нужны уже не обычные цепочки снабжения, а динамические сети доставки (экосистемы), объединяющие партнеров из различных отраслей. Основное преимущество таких сетей-экосистем в конкурентоспособности, которого не может достичь самостоятельно

ни одна компания. В итоге традиционная компания, задачей которой является разработка высококачественного продукта и минимизация издержек, превращается в цифровизатора. Цифровизатор в основу своей концепции закладывает цифровизацию существующего продукта, созданного на предыдущем этапе развития с помощью партнеров при низкой управленческой нагрузке. Дальнейшее развитие компании-цифровизатора приводит к переходу на следующий этап — на платформу, которая формирует идеальную связь между умными вещами и подключенными к сети пользователям, а также высокий уровень сервиса и минимум разногласий.
Последним этапом развития, на сегодняшний день, является суперплатформа — это объединение нескольких платформ в единое, полностью интегрированное сервисное предложение и сбор данных пользователей посредством единого интерфейса взаимодействия с клиентом.

Таблица 1. Этапы цифрового развития компаний и их характеристики.

	традиционная компания	цифровизатор	платформа	суперплатформа
Количество партнёров	Не менее 2	20–100	5–10 млн	>10 млн
Количество отраслей	1	5	>5	>10

Наблюдается сокращение цепочек потребления от производителя до потребителя, что и называется термином «Уберизация».

Уберизация — это не только исключение посредников с помощью цифровых платформ, но и расширение оказываемых услуг в рамках продаваемого продукта. В результате этого развития мы наблюдаем масштабную уберизацию мировой экономики. То есть, цифровая трансформация является ключевым инструментом уберизации экономики.

Особенностью уберизации является новый принцип формирования производимого продукта — промышленное производство с услугами по внедрению и обслуживанию. Приведём кратко два примера уберизации, помимо компании Uber, с работой которой мы сталкиваемся как клиенты каждый день.

1. Производство авиационных турбовентиляторных двухконтурных двигателей компанией Rolls–Royce для компаний Boing и Airbus. Каждый двигатель в режиме онлайн самостоятельно диагностируется и отправляет все данные по

своей работе в дата центр компании производителя, формируя там big data. Там происходит анализ каждого отклонения и формирование регламента опережающего обслуживания/ремонта в локальном сервисном центре (аэропорт базирования самолёта). Наиболее сложные случаи по обслуживанию двигателей отрабатываются совместно по видеосвязи с лучшими специалистами в головном сервисном отделении компании Rolls–Royce.

2. Производство медицинской и диагностической техники Siemens. Это не просто производство — это полный комплекс услуг по внедрению, в том числе, с финансовыми моделями окупаемости, обучением персонала, повышением качества обслуживания клиентов, и опережающим обслуживанием медицинской техники (до её выхода из строя).

Чтобы сохранять конкурентоспособность, компаниям приходится развивать координацию и коллективную работу на новом уровне внутри своих организационных структур и за их пределами. Им приходится делать свои организации более динамичными и пластичными, всё для максимизации нативного удовлетворения потребностей клиента с учётом удовлетворения потребностей сотрудника-таланта. Под талантами мы понимаем молодого представителя поколения Z, обладающего исключительно высоким уровнем квалификации и/или компетенции в области своей деятельности.

Основным инструментом трудовой социализации представителей поколения Z является платформенная занятость. Чтобы на волне подобных перемен добиться кадровых преимуществ, нужно не просто осваивать новые подходы, но и полностью пересматривать процессы управления талантами. Для этого можно выделить следующие вехи:

- Повышение привлекательности для наиболее перспективных сотрудников-талантов за счёт интеграции общекорпоративной цели в рекрутинговые процессы.

- Изменение подходов к управлению талантами: создание через обучение, покупка через поглощение компаний, аренда через различные договора с другими компаниями, бридж через ротацию.

- Выстраивание системы, культуры и управленческого ресурса, необходимых для эффективного развития талантов.

- Реорганизация сотрудников в agile-команды (гибкие команды, формируемые для решения конкретных задач).
- Формирование среды непрерывного обучения.
- Повышение цифровой грамотности сотрудников.

Таким образом, цифровая трансформация и новое «цифровое» поколение Z создают новые реалии трудовых отношений. Теперь работник большой корпорации — это не «просто винтик в большом механизме», а талант — основа успешного процветания корпорации, которая ставит удовлетворение потребностей талантов на первое место.

Для сотрудников цифровая трансформация является сложным испытанием, так как компания требует от сотрудников подниматься выше, заходить дальше и бежать быстрее — причём непрерывно. Сотрудники при этом испытывают стресс и напряжение, так как вынуждены менять методы работы, а, возможно, даже менять место работы. Предвосхищая сложности сотрудников, которые несёт в себе цифровая трансформация, компаниям необходимо проявлять эмпатию к сотрудникам, помогая им адаптироваться. Компании формируют новую рабочую среду в рамках цифровой культуры, закрепляя за сотрудниками наставников, организуя различные виды профессиональной подготовки, помогая с финансовым планированием. Таким образом, делая жизнь сотрудников чуть проще, подобные меры показывают им, что компания заботится о своих сотрудниках, об их благополучии, и относится к ним не «как к расходному материалу».

Интересно было бы отметить, что цитата Питера Друкера, приведённая ранее в этой статье, — «навык получения новых навыков» относится не только к сотруднику, но и к компании в целом. Всё вокруг: технологии, потребители, внешние условия — меняются столь стремительно, что исходить из существующих предпосылок больше нельзя.

Персонал принято мотивировать преимущественно внешними стимулами, такими как повышение зарплаты и премии. Для современных высококвалифицированных специалистов нового «цифрового» поколения Z эти стимулы по-прежнему важны, однако подлинные лидеры рынка также изо всех сил стараются делать так, чтобы каждый член коллектива видел в своей работе смысл. Для этого проводится ускоренное углубление разделения труда за счет цифровизации с целью адаптации экономики к новому трудовому поколению. Автоматизация всех возможных процессов в компании – это критически важная составляющая для нового поколения Z. Вот лишь небольшой список цифровых систем, которые используют современные компании в своей ежедневной работе CRM, ERP, CDP, CMS, EDI, WMS, TMS, ECM, САПР, АСТПП, ITSM (авторы намеренно не приводят расшифровку аббревиатур, чтобы «прочувствовать» себя сотрудником старшего поколения, которые за относительно короткий трудовой промежуток времени вынуждены были всё это освоить).

Другим важным аспектом углубления разделения труда в рамках цифровой трансформации, как основного инструмента уберизации, является способность компании формулировать персонализировано короткие и простые задачи через удобный цифровой интерфейс. При этом, по возможности, за каждое выполненное задание — сразу давать вознаграждение. По статистике от постоянного оклада в пользу почасовой оплаты готовы отказаться 45% двадцатилетних представителей поколения Z. Основной причиной проявления такого поведения на навыках и способностях представителей поколения Z является развитие игровой индустрии, а также индустрии развлечений.

4. Геймификация. Одним из компонентов формирования цифровой культуры стали различного рода компьютерные игры. С точки зрения экономики, компьютерные игры прекрасно расширили сферу экономики развлечений (экономика разделяется на 4 части: сельское хозяйство, промышленность, услуги, и развлечения). Цифровизация промышленности и услуг позволила высвободить рабочую силу для развития экономики развлечений. Этот эффект аналогичен тому, что мы наблюдали при переходе от собирательства к сельскохозяйственной экономике (около 12 тысяч лет назад), по аналогии с массовой индустриализацией (вторая половина 19-го и первая половина 20-го века), развитие сферы услуг. То есть развитие экономики развлечений - это очередной шаг в эволюции структуры экономики, который приведёт к перераспределению рабочей силы в пользу вновь зарождающегося типа экономики.

Первый успешный шаг в развитии нового типа экономики был заложен в самом начале цифровой эпохи 1 октября 1971 года с открытием The Walt Disney World Resort (мир Уолта Диснея) во Флориде, США. Это не просто тематический парк развлечений, в этом парке в основу каждого элемента благоустройства, будь то дерево, скамейка, декор, каждого персонажа, сценарий его поведения или сценической постановки заложено ожидание получения определённого впечатления посетителем парка. К сожалению, Уолт Дисней умер в 1966 году раньше открытия этого парка, и он не смог реализовать свою идею по созданию нового типа города, в котором впечатления стояли бы на первом месте.

Экономика впечатлений состоит из различных компонентов, однако, именно индустрия видео (компьютерных) игр произвела самый большой вклад в формирование, развитие, и становление личности и характера современного трудового поколения Z.

Игра — это средство обучения, которое активнее всего использует молодёжь. Это касается не только компьютерных игр, но обычных игр. Игра, как форма обучения, является неотъемлемой частью устройства человеческого мозга. Мозг — это жадный потребитель паттернов, битком набитый концепциями. Именно посредством игр детский мозг вырабатывает и формирует множество паттернов, которые в юношестве оказывают существенное влияние на формирование личности и характера. Паттерны позволяют мозгу восполнять необходимую информацию. При этом мы пользуемся этим навыком (восполнением информации) практически неосознанно и постоянно.

Первая коммерчески успешная видеоигра была создана в 1971 году на базе игрового автомата; далее развивались различные платформы, совершенствовались техническая и программная базы. Если в начале своей эпохи видеоигры создавались в основном энтузиастами (особенно игры для персональных компьютеров), то на сегодняшний день это большой и сложный бизнес, предъявляющий высокий уровень требований к организации и менеджменту для успешной реализации проекта, в том числе всего вышеупомянутого. На рисунке 3 приведён график развития продаж видеоигр по всему миру для различных платформ, при этом в график не попадает пиратское распространение, которое по различным оценкам не текущий момент составляет в среднем по миру 15-35%.

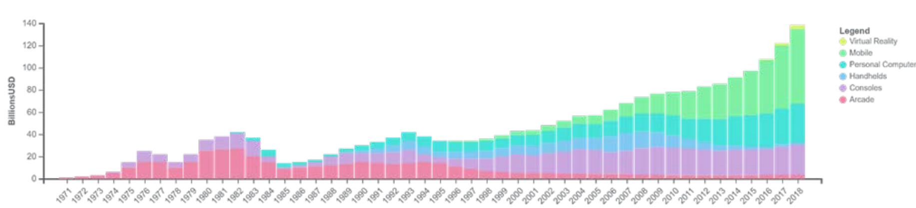

Рис. 3. Оценка мировых продаж видео игр с 1971 по 2018 для различных видов платформ [10].

Развитие игровой индустрии развлечений оказало влияние на формирование личности нового поколения Z, которое компании обязаны учитывать при приёме на работу. В итоге, на собеседовании HR специалисты используют новые инструменты и критерии оценки кандидатов в соответствии с теми ролями, которые «привыкли» играть представители нового «цифрового» поколения Z в компьютерных играх.

Приведём пример классификации кандидатов на работу по ролям (при этом авторы настоящей работы не ставили себе задачей описание всеобъемлющей классификации):

- Киллеры — любители соревнования, стремящиеся к демонстрации собственного превосходства, активно проявляют механизм самоутверждения личности. HR специалисты (кадровики) используют этот тип для поиска следующих специалистов: спортсменов, продакт менеджеров, менеджеров по продажам. Например, известный командный шутер Counter-Strike формирует не только быструю реакцию, тактические навыки, оценку слабых мест соперника, и умение нанести точный удар, но имеет и более глубокую суть — навык командной работы. Командная работа — не менее жёсткий опыт, чем стрельба на меткость, с точки зрения компании имеет высокую ценность.

- Карьеристы — коллекционеры достижений. Ачивки, бейджи, баллы, рейтинги — это всё для них и про них. Это представители поколения Z, которые формируют в себе «синдром отличника». Такая характеристика касается не только «красно-дипломников» и отличников учёбы, но и перфекционистов, которые на работе будут стремиться выполнить поставленную перед ними задачу максимально идеально, что также является существенным преимуществом при устройстве на работу на определённые должности.

- Исследователи — дзен-созерцатели, любят анализировать, сравнивать. Этот тип личности формируется в основном за счёт игр в стратегии со сложными экономической, социальной, и политической структурами и игр «песочницами» — открытые цифровые миры. Из них получаются хорошие IT-специалисты, снабженцы/закупщики, категорийные менеджеры.

- Социофилы — любители общения, формируются за счёт разнообразного спектра игр с высокой социальной ролью (построение сообществ), а также требующих активной коммуникации между игроками. Эти представители поколения Z в последующем часто становятся PR-специалистами, SMM менеджерами, или HR-специалистами.

Для вовлечения нового поколения Z в трудовой процесс работодателю придётся создать «дополненную» реальность в работе. Таким образом, происходит перенос игровых правил на корпоративные бизнес-процессы. В качестве примера можно привести классификацию механизмов результативности (при этом авторы настоящей работы не ставили себе задачей описание всеобъемлющей классификации):

- Гонки — максимально быстро решить задачу по определённому «сценарию» из точки А в точку Б.
- Освоения новых территорий — максимально эффективное решение четко поставленной цели при заданных ограничениях (ресурсах).
- Битва не на жизнь, а на смерть — достижение конкретной цели любой ценой, несмотря на издержки организации.

Молодые представители «цифрового» поколения Z привыкли видеть мир как поле вариантов с бесконечными квестами и выгодами. Соответственно происходит трансформация бизнес-процессов компаний с учётом особенностей игровых правил.

Привычка выполнять квесты в компьютерных играх привела к разбивке заданий на чёткие и конкретные задачи, при этом почти полностью исключив возможность постановки «открытых» задач. Набирают обороты проектные методы управления и двух-трехнедельных спринтов (конкретная задача, ограниченная во времени) для решения которой формируется небольшая команда (так называемый Agile подход; самый яркий современный пример реализации такой формы управления — TikTok). Неудача в решении задачи за заданный срок приводит к формированию новой «уточнённой» задачи, поручаемой другой «команде».

Таким образом, можно выделить следующие методы геймификации рабочего процесса:

- «Квесты» — создание «приключений» (задач) в соответствии с целями компании. Используется в компаниях как инструмент повышения эффективности выполнения заданий.
- «Ачивки» — система достижений для выполнения сложных или нестандартных задач. Инструмент повышения вовлеченности или решение «открытых» задач с неопределенным способом решения.
- Рейтинги — формирование здоровой внутренней конкуренции. Инструмент нематериальной мотивации

- Статусы — новый элемент корпоративной культуры, может использоваться как HR-инструмент.

В результате сформированной привычки выполнять «квесты», поколение Z предпочитает более простую и быструю работу, что усиливает эффект углубления разделения труда за счет цифровизации, описанный в разделе про уберизацию экономики. Таким образом, в принципы формирования мотивации добавляются игровые элементы, в том числе получение вознаграждения сразу (почасовая оплата).

Подводя итоги, можно утверждать, что игровая индустрия сформировала целое «цифровое» поколение Z живущее «квестами», «ачивками», «рейтингами».

5. Заключение. Высокий уровень влияния цифровизации (уберизация экономики) и геймификации, а также активное развитие индустрии развлечений, привели к формированию нового качества у поколения Z — «пожиратели эмоций». Самое важное для них — это получить порцию новых ощущений здесь и сейчас. При этом им важно, чтобы их эмоции и впечатления были замечены и оценены окружающими. Идёт активное развитие сферы «шэринговых» услуг (совместного использования), люди делятся не только товарами, но также совместно пользуются услугами, и активно делятся своими эмоциями и впечатлениями, открывая тем самым дополнительные возможности исследований потребностей и предпочтений клиентов и сотрудников.

Для нового «цифрового» поколения Z требуется реакция окружающих (оценка) всего, что они делают, при этом не очень важно негативной или позитивной. Главное — это внимание к их личности. Им безразличны дорогие бренды, более важные критерии — это комфорт и практичность. Представители поколения Z любят квесты, современные развлечения, к примеру, 3D, VR, модную одежду, путешествия и всё, что даст им порцию новых эмоций.

Таким образом, с точки зрения повышения эффективности обучения и трудоспособности необходимо формулировать более чёткие и конкретные, чем для старших поколений, задачи с разбивкой на подпункты. Для повышения эффективности «цифрового» поколения Z необходимо учитывать те игровые роли, которые они привыкли играть и которые легли в основу их паттернов (стереотипов) поведения. При этом необходимо приближать систему оплаты труда, оценку обучения, и мотивацию к принципам, соответствующим игровому паттерну поведения, то есть геймификация рабочего и учебного процессов.

Как результат, спираль развития цифровых продуктов и культуры развивает экономику развлечений и переориентирует людей с потребления товаров и услуг на потребление впечатлений — формирование долгих и приятных ощущений, воспоминаний, эмоций.

Экономика услуг уже замещается экономикой впечатлений. И это требует новых подходов для нового поколения и к образованию, и к обучению, и к формированию новых условий труда.

В списке литературы приведены работы, в которых более обстоятельно обсуждаются все затронутые в статье вопросы, и авторы рекомендуют их к прочтению для более глубокого понимания описанных идей.

1. Рок Д. Мозг. Инструкция по применению. Как использовать свои возможности по максимуму и без перегрузок. 2009.
2. Талер Р. Новая поведенческая экономика. Почему люди нарушают правила традиционной экономики и как на этом заработать. 2015.
3. Вайл П., Ворнер С. Цифровая трансформация бизнеса. 2018.
4. Харари Ю.Н. Sapiens. Краткая история человечества. 2011.
5. Харари Ю.Н. Sapiens. Краткая история будущего. 2015.
6. Харари Ю.Н. 21 урок для XXI века. 2019.
7. Гилмор Д.Х., Пайн Д.Б. Экономика впечатлений. Работа — это театр, а каждый бизнес — сцена. 2017.
8. Костер Р. Разработка игр и теория развлечений. 2018.
9. Бхаттачарья А., Ланг Н., Хемерлинг Д. Больше чем великие. Девять стратегий, которые помогут добиться процветания в эру социальной напряжённости, экономического национализма и технологических революций. 2021.
10. Хазин М. Воспоминания о будущем. Идеи современной экономики. 2019.

Список литературы

[1] Bhattacharya A. Digital Globalisation vs nGeopolitical Globalisation: A Tale of Two Worlds. Economic Times. Analisys based on data from TeleGeography. April 2019

[2] Clement J. Global Digital Population as of April 2020. Statista. June 4, 2020.

[3] ICT Price Basket Methodology. ITU. 2020

[4] Internet of Things Forecast. Ericsson. 2020

[5] Donnelly C. Public Cloud Competition Promts 66% Drop in Prices Since 2013, Research Reveals. Computer Weekly. January 12, 2016

[6] Volume of Data. Information Created Worldwide from 2010 to 2025. Statista. February 28, 2020

[7] Павилайнен Г.В., Франус Д.В. Опыт работы Фонда «УниШанс» по формированию свободного интеллектуального пространства для формирования личности // В материалах Межрегиональной конференции «Математика — это просто!», 2019 г. Санкт-Петербург.

[8] Mannheim K. "The Problem of Generations". In Kecskemeti, Paul (ed.). Essays on the Sociology of Knowledge: Collected Works, Volume 5. New York: Routledge. 1952. p. 276–322.

[9] https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Theory_of_generations&oldid=1083816548 01.05.2022

[10] Nakamura Y. "Peak Video Game? Top Analyst Sees Industry Slumping in 2019". Bloomberg L.P. (January 23, 2019)

УДК 37.031

Гладкая А.В.[1], *Стукалова Н.П.*[2]

Методологические основы процесса дистанционного обучения

Аннотация. Обсуждаются проблемы дистанционного обучения. Сравниваются и оценивыаются различные аспекты удаленного обучения с использованием сетевых технологий.

Ключевые слова: дистанционное обучение, обучение, память.

Сейчас говорить о том, быть или не быть дистанционному обучению — поздно! Оно пришло к нам и прочно обосновалось в нашей жизни как некоторая ступень прогресса всего человечества [1]. Остается принять этот факт с наименьшими издержками и потерями, осознавая и осмысливая происходящее и приспосабливая систему образования, кстати сказать, одну из самых

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: anna.v.gladkaya@gmail.com

[2] НО Фонд «УниШанс»

успешных в общей истории мировой педагогики. Известно, что сам процесс обучения формировался столько времени, сколько существует человечество, а возможно и до этого, поскольку некоторые виды обучения потомства существуют и в животном мире. Наука обучать содержит в себе все достижения предшествующих поколений, в том числе и подходы к дистанционному обучению. Сделаем некоторые предварительные замечания по сути этого способа обучения и дадим его общую характеристику.

1. **Процесс образования сам по себе консервативен — и это хорошо.**

   В современной реальности следует сохранять те условия, которые обеспечивают возможность процесса образования, совмещая его с новыми реалиями использования компьютерной техники и электронных средств коммуникации. Из этого следует, что переход с очного на дистанционное обучение должно происходить так, чтобы обучаемый не заметил подмены одного другим и не произошло разрыва в последовательности процесса обучения.

2. **При дистанционном обучении физиологически используются несколько видов памяти и они преобразуются.**

   - **Зрительная память** — становится основной, поскольку существенно возрастает роль монитора как источника информации.
   - **Слуховая память** — становится более востребованной, так как обучаемый не видит, как правило, артикуляцию губ учителя. Нарушается связь между звуком голоса и артикуляцией рта преподавателя, что вносит дополнительный трудности для восприятия звуковой информации.
   - **Тактильная память** — получает дополнительное развитие, поскольку меняются тактильные ощущения от прикосновения к ручке и бумаге на прикосновение к клавишам клавиатуры и работе с «мышью».
   - **Моторная память** — преобразуется незначительно, поскольку позиция тела при списывании с доски и позиция при списывании с монитора практически не различаются, в случае, когда обучаемый не успевает списывать за учителем, он начитает торопиться, содержание и понимание действий пропадает, поскольку остается только моторная цель «успеть записать».

3. **Общая перегрузка информацией является тормозом обучения.**

   Проиллюстрировать этот тезис можно очень простым примером. В мозгу отражается вся получаемая информация, вся нерегламентированная реклама, дополнительные звуки и шумы, цветовые эффекты, это приводит к эффекту размытого восприятия, когда нарушается концентрация внимания на самом важном в данный момент источнике информации и её содержании. Многие обучающиеся работают в наушниках с дополнительным музыкальным фоном.

   Для преодоления информационной экспансии в мозг необходимы специальные тренировки внимания, чтобы научить индивида методике концентрации внимания в течении 30 минут на конкретном объекте. Как только обучаемый справится с задачей концентрации внимания, это приведет к существенному улучшению в восприятии нового учебного материала и к общему повышению эффективности процесса обучения. Большой преподавательский опыт авторов этой статьи подсказал такой режим — 30+15. Это означает 30 минут интенсивной концентрации внимания учащихся, а затем 15 минут отдыха в виде иллюстративного материала, разбора легких математических примеров, «казусов», математических анекдотов и др.

   Кроме этого, следует сказать, что многочисленные исследования показывают существование в человеческом организме определенных биологических ритмов, когда физическая или интеллектуальная деятельность наиболее эффективна, а когда нет. Для процесса обучения спад интеллектуальной деятельности зафиксирован у взрослых с 9 до 10 часов утра и с 15 до 16 часов пополудни. А у детей он сдвигается влево на 1–1,5 часа. Таким образом, трудно заставить ребенка заниматься с 8 до 9 часов утра и с двух до трех часов вечера. Именно на основе этих исследований создателя инженерной психологии, профессора Б.Г. Ананьева [2] в общеобразовательной школе советского периода не приветствовались «нулевые» уроки, а после 6 уроков рекомендовались спортивные мероприятия и прогулки до 17-00 и не менее 2-х часов в день.

4. **В большой группе обучающихся резко снижается эффективность.**

   Этот тезис очевиден, поскольку при дистанционном образовании пропадает эффект коллективной концентрации внимания и коллективной работы. Каждый обучаемый работает индивидуально, в своем ритме, со своей скоростью восприятия и усвоения. Более смышленые и быстро воспринимающие новую информацию моментально теряют концентрацию и отвлекаются от работы, тугодумы наоборот, не успевают понять и усвоить, а педагог не может оценить ни первое, ни второе, если количество обучаемых в группе велико. Особенность дистанционного образования в его индивидуальности и оно малоэффективно в большом коллективе [3].

5. **Чтение вслух и заучивание наизусть — хорошо забытые и полезные методики дистанционного образования.**

   Все очень просто. Чтение вслух обучаемым текста задачи или правила орфографии дает возможность учителю по интонации и семантике сделать вывод, понимает ли ученик, что он читает. Кроме этого, можно остановить и повторить чтение, провести корректировку синтаксического и логического ударения в тексте, добиться от учащегося понимания условия задачи.

   Заучивание правила наизусть позволит учащемуся загрузить материал в долговременную память и будет гарантией, что он вспомнит это правило в нужный момент при выполнении контрольного задания.

Список литературы

[1] Гладкая А.В., Кропачева Н.Ю. Сочетание традиционного и электронного обучения. // Материалы Межрегиональной научно-практической конференции, 24–26 февраля 2017 г., Санкт-Петербург: Изд-во «ВВМ», С. 88–92.

[2] Ананьев Б.Г. Избранные психологические труды. 1 и 2 т. Педагогика, 1980.

[3] Рудакова Т.В., Павилайнен Г.В. Проблема формирования целостного мировоззрения личности в контексте глобальных вызовов XXI века. // Материалы Межрегиональной научно-практической конференции, 24–26 февраля 2017 г., Санкт-Петербург: Изд-во «ВВМ», С. 92–106.

УДК 531.8

Гладкая А.В.[1], *Кропачева Н.Ю.*[2]

Учебно-практические семинары школы «УниШанс»

Аннотация. На примере работы школы «УниШанс», рассматривается работа учебно-практических семинаров. Школа «УниШанс» — это результат совместного сотрудничества высшей школы и благотворительного фонда с целью научно-методической и образовательной деятельности среди учителей и учащихся. Основная аудитория, для которой разработан проект, это школьники Ленинградской области и Северо-Западного региона.

Ключевые слова: обучение математике, учебно-практические семинары, интернет-школа, благотворительный фонд «УниШанс».

Наиболее эффективными в процессе обучения, безусловно, являются занятия в малых группах. Такие занятия могут иметь целью как получение информации, так и приобретение новых навыков или углубление знаний в какой-то области. Одним из видов занятий в малых группах являются учебно-практические семинары. Главное преимущество семинаров по сравнению с другими формами обучения — интерактивность. В зависимости от целей и задач, семинары могут длиться от нескольких часов до нескольких дней. Обучающиеся являются активными участниками семинарских занятий, то есть выступают не только в роли слушателей, но и принимают активное участие во всем образовательном процессе.

В 2009 году у организаторов интернет-школы «УниШанс» возникла идея организации очных математических семинаров для учителей и школьников параллельно с работой сайта, который на тот момент являлся основным способом общения с обучающимися. Было принято решение пригласить в качестве участников семинара учителей и школьников Ленинградской области и Северо-Западного региона. Основные цели нового направления деятельности школы были сформулированы тогда следующим образом:

- методическая помощь учителям при подготовке школьников 9 и 11 классов к Итоговой государственной аттестации (ИГА) и Единому государственному экзамену (ЕГЭ);
- помощь самим школьникам в освоении наиболее трудных вопросов школьной программы.

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: anna.v.gladkaya@gmail.com

[2] Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: natakr4@gmail.com

В дальнейшем на семинарах школы «УниШанс» появились занятия по темам, выходящими за рамки школьной программы, а также олимпиадные задачи. На очных семинарах занятия проходят, как в лекционной форме, так и в форме практических занятий. И если первоначально школа «УниШанс» существовала только как интернет-ресурс, то сейчас школа работает по нескольким направлениям — это обучение по базовой и расширенным программам посредством Интернета (сайт школы), очное обучение на выездных семинарах, персональная работа с детьми, имеющими особенности восприятия и отклонения в физическом развитии, проведение консультаций для учителей, консультирование и репетиторство детей и внуков сотрудников университета.

В настоящее время школа «УниШанс» — это результат совместного сотрудничества высшей школы и благотворительного фонда с целью научно-методической и образовательной деятельности. Благотворительный фонд «УниШанс» (официальное название «Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс») сформирован в августе 2014 года на базе Интернет-школы математики.

Рис. 1. Структура проекта «УниШанс».

Очные семинары проводятся школой два раза в год в дни осенних и весенних каникул. Между семинарами работает педагогический совет, который состоит из методистов (преподаватели СПбГУ) и тьюторов (студенты и аспиранты). Совет подводит итоги прошедшего семинара и осуществляет подготовку следующего на основании выявленных потребностей слушателей и текущих тенденций в государственной итоговой аттестации школьников. Состав преподавателей школы меняется с течением времени, так как основными ведущими занятия являются тьюторы, то есть студенты или аспиранты.

Как правило, семинары длятся 3 или 4 дня, за которые бывает проведено до 15 занятий на разные темы. Помимо основных уроков математики школьники могут посещать также информатику, физику или химию, в зависимости от личных интересов. Кроме того, проводятся и научно-популярные лекции по механике, химии, астрономии и другим темам. В последний день семинара для школьников проводится тест, на котором им предлагается продемонстрировать умение применять полученные в ходе занятий знания. Задания теста состоят из тем, рассмотренных на семинаре. Участники, набравшие большее количество баллов, получают дипломы и льготы для участия в следующем семинаре. Важно отметить, что учителя, приехавшие на семинар, занимаются параллельно со школьниками в отдельных малых группах.

Следует выделить три основных аспекта популярности очных семинаров школы «УниШанс» на сегодняшний день:

- **Социальный аспект.** Занятия со школьниками, в основном, проводятся молодыми педагогами — студентами и аспирантами, которые только на 5–7 лет старше своих слушателей, но уже владеют своей профессией мастерски. Заинтересованность наших тьюторов своей областью науки передается и школьникам, так что обсуждение некоторых задач продолжается и после окончания учебных занятий. Важно отметить, что студенты и аспиранты могут поделиться со слушателями не только научными знаниями, но и своим опытом на пути, который школьникам только предстоит пройти — выбор будущей профессии, сдача экзаменов и поступление в ВУЗ. Для учителей занятия проводят преподаватели университетов Санкт-Петербурга. Как правило, темы занятий в группе учителей схожи с темами занятий их же учеников, поэтому дети видят с каким интересом учатся их педагоги, как радуются они новым оригинальным методам и решениям. Поэтому зачастую в послеучебное время возникают их совместные обсуждения разобранных задач.

- **Психологический аспект** основан на том, что во время проведения семинара все участники как организаторы, учителя, так и школьники являются равными участниками процесса. Формальная дистанция учитель-ученик, разумеется, остается, но эмоциональная грань между ними стирается. Также проводятся беседы и тренинги, во время которых участники семинара обучаются контролировать внутреннее время, преодолевать состояние усталости, распределять свои время и силы, обучаются правильному дыханию и правильной осанке при работе за компьютером.

- **Коммуникационный аспект** связан с тем, что семинар объединяет школьников из разных районов Ленинградской области и других регионов. Детям очень важно сопоставить свой уровень знаний с другими, ощутить себя командой, представляющей свою родную школу, свой город или поселок. Возникает естественный соревновательный процесс, который развивается интеллектуальными и спортивными играми во время отдыха. Особым успехом пользуется ставший традиционным турнир «Что? Где? Когда?».

Статистика семинарского направления проекта «УниШанс» достаточно внушительная. Среднее количество участников семинара — около 200 человек. За время деятельности проекта было организовано и проведено 26 семинаров. Первый семинар собрал 72 участника, последний — 26-той — 130 человек, рекордсменом по количеству участников является 13 семинар, в котором участвовало 368 школьников и учителей. География участников на данный момент значительно расширилась за пределы Ленинградской области: постоянными участниками стали слушатели из республики Карелия, Мурманской и Вологодской областей; кроме того, на семинар приезжали ученики и учителя из удаленных от Санкт-Петербурга регионов: Пермского края, Челябинской области, республики Крым.

По полученной от учителей информации, все школьники, которые участвовали в нескольких семинарах (всего с 8 по 11 класс это возможно 8 раз) успешно сдали государственные экзамены и поступили в ВУЗы.

По мнению участников и организаторов, он-лайн обучение, подкрепленное личными встречами на семинарах, является очень удачной формой подготовки школьников по математике и имеет большие перспективы в развитии.

Список литературы

[1] Павилайнен Г.В., Франус Д.В. Проект «УниШанс» как новая современная форма образовательной деятельности в области точных наук. // Материалы межрегиональной научно-практической конференции преподавателей

математики и физики под девизом «Математика — это просто», Санкт-Петербург, 24–26 февраля 2017.

[2] Гладкая А.В., Кропачева Н.Ю. Сочетание традиционного и электронного обучения. // Материалы межрегиональной научно-практической конференции преподавателей математики и физики под девизом «Математика — это просто», Санкт-Петербург, 24–26 февраля 2017.

[3] Кропачева, Н.Ю., Павилайнен Г.В., Франус Д.В. Преподавание математики с учетом реалий современности. // Материалы международной конференции Современное естественнонаучное образование «Modern science education», Франция (Париж), 19–26 октября 2018. Современные проблемы науки и образования. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2018. Том III. ISBN 978-5-91327-533-2, стр.58–61

УДК 37.032

Кузнецова Е.В[1]

Развитие критического мышления на уроках математики

Аннотация. В статье обсуждается один из подходов к формированию интеллектуальных способностей учащихся общеобразовательных средних учебных заведений. В качестве методического инструмента для решения этой задачи рассматривается развитие критического мышления.

Ключевые слова: критическое мышление, мотивация к обучению, интеллектуальные способности.

Критическое мышление (critical thinking) — система суждений, которая используется для анализа вещей с критической точки зрения и событий с формулированием обоснованных выводов и позволяет выносить обоснованные оценки, интерпретации, а также корректно применять полученные результаты к ситуациям и проблемам. В общем значении под критическим мышлением подразумевается мышление более высокого уровня, чем мышление докритическое. Критическое мышление — способность человека ставить под сомнение поступающую информацию, включая собственные убеждения.

Существует мнение, что переход к критическому уровню мышления в том или ином сообществе — необходимая предпосылка для начала цивилизационного развития данного сообщества (см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Критическое мышление).

[1]ГБОУ СОШ №523 Колпинского района Санкт-Петербурга

Современного ученика чрезвычайно трудно мотивировать к познавательной деятельности, к поиску пути к цели в поле информации и коммуникации. Происходит это потому, что дети часто испытывают серьёзные затруднения в восприятии учебного материала по всем школьным предметам. Причина этого в недостаточно высоком уровне развития мышления. Но именно благодаря способности человека мыслить решаются трудные задачи, совершаются открытия. Развивать мышление — значит развивать умение думать. Мыслительный процесс начинается при появлении задачи или проблемы, у которой нет готового способа решения; «…в педагогике критическое мышление — это мышление оценочное, рефлексивное, развивающееся путём наложения новой информации на жизненный личный опыт». (Загашев И.О., Заир–Бек С.М.)

Так что такое «критическое мышление»?

Умение мыслить критически — это не выискивание недостатков, а объективная оценка положительных и отрицательных сторон в объекте познания. Это не присвоение готового знания, а конструирование своего, партнёрские отношения между учителями и учениками, совместный поиск решения задачи. Важен не объём информации, а умение применять её в жизни.

Главная цель — развитие интеллектуальных способностей ученика, позволяющих ему учиться самостоятельно, тогда критическое мышление — это способность ставить новые, полные смысла вопросы, вырабатывать разнообразные подкрепляющие аргументы, принимать независимые продуманные решения.

Технология «Развитие критического мышления через чтение и письмо» относится к типу рамочных. Своеобразной рамкой, в которую вписывается урок, является так называемая базовая модель технологии, состоящая из трех этапов (стадий):

1. стадия вызова;
2. смысловая стадия;
3. стадия рефлексии.

На первой фазе работы с информацией учащийся создает для себя смысл: «Зачем мне это нужно?». На второй фазе необходимо реализовать этот смысл в определенной учебно-познавательной деятельности. Рефлексия в данном случае понимается как «встраивание» новых знаний в систему личностных смыслов.

Стадия вызова.

Реализуются следующие задачи:

1. самостоятельная актуализация имеющихся знаний по теме (от учителя требуется организация процесса актуализации имеющихся знаний),
2. пробуждение познавательной активности в связи с изучаемой темой,
3. самостоятельное определение учащимися направлений в изучении темы.

Работа ведётся индивидуально, в парах, в группах.

Смысловая стадия.

1. организация активной работы с информацией,
2. самостоятельное сопоставление изученного материала с уже известными данными, мнениями.

На этом этапе происходит непосредственный контакт с новой информацией (текст, фильм, лекция, материал параграфа).
Работа ведётся индивидуально или в парах.

Стадия рефлексии.

1. самостоятельно систематизировать новый материал,
2. определить направления для дальнейшего изучения темы. Здесь происходит творческая переработка, анализ, интерпретация и т. д. изученной информации.

Работа ведётся индивидуально, в парах, в группах.

Приёмы развития критического мышления на уроках математики.

Приём №1.

«Верно ли?»

а) Вера и Настя выполняли умножение десятичных дробей. Вера записала 25,8*3,4=87,72, а Настя записала 25,8*3,4=877,2.
Кто из них ошибся? Почему произошла ошибка?

б) Какие равенства неверны? Исправьте их, объясните причины появления ошибок. 5 кг 28 г = 528 г, 5 см 3 мм =53 см, 1 т 4 ц = 1,04 т.

Приём №2.

«Верные и неверные утверждения»

а) Укажите номера верных утверждений.
1) Существует квадрат, который не является прямоугольником.
2) Если два угла треугольника равны, то равны и противолежащие им стороны.
3) Внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, равны.

б) Укажите номера верных утверждений.

1) Центры вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника совпадают.
2) Существует квадрат, который не является ромбом.
3) Сумма углов любого треугольника равна 180°.

Приём №3.

«Никогда — иногда — всегда»

Прочитайте утверждения и определите условия их применения: верно всегда, верно иногда, неверно ни при каких условиях. Приведите примеры для каждого случая.

1) Произведение десятичной дроби на десятичную дробь есть десятичная дробь.
2) Частное десятичных дробей есть натуральное число.
3) При умножении натурального числа на 0,5 произведение меньше данного натурального числа.

Приём №4.

«Составление кластера»

Даны числа: $2; -5,6; 12,9(5); 34; -28,6(7); \dfrac{4}{7}; \dfrac{-51}{8}; -2,34; -2345; \dfrac{-3}{4}; \dfrac{783}{5}; 0.$

Распределите числа на группы: натуральные числа, целые числа, обыкновенные дроби, десятичные дроби, отрицательные числа, положительные числа, периодические дроби. Можно ли обыкновенную дробь записать десятичной? Всегда ли это возможно? Можно ли десятичную дробь записать обыкновенной? Всегда ли это возможно?

Составьте кластер к понятию «число».

Приём №5.

«Инсерт»

При чтении текста учащиеся на полях расставляют пометки (желательно карандашом, если же его нет, можно использовать полоску бумаги, которую помещают на полях вдоль текста). Пометки должны быть следующие:

- **V** — если то, что вы читаете, соответствует тому, что вы знаете;
- **+** — если то, что вы читаете, является для вас новым;
- **—** — если то, что вы читаете, противоречит тому, что вы думали;
- **?** — если то, что вы читаете, непонятно, или же вы хотели бы получить более подробные сведения по данному вопросу.

После чтения текста с маркировкой учащиеся заполняют маркировочную таблицу Инсерт, состоящую из 4-х колонок.

V	+	—	**?**

Этот прием работает и на стадии осмысления. Для заполнения таблицы ученикам понадобится вновь вернуться к тексту. Таким образом, обеспечивается вдумчивое, внимательное чтение. Технологический прием «Инсерт» и таблица «Инсерт» сделают зримым процесс накопления информации, путь от «старого» знания к «новому» — понятным и чётким.

На этапе рефлексии необходимо произвести обсуждение записей, внесённых в таблицу, или маркировки текста. Заканчивается работа озвучиванием таблицы, т.е. усвоенное знание проговаривается.

Приём №6.

«Тонкие и толстые вопросы»

Тонкие вопросы: кто…, что…, когда…, может…, будет…, как звали…, верно…, согласны ли вы…

Толстые вопросы: объясните, почему…: в чём разница…; что, если…; почему вы считаете...; в чем различие...; предположите, что будет, если...; что, если…

Приём №7.

«Синквейн»

Синквейн — это стихотворение, представляющее собой синтез информации в лаконичной форме, что позволяет описывать суть понятия или осуществлять рефлексию на основе полученных знаний. Слово происходит от французского «cinq», что в переводе на русский язык означает пять. Синквейн — это стихотворение, представляющее собой синтез информации в лаконичной форме, что позволяет описывать рефлексию на основе полученных знаний. Синквейн записывается по правилам:

1. строка — название стихотворения (одно существительное);
2. строка — описание темы (два прилагательных);
3. строка — действие (три глагола, относящихся к теме);
4. строка — чувство (фраза из четырех слов, выражающих отношение автора к теме;
5. строка — повторение сути, синоним первой строки (обычно существительное).

Примеры синквейнов.

а) Синквейн к понятию «трапеция»:

трапеция;
выпуклая, четырёхугольная;
измерить, построить, обозначить;
мне интересно решать задачи, в которых дана трапеция;
геометрическая фигура!

б) Синквейн к понятию «текстовая задача»:

задача;
сложная, интересная;
решить, исследовать, составить;
мне нравится решать текстовые задачи;
задача с практическим содержанием.

в) Синквейн к понятию «Математика»:

математика;
элементарная, высшая;
складывает, умножает, делит;
тренировать мозги — здорово;
царица всех наук.

Прием №8.

«Кубик»

Данный прием используется на этапе осмысления.

Положительные стороны приема «Кубик»:

– позволяет ученикам реализовать различные фокусы рассмотрения проблемы, темы, задания;

– создает на уроке целостное (многогранное) представление об изучаемом материале;
– создает условия для конструктивной интерпретации полученной информации.

Суть данного приема. Из плотной бумаги склеивается кубик. На каждой стороне пишется одно из следующих заданий:

1. Опиши это... (Опиши цвет, форму, размеры или другие характеристики)
2. Сравни это... (На что это похоже? Чем отличается?)
3. Проассоциируй это... (Что это напоминает?)
4. Проанализируй это... (Как это сделано? Из чего состоит?)
5. Примени это... (Что с этим можно делать? Как это применяется?)
6. Приведи «за» и «против» (Поддержи или опровергни это)

Ученики делятся на группы. Учитель бросает кубик над каждым столом и таким образом определяется, в каком ракурсе будет группа осмысливать ту или иную тему занятия. Учащиеся могут писать письменные эссе на свою тему, могут выступить с групповым сообщением и т.п.

Прием №9.

«Вопросы Блума»

Знание — понимание — применение — анализ — синтез — оценка.

1. Вопросы на знания: кто, что, где, когда, назови, перечисли.
2. Вопросы на понимание: опиши, расскажи своими словами, подчеркни, объясни, сравни, обсуди.
3. Вопросы на применение: примени, используй, продемонстрируй, выбери, интерпретируй.
4. Вопросы на анализ: почему, проанализируй, сделай диаграмму, упрости.
5. Вопросы на синтез: составьте, постройте, придумайте, пересмотрите, сделайте, спланируйте.
6. Вопросы на оценку: оцените, сравните, что самое хорошее, кто прав, почему это самое важное.

Прием №10.

«Пазл».

Выполнение заданий по этому методу построено на основе игры. В учебной практике изучаемый (или контролируемый) материал частями записан на отдельных карточках, но в каждой карточке должна быть информация к поиску следующей. Ученик должен собрать все карточки по указанному учителем материалу.

На уроках математики его можно использовать при работе с формулами, при решении уравнений и задач. Метод «пазл» способствует формированию внимания, сосредоточенности, умения собирать и анализировать полученную информацию.

Учебный «пазл» можно составлять с учащимися на любой стадии изучения материала. Это может быть индивидуальная или коллективная работа.

Пример. Тема «Признаки равенства треугольников», 7 класс.

После изучения трех признаков равенства треугольников, учащимся предоставляется набор из 16 карточек. Каждая теорема в этом комплекте представлена так:

- 1-я карточка — словесная формулировка,
- 2-я карточка — чертеж к теореме,
- 3-я карточка — краткая запись условия и заключения теоремы,
- 4-я карточка — математическая запись доказательства.

Ученику надо полностью собрать указанную ему теорему. В случае необходимости можно задать ученику несколько вопросов по собранной теореме.

Применение перечисленных приёмов позволяет сделать урок более интересным и результативным.

Список литературы

[1] Критическое мышление: технология развития: Пособие для учителя / И. О. Загашев, С. И. Заир–Бек. - СПб: Альянс «Дельта», 2003.

[2] Заир–Бек С.И. Развитие критического мышления на уроке : пособие для учителей общеобразоват. учреждений / С.И. Заир-Бек, И.В. Муштавинская. - 2-е изд., дораб. - М.: Просвещение, 2011. - 223 с.

[3] Кашицына Ю.Н. О задаче развития креативных способностей в процессе обучения геометрическим понятиям / Ю.Н. Кашицына // Российское математическое образование в XXI веке: Материалы XXXVII Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. - Набережные Челны: ООО «ПринтЭкспрессПлюс». - 2018. - 352 с.

[4] http://festival.1september.ru/ фестиваль педагогических идей открытый урок.

[5] https://medianar.ru/sbornik/mezhynarodniy-jurnal-izdanie-2.

[6] https://infourok.ru/user/infourok.

УДК 531.8

Сидорова О.В.[1]

Возможности дистанционного обучения на образовательной платформе «ЯКласс».

Аннотация. В кратком сообщении обсуждается один из вариантов удаленного обучения при проведении дистанционных уроков при помощи программы Zoom. Описываются возможности, которые предоставляет эта программа при использовании платформы «ЯКласс».

Ключевые слова: дистанционное обучение, образовательные ресурсы, платформы удалённого доступа.

Дистанционное обучение как новая форма образования активно формируется и развивается в нашей стране. Основным преимуществом является удобная форма обучения, позволяющая ребятам адаптироваться к изменяющимся социально-экономическим условиям, заниматься самообразованием и успешно погружаться в образовательный процесс. Это обучение строится на основе современных информационных технологий, которые позволяют быстро и гибко координировать меняющиеся потребности в системе образования.

Дистанционный урок в школе — это способ взаимодействия учителя и учеников на расстоянии. Для организации системы дистанционного образования в школе встаёт вопрос о наличии и использовании образовательных ресурсов и сегодня вряд ли возможно обойтись без них. Какие возможности дают электронные образовательные ресурсы каждому из участников образовательного процесса:

[1]ГБОУ СОШ № 456 Колпинского района Санкт-Петербурга

- учителю:
  - проведение видеоуроков;
  - быстрый доступ к учебным материалам;
  - повышение квалификации и обмен опытом в удобное время;
- ученику:
  - посещение уроков онлайн;
  - работа над заданиями в привычном виртуальном пространстве;
  - возможность самостоятельно и правильно организовать свою деятельность;
- родителям:
  - осуществлять контроль над выполнением домашних заданий;
  - отслеживать достижения ребенка.

К современным формам дистанционного обучения можно отнести программу Zoom, которая является платформой для проведение конференций, с удобным функционалом демонстрации экрана. Zoom дает возможность проводить он-лайн занятия с присутствием всех учащихся класса. Образовательная платформа «Учи.ру» предлагает школьникам различные задания, интерактивные курсы по основным предметам. Конечно, любой ресурс не идеален и имеет свои минусы. Например, в Zoom, если нет платной подписки, ограничено время проведения конференций. Также в Zoom и «Учи.ру» в рамках виртуального урока не очень удобно использовать работу на доске, писать на планшете сложно, записи выглядят коряво. В своей работе я активно использую платформу «ЯКласс», которая является одной из востребованных образовательных площадок, и хотела бы выделить положительные стороны данного ресурса:

- грамотно и четко выстроен теоретический материал, который отобран таким образом, что выбрано главное из общего объёма материала, необходимого к усвоению ребенком;
- материал разбит по темам;
- в каждой теме упражнения разного уровня сложности;

- есть готовые домашние, проверочные и контрольные работы; также есть возможность добавлять свои задания;
- работу можно задать всему классу, группе или индивидуально;
- для учеников есть функция «шаги решения», с помощью которой можно разобраться в своих ошибках (возможно при наличии подписки «ЯКласс+»);
- результаты выводятся в таблице, где по каждому ученику можно посмотреть выполнение того или иного задания;
- ученик имеет возможность изучать пропущенные темы без помощи учителя, не прерывая процесса образования;
- существует возможность соревновательного элемента по предметам между учащимися класса, школы, что можно отслеживать в разделе «Топы»;
- использовать возможности образовательного портала можно во время урока, для этого существует режим «Презентация».

Образовательный ресурс «ЯКласс» позволяет учителю автоматизировать процесс подготовки и проверки заданий, реализовать эффективный мониторинг успеваемости и мгновенно создавать отчёты. Школьникам нравится работать на данном ресурсе, так как задания создаются в форме теста и не требует письменных записей, ученик, выполняя задание, заносит ответ в «окошко». Данный ресурс полезен и для родителей, он дает им возможность участвовать в образовательном процессе и видеть результаты работы школьника; помочь ученику устранить пробелы в знаниях.

Из минусов следует отметить отсутствие возможности проведения он-лайн занятий.

Востребованность дистанционной формы обучения растет с каждым годом. Дистанционная форма обучения даст возможность учащимся ликвидировать пробелы в знаниях или углубить свои знания в интересующих их областях, а у школы появляется ещё один оперативный инструмент управления качеством обучения.

УДК 37.031

Г.В. Павилайнен[1], *Н.П. Стукалова*[2]

К вопросу дистанционного образования и дистанционного обучения

Аннотация. В статье сравниваются понятия образования и обучения. Обсуждаются преимущества и недостатки дистанционного обучения. Делается краткий обзор истории дистанционного обучения за рубежом и в нашей стране.

Ключевые слова: образование, обучение, дистанционное обучение, история дистанционного обучения.

Формирование грамотных, компетентных, подготовленных к реалиям современной жизни граждан является важнейшей задачей любого цивилизованного общества. Этот тезис в разных аспектах обсуждается в работах многих авторов [1, 2, 3].

Ключевой момент формирование компетентной личности — это образование.

Современные реалии предлагают социуму новые подходы и методы развития теории познания и её составной части — обучения и формирования разумных существ.

Дистанционное образование — это термин, который используют применительно к широкому спектру образовательных программ и курсов, начиная от обучающих курсов повышения квалификации и заканчивая аккредитованными программами высшего и среднего образования, которые реализуют возможность удаленного общения студентов со своими преподавателями, а школьников с учителями, исключая при этом очное общение.

В период 2019–2022 гг. этот вид образования становится чрезвычайно важной и в некоторые периоды единственной формой обучения школьников и студентов в силу объективных условий массового заболевания COVID-19 и объявления в Российской Федерации тотального карантина с середины марта 2019 по сентябрь 2019, а затем с декабря 2019 до июня 2020 года.

Дистанционное образование взрослых и детей имеет ряд существенных особенностей и отличий. Для взрослых оно является гибкой и удобной формой, устраняющей основной барьер, удерживающий многих занятых людей от продолжения образования, избавляя от необходимости посещать занятия по установленному расписанию и формируя удобный график самостоятельных занятий.

[1] Санкт-Петербургский государственный университет

[2] НО Фонд «УниШанс»

Удалённое образование детей связано, в основном, с особенностями их развития, а также с эпидемиологической обстановкой и не является удобной формой, а характеризуется как вынужденная мера, способствующая решению вопроса о непрерывности обучения в экстремальных условиях.

В этой связи следует различать термины **дистанционное образование** и **дистанционное обучение**.

Принято считать [4], что дистанционное образование — это процесс передачи знаний (за него ответственен учитель, преподаватель и учреждение образования), а дистанционное обучение — это процесс получения знаний (за него ответственен обучаемый).

Дистанционное обучение не предполагает очного общения учителя с учеником, но содержит все компоненты учебного процесса, реализуемые с помощью Интернет-технологий, в том числе интерактивных форм общения в виде электронной почты, видеосвязи, социальных сетей и других форм электронной коммуникации.

Дистанционное обучение хорошо совмещается с очным обучением, в частности, возможны варианты:

- совмещение традиционных очных занятий (урок) с дистанционными (например, проведение консультаций, дополнительных занятий для мотивированных детей или, наоборот, для слабоуспевающих);
- организация постоянной группы обучаемых (киберкласс) из разных учебных заведений (городов, регионов, стран) для прохождения дистанционного курса, за обучением которых следит (консультирует, помогает) куратор;
- дистанционное самообразование, разработка самостоятельного проекта для старшеклассников без поддержки куратора с последующей защитой, обнародованием и обсуждением результатов.

За период 2019-2022 гг. четко выявились как положительные, так и отрицательные стороны дистанционного обучения.

Преимущества дистанционного обучения:

- **Свобода доступа, мобильность** — обучаться можно практически в любом месте и в любое время, используя любые доступные средства (гаджеты). Занятой человек может обучаться без отрыва от основной работы. Возможность обучения дома школьников, находящихся в самоизоляции или на карантине по заболеванию;

- **Снижение затрат на обучение** — обучаемый несёт затраты на носитель информации, но не на методическую литературу. Отсутствуют материальные траты на проезд к месту обучения. Снижается себестоимость обучения в вузах, затраты на содержание учебных заведений, снижается потребность в УПП (учебно-педагогическом персонале) и УВП (учебно-вспомогательном персонале) и происходит экономия фонда заработной платы. Электронные учебные материалы доступнее, чем учебники на бумажной основе, отпадает необходимость функционирования читальных залов в библиотеках, а все необходимые учебные материалы могут предоставляться библиотеками в электронной форме ксероксов;

- **Гибкость обучения** — продолжительность и последовательность изучения материалов обучаемый выбирает сам, реализуется возможность повторения пройденного материала, адаптируется весь процесс обучения под временные особенности усвоения материала конкретной личностью;

- **Возможность развивать компетенции электронного общения** — пользователи электронных курсов развивают свои навыки и знания в соответствии с новейшими современными технологиями и стандартами. Электронные курсы также позволяют своевременно и оперативно обновлять учебные материалы;

- **Потенциально равные возможности обучения** — обучение становится независимым от качества преподавания в конкретном учебном заведении. Дистанционное обучение делает доступным обучение для людей, не имеющих возможности обучаться очно (например, людей с особенностями психофизического развития);

- **Новые возможности обучения иностранным языкам** — дистанционное обучение хорошо подходит для изучения иностранных языков как по отечественным, так и по иностранным методикам, поскольку возможно выбирать преподавателей — носителей языка и проводить лингвистические тренировки произношения с использованием электронных переводчиков и аудироботов.

Недостатки дистанционного обучения:

- **Необходимость сильной мотивации к самообразованию** — Практически весь учебный материал обучаемый осваивает самостоятельно. Это требует развитой силы воли, ответственности и самоконтроля. Поддерживать нужный темп обучения без контроля со стороны удается не всем. Особо страдают дети и их родители, которые не в состоянии правильно контролировать обучение детей и корректировать методику выполнения домашних заданий. Дистанционное обучение требует особые формы домашних заданий. Повышается значение различных тестовых заданий, вариативных форм, которые позволят оценить степень усвоения пройденного учебного материала;

- **Электронное обучение не подходит для развития коммуникабельности** — При электронном обучении личный контакт учащихся друг с другом и преподавателями минимален, возможность передачи жизненного опыта отсутствует. Поэтому такая форма обучения не подходит для развития коммуникабельности, уверенности, навыков работы в команде;

- **Отсутствие возможности обучения ручному труду** — Обучение по предметам, предполагающим большое количество практических занятий, дистанционно затруднено. Это касается прежде всего естествознания, биологии, химии. При обучении в вузе дистанционное обучение невозможно по клинической медицине, экспериментальной физике, органической и неорганической химии, по другим техническим дисциплинам, связанным с моделированием, конструированием и проведением экспериментов;

- **Проблема идентификации пользователя** — Самый эффективный способ проследить за тем, честно и самостоятельно ли обучаемый сдавал экзамены или зачеты, — это видеонаблюдение или очный зачет. Форма дистанционного зачета или экзамена не дает возможности объективно оценить уровень компетенции, поскольку беседа «вопрос-ответ» практически отсутствует;

- **Недостаточная компьютерное и Интернет-обеспечение территории** — Во многих областях России дистанционное обучение осложнено отсутствием необходимой инфраструктуры, связи, электронной техники. В этой связи возникает необходимость развития электронных средств коммуникации как государственной программы на всей территории страны;

- **Критерии оценки знаний** — При оценке результатов дистанционного обучения кардинально меняется методика и критерии оценивания компетенций, полученных по итогам обучения. Формальные опросы и вопросы позволяют находить формальные ответы в Интернете, при этом материал не усваивается, не доходит до разума и понимания.

История развития дистанционного (удаленного) обучения. По сути, дистанционное обучение появилось гораздо раньше, чем обучение через Интернет, так как этот метод обучения существовал задолго до того, как люди начали использовать компьютеры. Фактически с начала XVIII века и по сей день концепция дистанционного образования осталась прежней: менялись только каналы коммуникации [4].

Рис. 1. Исаак Питман.

Почти триста лет назад господин **Калеб Филипс** (англ. *Caleb Phillips*) в 1728 году стал первым организатором системы дистанционного образования, разместив в бостонской газете объявление о наборе студентов из пригородов на курсы быстрого письма и бухгалтерии. Благодатной почвой для появления дистанционного образования стало развитие регулярных почтовых служб: без этого канала связи удаленная коммуникация была бы слишком затянута и нестабильна.

Английский педагог, изобретатель системы стенографии **Исаак Питман** (англ. *Isaak Pitman*) в 1840 году, используя почтовые отправления, начал обучать стенографии студентов в Соединенном Королевстве.

В Америке в 1873 году **Анна Элиот Тикнор** (англ. *Anna Eliot Ticknor*) взяла за основу английскую программу «Общество поддержки домашнего обучения» и создала систему обучения по почте для женщин под названием «Общество Тикнор».

Рис. 2. Анна Элиот Тикнор.

А в 1874 году программа обучения по почте была предложена Университетом штата Иллинойс. **Вильям Рейни Харпер** (англ. *William Rainey Harper*) считающийся в Америке «отцом обучения по почте», в 1892 году учредил первое отделение дистанционного обучения в Университете Чикаго. В 1906 году преподавание по почте было введено и в Университете штата Висконсин.

Рис. 3. Вильям Рейни Харпер.

В Австралии в 1911 году начали свою работу курсы вузовского уровня в Квинслендском университете в Брисбене. Для детей, проживающих далеко от школ, в 1914 году было организовано обучение по почте по программе начальных классов. Вскоре подобные системы для школьников стали использоваться в Канаде и Новой Зеландии.

В 1939 году во Франции для обучения детей, не имеющих возможности посещать школу, был создан Государственный центр дистанционного обучения в Гренобле, крупнейшее учебное заведение дистанционного образования в Европе.

В 1946 году на дистанционные формы обучения перешел Южноафриканский университет.

Дистанционное образование в России стало развиваться после революции 1917 года как образовательная программа для взрослых людей, которая впоследствии приобрела черты курсов повышения квалификации.

Была разработана особая, «консультационная» модель дистанционного образования, не предполагающая визуального контакта. Данная модель широко использовалась, например, на Курсах красных командиров (ККК), методический центр Курсов размещался в Петрограде, в Петроградском Совете рабочих и крестьянских депутатов, в Смольном. Основная задача Курсов была ликвидация неграмотности высшего командного состава Красной Армии без отрыва, так сказать, от производства, т.е. от непосредственного руководства вверенных им армейских соединений. Кроме этого обучающихся снабжали методическими руководствами по освоению чтения, агитационными материалами. По завершении обучения предполагались очные экзамены, для которых военачальники вызывались в Петроград. Для проживания командированных на Шпалерной улице была организована специальная казарма, в которой, кстати, жили также преподаватели русского языка, литературы, математики и истории ВКПб. В то время Шпалерная улица называлась улицей Воинова. Переименована Шпалерная была сразу после революционных событий вплоть до девяностых годов двадцатого века, в честь убитого в 26 июля 1917 года журналиста и поэта Ивана Авксентьевича Воинова (1885–1917), который будучи большевиком, распространял в казармах «Листок Правды» именно на этой улице, где его и убили [5].

Бабушка одного из авторов этой статьи — Торопова Анна Трофимовна (1900–1987) после окончания отделения русского языка и литературы Педагогического института в 1924 году была направлена на работу преподавателем Курсов. По её воспоминаниям командиры из рабочих и крестьян были малограмотными и малообразованными людьми, но искренне стремившимися к знаниям. В Республике Советов была организована целая сеть ККК, практически в каждом губернском центре. По данным БСЭ «...Подготовка и накопление кадров красных командиров (краскомов) первоначально осуществлялась с помощью многочисленной сети командных курсов. В 1918 г. сеть этих курсов, краткая учеба на которых перемежалась с выездами на фронт, выпустила около 1.700 командиров, в 1919 г. — около 12 тыс., а в 1920 — около 20 тыс. командиров» [6].

После Великой Отечественной войны 1941–1945 гг. в СССР формируется система заочного высшего образования для руководителей производства, начальников цехов, мастеров и инженеров технических специальностей. К 1960 году в СССР было образовано 11 заочных университетов, а также заочные факультеты в очных высших учебных заведениях. Для профориентации школьников при многих вузах формировались математические кружки и школы. Например, на математико-механическом факультете Ленинградского государственного университета (ныне СПбГУ) профессором Марком Ивановичем Башмаковым (1937–2022) в 1961 году были организованы две специализированные математические школы ЮМШ (юношеская матшкола) и ЗМШ (заочная матшкола). Занятия в ЮМШ вели студенты старших курсов и аспиранты под руководством преподавателей, в ЗМШ шла активная переписка со школьниками всей страны, которые получали и выполняли контрольные задания по математике и высылали тетради по почте, а затем получали их обратно с рецензиями и рекомендациями. С 1968 года ЮМШ проводили выездные математические школы в летние месяцы. В частности, первая выездная школа была проведена профессором Сергеем Владимировичем Востоковым (род. 1945), который бессменно с 2007 года возглавляет Фонд содействия математическому образованию и поддержки исследований в области точных наук «УниШанс». Практика выездных математических семинаров с участием школьников активно используется в работе Фонда [1].

Создание в 1969 году Открытого университета Великобритании способствовало развитию дистанционного обучения в странах Европы и Азии.

В 1979 году в Китае была организована Национальная сеть радио- и телевизионных университетов (*Central Radio and TV University, CRTVU*).

К середине 1990-х гг. сформировалось представление о дистанционном образовании как о системе, основанной на интегрированной информационно-образовательной среде обучения, в которой преподаватель не только передаёт информацию, но и координирует процесс усвоения, а студент самостоятельно разрабатывает индивидуальную образовательную траекторию из модульных компонентов курса.

В Республике Беларусь с начала 2000-х гг. использование информационно-коммуникационных технологий привело к появлению трансляционной модели и расширению технического арсенала дистанционной модели образования. В настоящее время активно формируются методики совместного традиционного и электронного образования в средней и высшей школе [7].

Проследив историю развития дистанционного образования, можно констатировать, что оно всегда соответствовало развитию электронно-информационного общества с его новыми возможностями и запросами. Методы организации дистанционного обучения будут и в будущем синхронно модифицироваться с появлением новых технологий.

Список литературы

[1] Павилайнен Г.В., Франус Д.В. Проект «УниШанс» как новая современная форма образовательной деятельности в области точных наук. // Материалы Межрегиональной научно-практической конференции, 24–26 февраля 2017 г., Санкт-Петербург: Изд-во «ВВМ», С. 6–10.

[2] Рудакова Т.В., Павилайнен Г.В. Проблема формирования целостного мировоззрения личности в контексте глобальных вызовов XXI века. // Материалы Межрегиональной научно-практической конференции, 24–26 февраля 2017 г., Санкт-Петербург: Изд-во «ВВМ», С. 92–106.

[3] Разин А.Д., Некрасов К.Ю. Усовершенствование эффективности усвоения лекций путём внедрения он-лайн курсов на платформу "Открытое образование". // Материалы Второй межрегиональной научно-практической конференции, 20–22 декабря 2019 г., Санкт-Петербург: Изд-во «ВВМ», С. 107–110.

[4] http://dtraining.web-3.ru

[5] https://razned.ru/articles/urban-property/the-story-of-a-name-shpalernaya-street/

[6] Большая Советская Энциклопедия. Т. 47. М., 1940, С. 780–781.

[7] Гладкая А.В., Кропачева Н.Ю. Сочетание традиционного и электронного обучения. // Материалы Межрегиональной научно-практической конференции, 24–26 февраля 2017 г., Санкт-Петербург: Изд-во «ВВМ», С. 88–92.

УДК 531.8

Кузьмин А.В.[1], *Рыжикова Н.А.*[2]

Методы организации дистанционного формата электронного обучения

Аннотация. В статье описывается практика работы в творческих коллективах технической направленности с применением дистанционного формата электронного обучения в дополнительном образовании. Отмечаются плюсы и минусы дистанционного обучения. Рассматриваются подходы к мотивации учащихся.

Ключевые слова: дистанционное обучение, дополнительное образование.

Технологический прогресс и развитие информационных технологий открывают новые горизонты для общения и обмена информацией. Интернет-технологии объединяют людей по всему миру, обеспечивая комфортные условия для созидания и творчества.

Изучение опыта интеграции дистанционного формата электронного образования в учреждениях дополнительного образования свидетельствует, что образование может быть эффективным и интересным, однако имеется ряд проблем, требующих решения. В процессе подготовки образовательных материалов мы сталкивались со стереотипами, касающихся скептического настроя по отношению к дистанционному обучению. Действительно, данная форма работы уникальна и требует особого подхода.

Изучая опыт коллег в учреждениях дополнительного образования, мы выделили следующие плюсы дистанционного образования:

- гибкие временные и пространственные рамки освоения материала;
- возможность проводить онлайн-занятия для большего количества учащихся;
- свободный и постоянный доступ к справочным материалам, возможность оперативного обращения к ним;
- возможность компьютерной визуализации материала, достигаемая за счет современных программных средств текстовой, графической, звуковой информации.

[1]ГБУДО Дворец творчества детей и молодежи Колпинского района СПб
[2]ГБУДО Дворец творчества детей и молодежи Колпинского района СПб

Однако также мы столкнулись с рядом недостатков, требующих решения. К ним можно отнести:

- технологическое оснащение;
- большие временные затраты на подготовку обучающих материалов педагогом;
- отсутствие полноценного общения учащихся с педагогом и друг с другом, недостаточность обратной связи;
- отсутствие мотивации и самодисциплины учащихся.

Для решения вышеперечисленных проблем и обеспечения результативности дистанционного обучения для достижения обучающих, развивающих и воспитательных задач на занятиях с использованием форм электронного обучения в рамках реализации дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы (ДООП) «Разработка компьютерных игр» использовался комплексный подход, активно применяемый в проектной деятельности, основанный на жизненных циклах. Данная модель применяется в проектной деятельности для организации многократного исполнения набора инструкций. Любой цикл характеризуется завершенностью и повторяемостью взаимосвязанных этапов на определенном промежутке времени. Можно выделить общий цикл и его этапы, подразумевающие выполнение малых циклов.

Общий цикл подразумевает развитие обучающегося через поэтапное освоение навыков разработки и программирования. Этапы представляют из себя проекты, расположенные в порядке нарастающей сложности. Созданная педагогическая виртуальная среда формирует созидательный образовательный процесс, в котором наравне с нравственными устоями формируются коммуникационные способности. Малые циклы — это этапы разработки проекта. Они имеют общую структуру, но различаются по содержанию. Малый цикл включает в себя развитие предметных навыков, решение поставленных задач и развитие аналитических способностей. Инструментом достижения развивающих задач являются специально подготовленные и отснятые образовательные видеозанятия.

Для достижения обучающих задач используются защищенные виртуальные классы на бесплатной платформе Discord, которая предлагает:

- Текстовые каналы для организации занятий, семинаров и домашних заданий, чтобы учащиеся могли вместе работать над задачами по началу математического анализа;

- Голосовые каналы для личных бесед, групповых обсуждений, консультаций и онлайн конференций;
- Учебную среду для проведения занятий в режиме реального времени, на которых одновременно могут присутствовать до 50 человек.

Онлайн конференции, помимо возможности получить углубленные знания по дисциплине, позволяют обучающимся активно взаимодействовать с педагогом.

Достижение развивающих задач, поставленных ДООП, осуществляется через развитие творческих способностей и алгоритмического мышления обучающихся и требует особого подхода, поэтому видеозанятие имеет трехступенчатую структуру.

Темы видеозанятий совпадают с календарно-тематическим планом и публикуются согласно расписанию. Также производится контроль прохождения и качества освоения опубликованных материалов. Как показывает практика, на ознакомление и выполнение задания из видеозанятия учащемуся в среднем требуется 2 академических часа.

1) Теоретическое введение

Первый этап представляет собой беседу, где обучающиеся получают необходимую теоретическую информацию. Видеоряд представляет собой демонстрацию работы с программным обеспечением и графическую визуализацию абстрактных понятий, например, цикл, класс или переменная, сопровождаемые комментариями педагога.

2) Постановка задачи

После теоретического введения педагог формулирует задачу и подает сигнал о приостановке видео для самостоятельной работы обучающихся над поставленной задачей. Как показала практика, на основе исходных данных обучающиеся находили самые разные алгоритмы решения, после чего выбирался самый емкий и разумный из заявленных.

3) Практическая часть

Педагог пошагово демонстрирует алгоритм верного решения поставленной задачи. Обучающиеся сравнивают свои решения или находят ошибки, из-за которых не получалось реализовать код самостоятельно.

Большое значение для достижения комплекса задач и развития предметных и метапредметных компетенций является инициирование и поддержка проектной деятельности учащихся. В нашем случае, обучающиеся сформировали коллективы, разрабатывающие и реализующие индивидуальные проекты. Под контролем педагога учащиеся имеют возможность проверить качество собственного продукта на коммерческих платформах. Таким образом, учащиеся знакомятся с азами финансовой грамотности и экономической теорией, воспитывается здоровое отношение к предпринимательской деятельности и работе в коллективе.

На протяжении всего периода обучения учащимся оказывается консультационная поддержка, инициируемая как ребенком, так и педагогом по мере необходимости, заключающаяся в получении индивидуальной оценки работы и рекомендаций, решении возможных технических проблем.

В рамках межличностного взаимодействия обучающихся в процессе обсуждения нюансов и возможных решений поставленных задач появляется соревновательный аспект, который пробуждает живой интерес к освоению дисциплины. К числу мотивирующих факторов также можно отнести участие в соревнованиях по разработке игр и киберспорту.

Исходя из собственного опыта, успех зависит от сочетания компетенций педагога. Процесс обучения делают структурированным, интересным и увлекательным не только хорошее знание и нестандартное применение совокупности дидактических принципов, методов, педагогических технологий и приемов, но и грамотная модерация и организация сервера, поддержка инициативы учащихся и постановка интересных задач.

Кроме того, нами замечена положительная тенденция внедрения элементов наставничества. Выпускники и старшие ребята активно консультируют новичков по ряду вопросов. Внедрение элементов целевой модели наставничества, начатое в 2020 году, влечет за собой измеримое улучшение личных показателей обучающихся, связанное с развитием гибких навыков и метакомпетенций, а также улучшение психологического климата среди обучающихся на образовательном сервере. Созданные нами условия благоприятны для максимально полного раскрытия потенциала личности, необходимого для успешной личной и профессиональной самореализации в современных условиях изменчивости, а также для формирования эффективной системы поддержки, самоопределения и профессиональной ориентации обучающихся.

Таким образом, мы подошли к решению основных выделяемых специалистами проблем в дистанционном формате электронного обучения и увидели возможности их решения в организации образовательного процесса по системе проектной деятельности, построенной на жизненных циклах. Несомненно, временные затраты на подготовку обучающих материалов педагогом максимальны на начальных этапах реализации дистанционного обучения. В дальнейшем же на обновление и усовершенствование материала будет уходить меньше времени.

Дистанционный формат электронного обучения действительно является инновационным и обладает большими перспективами развития в будущем. Мы считаем, что наш опыт может стать основой для долгосрочных позитивных преобразований в системе дополнительного образования.

Секция 2.

Методические аспекты преподавания математики

УДК 519.1

Кропачева Н.Ю.[1], *Леонова О.О.*[2], *Федорова М.Ю.*[3]

Графовая алгоритмизация изучения теории рядов

Аннотация. В статье рассматривается применение графового моделирования при изучении теории рядов. Графические модели позволяют структурировать теоретический материал, наглядным образом классифицировать ряды и признаки их сходимости, а при практическом исследовании обоснованно выбирать необходимый признак сходимости и применять его.

Ключевые слова: графовые модели, обучающиеся, числовые ряды, сходимость, признаки сходимости.

Независимо от формы проведения занятий, современный подход к обучению требует информативности, структурированности, строгой логической обоснованности и наглядности в подаче материала. Одним из требований образовательных стандартов является широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных методов обучения [1, 2].

При удаленном формате, когда пропадает возможность живого человеческого общения, возникает проблема удержания внимания обучающихся на логической линии развития изложения. Конечно, можно сформулировать эту линию в самом начале изложения темы, но тогда она прозвучит формально, не затронет эмоции обучающегося, ибо с её фактическим содержанием он познакомится дальше, по мере изучения темы. Этот недостаток сглаживается при аудиторном формате обучения, когда есть возможность словом, жестом, движением, взглядом — различными формами вербального и невербального общения подчеркнуть тот или иной момент изложения, расставить акценты в ключевых местах темы.

При работе в аудитории практически мгновенно возникает обратная связь: обучающиеся могут без промедления, сразу задавать вопросы, выражать свое недоумение по поводу той или иной формулировки. Это позволяет преподавателю уточнять те или иные вопросы, корректировать изложение под конкретную аудиторию. При удаленном формате обучения, когда это происходит в «он-лайн аудитории», реакции с обеих сторон замедляются, их точность (точность вопросов и ответов) падает, требуется гораздо больше сил и средств для доведения до слушателей той или

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: natakr4@gmail.com
[2]ВУНЦ ВМФ «Военно-морская академия»
[3]Санкт-Петербургский государственный университет

иной мысли. Кроме того, как показывает опыт, восприятие доски с экрана монитора, несомненно, хуже, чем непосредственно в аудитории. Подкрепление занятия PDF– или WORD– файлами не решает проблем наглядности и динамичности обучения, генеральной линии и акцентирования особых («тонких») моментов.

Одним из сложных для понимания обучающимися разделов математики является теория рядов [3]. Сложность заключается не только в том, что базовые понятия этого раздела — ряд, его сходимость, сумма ряда, остаток — опираются на непростое для восприятия понятие предела и требуют математического воображения для представления суммы бесконечного числа членов, но и в том, что выбор признака сходимости является своего рода искусством, обусловленным типом предложенного ряда. Определиться с типом ряда и по нему выбрать подходящий признак — главная часть решения задачи сходимости ряда.

В данной работе была поставлена цель — на примере теории рядов предложить такое изложение основного учебного материала, которое облегчало бы понимание темы, логических связей между её основными понятиями, систематизировало бы полученные знания, что привело бы к эффективной работе на практике. Для этого была предложена алгоритмизация обобщающего учебного материала и в качестве формы подачи выбрано графическое моделирование — один из методов имитационного моделирования, позволяющий достаточно компактно и информативно передать структуру сложной системы, облегчить её исследование [4, 5]. Граф представляет собой совокупность вершин, описывающих различные состояния системы, и соединяющих их рёбер, которые указывают на возможность перехода из состояния в состояние. Наглядность такого представления ускоряет решение практических задач, упрощает расчёты, повышает эффективность научной, инженерной и конструкторской деятельности. Методы теории графов широко используются в процессе изучения различных дисциплин, как в излагаемом материале, так и при его изучении.

Рассмотрим алгоритмы изложения материала по теории рядов.

Первый вопрос — определение типа ряда (рис. 1): числовой или функциональный. Если числовой, то это может быть ряд с положительными членами или знакопеременный, в том числе знакочередующийся. Если функциональный, то ряд может оказаться степенным, тригонометрическим (ряд Фурье) или рядом по произвольной системе функций (обобщенный ряд Фурье).

Второй вопрос — исследование сходимости предложенного ряда. Этот вопрос решается применением различных признаков в зависимости от типа ряда. Для числовых рядов всё начинается с необходимого условия сходимости. Если оно выполнено, то для рядов с положительными членами задача заканчивается выбором соответствующего признака: один из двух признаков сравнения, радикальный признак Коши, признак Даламбера или интегральный признак Коши (рис.2). Для знакочередующихся рядов после проверки необходимого условия сходимости проводится исследование на абсолютную сходимость по одному из признаков сходимости рядов положительными членами (рис.3). Если ряд, составленный из модулей членов исходного ряда, расходится, то по признаку Лейбница проверяется условная (неабсолютная) сходимость.

Для функциональных рядов исследование сходимости ограничивается рассмотрением степенных рядов. При замене $t = x - x_0$, алгоритм исследования ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n$ (рис. 4) включает в себя определение радиуса сходимости, исследование сходимости на концах полученного интервала и окончательное определение интервала (области) сходимости.

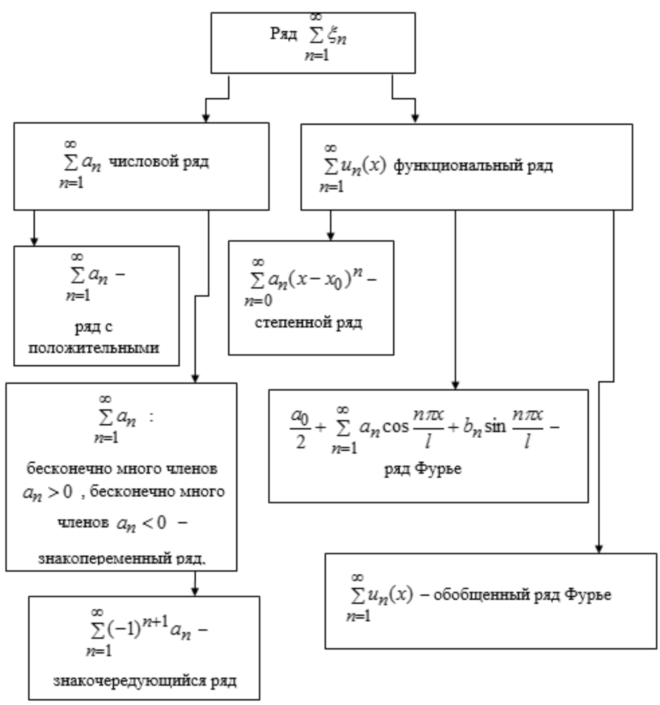

Рис. 1. Классификация рядов.

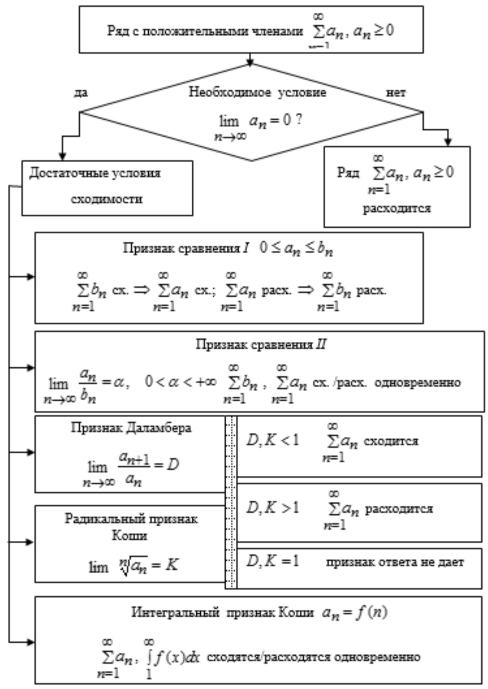

Рис. 2. Признаки сходимости рядов с положительными членами.

Рис. 3. Исследование сходимости знакочередующихся рядов.

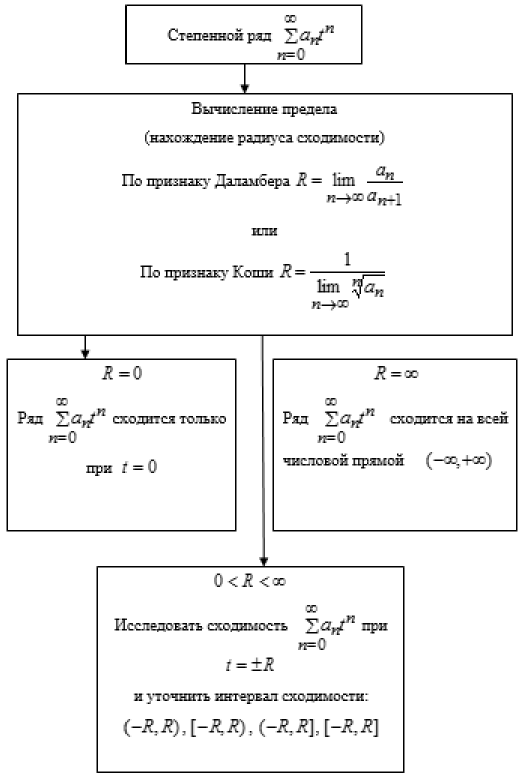

Рис. 4. Исследование сходимости степенного ряда.

Как показала практика, использование графического моделирования делает наглядным алгоритм исследования рядов, что способствует повышению когнитивных способностей обучающихся, их заинтересованности в получении знаний. А также использование предложенных схем облегчает решение практических задач.

Список литературы

[1] Колесов А.К., Кропачева Н.Ю. Использование инструментария математического моделирования в образовании. Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований № 2 ч. 3, 2016г., С. 388–390.

[2] Kolesov A.K., Kropacheva N.Y. The use of graph simulation to enhance learning of students. Contentк 3rd International Conference "Research, Innovation and Education"by SCIEURO in London, 25-30 January 2016, P.89–92

[3] Ефимова Т.А., Сахаров В.Ю. Числовые, функциональные и степенные ряды: Учебное пособие. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1997. 100 с.

[4] Бунякина Е.В., Кропачева Н.Ю., Федоров А.Б., Федорова М.Ю. О графовом моделировании как части когнитивно-креативного процесса обучения. Военный институт (военно-морской политехнический) ВУНЦ ВМФ "ВМА сб. статей и докладов научно-исторической конференции "220 лет военно-морскому образованию России ч. 1, СПб, 2019.

[5] Бунякина Е.В., Кропачева Н.Ю., Федоров А.Б., Федорова М.Ю. Применение инструментария теории графов при обучении. ВКА им. А.Ф. Можайского, сб. трудов III Всероссийской военно-научной конференции "Актуальные проблемы подготовки военных специалистов в области сбора и обработки информации техническими средствами ч.2 / Ред. кол.: Д.Н.Бирюков, К.В.Сазонов. - СПб.:, 2019. - с. 225–231.

УДК 372.851

Кропачева Н.Ю.[1], *Тихомиров А.С.*[2], *Фёдорова М.Ю.*[3]

Характерные ошибки при решении задач ЕГЭ на классическую вероятность

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы, связанные с типичными ошибками при решении школьниками задач ЕГЭ по теории вероятностей. Проводится сравнительный анализ ряда задач. Цель статьи — помочь учителю сориентироваться в содержании и преподавании теории вероятностей.

Ключевые слова: теория вероятностей, парадоксы, ошибки при вычислении, равновозможные попарно несовместные события, полная группа событий.

В 2021/22 учебном году в ЕГЭ по математике включены две задачи на вычисление вероятностей. Обычно изучение элементов теории вероятностей в школе начинается с классического подхода.

Под вероятностью понимают численную величину, характеризующую степень объективной возможности появления события при многократном проведении некоего испытания. Классическое определение вероятности основано на понятии равновозможности исходов. Исходы — элементарные события — образуют полную группу (все исходы равновозможны) и являются несовместимыми, то есть в результате одного испытания происходит один и только один из исходов. В общем случае равновозможность является неопределяемым понятием и устанавливается путем анализа свойств изучаемого процесса, происходящего в задаче. Например, при бросании игральной кости в силу однородности материала, из которого сделана кость и непредвзятости её

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: natakr4@gmail.com
[2]Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого
[3]Санкт-Петербургский государственный университет

бросания, такими равновозможными исходами могут служить числа от 1 до 6.

Если рассмотреть некоторое событие A — появление чётного числа очков, как результат бросания игральной кости, то некоторые исходы влекут его появление, а некоторые нет. Например, выпадение 2 означает появление события A, а при выпадении 3 событие A не происходит. В первом случае говорят, что исход благоприятствует событию A, во втором — нет.

Вероятностью события называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу.

Итак, вероятность события определяется формулой:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число благоприятствующих исходов, n — общее число всех возможных исходов.

Если решаем задачу, в которой легко определяются равновозможные несовместные исходы, то проблем при подсчёте не возникает.

Например, рассмотрим такую задачу: в ящике содержится 6 одинаковых шаров, причем 2 — красных, 3 — синих и 1 — белый. Испытание состоит в извлечении шара из урны. Очевидно, возможность вынуть наудачу из урны цветной шар (т. е. красный или синий) больше, чем возможность извлечь белый шар. Эту возможность можно охарактеризовать числом, которое и назовем вероятностью события A — появления цветного шара. Формализуем процесс, происходящий в задаче. В урне 6 шаров, поэтому возможно 6 различных исходов, хотя внешне будем видеть только 3: появление красного, синего или белого шара. Чтобы снять это противоречие, мысленно пронумеруем шары, тогда убеждаемся в том, что исходов 6: они образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится один и только один шар) и они равновозможные (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны). Событию (появлению цветного шара) благоприятствуют 5 исходов: появление любого красного или синего шара. Следовательно, $n = 6, m = 5, P(A) = 5/6$. Это число дает количественную оценку степени возможности появления цветного шара. В этой задаче все просто. Также просто, как найти вероятность выпадения чётного числа очков (событие) при бросании игральной кости: всего 6 исходов, благоприятствуют событию A — 3 исхода: выпадение

$2, 4, 6$ очков. Следовательно, $P(A) = 1/2$.

Но когда школьники начинают решать чуть более сложные задачи по теории вероятностей, они часто не обращают внимание на слова «равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу». В простейших задачах элементарные исходы пересчитываются буквально «на пальцах», но в этой кажущейся простоте часто и кроется большая опасность ошибки [1, 2].

Приведем пример на ошибку интуиции исследователей, так называемая задача Даламбера [3]. Пусть симметричная монета бросается два раза с помощью некоторого механизма, обеспечивающего произвольное вращение монеты в воздухе и её непреднамеренное падение на некоторую поверхность стола. Найти вероятность того, что хотя бы раз появится герб (ожидаемое событие). По одной из легенд, Даламбер и его последователи решали эту задачу и рассуждали следующим образом. Герб появится либо при первом бросании, и в этом случае второе бросание не нужно, либо только при втором, либо герб совсем не выпадает. Всех элементарных случаев три. Из них благоприятствуют ожидаемому событию только два. Следовательно, искомая вероятность равна $P(A) = 2/3$.

Но, если внимательно проанализировать процесс, происходящий в задаче, видим, что число возможных исходов в серии из двух испытаний равно 4: «Герб, Герб», «Герб, Число», «Число, Герб», «Число, Число».

Число исходов, благоприятствующих интересующему событию, равно 3: «Герб, Герб», «Герб, Число», «Число, Герб».

Получаем, $P(A) = 3/4$.

Решение этой задачи описывает парадокс независимости. Если обозначить через события A и B выпадение герба на первой и на второй монете соответственно при бросании двух монет, а через C появление только одного герба, то независимость A и B интуитивно видна, а независимость A и C, B и C нет.

Рассмотрим еще один пример, который известен в теории вероятностей как «Парадокс девочки и мальчика», «Дети мистера Смита» и «Проблемы миссис Смит».

В семье имеется 2 ребенка. Найти вероятность того, что в семье родится хотя бы один мальчик (ожидаемое событие).

Задача по своей сути не отличается от предыдущей. Только под событием понимается рождение ребенка. Если рождение мальчика или девочки в одном испытании представляют собой случайные события, то число равновероятных исходов равно 4: «Мальчик, Мальчик», «Мальчик, Девочка», «Девочка, Мальчик», «Девочка, Девочка». Только первые 3 исхода благоприятствуют событию A. Поэтому $P(A) = 3/4$.

Ошибочное решение в этом случае выглядит так: Число возможных вариантов в серии из двух испытаний равно 3: «Мальчик, Девочка», «Мальчик, Мальчик», «Девочка, Девочка».

Первые два исхода благоприятствуют событию A. Поэтому $P(A) = 2/3$.

Три события: «два мальчика», «один мальчик и одна девочка» и «две девочки» не являются равновозможными, поскольку «Мальчик, Мальчик» и «Девочка, Девочка» представляют собой элементарные события, тогда как событие «один мальчик и одна девочка» — составное событие, которое разлагается на 2 исхода: «Мальчик, Девочка» и «Девочка, Мальчик» [4].

Как известно, развитие теории вероятностей как науки началось в середине XVII века в связи с расчетом шансов в азартных играх. Поэтому приведем еще один пример ошибочного решения.

Задача. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет равна семи.

Кажется, что в данной ситуации возможны два исхода: либо сумма будет равна семи, либо не будет. Получаем общее число исходов — два, а из них благоприятный — один (сумма равна семи). Значит, по формуле вероятности: $P(A) = m/n = 1/2$.

Но, каждая кость имеет 6 граней, на которых расположены точки (очки) от одного до шести. Если бросают оба кубика одновременно, число очков, выпавших на первом кубике, не зависит от того, какое число очков в это время выпадет на втором. Таким образом, шесть исходов первого кубика сочетаются с шестью исходами второго. И общее число равновозможных исходов: $6 \cdot 6 = 36$. Благоприятных исходов (сумма равна семи) будет равно $6\colon 3+4; 4+3; 2+5; 5+2; 6+1; 1+6$. Следовательно, ответ на вопрос задачи: $P(A) = m/n = 6/36 = 1/6$.

Как видим, при неправильных решениях не учтено, что события должны быть

- равновозможны;
- попарно несовместны;
- и образовывать полную группу событий.

Существенные недостатки классического подхода привели к созданию совершенно нового подхода в первой половине двадцатого столетия. При таком подходе вероятности событий определяются с помощью аксиом и теорем. Теория вероятностей стала математической наукой в 1933 году после выхода книги академика А.Н. Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», в которой предложена аксиоматика теории вероятностей. С помощью этой аксиоматики удалось объяснить многочисленные парадоксы теории вероятностей. Но при этом не следует забывать, что классический подход развивает интуицию вероятностно-статистического мировоззрения.

Также при решении задач на вероятность, следует обратить внимание на такой, как, казалось бы, очевидный момент, как внимательное чтение условия задачи. Задачи по теории вероятностей отличаются богатством формулировок, многие из которых вызывают у слушателей растерянность. Необходимо представлять себе жизненный процесс, происходящий в условии. Очень много ошибок допускают ученики, торопясь сделать задание, которое, как им кажется, уже знакомо и, не вникнув в исходные данные, допускают ошибки [5].

Рассмотрим похожие, но абсолютно разные по смыслу (и, естественно, по способу решения) задачи [6].

Задача 1. *Фабрика выпускает сумки. В среднем из* 80 *качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной.*

Решение. Вероятность найдем по формуле: $P(A) = n/m$. *Общее количество сумок* $m = 80$. *Здесь из* 80 *сумок* 8 *некачественных, следовательно, остальные качественные, т.е.* $n = 80 - 8 = 72$ *сумки.* $P(A) = m/n = 72/80 = 9/10 = 0,9$. *Ответ:* 0,9.

Задача 2. *Фабрика выпускает сумки. В среднем на 80 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.*

Решение. Вероятность найдем по формуле: $P(A) = n/m$. *В этой задаче, в отличие от предыдущей, изменено условие. Необходимо обратить внимание что на* 80 *качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Таким образом, общее количество сумок складывается из качественных (*80 *штук) и некачественных (*8 *штук), т. е.* $m = 80 + 8 = 88$. *Среди этих* 88 *сумок, качественных было* 80 *штук,* $n = 80, P(A) = 80/88 = 10/11 \simeq 0,91$. *Ответ:* 0,91

Задача 3. *Фабрика выпускает сумки. В среднем, на каждые*

80 *сумок приходится* 8 *сумок со скрытыми дефектами. ОТК пропускает каждую* 4 *сумку с дефектами и все качественные сумки. Все прошедшие ОТК сумки поступают в магазин. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. (Если необходимо, результат округлите до сотых).*

Решение. Случайный опыт — покупка в магазине сумки. Интересующее событие — сумка качественная. Вероятность найдем по формуле: $P(A) = n/m$. *В отличие от предыдущих задач, в этой задаче добавлено действие — поступление сумки в магазин. Оно складывается из качественных (*$80 - 8 = 72$ *штук) и некачественных, прошедших ОТК* $(8 : 4 = 2)$, *т. е.* $n = 72 + 2 = 74$. *Среди этих сумок в магазине качественных было* 72, *т. е.* $m = 72$, *тогда* $P(A) = 72/74 = 0.97$. *Ответ:* $0,97$.

Таким образом, при изучении основ теории вероятностей, можно существенно помочь слушателям, если уделить больше внимания:

1. внимательному прочтению условия задачи, уяснению всех нюансов и подробностей, т.е. представлению жизненного процесса, происходящего в условии задачи;
2. выстраиванию правильной схемы равновозможных элементарных исходов;
3. анализу и выстраиванию логической схемы решения задачи.

В результате занятий теорией вероятностей вырабатывается навыки анализа жизненных решений, оценки степени риска и шансов на успех, исследования взаимосвязи явлений [7, 8].

Список литературы

[1] Гефан Г.Д., Кузьмин О.В. Типология ошибок и заблуждений, связанных с задачами курса теории вероятностей. Часть 1: Случайные события // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2012. № 12 (71) С. 187–193.

[2] Зепнова Н.Н. О проблемах, возникающих у учащихся при решении задач математической логики и теории вероятностей. // URL:http://math.isu.ru/ru/chairs/tpdm/docs/Platonovskie2021/Zepnova.pdf

[3] Габор Секей. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990. 240.

[4] URL: https://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Probability/Tab/Probab/01-03.htm

[5] Амерханова Т.П. Что необходимо учитывать при решении задач по теории вероятностей // URL: https://urok.1sept.ru/articles/634433

[6] URL: https://dankonoy.com/ege/ege3/archives/15729 Образовательный портал для подготовки к экзаменам

[7] Кропачева Н.Ю., Павилайнен Г.В., Франус Д.В. Преподавание математики с учетом реалий современности. // Современные проблемы науки и образования. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2018. Том III. С. 58–61

[8] Кропачева Н.Ю., Тихомиров А. С., Федорова М.Ю. О графовой формализации текстовых задач. // Материалы второй межрегиональной научно-практической конференции преподавателей математики и физики под девизом «Математика — это просто», Санкт-Петербург, 20–22 декабря 2019, СПб.: Изд-во ВВМ, 2020, С.117–122

УДК 511.11+519.115.1

Орехов А.В.[1]

Множество натуральных чисел, метод математической индукции, бином Ньютона

Аннотация. В статье при помощи аксиом Пеано определяется множество натуральных чисел. Обосновывается применение метода математической индукции. С его помощью доказываются арифметические свойства сложения и умножения натуральных чисел. Вводятся конструкции конечных сумм и произведений. Определяется степень с натуральным показателем, доказываются её свойства. При помощи понятий неупорядоченного и упорядоченного множеств, вводятся основные понятия комбинаторики. Доказывается формула бинома Ньютона. Рассмотрено решение нескольких типовых задач.

Ключевые слова: аксиомы Пеано, натуральные числа, метод математической индукции, перестановки, размещения, сочетания, бином Ньютона.

1. Определение множества натуральных чисел. Изначально потребность счета предметов привела к возникновению натуральных чисел; согласно историческим данным все народы имевшие письменность владели этим понятием. Формальное определение натуральных чисел в 1889 году сформулировал итальянский математик Джузеппе Пеано; для этого он использовал систему из пяти аксиом, которые с тех пор носят его имя — *аксиомы Пеано*.

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: a_v_orehov@mail.ru

Определение 1. Будем называть $\mathbb{N}$ множеством *натуральных чисел* если:

1) $1 \in \mathbb{N}$;
2) Для $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists!\ S(n) \in \mathbb{N}$; $S(n)$ называют *следующим* натуральным числом после n. Формальное равенство $y = S(x)$ задаёт в этом случае так называемое *отношение следования*;
3) $S(n) \neq 1$. Не существует «следующих» натуральных чисел, равных 1;
4) Если $S(n) = S(m)$, то тогда $n = m$. Любое натуральное число следует не более, чем за одним числом;
5) Если $Q \subset \mathbb{N}$ такое, что $1 \in Q$, и из того, что $n \in Q \Rightarrow S(n) \in Q$, то тогда $Q = \mathbb{N}$.

Последняя, пятая аксиома, называемая *аксиомой индукции,* используется для доказательства истинности предикатов (логических выражений содержащих переменные величины), зависящих от натурального аргумента, на всем множестве натуральных чисел. Этот способ доказательства называют *«методом математической индукции»*.

Чтобы доказать истинность $p(n)$ для $\forall n \in \mathbb{N}$, необходимо сначала доказать *базу индукции*, то есть показать истинность высказывания $p\,(1)$, а затем осуществить *индуктивный переход*, то есть, предположив, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ $p\,(n)$ истинно (*индуктивное предположение*), формально показать, что из индуктивного предположения следует истинность высказывания $p\,(S(n))$.

Правомерность доказательства методом математической индукции обосновывается следующим образом.

Рассмотрим множество $Q \subset \mathbb{N}$, на котором $p\,(n)$ — истинное высказывание. Сначала покажем, что $Q \neq \varnothing$. Для этого надо доказать базу индукции, то есть доказать, что $p\,(1)$ истинно. Тогда $1 \in Q$. Затем положим, что $p\,(n)$ истинно, и, исходя из этого предположения, докажем, что высказывание $p\,(S(n))$ истинно, то есть покажем, что если $n \in Q \Rightarrow S(n) \in Q$. Следовательно, множество Q удовлетворяет условиям пятой аксиомы Пеано и $Q = \mathbb{N}$, то есть $p\,(n)$ истинно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. *Несложно показать (при помощи линейной замены переменной), что базу индукции можно доказывать для любого фиксированного натурального числа большего единицы.*

2. Сложение и умножение натуральных чисел. Помимо доказательств математической индукцией существует способ определения математических понятий, основанный на пятой аксиоме Пеано, его называют методом *«полной индукции»*[1].

Определение 2. *Сложением натуральных чисел* называют бинарную операцию, при которой $\forall\; n, m \;\in\; \mathbb{N}$ сопоставляют единственное $n + m \;\in\; \mathbb{N}$

$$«+»\colon\; n,\, m \in \mathbb{N} \;\longmapsto n + m \in \mathbb{N}$$

обладающее свойствами:
1) $n + 1 = S(n)$;
2) $n + S(m) = S(n + m)$.

Исходя из принципов построения десятичной позиционной системы счисления и первого свойства сложения натуральных чисел, выпишем известные алгебраические равенства:

$$1 + 1 = 2;\; 2 + 1 = 3;\; \ldots\; 10 + 1 = 11;\; \ldots\; 100 + 1 = 101;\; \ldots$$

В общем случае по второй аксиоме Пеано и первому свойству сложения для любого натурального числа $n \neq 1$ справедливо следующее представление: $n = m + 1$, где $m \in \mathbb{N}$.

Поэтому можно переписать первое и второе свойства сложения натуральных чисел в более удобной форме:

$$n + 1 = n + 1;$$

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1.$$

Используя эти равенства, докажем ассоциативность и коммутативность сложения на множестве $\mathbb{N}$. При доказательстве арифметических свойств натуральных чисел, мы будем использовать подход, предложенный И. В. Арнольдом [2].

Теорема 1. *(ассоциативность сложения натуральных чисел).*

Для $\forall\, n, m, k \in \mathbb{N}$: $(n + m) + k = n + (m + k)$.

Доказательство. Рассуждения проведем по индукции относительно k. Если $k = 1$, из определения сложения сразу следует

$$(n + m) + 1 = n + (m + 1).$$

Допустим, что справедливо равенство

$$(n + m) + k = n + (m + k).$$

По определению сложения натуральных чисел

$$(n + m) + (k + 1) = ((n + m) + k) + 1.$$

Используя сначала индуктивное предположение, а затем дважды второе свойство сложения, окончательно получим

$$((n+m)+k)+1 = (n+(m+k))+1 = n+((m+k)+1) = n+(m+(k+1)).$$

Теорема 2. *(коммутативность сложения натуральных чисел).*

Для $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$: $n + m = m + n$.

Доказательство. В данном случае база индукции требует отдельного доказательства.

Пусть $m = 1$. Покажем, что $\forall n \in \mathbb{N}$: $n + 1 = 1 + n$. При $n = 1$ равенство очевидно: $1 + 1 = 1 + 1$. Допустим, что для произвольного n верно равенство $n+1 = 1+n$. По индуктивному предположению и второму свойству сложения получим

$$(n + 1) + 1 = (1 + n) + 1 = 1 + (n + 1).$$

Пусть теперь для произвольного m справедливо $n + m = m + n$. Тогда по второму свойству сложения, индуктивному предположению, ассоциативности сложения, базе индукции и еще раз ассоциативности получим

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1 = (m + n) + 1 =$$

$$= m + (n + 1) = m + (1 + n) = (m + 1) + n.$$

Определение 3. *Умножением натуральных чисел* называют бинарную операцию, которая $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ сопоставляет единственное $n \cdot m \in \mathbb{N}$

$$\text{«}\cdot\text{»}:\ n, m \in \mathbb{N} \longmapsto n \cdot m \in \mathbb{N}$$

обладающее свойствами:

1) $1 \cdot n = n$;
2) $(m + 1) \cdot n = m \cdot n + n$.

Теорема 3. *(дистибутивность умножения натуральных чисел относительно сложения).*

Для $\forall\, n, m, k \in \mathbb{N}$: $k \cdot (n + m) = k \cdot n + k \cdot m$.

Доказательство. Если $k = 1$, то по первому свойству умножения

$$1 \cdot (n + m) = n + m = 1 \cdot n + 1 \cdot m.$$

Пусть теперь для некоторого k верно

$$k \cdot (n + m) = k \cdot n + k \cdot m.$$

Тогда по второму свойству умножения, индуктивному предположению, коммутативности и ассоциативности сложения

$$(k+1)\cdot(n+m) = k\cdot(n+m)+(n+m) =$$

$$= k\cdot n + k\cdot m + n + m = (k\cdot n + n) + (k\cdot m + m).$$

Дважды используя второе свойство умножения, окончательно получим

$$(k+1)\cdot(n+m) = (k\cdot n+n)+(k\cdot m+m) = (k+1)\cdot n+(k+1)\cdot m.$$

Теорема 4. *(коммутативность умножения натуральных чисел).*

Для $\forall\, n, m \in \mathbb{N}\colon n\cdot m = m\cdot n$.

Доказательство. Индукцией по m.

Пусть $m = 1$. Покажем, что $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon n\cdot 1 = 1\cdot n$.

Если $n = 1$, то очевидно $1\cdot 1 = 1\cdot 1$.

Допустим, что это равенство справедливо для некоторого n. Тогда

$$(n+1)\cdot 1 = n\cdot 1+1 = 1+n\cdot 1 = 1\cdot 1+1\cdot n = 1\cdot(1+n) = 1\cdot(n+1).$$

База индукции по m доказана.

Пусть для некоторого m выполняется равенство $n\cdot m = m\cdot n$.

Для $m+1$ по дистрибутивности, индуктивному предположению и второму свойству умножения получим

$$n\cdot(m+1) = n\cdot m + n = m\cdot n + n = (m+1)\cdot n.$$

Следствие Для $\forall\, n, m, k \in \mathbb{N}\colon (n+m)\cdot k = k\cdot n + k\cdot m$.

Справедливость этого следствия очевидным образом вытекает из коммутативности операции умножения натуральных чисел

$$k\cdot n + k\cdot m = k\cdot(n+m) = (n+m)\cdot k.$$

Теорема 5. *(ассоциативность умножения натуральных чисел).*

Для $\forall\, n, m, k \in \mathbb{N}\colon (n\cdot m)\cdot k = n\cdot(m\cdot k)$.

Доказательство. Рассуждения проведём по индукции относительно n.

Дважды используем первое свойство умножения

$$(1\cdot m)\cdot k = m\cdot k = 1\cdot(m\cdot k).$$

Сделаем индуктивное предположение: пусть для некоторого натурального n: $(n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$. Тогда по второму свойству умножения, дистрибутивности, индуктивному предположению и ещё раз второму свойству умножения

$$((n+1) \cdot m) \cdot k = (n \cdot m + m) \cdot k = (n \cdot m) \cdot k + m \cdot k =$$

$$= n \cdot (m \cdot k) + m \cdot k = (n+1) \cdot (m \cdot k).$$

Обычно используют сокращённую запись операции умножения — nm, вместо $n \cdot m$.

Предикаты

$$n + x = m; \quad nx = m,$$

где n и m — фиксированные, а x — неизвестное натуральное число, будем называть *уравнениями относительно неизвестной величины* x, а те x, при которых эти уравнения являются истинными высказываниями, — *решением уравнения*.

Если эти уравнения имеют решение на множестве натуральных чисел, то согласно определению сложения (умножения) такое *решение единственно*. Уравнение $n + x = m$ (или уравнение $nx = m$) *не имеет решений*, если его множество истинности равно пустому множеству.

Предикаты $x < n$; $x > n$; $x \leqslant n$; $x \geqslant n$, будем называть *неравенствами* относительно неизвестной величины x. Как и для уравнений, решением этих неравенств будут соответствующие множества истинности.

Определение 4. Пусть n, $m \in \mathbb{N}$. Говорят, что *n меньше m ($n<m$)*, если уравнение $n + x = m$ имеет решение на множестве натуральных чисел.

Иначе говоря n меньше, чем m, если m является суммой n и некоторого натурального числа x. Отсюда следует достаточно очевидный, но очень важный вывод: единица — наименьшее натуральное число, то есть для $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant n$.

Действительно, если $n = 1$, то $1 = 1$. Если же $n \neq 1$, то, обозначив $n = 1 + x$, где $x \in \mathbb{N}$, получим $1 + x = n \Rightarrow 1 < n$. Таким образом, натуральный ряд ограничен снизу единицей.

Теперь мы имеем все основания для того, чтобы обозначать натуральные числа в привычной для нас форме

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ \ldots\ ,9,\ 10,\ 11,\ \ldots\ ,99,\ 100,\ 101,\ ,\ldots\}.$$

В таком виде множество натуральных чисел принято называть *«натуральным рядом»*.

3. Конечные суммы и произведения. Пусть даны n натуральных чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Сумму этих чисел будем обозначать

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \tag{1}$$

считая по определению для $k < n$

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1; \qquad \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}. \tag{2}$$

Аналогично записывают произведение n натуральных чисел:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n,$$

где для $k < n$

$$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1;; \qquad \prod_{i=1}^{k+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right) a_{k+1}.$$

Например,

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

сумма первых n натуральных чисел.

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k = n!$$

$n!$ — n-факториал, произведение первых n натуральных чисел. По определению полагают, что $0! = 1$.

$(2n-1)!!$ — (2n - 1)–двойной факториал, произведение первых n нечётных натуральных чисел.

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n = \prod_{k=1}^{n} 2k = 2n!!$$

$2n!!$ — 2n–двойной факториал, произведение первых n чётных натуральных чисел.

Аналогично конечным суммам и произведениям конструируют конечное объединение и конечное пересечение множеств $X_1, \ldots, X_n$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup \ldots \cup X_n; \quad \bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \ldots \cap X_n;$$

для $k < n$

$$\bigcup_{i=1}^{1} X_i = X_1; \qquad \bigcup_{i=1}^{k+1} X_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right) \cup X_{k+1};$$

$$\bigcap_{i=1}^{1} X_i = X_1; \qquad \bigcap_{i=1}^{k+1} X_i = \left(\bigcap_{i=1}^{k} X_i\right) \cap X_{k+1}.$$

Теорема 5. *(о кратных натуральных числах).*
Для $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$nm = \sum_{i=1}^{n} m.$$

Доказательство. Индукцией по n. Пусть $n = 1$, из первого свойства умножения и равенства 1, определяющего сумму нескольких натуральных чисел, следует

$$1 \cdot m = m = \sum_{i=1}^{1} m.$$

Допустим, что это верно для некоторого n:

$$nm = \sum_{i=1}^{n} m.$$

По коммутативности умножения, второму свойству умножения, индуктивному предположению и второму свойству суммы нескольких натуральных чисел 2 следует, что:

$$(n+1)m = m(n+1) = mn + m = nm + m = \sum_{i=1}^{n} m + m = \sum_{i=1}^{n+1} m.$$

Следствие. Для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$n = \sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n}.$$

Определение 5. Пусть $n,\, m \in \mathbb{N}$, *n-той степенью натурального числа m* называется число:

$$m^n = \prod_{i=1}^{n} m.$$

Теорема 6. *(свойства натуральных степеней).*
Для $\forall\, h, k, n, m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства:

$$k^n \cdot k^m = k^{n+m}; \quad (k^n)^m = k^{nm}; \quad (k \cdot h)^n = k^n \cdot h^n.$$

Доказательство.

$$k^n \cdot k^m = \prod_{i=1}^{n} k \cdot \prod_{i=1}^{m} k = \prod_{i=1}^{n} k \cdot \prod_{i=n+1}^{n+m} k = \prod_{i=1}^{n+m} k = k^{n+m};$$

$$(k^n)^m = \prod_{i=1}^{m} k^n = \prod_{i=1}^{m} \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} k\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\prod_{j=1}^{n} k\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} k\right) \cdot \ldots \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} k\right)}_{m} = \prod_{j=1}^{nm} k = k^{nm};$$

$$(k \cdot h)^n = \prod_{i=1}^{n} (k \cdot h) = \prod_{i=1}^{n} k \cdot \prod_{i=1}^{n} h = k^n \cdot h^n.$$

Рассмотрим простейший пример конечной суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \frac{(1+2+\ldots+n)+(n+(n-1)+\ldots+1)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Выведенная формула суммы первых n натуральных чисел корректна, так как одно из чисел: либо n, либо $n+1$ — чётное.

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ замкнуто относительно сложения и умножения, но для выполнения операций вычитания и деления в общем случае, этих чисел недостаточно.

4. Простейшие задачи комбинаторики: перестановки, размещения и сочетания, бином Ньютона. Раздел математики, посвященный выбору и расположению элементов некоторого множества в соответствии с заданными условиями, называется *комбинаторикой*. Здесь будут рассмотрены простейшие случаи выбора и расположения элементов в конечных множествах.

Пример 1. Вычислить, сколько упорядоченных множеств, содержащих n элементов, можно сконструировать из произвольного n-элементного неупорядоченного множества.

Если записывать упорядоченные множества, конструируемые из n-элементного неупорядоченного множества в одну строку, то на первую позицию в таком множестве можно выбрать любой из n элементов. На вторую — уже $n-1$, на третью — $n-2$ и т. д. На предпоследнюю позицию можно выбрать один из двух оставшихся элементов, и на последнюю — один. Полученную величину называют *«числом перестановок из n элементов»*

$$\mathbf{P}_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!\ .$$

Пример 2. *Сколько k-элементных упорядоченных подмножеств можно сконструировать из произвольного неупорядоченного множества, содержащего n элементов?*

Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, получим произведение k сомножителей:

$$\boldsymbol{A}_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

где $\boldsymbol{A}_n^k$ (A из n по k) — число размещений из n по k элементов.

Пример 3. Сколько k-элементных неупорядоченных подмножеств можно сконструировать из произвольного неупорядоченного множества, содержащего n элементов?

Пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Если бы мы конструировали упорядоченные множества, то получили бы число равное $\mathbf{A}_n^k$, но оно заведомо больше, чем искомое, причем во столько раз, сколькими способами можно переставить набор из k фиксированных элементов, то есть в $k!$ раз:

$$\mathbf{C}_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $\mathbf{C}_n^k$ (C из n по k) — *число сочетаний из n по k элементов.*

Числа $\mathbf{C}_n^k$ называют также *биноминальными коэффициентами.*

Докажем два свойства числа сочетаний.

$$\mathbf{C}_n^k = \mathbf{C}_n^{n-k}.$$

$$\mathbf{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \mathbf{C}_n^{n-k}.$$

$$\mathbf{C}_n^k + \mathbf{C}_n^{k+1} = \mathbf{C}_{n+1}^{k+1}.$$

$$\mathbf{C}_n^k + \mathbf{C}_n^{k+1} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \mathbf{C}_{n+1}^{k+1}.$$

Последнее свойство позволяет построить так называемый «Треугольник Паскаля» (рис. 1). Строки этого треугольника — коэффициенты формул «сокращенного умножения», откуда и идет второе название для числа сочетаний — биноминальные коэффициенты.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \mathbf{C}_0^0 & & & & & \\
 & & & & \mathbf{C}_1^0 & & \mathbf{C}_1^1 & & & & \\
 & & & \mathbf{C}_2^0 & & \mathbf{C}_2^1 & & \mathbf{C}_2^2 & & & \\
 & & \mathbf{C}_3^0 & & \mathbf{C}_3^1 & & \mathbf{C}_3^2 & & \mathbf{C}_3^3 & & \\
 & \mathbf{C}_4^0 & & \mathbf{C}_4^1 & & \mathbf{C}_4^2 & & \mathbf{C}_4^3 & & \mathbf{C}_4^4 & \\
\mathbf{C}_5^0 & & \mathbf{C}_5^1 & & \mathbf{C}_5^2 & & \mathbf{C}_5^3 & & \mathbf{C}_5^4 & & \mathbf{C}_5^5 \\
\multicolumn{11}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\multicolumn{11}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

Рис. 1 Треугольник Паскаля.

Теорема 7. *(бином Ньютона).*

Для $\forall\, x, y \in \mathbb{Q}$ и $\forall\, n \in \mathbb{N}$ справедлива формула бинома Ньютона:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k x^{n-k} y^k.$$

Доказательство. Индукцией по n. Если $n = 1$, то равенство очевидно. Пусть теперь для некоторого n справедлива формула бинома Ньютона. Тогда

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k x^{n-k} y^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k x^{n-k} y^{k+1} =$$

$$= \mathbf{C}_n^0 x^{n+1} + \mathbf{C}_n^1 x^n y + \mathbf{C}_n^2 x^{n-1} y^2 + \ldots + \mathbf{C}_n^n x y^n +$$

$$+ \mathbf{C}_n^0 x^n y + \mathbf{C}_n^1 x^{n-1} y^2 + \ldots + \mathbf{C}_n^{n-1} x y^n + \mathbf{C}_n^n y^{n+1} =$$

$$= \mathbf{C}_n^0 x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{C}_n^{k+1} + \mathbf{C}_n^k \right) x^{n-k} y^{k+1} + \mathbf{C}_n^n y^{n+1} =$$

$$= \mathbf{C}_{n+1}^0 x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{C}_{n+1}^{k+1} x^{n-k} y^{k+1} + \mathbf{C}_{n+1}^{n+1} y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbf{C}_{n+1}^k x^{n-k+1} y^k.$$

Формулу бинома Ньютона можно распространить на разность $x - y$, имея в виду, что нечетные степени y будут иметь в алгебраической сумме бинома знак «минус»:

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathbf{C}_n^k x^{n-k} y^k.$$

Пример 4. Сколько различных неупорядоченных подмножеств содержит произвольное n-элементное неупорядоченное множество?

Пусть X — n-элементное неупорядоченное множество:
$\mathbf{C}_n^0 = 1$ — число пустых подмножеств X;
$\mathbf{C}_n^1 = n$ — число подмножеств X из одного элемента;
$\mathbf{C}_n^2 = n(n-1)/2$ — число подмножеств X из двух элементов;
....
$\mathbf{C}_n^{n-2} = n(n-1)/2$ — число подмножеств X из $n-2$ элементов;
$\mathbf{C}_n^{n-1} = n$ — число подмножеств X из $n-1$ элемента;
$\mathbf{C}_n^n = 1$ — число подмножеств из n элементов.

Выпишем бином Ньютона: $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k x^{n-k} y^k$.

Если вместо x и y подставить единицы, то получим

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k = (1+1)^n = 2^n.$$

Следовательно, неупорядоченное n-элементное множество содержит 2^n неупорядоченных подмножеств.

Пример 5. Доказать неравенство

$$(2n-1)!! < n^n \text{ для } n > 1.$$

Один из основных приёмов, используемый при доказательстве неравенств, основывается на транзитивности отношения порядка. Если левую и правую части неравенства невозможно сравнить сразу, то либо меньшая часть неравенства заменяется на большую величину, очевидно меньшую, чем предполагаемая большая часть неравенства, либо, наоборот, большая часть неравенства заменяется на меньшую величину, которая очевидно больше, чем предполагаемая меньшая часть неравенства. При необходимости этим приёмом можно воспользоваться несколько раз при решении одной задачи. Проведём доказательство неравенства из данного примера индукцией по n.

Для $n = 2$ неравенство очевидно. Предположим, что оно верно для некоторого n, и рассмотрим его при $n+1$:

$$(2n+1)!! < (n+1)^{n+1} \Leftrightarrow (2n+1)(2n-1)!! < (n+1)(n+1)^n.$$

Используя индуктивное предположение, заменим в левой части неравенства один из сомножителей на больший:

$$n^n(2n+1) < (n+1)(n+1)^n \Leftrightarrow$$

$$\frac{2n+1}{n+1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow 1 + \frac{n}{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Разложим правую часть по формуле бинома Ньютона и, оценив её снизу, получим очевидное неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots > 2 > 1 + \frac{n}{n+1}.$$

Теперь докажем две полезные формулы:

1) $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + \ldots - xy^{2n-1} + y^{2n})$.

Доказательство:

$$(x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + \ldots - xy^{2n-1} + y^{2n}) =$$

$$= x^{2n+1} - x^{2n}y + \ldots - x^2y^{2n-1} + xy^{2n} +$$
$$+ x^{2n}y - \ldots + x^2y^{2n-1} - xy^{2n} + y^{2n+1} = x^{2n+1} + y^{2n+1}.$$

2) $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

Доказательство:

$$(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) =$$

$$= x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + xy^{n-1} -$$
$$- x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 - \ldots - xy^{n-1} - y^n = x^n - y^n.$$

Пусть a, b, $m \in \mathbb{N}$. Если $a-b$ делится на m, то тогда говорят, что a ***сравнимо*** с b ***по модулю*** m, и пишут: $a \equiv b(mod\, m)$.

Пример 6. Доказать, что если

$$a \equiv 1(mod\, m) \Rightarrow a^{m^k} \equiv 1(mod\, m^{k+1}).$$

Проведём индукцию по k. Если $k=1$, то тогда

$$a^m - 1 = (a-1)(a^{m-1} + \ldots + a + 1) =$$

$$= (a-1)((a^{m-1}-1) + \ldots + (a-1) + m) =$$

$$= (a-1)[(a-1)(a^{m-2} + \ldots + 1) + \ldots + (a-1) + m].$$

Каждое слагаемое второго сомножителя делится на m, значит, и весь сомножитель делится на m. Следовательно, $a^m \equiv 1(mod\, m^2)$.

Теперь предположим, что $a^{m^k} \equiv 1(mod\, m^{k+1})$, и рассмотрим выражение $a^{m^{k+1}} - 1$. Заметим, что $a^{m^{k+1}} = a^{m \cdot m^k} = \left(a^{m^k}\right)^m$. Тогда

$$a^{m^{k+1}} - 1 = \left(a^{m^k}\right)^m - 1 = \left(a^{m^k} - 1\right)\left[\left(a^{m^k}\right)^{m-1} + \ldots + a^{m^k} + 1\right] =$$

$$= \left(a^{m^k} - 1\right)\left\{\left[\left(a^{m^k}\right)^{m-1} - 1\right] + \ldots + \left[a^{m^k} - 1\right] + m\right\}.$$

Для $\forall\, p \mid 1 \leqslant p \leqslant m-1$,

$$\left(a^{m^k}\right)^p - 1 = a^{p \cdot m^k} - 1 = (a-1)(a^{p \cdot m^k - 1} + a^{p \cdot m^k - 2} + \ldots + a + 1).$$

Таким образом, каждое слагаемое во втором сомножителе делится на m, и, следовательно, весь этот сомножитель делится на m. По индуктивному предположению $a^{m^k} - 1$ делится на m^{k+1}, поэтому $a^{m^{k+1}} \equiv 1(mod\, m^{k+2})$ [3].

Список литературы

[1] Проскуряков И. В. Числа и многочлены. М.: Просвещение., 1965. 284 с.

[2] Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. М.: Учпедгиз., 1938. 480 с.

[3] Орехов А.В. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. Учеб. пособие изд. 2-е испр. и доп. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2014. 228 с.

УДК 512.622

Цылева И.А.[1]

Полиномы

Аннотация. Учебно-методический материал содержит задачи курса алгебры к разделу «Полиномы». Приведены примеры с подробным решением и краткие теоретические сведения достаточные для их решения. Пособие предназначено для для школьников обучающихся в специализированных физико-математических средних учебных заведениях и для студентов 1–2 курсов математических и физических факультетов государственных университетов.

Ключевые слова: полином, корень полинома, алгоритм Евклида.

1. Действия над полиномами. Алгоритм Евклида. Линейное представление.

Определение 1. Многочленом (полиномом) называется функция, определенная на множестве комплексных чисел, вида $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где $x, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Определение 2. Коэффициент $a_0 \neq 0$ называется старшим коэффициентом полинома, а число n — степенью полинома $f(x)$: $\deg f(x) = n$.

Определение 3. Полиномы $f_1(x) = a_0x^n + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и $f_2(x) = b_0x^m + \ldots + b_{m-1}x + b_m$ называются тождественно равными, если $f_1(x) = f_2(x)$ при всех $x \in \mathbb{C}$.

Теорема 1. Два полинома $f_1(x)$ и $f_2(x)$ тождественно равны ($f_1(x) \equiv f_2(x)$) тогда и только тогда, когда выполнены два условия: 1) $n = m$; 2) $a_i = b_i$ где $i = \overline{0, n}$.

Для полиномов определены операции сложения и умножения (раскрываем скобки, приводим подобные слагаемые). При этом
$\deg(f_1 + f_2) \leq \max(\deg f_1, \deg f_2)$
$\deg(f_1 f_2) = \deg f_1 + \deg f_2$.

Можно умножать полиномы «в столбик».

Пример 1. *Перемножить полиномы*

$$f(x) = x^5 + 2x^3 + x^2 - 4x + 1 \quad \text{и} \quad g(x) = -x^2 - 2x + 4.$$

Представим полиномы наборами их коэффициентов, расположив один из них горизонтально, а второй — вертикально. Умножение полинома $f(x)$ на слагаемое b_jx^{n-j} второго полинома

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: i.tsyleva@spbu.ru

$g(x)$ сводится к умножению набора $(a_0, \ldots, a_n)$ на b_j; результат следующего умножения — на $b_{j+1}x^{n-j-1}$ — получается аналогичным образом, но записывается со сдвигом на одну позицию вправо. Получившиеся ряды суммируются по столбцам.

	1	0	2	1	-4	1		
-1	-1	0	-2	-1	4	-1		
-2		-2	0	-4	-2	8	-2	
4			4	0	8	4	-16	4
	-1	-2	2	-5	10	11	-18	4

(В отличие от перемножения чисел здесь результаты сложения в столбиках не переносятся в следующий разряд.)
Окончательный ответ:

$$-x^7 - 2x^6 + 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 - 18x + 4.$$

Введём на множестве полиномов ещё одну операцию: деление с остатком.

Теорема 2. (о делении с остатком)

Для двух полиномов $f(x), g(x)$ где $(g(x) \neq 0)$ существуют полиномы $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, где $\deg r(x) < \deg g(x)$, причём эти полиномы определяются единственным образом. Полином $q(x)$ называется частным от деления, а полином $r(x)$ — остатком.

Пример 2. *Выполнить деление полинома третьей степени $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ на полином $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ с остатком.*

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x^2 \quad - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x} & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\
\quad -\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\
\quad \underline{-\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9}} & \\
\qquad\qquad -\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} &
\end{array}$$

$x^3 - 3x^2 - x - 1 = (3x^2 - 2x + 1)(\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}) - \frac{26}{9}x - \frac{2}{9}$

Пример 3. *При каком условии полином $f(x) = x^3 + px + q$ делится на полином $g(x) = x^2 + mx - 1$. Ясно, что имеется в виду деление без остатка!*

$$
\begin{array}{lllll|l}
x^3 & & +px & +q & & x^2+mx-1 \\ \cline{6-6}
x^3 & +mx^2 & -x & & & x-m \\ \cline{1-3}
 & -mx^2 & +(p+1)x & +q & & \\
 & -mx^2 & -m^2x & +m & & \\ \cline{2-4}
 & & (m^2+p+1)x & +q-m & &
\end{array}
$$

$$
\begin{cases} m^2+p+1=0 \\ q-m \quad\;\; =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-(m^2+1) \\ q=m \end{cases}.
$$

Определение 4. Полином $p(x)$ называется общим делителем полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$, если оба этих полинома делятся на $p(x)$ без остатка, т.е. $f_1(x) = p(x)m(x)$, $f_2(x) = p(x)n(x)$.

Определение 5. Будем называть наибольшим общим делителем н.о.д. $(f_1(x), f_2(x))$ полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$ их общий делитель наибольшей степени.

Определение 6. Говорят, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взаимно просты, если н.о.д. $(f_1(x), f_2(x)) = const$.

Заметим, что н.о.д. $(f_1(x), f_2(x))$ определяется с точностью до умножения на константу. Найти н.о.д. $(f_1(x), f_2(x))$ можно по алгоритму Евклида:

1-ый шаг $f_1(x) = q_1(x)f_2(x) + f_3(x)$, $\deg(f_3(x)) < \deg(f_2(x))$;
Если $f_3(x) \neq 0$, разделим $f_2(x)$ на $f_3(x)$ с остатком:
2-ой шаг $f_2(x) = q_2(x)f_3(x) + f_4(x)$, $\deg(f_4(x)) < \deg(f_3(x))$;
Если $f_4(x) \neq 0$, разделим $f_3(x)$ на $f_4(x)$ с остатком:
3-ий шаг $f_3(x) = q_3(x)f_4(x) + f_5(x)$, $\deg(f_5(x)) < \deg(f_4(x))$;
Этот процесс оборвется, когда получится нулевой остаток, т.е. на некотором шаге получим:
***n*-ый шаг** $f_n(x) = q_n(x)f_{n+1}(x)$.

Последний не равный нулю остаток $f_{n+1}(x)$ как раз и будет н.о.д. $(f_1(x), f_2(x))$.

Пример 4. *Найти наибольший общий делитель полиномов* $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ *и* $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$$
\begin{array}{llllll|l}
x^4 & +x^3 & -3x^2 & -4x & -1 & & x^3+x^2-x-1 \\ \cline{7-7}
x^4 & +x^3 & -x^2 & -x & & & x \\ \cline{1-4}
 & & -2x^2 & -3x & -1 & &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad +x^2 \quad -x-1 & -2x^2-3x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x} & -\frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \\ \quad -\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1 & \\ \quad \underline{-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}} & \\ \qquad\quad -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -2x^2-3x-1 & -\frac{3}{4}x-\frac{3}{4} \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2-2x} & -\frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \\ -x-1 & \\ \underline{-x-1} & \\ 0 & \end{array}$$

Последний ненулевой остаток равен $-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$*, но поскольку наибольший общий делитель определяется с точностью до умножения на константу, окончательный ответ можно записать так:* н.о.д. $(f(x), g(x)) = x+1$.

Теорема 3. Пусть полином $d(x)$ — наибольший общий делитель полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда существуют полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ такие, что
$d(x) = M_2(x)f_1(x) + M_1(x)f_2(x)$.
Это равенство называется линейным представлением н.о.д.

Найти полиномы M_1 и M_2 можно, пользуясь алгоритмом Евклида.

Определение 7. Пусть имеется произвольная числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots$. Числа $\mathsf{K}_j(x_1, \ldots, x_j)$, определяемые правилами
$\mathsf{K}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1,\ \mathsf{K}_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_1,\ \mathsf{K}_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathsf{K}_{j-1}x_j + \mathsf{K}_{j-2}$ при $j \geq 2$
называются континуантами.

Оказывается, что числа M_1 и M_2 из линейного представления н.о.д. вычисляются с помощью континуант:

$$M_1 = (-1)^j \mathsf{K}_j(q_1, q_2, \ldots, q_j), M_2 = (-1)^{j-1}\mathsf{K}_{j-1}(q_2, \ldots, q_j).$$

Здесь q_i — частное, полученное на i шаге, а j — номер шага, на котором получилмя последний ненулевой остаток.

Для практических расчётов вычисления континуант удобно производить с помощью таблицы. Так, стартовое состояние таблицы для вычисления $\mathsf{K}_j(q_1, q_2, \ldots, q_j)$ следующее:

j	0	1	2	3	4	...
q_j	—	q_1	q_2	q_3	q_4	...
$\mathsf{K}_j(q_1, q_2, \ldots, q_j)$	1	q_1				...

и значение для $\mathsf{K}_2(q_1, q_2) = 1 + q_1q_2$ вычисляется по схеме, указанной стрелками. Следующее состояние таблицы:

и очередное значение $\mathsf{K}_3(q_1, q_2, q_3) = \mathsf{K}_1(q_1) + \mathsf{K}_2(q_1, q_2)q_3$ снова вычисляется по схеме, указанной стрелками.

j	0	1	2	3	4	$\dots$
q_j	—	q_1	q_2	q_3	q_4	$\dots$
$\mathsf{K}_j(q_1, q_2, \dots, q_j)$	1	q_1	$1 + q_1 q_2$			$\dots$

Таблица для вычисления $\mathsf{K}_{j-1}(q_2, \dots, q_j)$ строится по тому же принципу, только с иными стартовыми значениями:

j	0	1	2	3	4	$\dots$
q_j	—	q_1	q_2	q_3	q_4	$\dots$
$\mathsf{K}_{j-1}(q_2, \dots, q_j)$	—	1	q_2			$\dots$

Обычно таблицы для вычисления обеих континуант объединяют.

Пример 5. *Найти линейное представление* н.о.д.$(f(x), g(x))$, *если*

а) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,\ g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2;$

б) $f(x) = x^5 - 5x^4 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12,\ g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$

а) Сначала проделываем алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 & x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2} & 1 \\ \qquad x^3 \qquad - 2x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2 & x^3 - 2x \\ \cline{2-2} \underline{x^4 \qquad - 2x^2} & x + 1 \\ \quad x^3 + x^2 - 2x - 2 & \\ \quad \underline{x^3 \qquad - 2x} & \\ \qquad x^2 \qquad - 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^3 - 2x & x^2 - 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 - 2x} & -x \\ \qquad 0 & \end{array}$$

н.о.д. $(f(x), g(x)) = x^2 - 2.$

Теперь составляем таблицу для нахождения континуантов:

j	*0*	*1*	*2*
q_j	—	1	$x + 1$
$\mathsf{K}_4(q_1, q_2)$	*1*	1	$x + 2$
$\mathsf{K}_3(q_2)$	—	*1*	$x + 1$

$$M_1(x) = x + 2 \qquad M_2(x) = -(x + 1) \qquad \Rightarrow$$

н.о.д. $(f(x), g(x)) = x^2 - 2 = -(x+1)(x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2) +$
$+ (x + 2)(x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2);$

б) Сначала проделываем алгоритм Евклида:

$$\begin{array}{r|l} x^5-5x^4-2x^3+12x^2-2x+12 & x^3-5x^2-3x+17 \\ \cline{2-2} \underline{x^5-5x^4-3x^3+17x^2-2x\ \ -2} & x^2+1 \\ x^3\ \ -5x^2-2x+12 & \\ \underline{x^3\ \ -5x^2-2x+17} & \\ x\ \ -5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2-3x+17 & x-5 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-5x^2} & x^2-3 \\ -3x+17 & \\ \underline{-3x+15} & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x-5 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{x} & \frac{1}{2}x-\frac{5}{2} \\ -5 & \\ \underline{-5} & \\ 0 & \end{array}$$

н.о.д. $(f(x), g(x)) = 2$.

Теперь составляем таблицу для нахождения континуантов:

j	0	1	2
q_j	—	x^2+1	x^2-3
$\mathsf{K}_4(q_1,q_2)$	1	1	x^4-2x-2
$\mathsf{K}_3(q_2)$	—	1	x^2-3

$M_1(x) = x^4 - 2x - 2$

$M_2(x) = -(x^2-3)$

Следовательно: н.о.д. $(f(x), g(x)) = 2 = -(x^2-3)(x^5-5x^4 2x^3+12x^2-2x+12)+(x^4-2x-2)(x^3-5x^2-3x+17)$*;*

Эти полиномы взаимно просты. Обычно в этом случае пишут:

н.о.д. $(f(x), g(x)) = 1$*, и линейное представление выглядит так:*

$$1 = -\frac{x^2-3}{2}(x^5-5x^4 2x^3+12x^2-2x+12)+\frac{x^4-2x-2}{2}(x^3-5x^2-3x+17)$$

Теорема 4. Полиномы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют два полинома $M_1(x)$ и $M_2(x)$ такие, что $f_1(x)M_2(x) + f_2(x)M_1(x) \equiv 1$.

Полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ можно выбрать из условия: $\deg M_1(x) < \deg f_1(x)$, $\deg M_2(x) < \deg f_2(x)$. Такие полиномы определяются единственным образом. Поэтому для взаимно простых полиномов полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Пример 6. *Подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ такие, что $f_1(x)M_2(x) + f_2(x)M_1(x) \equiv 1$, если $f_1(x) = x^3, f_2(x) = (1-x)^2$*

Ясно, что полиномы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ взаимно просты, а значит максимально возможная степень искомых полиномов $M_1(x)$ и $M_2(x)$ равна 2 и 1 соответственно, т.е. их можно записать в виде:
$M_1(x) = ax^2 + bx + c$ и $M_2(x) = dx + f$.
Тогда $(dx + f)x^3 + (ax^2 + bx + c)(x^2 - 2x + 1) = 1$.
Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x полиномов, стоящих справа и слева равенства, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

$$\begin{array}{l} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{l} d + a = 0 \\ f - 2a + b = 0 \\ a - 2b + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} c & = & 1 \\ b & = & 2 \\ a & = & 3 \\ f & = & 4 \\ d & = & -3 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$M_1(x) = 3x^2 + 2x + 1$ и $M_2(x) = -3x + 4$, т.е.
$1 = (-3x + 4)x^3 + (3x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$.

2. Корни полиномы. Кратные корни. Теорема Виета.

Определение 8. $x = \lambda$ называется корнем полинома $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, a_0, a_1, \ldots, a_n, x \in \mathbb{C}$, если $f(\lambda) = 0$.

Ясно, что корень $x = \lambda$ полинома является решением (корнем) алгебраического уравнения $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$.

Существует ли у уравнения $f(x) = 0$ хотя бы один корень?

Теорема 5. (основная теорема высшей алгебры)

Уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеет по крайней мере один корень, в общем случае комплексный.

Теорема 6. (Безу)

Если $x = \lambda$ — корень полинома $f(x)$, то полином можно представить в виде$f(x) = (x-\lambda)f_1(x)$, где полином $f_1(x)$ определяется единственным образом, при этом $\deg(f_1(x)) = \deg(f(x)) - 1$.

Действительно, если разделить $f(x)$ на $(x - \lambda)$ с остатком, получим $f(x) = (x - \lambda)f_1(x) + r$. Причём остаток r — это число. Поскольку $f(\lambda) = 0$, получим $r = 0$.

Итак, у произвольного полинома $f(x)$ найдется хотя бы один корень $x = x_1$, и этот полином представим в виде

$$f(x) = (x - x_1)f_1(x).$$

Рассуждая аналогичным образом, у полинома $f_1(x)$ тоже найдется хотя бы один корень $x = x_2$, при этом

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)f_2(x)$$

и так далее, в результате получим следствие к основной теореме высшей алгебры.

Следствие. Каждый полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ можно представить в виде $f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, и такое представление единственно. Оно называется разложением полинома на линейные множители, а выражение вида $(x - x_i)$ называется линейным множителем для многочлена $f(x)$.

Пример 7. *Найти разложение полинома*

$$f(x) = x^3 - 6ix + 4(1 - i)$$

на линейные множители, если известно, что $x_1 = -1 - i$ является его корнем.

По теореме Безу $f(x) = (x + 1 + i)f_1(x)$. Найти $f_1(x)$ можно, поделив $f(x)$ на $(x + 1 + i)$.

$$\begin{array}{llll|l}
x^3 & & -6ix & +4(1-i) & x+1+i \\ \cline{5-5}
\underline{x^3 \quad (1+i)x^2} & & & & x^2-(1+i)x-4i \\
 & -(1+i)x^2 & -6ix & & \\
 & \underline{-(1+i)x^2} & \underline{-2ix} & & \\
 & & -4ix & +4(1-i) & \\
 & & \underline{-4ix} & \underline{+4(1-i)} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Т.е. $f(x) = (x + 1 + i)(x^2 - (1 + i)x - 4i)$.
Решаем квадратное уравнение $x^2 - (1 + i)x - 4i = 0$.

$$x_{2,3} = \frac{1 + i \pm \sqrt{2i + 16i}}{2} = \frac{1 + i \pm 3\sqrt{2i}}{2};$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i);$$

$x_2 = 2(1 + i); x_3 = -(1 + i)$,

т.е. разложение полинома на линейные множители имеет вид:
$f(x) = (x+1+i)(x-2(1+i))(x+1+i) = (x+1+i)^2(x-2(1+i))$.

Пример 8. *Разложить на линейные множители полиномы*

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$*;*

б) $f(x) = x^4 + 4$*;*

в) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1$

а) Иногда удается так сгруппировать слагаемые, что исходный полином раскладывается на произведение полиномов, найти корни которых легко:
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - 5x^2 - x^2 + 6x + 5x - 6 =$
$= x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) =$
$= (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$*;*
или по-другому:
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - 6x^2 + 12x - x + 6 - 12 =$
$= x^3 - x - 6x^2 + 6 + 12x - 12 =$
$= x(x-1)(x+1) - 6(x-1)(x+1) + 12(x-1) =$
$= (x-1)(x^2 + x - 6x - 6 + 12) = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$*;*

б) Часто успеха можно добиться, выделяя полный квадрат:
$f(x) = x^4 + 4x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2 =$
$= (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$*;*
Решаем квадратные уравнения $x^2 \pm 2x + 2 = 0$*;*
$x_{1,2,3,4} = \pm 1 \pm \sqrt{-1} = \pm 1 \pm i$*;*
Окончательно получим:
$x^4 + 4 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)(x + 1 + i)$*;*

в) С помощью замены переменных можно понизить степень уравнения: пусть $t = x^2$*, тогда*
$f(x) = x^4 - 10x^2 + 1 = t^2 - 10t + 1 = 0,$
$t_{1,2} = 5 \pm \sqrt{24} = 5 \pm 2\sqrt{3} = (\sqrt{2} \pm \sqrt{3})^2$
$x_{1,2,3,4} = \pm(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})$*, т.е. разложение имеет вид:*
$x^4 - 10x^2 + 1 =$
$= (x - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x + \sqrt{2} + \sqrt{3}).$

Вернемся к разложению полинома на линейные множители. Пусть $f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Среди $x_1, \ldots, x_n$ могут быть совпадающие. Если они есть, то

$$f(x) = a_0(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \ldots (x - x_k)^{p_k},$$

причем $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n$, а среди $x_1, \ldots, x_k$ уже нет совпадающих.

Определение 9. Если $p_j > 1$, то корень x_j называется кратным кратности p_j, если $p_j = 1$, то корень x_j называется простым.

Теорема 7. Пусть $f(x)$ имеет кратный корень x_i кратности p_i. Тогда x_i является кратным корнем производной $f'(x)$ кратности $p_i - 1$.

Следствие x_i является корнем кратности p_i полинома $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$f(x_i) = 0, f'(x_i) = 0, \ldots, f^{(p_i-1)}(x_i) = 0, f^{(p_i)}(x_i) \neq 0.$$

Пример 9. *При каких a полином $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ имеет корень $x = -1$ не ниже второй кратности?*

Для того, чтобы $x = -1$ был корнем не ниже второй кратности, достаточно потребовать, чтобы $f(-1) = 0$ и $f'(-1) = 0$.
$f(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$ для любого a;
$f'(-1) = 5 + 2a - a = 5 + a = 0 \Rightarrow a = -5$.

Пример 10. *Доказать, что полином*

$$f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$$

имеет корень $x = 1$ тройной кратности

Необходимо доказать, что

$$f(1) = 0; f'(1) = 0; f''(1) = 0; f'''(1) \neq 0.$$

$f(1) = 1 - n + n - 1 = 0$;
$f'(x) = 2nx^{2n-1} - n(n+1)x^n + n(n-1)x^{n-2} \Rightarrow$
$f'(1) = 2n - n^2 - n + n^2 - n = 0$;
$f''(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} - n^2(n+1)x^{n-1} + n(n-1)(n-2)x^{n-3} \Rightarrow$
$f''(1) = 4n^2 - 2n + n(-n^2 - n + n^2 - 3n + 2) = n(4n - 2 - 4n + 2) = 0$;
$f'''(x) = 2n(2n-1)2(n-1)x^{2n-3} - n^2(n+1)(n-1)x^{n-2} +$
$+ n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \Rightarrow$
$f'''(1) = n(n-1)(8n - 4 - n^2 - n + n^2 - 5n + 6) = 2n(n-1)(n+1) \neq 0$
для $n > 1$.

Для любого полинома $f(x)$ справедливо представление

$$f(x) = a_0(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \dots (x - x_k)^{p_k},$$

тогда для $f'(x)$ справедливо представление

$$f'(x) = (x - x_1)^{p_1 - 1}(x - x_2)^{p_2 - 1} \dots (x - x_k)^{p_k - 1}\varphi(x).$$

Здесь $\deg\varphi = k - 1$ и $\varphi(x_j) \neq 0 \quad (j = \overline{1,k})$. Это значит, что н.о.д.$(f, f') = (x - x_1)^{p_1-1}(x - x_2)^{p_2-1} \dots (x - x_k)^{p_k-1}$. Таким образом, если найти н.о.д.$(f(x), f'(x))$ (например, по алгоритму Евклида), то корнями этого полинома будут кратные корни $f(x)$, и кратность их будет на единицу меньше, чем у $f(x)$.

Пример 11. *Найти кратные корни полинома* $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4.$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16x - 8 = 4(x^3 - 3x^2 + 4x - 2)$;
Ищем н.о.д.$(f(x), f'(x)/4)$ *по алгоритму Евклида:*

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 & x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x } & x - 1 \\
-x^3 + 4x^2 - 6x + 4 & \\
\underline{-x^3 + 3x^2 - 4x + 2} & \\
x^2 - 2x + 2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 + 4x - 2 & x^2 - 2x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 2x^2 + 2x } & x - 1 \\
-x^2 + 2x - 2 & \\
\underline{-x^2 + 2x - 2} & \\
0 &
\end{array}$$

н.о.д.$(f(x), f'(x)/4) = x^2 - 2x + 2$. *Ищем корни этого полинома:* $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$ *— это корни полинома* $f(x)$ *кратности 2, т.е.* $f(x) = (x - 1 - i)^2(x - 1 + i)^2$.

Если уравнение н.о.д.$(f(x), f'(x)) = 0$ достаточно большой степени и его решить не удаётся, то и его кратные корни можно найти указанным выше методом. А именно, строя последовательность

$$d_1 = \text{н.о.д.}(f, f'), d_2 = \text{н.о.д.}(d_1, d_1'), \dots, d_r = \text{н.о.д.}(d_{r-1}, d_{r-1}'),$$

в конечном счёте придём к полиному, имеющему только простые корни. Пусть это произойдёт на шаге $r - 1$ и получится полином

d_{r-1}, корни которого находятся легко. Тогда эти корни будут корнями кратности r полинома $f(x)$.

Построим следующую последовательность полиномов

$f_1 = f/d_1, f_2 = d_1/d_2, \ldots, f_{r-1} = d_{r-2}/d_{r-1}, f_r = d_{r-1}$.

Все корни каждого из этих полиномов простые, однако среди корней полинома $f_2(x)$ нет простых корней полинома $f(x)$, среди корней $f_3(x)$ нет корней кратности 2 полинома $f(x)$ и т.д. Таким образом, найдя полиномы

$F_1 = f_1/f_2, F_2 = f_2/f_3, \ldots, F_{r-1} = f_{r-1}/f_r, F_r = f_r$,

получим полиномы $F_j(x), j = \overline{1, r}$, корни которых простые и являются корнями кратности j полинома $f(x)$, т.е. имеет место представление

$f(x) = F_1(x)F_2^2(x)F_3^3(x) \cdot \cdots \cdot F_r^r(x)$.

Пример 12. *Найти кратные корни полинома*

$f(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$.

$f'(x) = 6x^5 - 24x^3 - 12x^2 + 18x + 12 = 6(x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2)$.

Ищем н.о.д.$(f(x), f'(x)/6)$ *по алгоритму Евклида:*

$$\begin{array}{r|l}
x^6 -6x^4 -4x^3 +9x^2 +12x +4 & x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^6 -4x^4 -2x^3 +3x^2 \;\; +2x \quad\;\;} & x \\
-2x^4 -2x^3 +6x^2 +10x +4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^5 \qquad -4x^3 -2x^2 +3x +2 & -2x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 10x + 4 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5 + x^4 -3x^3 -5x^2 -2x \quad\;} & -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\
-x^4 \;\; -x^3 +3x^2 +5x +2 & \\
\underline{-x^4 \;\; -x^3 +3x^2 +5x +2} & \\
0 &
\end{array}$$

н.о.д.$(f(x), f'(x)/6) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = d_1(x)$.

$d_1'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$.

Ищем н.о.д.$(d_1(x), d_1'(x))$*:*

$$\begin{array}{r|l}
x^4 \;\; +x^3 \;\; -3x^2 \;\; -5x \;\; -2 & 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + \frac{3}{4}x^3 \;\; -\frac{3}{2}x^2 \;\; -\frac{5}{4}x \quad\;\;} & \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} \\
\frac{1}{4}x^3 \;\; -\frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{4}x - \frac{5}{16} & \\
\underline{\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{16}x^2 \;\; -\frac{3}{8}x - \frac{5}{16}} & \\
-\frac{27}{16}x^2 - \frac{27}{8}x - \frac{27}{16} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3+3x^2-6x-5 & -\frac{27}{16}x^2-\frac{27}{8}x-\frac{27}{16} \\ \cline{2-2} \underline{4x^3+8x^2+4x} & -\frac{64}{27}x+\frac{80}{27} \\ \quad -5x^2-10x-5 & \\ \quad \underline{-5x^2-10x-5} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

н.о.д.$(d_1(x), d_1'(x)) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = d_2(x)$.

$d_2'(x) = 2(x+1)$. *Ясно, что* н.о.д.$(d_2(x), d_2'(x)) = x + 1 = d_3(x)$.

Строим последовательность

$f_1 = f/d_1, f_2 = d_1/d_2, f_3 = d_2/d_3, f_4 = d_3$.

$$\begin{array}{l|l} x^6 \quad -6x^4-4x^3+9x^2+12x+4 & x^4+x^3-3x^2-5x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x^6+x^5-3x^4-5x^3-2x^2} & x^2-x-2 \\ \quad -x^5-3x^4+x^3+11x^2+12x & \\ \quad \underline{-x^5-x^4+3x^3+5x^2+2x} & \\ \qquad -2x^4-2x^3+6x^2+10x+4 & \\ \qquad \underline{-2x^4-2x^3+6x^2+10x+4} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$f_1(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$;

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3-3x^2-5x-2 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} \underline{x^4+2x^3+x^2} & x^2-x-2 \\ \quad -x^3-4x^2-5x & \\ \quad \underline{-x^3-2x^2-x} & \\ \qquad -2x^2-4x-2 & \\ \qquad \underline{-2x^2-4x-2} & \\ \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$f_2(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$;

$f_3(x) = x + 1$;

$f_4(x) = x + 1$;

И последовательность

$$F_1 = f_1/f_2 = 1,\ F_2 = f_2/f_3 = x - 2,\ F_3 = f_3/f_4 = 1,\ F_4 = x + 1.$$

Значит для исходного полинома имеет место представление: $f(x) = (x+1)^4(x-2)^2$. *Вообще говоря, для получения ответа не обязательно было доводить процесс до конца, а можно было, получив* $d_2(x) = (x+1)^2$, *сделать вывод о том, что* $x = -1$ *является корнем* $f'(x)$ *кратности 3, а значит корнем*

$f(x)$ кратности 4, а разделив $f(x)$ на $(x+1)^4$, получить оставшиеся корни.

Теорема 8. (Виета)

Пусть корни многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ равны $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда

$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = -a_1/a_0$

$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-1}\lambda_n = a_2/a_0$

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n = -a_3/a_0$

$\ldots$

$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n = (-1)^n a_n/a_0.$

Пример 13. *Сумма двух корней уравнения*

$$2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$$

равна 1. Определить λ.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни уравнения. Теорема Виета и условие задачи дают следующую систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{lcr} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & \frac{1}{2} \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 & = & -\frac{7}{2} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & = & -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} \lambda_3 & = & -\frac{1}{2} \\ \lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_2}{2} & = & -\frac{7}{2} \\ -\frac{\lambda_1\lambda_2}{2} & = & -\frac{\lambda}{2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} \lambda_2 & = & -\frac{1}{2} \\ \lambda_1\lambda_2 & = & -3 \\ \lambda_1\lambda_2 & = & \lambda \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 1 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda = -3.$$

Пример 14. *Определить a, b, c так, чтобы они были корнями уравнения $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.*

Записываем теорему Виета для корней уравнения:

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & a \\ ab+ac+bc & = & b \\ abc & = & c \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b+c & = & 0 \\ b(c-1) & = & 0 \\ abc & = & c \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lcr} b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ a & - & \forall \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{lcr} c & = & 1 \\ b & = & -1 \\ a & = & -1 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

Пример 15. *Образуют ли корни уравнения третьей степени $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$ арифметическую прогрессию?*

Если корни уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ образуют арифметическую прогрессию, то $\lambda_1 + \lambda_3 = 2\lambda_2$. Дополним это условие равенствами из теоремы Виета:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 2\lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & \dfrac{3}{2} \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 & = & -\dfrac{1}{4} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & = & -\dfrac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = & 2\lambda_2 \\ 3\lambda_2 & = & \dfrac{3}{2} \\ 2{\lambda_2}^2 + \lambda_1\lambda_3 & = & -\dfrac{1}{4} \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & = & -\dfrac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_2 & = & \dfrac{1}{2} \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1\lambda_3 & = & -\dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 & = & \dfrac{1}{2} \\ \lambda_{1,3} & = & -\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2} \end{cases};$$

Корни образуют арифметическую прогрессию.

3. Схема Горнера. Формула Тейлора.

Поставим задачу: вычислить значение полинома

$$f(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \ldots + a_0x^n$$

в точке $x = x_0$ наибыстрейшим способом. При вычислении «в лоб» потребуется $n - 1$ раз возводить в степень, потом n раз умножать на a_i и n раз складывать: $3n - 1$ действий. Попробуем оптимизировать процесс:

$$f(x_0) = a_n + x_0[a_{n-1} + a_{n-2}x_0 + \ldots + a_1x_0^{n-2} + a_0x_0^{n-1}] =$$

$$= a_n + \underbrace{x_0[a_{n-1} + x_0[a_{n-2} + \ldots + x_0[\overbrace{a_2 + x_0[\underbrace{a_1 + a_0x_0}_{b_1}]}^{b_2}]\ldots]}_{b_{n-1}} \cdot$$

Вычисляем значения выражений, стоящих в скобках, начиная с внутренней. Ясно, что $f(x_0) = b_n$. При этом для вычисления любого из $b_k (k = \overline{1, n})$ потребуется две операции (сложение и умножение), значит всего придется сделать $2n$ операций. Этот алгоритм реализуется в схеме Горнера следующим образом:

$b_0 = a_0, \quad b_k = a_k + b_{k-1}x_0, k = \overline{1, n}$

	a_0	a_1	$\dots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
x_0	b_0	b_1	$\dots$	b_{n-2}	b_{n-1}	$b_n = f(x_0)$

Кроме нахождения значения полинома $f(x)$ в точке $x = x_0$ схема Горнера позволяет разделить полином $f(x)$ на $(x - x_0)$ с остатком:

$f(x) = (x - x_0)(B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-2}x + B_{n-1}) + r;$

Тогда $f(x_0) = r = b_n$. А если приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x полиномов, стоящих справа и слева равенства, получим:

$a_0 = B_0, a_1 = B_1 - B_0 x_0, a_2 = B_2 - B_1 x_0, \ldots, a_n = b_n - x_0 B_{n-1}$. Откуда

$B_0 = a_0, B_k = a_k + B_{k-1}x_0, k = \overline{1, n-1}$. Таким образом выражения для B_k совпадают с выражениями в первой строке схемы Горнера!

Итак, первая строка схемы Горнера дает возможность:

1. $f(x)$ в точке $x = x_0 : f(x_0) = b_n$;

2. разделить полином $f(x)$ на $(x - x_0)$ с остатком:
$f(x) = (x - x_0)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + b_n$;

3. выяснить, является ли $x = x_0$ корнем полинома $f(x)$: если $b_n = 0$, то является, а если $b_n \neq 0$ — нет.

Произвольную n раз дифференцируемую в точке x_0 функцию можно приблизить формулой Тейлора:

$$\Phi(x) \approx \Phi(x_0) + \frac{\Phi'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{\Phi^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Для полинома $f(x), \deg f(x) = n$ имеет место равенство:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

То есть, для того, чтобы разложить $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$, необходимо вычислить значения всех его производных вплоть до n порядка включительно. Воспользуемся представлением

$f(x) = (x - x_0)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + b_n$.

Тогда

$f'(x) = 1 \cdot (b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) +$
$+ (x - x_0)((n-1)b_0 x^{n-2} + (n-2)b_1 x^{n-3} + \ldots + b_{n-2})$,

$f'(x_0) = 1 \cdot g(x_0)$, где $g(x) = b_0 x^n + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$.

Значение полинома $g(x)$ в точке $x = x_0$ найдем по схеме Горнера, для чего нужно заполнить вторую строчку таблицы по аналогичным формулам:

$c_0 = b_0, c_k = c_{k-1}x_0 + b_k, k = \overline{1, n-1}$. Тогда $f'(x_0) = 1 \cdot c_{n-1}$.

	a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
x_0	b_0	b_1	$\ldots$	b_{n-2}	b_{n-1}	$b_n = f(x_0)$
x_0	c_0	c_1	$\ldots$	c_{n-2}	$c_{n-1} = f'(x_0)$	

Рассуждая аналогичным образом легко показать, что для вычисления $f''(x_0)$ необходимо заполнить третью строку схемы Горнера по формулам:

$d_0 = c_0, d_k = d_{i-1}x_0 + c_k, k = 1, n-2$,

и тогда $f''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot d_{n-2} = 2!d_{n-2}$.

Для вычисления значений всех производных, нужно заполнить $n+1$ строку схемы Горнера:

	a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
x_0	b_0	b_1	$\ldots$	b_{n-2}	b_{n-1}	$b_n = f(x_0)$
x_0	c_0	c_1	$\ldots$	c_{n-2}	$c_{n-1} = \frac{f'(x_0)}{1!}$	
x_0	d_0	d_1	$\ldots$	$d_{n-2} = \frac{f''(x_0)}{2!}$		
x_0	e_0	$e_1 = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}$				
x_0	$r_0 = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$					

Таким образом, список возможностей, которые предоставляет схема Горнера расширяется:

4. получить значения производных полинома в точке $x = x_0$:
$f'(x_0) = 1!c_{n-1}, f''(x_0) = 2!d_{n-2}, \ldots$
$f^{(n-1)}(x_0) = (n-1)!e_1, f^{(n)}(x_0) = n!r_0$;

5. получить коэффициенты формулы Тейлора разложения полинома по степеням $(x - x_0)$:
$f(x) = r_0(x-x_0)^n + e_1(x-x_0)^{n-1} + \ldots + d_{n-2}(x-x_0)^2 +$
$+ c_{n-1}(x-x_0) + b_n$
(это числа, стоящие на диагонали схемы Горнера);

6. определить кратность корня $x = x_0$: она равна количеству нулей, стоящих на диагонали схемы Горнера (начиная с первой строчки!). Это следует из теоремы о кратных корнях;

7. если $x = x_0$ — корень полинома кратности k, определить коэффициенты полинома, получающегося при делении $f(x)$ на $(x - x_0)^k$ без остатка:
$f(x) = (x-x_0)^k(p_0x^{n-k} + p_1x^{n-k-1} + \ldots + p_{n-k-1}x + p_{n-k})$, где $p_i(i = \overline{0, n-k})$ — это числа, стоящие в k-ой строке схемы Горнера.

Пример 16. *Выполнить деление с остатком полинома*

$$f(x) = 4x^3 + x^2 \text{ на } x + i + 1.$$

Нужно построить первую строку схемы Горнера для $x = -1 - i$.

	4	1	0	0
$-1-i$	4	$-3-i$	$-1+7i$	$8-6i$

Значит $f(x) = (4x^2 - (3+i)x - 1 + 7i)(x + 1 + i) + 8 - 6i$.

Пример 17. *Для полинома* $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$ *вычислить* $f(4)$.

Нужно построить первую строку схемы Горнера для $x = 4$.

	1	-3	6	-10	16
4	1	1	10	30	136

Значит $f(4) = 136$.

Пример 18. *Разложить полином* $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ *по степеням* $(x+1)$.

Нужно построить схему Горнера для $x = -1$.

	1	2	-3	-4	1
-1	1	1	-4	0	1
-1	1	0	-4	4	
-1	1	-1	-3		
-1	1	-2			
-1	1				

Значит $f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$.

Пример 19. *Найти значение полинома* $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ *и всех его производных в точке* $x = 2$.

Нужно построить схему Горнера для $x = 2$.

	1	0	-4	6	-8	10	
2	1	2	0	6	4	18	$f(2) = 18$
2	1	4	8	22	48		$f'(2) = 48$
2	1	6	20	62			$f''(2) = 2! \cdot 62 = 124$
2	1	8	36				$f'''(2) = 3! \cdot 36 = 216$
2	1	10					$f^{(IV)}(2) = 4! \cdot 10 = 240$
2	1						$f^{(V)}(2) = 5! \cdot 1 = 120$

Пример 20. *Чему равен показатель кратности корня $x = 2$ для полинома $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.*

Нужно построить схему Горнера для $x = -2$.

	1	−5	7	−2	4	−8
2	1	−3	1	0	4	0
2	1	−1	−1	−2	0	
2	1	1	1	0		
2	1	3	7			

Значит кратность корня равна 3.

Пример 21. *Определить A и B так, чтобы полином $f(x) = Ax^4 + Bx^3 + 1$ делился на $(x-1)^2$.*

Иначе говоря, нужно, чтобы $x = 1$ был корнем не ниже второй кратности для данного полинома, т.е. первые две строки схемы Горнера должны заканчиваться нулями.

	A	B	0	0	1
1	A	$A+B$	$A+B$	$A+B$	$A+B+1$
1	A	$2A+B$	$3A+2B$	$4A+3B$	

$$\begin{cases} A+B+1 & = & 0 \\ 4A+3B & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+1 & = & 0 \\ -B-4 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B & = & -4 \\ A & = & 3 \end{cases}.$$

4. Некоторые приемы нахождения корней полинома.

Рассмотрим уравнение
$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \quad (a_j \in \mathbb{R}, j = \overline{0,n})$.

Для $n < 5$ корни уравнения находятся в общем виде — в виде функции от $a_0, \ldots, a_n$. Однако при $n \geq 5$ такого решения найти не удаётся. Рассмотрим несколько частных случаев, когда для некоторых семейств полиномов корни найти удаётся с помощью тех или иных стандартных приемов.

Теорема 9. Если полином
$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad (a_j \in \mathbb{R}, j = \overline{0,n})$ имеет корень $x_1 = \alpha + i\beta$ с $\beta \neq 0$, то он имеет и комплексно-сопряженный корень $x_2 = \bar{x}_1 = \alpha - i\beta$. Иначе говоря, если $f(\alpha + i\beta) = 0$, то $f(\alpha - i\beta) = 0$.

Таким образом, все корни вещественного полинома располагаются симметрично относительно вещественной оси. Знание этого факта, однако, слабо помогает при поиске корней.

Рассмотрим полином с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом равным 1.

Теорема 10. Если полином $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1, n}$ имеет целый корень λ, то этот корень является делителем свободного члена: $a_n \vdots \lambda$.

Пример 22. *Найти целые корни полинома* $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$.

Выписываем делители свободного члена $a_5 \vdots \{\pm 1, \pm 3\}$. *Если* x *— целый корень полинома, то* $x \in \{\pm 1, \pm 3\}$. *Остается посчитать значения полинома в этих точках:*

	1	1	-6	-14	-11	-3
1	1	2	-4	-18	-29	-32
-1	1	0	-6	-8	-3	0
-1	1	-1	-5	-3	0	
-1	1	-2	-3	0		
-1	1	-3	0			

Окончательно получим: $f(x) = (x+1)^4(x-3)$, *т.е. полином имеет кратный корень* $x = -1$ *кратности 4 и простой корень* $x = 3$.

Пусть теперь $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_j \in \mathbb{Z}$, где $j = \overline{0, n}$.

Теорема 11. Если полином $f(x)$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $\lambda = p/q$ (p/q — несократимая дробь), то

1. q — делитель старшего коэффициента: $a_0 \vdots q$;

2. p — делитель свободного члена:$a_n \vdots p$;

3. $(p-mq)$ — делитель $f(m)$ при любом целом m: $f(m) \vdots (p-mq)$.

Итак, чтобы проверить, есть ли у полинома с целыми коэффициентами целые или рациональные корни нужно выписать делители свободного члена и делители старшего коэффициента, определить потенциально возможные корни, а потом вычислить значения полинома в этих точках. Ясно, что если делителей будет много, то и потенциальных корней, которые придется проверять, тоже будет очень много.

Поэтому есть смысл использовать 3-й пункт теоремы, сформулированный для $m = 1$:

$$f(1) \vdots (p-q), \quad f(-1) \vdots (p+q),$$

чтобы отсеять лишние значения.

Пример 23. *Найти рациональные корни полинома*
а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$*;*
б) $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$*.*

а) $a_0 = 1$ *и* $a_3 \vdots \{\pm1, \pm2, \pm7, \pm14\}$*;* $\Rightarrow$
$x \in \{\pm1, \pm2, \pm7, \pm14\}; f(1) = -4; f(-1) = -36 \Rightarrow$
дополнительную проверку проходит только число 2 :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(-4) \vdots (2-1) & = & 1 \\ f(-36) \vdots (2+1) & = & 3 \end{array} \right. \Rightarrow x \in \{2\};$$

Считаем $f(2)$ *по схеме Горнера:*

	1	−6	−15	−4
2	1	−4	7	*0*
2	1	−2	3	

Окончательно получим: $f(x) = (x-2)(x^2-2x+3)$, *т.е. полином имеет один целый корень* $x = 2$ *кратности 1;*

б) $f(a_0) \vdots \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$ *и* $f(a_4) \vdots \{\pm1, \pm2, \pm3\pm4, \pm6, \pm12\} \Rightarrow$
$x \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12, \pm1/2, \pm3/2, \pm1/3, \pm2/3, \pm4/3, \pm1/6\}$;
$f(1) = 4; f(-1) = 18 \Rightarrow$ *дополнительную проверку проходят* $x \in \{2, -3, 1/2, -1/3\}$. *Строим схему Горнера:*

	6	19	−7	−26	12
2	6	31	55	*84*	180
−3	6	1	−10	4	0
−3	6	−17	41	−119	

Таким образом, $f(x) = (x+3)(6x^3 + x^2 - x + 4)$. *Оставшиеся значения* x *подставляем уже в полином* $6x^3 + x^2 - x + 4$*:*

−3	6	1	−10	4
$\frac{1}{2}$	6	4	−8	0
$\frac{1}{2}$	6	7	$-\frac{9}{2}$	

То есть $f(x) = (x+3)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(6x^2+4x-8)$. *Поскольку полином, стоящий в последней скобке, рациональных корней не имеет, окончательный ответ:* $x = -3$ *и* $x = \dfrac{1}{2}$.

Если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ и $a_j \in \mathbb{Q}, j = \overline{0,n}$, то этот случай сводится к рассмотренному выше. Действительно, пусть
$f(x) = \dfrac{p_0}{q_0}x^n + \dfrac{p_1}{q_1}x^{n-1} + \ldots + \dfrac{p_n}{q_n}.$
Если умножить этот полином на $q_0q_1\ldots q_n$, то его корни не изменятся, а коэффициенты нового многочлена станут целыми.

Определение 10. Полином $f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ называется возвратным, если $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $\ldots$ $a_j = a_{n-j}$, $\ldots$, то есть последовательность его коэффициентов $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ симметрична относительно середины.

Примером возвратного полинома может служить бином $(x + 1)^n$.

Пусть $f(x)$ — возвратный полином. Тогда

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots$$
$$+a_1x+a_0 = x^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x_{n-1}} + a_0\frac{1}{x_n}\right) = x^nf\left(\frac{1}{x}\right).$$

Итак, возвратные полиномы удовлетворяют функциональному соотношению $f(x) = x^nf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Теорема 12. Если n нечётно, то возвратный полином имеет корень $x = -1$.

Для доказательства достаточно подставить $x = -1$ в полученное соотношение: $f(-1) = (-1)^nf(-1) = -f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$.

Таким образом, возвратный полином $f(x)$ нечётной степени можно представить в виде $f(x) = (x + 1)\hat{f}(x)$. Можно доказать, что $\hat{f}(x)$ тоже возвратный полином (уже чётной степени). Как найти его корень?

Пример 24. *Решить уравнение*
а) $x^4 + 4x^3 + 4x + 1 = 0$;
б) $x^6 - 6x^5 + 14x^4 - 18x^3 + 14x^2 - 6x + 1 = 0$.

а) Разделим обе части на x^2.

$$x^2 + 4x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

и сгруппируем

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Введём новую переменную $u = x + \dfrac{1}{x}$.

Тогда $u^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$ *и уравнение превращается в квадратное* $u^2 - 2 + 4u = 0$.

Его решить нетрудно. Найдя u_1, u_2, *подставим их в* $u_{1,2} = x + \dfrac{1}{x}$ *и снова решим два квадратных уравнения.*

б) Решаем аналогичным образом, только делим на x^3*:*

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 14\left(x + \frac{1}{x}\right) - 18 = 0$$

$$u = x + \frac{1}{x}, u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, u^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Откуда $u^3 - 3u - 6(u^2 - 2) + 14u - 18 = 0$ *или*
$u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0.$

Это уравнение имеет корни $1, 2, 3$. *Решаем три квадратных уравнения и получаем окончательный ответ:*

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \quad x_{3,4} = 1, \quad x_{5,6} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Список литературы

[1] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физматгиз., 1962. 396 с.

[2] Фаддев Д. К. Лекции по алгебре. М.: Наука., 1984. 416 с.

[3] Ларин С. В. Алгебра: многочлены. М.: Юрайт., 2019. 136 с.

[4] Курбатова Г. И., Волков Ю. В., Ермолаева Н. Н. Практические занятия по алгебре. Комплексные числа, многочлены. СПб.: Лань., 2019. 192 с.

УДК 517.44

Распопова Н.В.[1]

Примеры применения операционного исчисления при решении дифференциальных и интегральных уравнений

Аннотация. Кратко изложены основные определения и теоремы операционного исчисления, а также даны примеры применения оператора Лапласа для решения некоторых задач математического анализа.

Ключевые слова: оператор Лапласа, операционное исчисление, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения.

1. Основные определения. Рассмотрим функцию вещественного переменного $f(t)$ определённую на всей вещественной оси $t \in \mathbb{R}$ и интегрируемую на любом конечном промежутке. Пусть $f(t)$ удовлетворяет условиям:

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: n.raspopova@spbu.ru

1. $f(t) = 0$ при $t < 0$.
2. Существуют такие числа $M > 0$, $s \geqslant 0$, что функция $f(t)$ при любом $t \in R$ удовлетворяет неравенству:

$$|f(t)| \leqslant Me^{st}.$$

Определение 1. Функция $f(t)$, удовлетворяющая всем перечисленным выше условиям, называется функцией ограниченного роста. При этом число $s_0 = \inf s$ называется показателем роста $f(t)$.

Замечание 1. *Первое условие можно обойти, введя функцию Хевисайда:*

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0, \\ 1, \ t \geqslant 0. \end{cases}$$

В дальнейшем любую функцию $f(t)$ будем заменять на $f(t)\cdot\eta(t)$ и будем считать первое условие выполненным. Например, если мы указываем функцию $f(t) = \sin t$, то на самом деле имеем в виду функцию

$$f(t) = \sin t \cdot \eta(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0, \\ \sin t, \ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Определение 2. Функция комплексного переменного $p \in \mathbb{C}$

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt} dt, \quad p = s + i\sigma,\ s \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}$$

называется изображением по Лапласу, если существует указанный несобственный интеграл. Исходная функция $f(t)$ называется оригиналом.

Пример 1. *Найдем изображение для $f(t) = e^t$. Условие 1 будет выполнено, если доопределить $f(t)$, введя функцию Хэвисайда (см. Замечание 1). Условие 2 выполнено при $M = 1$, $s_0 = 1$.*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^t \cdot e^{-pt} dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{t(1-p)} dt = \frac{1}{-(p-1)} e^{-(p-1)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-1}.$$

Для данной функции несобственный интеграл будет сходится при $p \to \infty$ в правой полуплоскости Re $p > s_0 = 1$

2. Свойства преобразования Лапласа. Перечислим (без доказательств) основные теоремы операционного исчисления. Будем использовать следующие обозначения: функции действительного переменного $f(t)$, $g(t)$ являются оригиналами, функции комплексного переменного $F(p)$, $G(p)$ — изображениями соответственно для $f(t)$ и $g(t)$:

$$f(t) \risingdotseq F(p),\ \ g(t) \risingdotseq G(p).$$

Теорема 1. (свойство линейности)

Пусть α, $\beta \in \mathbb{C}$. Изображение линейной комбинации функций $f(t)$ и $g(t)$ является линейной комбинацией их изображений $F(p)$ и $G(p)$:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Это свойство является следствием линейности интеграла от функции действительного переменного.

Теорема 2. (подобия)

Пусть $a \in R$, $a > 0$.

$$f(at) \risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Это свойство также следует из определения изображения и свойств интеграла от функции действительного переменного.

Пример 2. *Найдем изображение для $f(t) = e^{at}$. Зная (см. Пример 1), что*

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1},$$

запишем, используя теорему подобия:

$$e^{at} \risingdotseq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{p}{a} - 1} = \frac{1}{p-a}.$$

Теорема 3. (смещения)

Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$e^{\alpha t} \cdot f(t) \risingdotseq F(p - \alpha).$$

Пример 3. *Найдём изображение для $f(t) = e^{2t} \sin t$. Вначале найдём изображение для функции $\sin t$, используя свойства* *линейности (Теорема 1), подобия (Теорема 2) и найденное выше изображение для* e^{at} *(Пример 2):*

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i}{(p+i)(p-i)} = \frac{1}{p^2+1}.$$

Далее по теореме смещения получим (для $\alpha = 2$*)*

$$e^{2t}\sin t \risingdotseq \frac{1}{(p-2)^2+1}.$$

Теорема 4. (запаздывания)
Пусть $\tau \in R$, $\tau > 0$.

$$f(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}\cdot F(p).$$

В механике используют включение с запаздыванием для различных приборов. В математической модели таких включений удобно использовать функцию Хэвисайда, а изображения для таких функций удобно находить с помощью теоремы запаздывания.

Пример 4. *Найдем изображение для* $f(t) = \cos(t-1)\cdot\eta(t-1)$. *Изображение для функции* $f(t) = \cos t$ *можно вывести аналогично тому, как это было сделано в Примере 3 для* $\sin t$*:*

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{(p+i)(p-i)} = \frac{p}{p^2+1}.$$

Далее по теореме запаздывания получим (для $\tau = 1$*)*

$$\cos(t-1)\cdot\eta(t-1) \risingdotseq e^{-p\cdot 1}\cdot\frac{p}{p^2+1} = e^{-p}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Теорема 5. (дифференцирование оригинала)

$$f'(t) \risingdotseq p\,F(p) - f(0),$$
$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - p\,f(0) - f'(0), \ldots$$
$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Примеры для данной теоремы будут рассмотрены в следующем разделе.

Теорема 6. (дифференцирование изображения)

$$F'(p) \risingdotseq -tf(t),$$

$$F''(p) \risingdotseq t^2 f(t),$$
$$\dots$$
$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

Пример 5. *Найдем изображение для $f(t) = t^2 e^t$. Используем изображение, найденное в Примере 1:*

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}.$$

Тогда по теореме о дифференцировании изображений

$$\left(\frac{1}{p-1}\right)' = -\frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq te^t,$$
$$\left(-\frac{1}{(p-1)^2}\right)'' = \frac{2}{(p-1)^3} \risingdotseq t^2 e^t.$$

Теорема 7. (интегрирование оригинала)

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

Пример 6. *Найдем изображение для для $f(t) = \int\limits_0^t e^\tau d\tau$.*

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1} \;\Rightarrow\; \int\limits_0^t e^\tau d\tau \risingdotseq \frac{1}{p(p-1)}.$$

Теорема 8. (интегрирование изображения)

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty} F(p)dp.$$

Пример 7. *Найдем изображение для для $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.*

$$\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1} \text{ (см. Пример 3) } \Rightarrow$$

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_{p}^{+\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_{p}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Теорема 9. (умножение изображений или теорема о свёртке)
Если $F(p)$ и $G(p)$ являются изображениями по Лапласу функций $f(t)$ и $g(t)$, то их произведение также является изображением, причем

$$F(p) \cdot G(p) \risingdotseq \int\limits_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Определение 3. Интеграл $\int\limits_{0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ называется свёрткой функций $f(t)$, $g(t)$ и обозначается $(f * g)(t)$.

Теорему 9, учитывая Определение 3, можно прочитать следующим образом: произведение изображений является изображением свёртки.

Пример 8. *Найдём изображение для*

$$\psi(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{\tau}\,d\tau.$$

Функция $\psi(t)$ является сверткой $g(t) = t$ и $f(t) = e^t$. Изображения для каждой из этих двух функций мы знаем:

$$G(p) = \frac{1}{p^2},\ F(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Тогда по теореме о свёртке:

$$\psi(t) = f(t) \cdot g(t) \risingdotseq F(p) \cdot G(p) = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

Для нахождения изображений по заданным оригиналам можно использовать Определение 1 и перечисленные свойства, однако в случае достаточно простых функций удобнее пользоваться готовыми таблицами, имеющимися в любом пособии или учебнике по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению.

Применяя оператор Лапласа для решения задач математического анализа (например, дифференциальных уравнений различных типов или интегральных уравнений), приходится также решать обратную задачу, то есть по полученному изображению находить оригинал. Поскольку изображение представляет из себя, как правило, алгебраическую дробь, для нахождения оригинала можно разложить эту дробь на сумму простейших и использовать готовые таблицы оригиналов и изображений. Другой способ нахождения оригинала по изображению — применение теорем разложения [1, 2, 3, 4].

3. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть поставлена задача Коши:

$$x^{(n)}(t) + a_1\, x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n\, x(t) = f(t),$$

$$x(0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

Запишем изображения по Лапласу для левой и правой частей дифференциального уравнения, предполагая, что неизвестная функция $x(t)$ и известная функция $f(t)$ являются оригиналами (удовлетворяют всем необходимым свойствам). Обозначим через $X(p)$ изображение для $x(t)$, тогда по теореме о дифференцировании оригинала (Теорема 5):

$$x(t) \risingdotseq X(p),$$

$$x'(t \risingdotseq p\, X(p) - x(0),$$

$$\ldots$$

$$x^{(n)}(t) \risingdotseq p^n\, X(p) - p^{n-1}\, x(0) - \ldots - x^{(n-1)}(0),$$

$$f(t) = F(p).$$

Таким образом, вместо дифференциального уравнения получим операторное уравнение, которое является алгебраическии и позволяет достаточно легко найти из него неизвестную функцию $X(p)$. После чего, зная изображение $X(p)$, записываем оригинал $x(t)$, используя таблицы оригиналов и изображений либо теоремы разложения. Продемонстрируем алгоритм на следующих примерах.

3.1. Решить задачу Коши для неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

$$x'' - 2x' - 3x = e^{3t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Получим изображения для левой и правой частей дифференциального уравнения:

$$x(t) \risingdotseq X(p),$$

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p),$$
$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p).$$

В правой части уравнения стоит функция $f(t) = e^{3t}$, изображение для которой равно $\dfrac{1}{p-3}$. Запишем операторное уравнение:

$$(p^2 - 2p - 3)X(p) = \frac{1}{p-3}.$$

Найдём из записанного алгебраического уравнения неизвестную функцию $X(p)$ и разложим её на сумму простейших дробей:

$$X(p) = \frac{1}{(p-3)^2(p+1)} = -\frac{1}{16(p-3)} + \frac{1}{4(p-3)^2} + \frac{1}{16(p+1)}.$$

Запишем оригинал для найденного изображения:

$$X(p) \risingdotseq x(t) = -\frac{1}{16}\,e^{3t} + \frac{1}{4}\,te^{3t} + \frac{1}{16}\,e^{-t}.$$

3.2. Решить задачу Коши:

$$x''' + x' = 1, \quad x(0) = -1,\, x'(0) = x''(0) = 1.$$

Запишем изображения для левой части дифференциального уравнения:

$$x(t) \risingdotseq X(p),$$
$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) + 1,$$
$$x'''(t) \risingdotseq p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3X(p) + p^2 - p - 1.$$

В правой части уравнения стоит 1, её изображение — $\dfrac{1}{p}$. Операторное уравнение примет вид

$$p^3\,X(p) + p^2 - p - 1 + p\,X(p) + 1 = \frac{1}{p}.$$

Найдем из записанного алгебраического уравнения неизвестную функцию $X(p)$ и разложим её на сумму простейших дробей:

$$X(p) = \frac{1 - p^3 + p^2}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2+1}.$$

Запишем оригинал для найденного изображения:

$$\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq t - \cos\, t.$$

Таким образом получен ответ для поставленной задачи Коши:

$$x(t) = t - \cos t.$$

3.3. В случае, если начальные условия даны не при $t = 0$, сразу применить теорему о дифференцировании оригинала мы не можем.

Пусть требуется решить такую задачу Коши:

$$x'' + 2x' = e^{2t}, \quad x(1) = 2,\ x'(1) = 0.$$

Вначале поставим вспомогательную задачу для функции $y(t) = x(t+1)$:

$$y'' + 2y' = e^{2(t+1)}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$$

Запишем операторное уравнение

$$p^2Y(p) - 2p + 2(pY(p) - 2) = e^2\frac{1}{p-2}.$$

Для правой части уравнения было сделано следующее преобразование:

$$e^{2(t+1)} = e^{2t+2} = e^2 \cdot e^{2t} \risingdotseq e^2\frac{1}{p-2}.$$

Находим из операторного уравнения $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{e^2}{(p-2)(p^2+2p)} + \frac{2p+4}{p^2+2p} = \frac{e^2}{p(p-2)(p+2)} + \frac{2}{p}.$$

Раскладываем $Y(p)$ на сумму простейших дробей:

$$Y(p) = e^2\left(-\frac{1}{4p} + \frac{1}{8(p+2)} + \frac{1}{8(p-2)}\right) + \frac{2}{p}.$$

Тогда оригинал принимает вид:

$$y(t) = e^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{-2t} + \frac{1}{8}e^{2t}\right) + 2.$$

Со сдвигом на 1 находим решение исходной задачи:

$$x(t) = y(t-1) = e^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{8}e^{2(t-1)}\right) + 2.$$

3.4. Решить задачу Коши, когда правая часть дифференциального уравнения содержит составную функцию (выражаемую через функцию Хэвисайда).

$$x'' + x = \eta(t) - \eta(t-2), \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$$

Запишем изображения для левой и правой частей уравнения, причём для правой части, содержащей функцию Хэвисайда, воспользуемся теоремой запаздывания (Теорема 4):

$$x'' + x \risingdotseq p^2\, X(p) + X(p),$$

$$\eta(t) - \eta(t-2) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p}.$$

Получим операторное уравнение:

$$(p^2+1)X(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p}.$$

И запишем выражение для $X(p)$:

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} - \frac{e^{-2p}}{p(p^2+1)}.$$

Найдем изображение для $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$ с помощью теоремы об интегрировании оригинала (Теорема 7):

$$\frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin\, t \;\; \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p(p^2+1)} \risingdotseq \int\limits_0^t \sin\, \tau\, d\tau = -\cos\, t + 1.$$

Тогда изображение для $\dfrac{e^{-2p}}{p(p^2+1)}$ по теореме запаздывания будет равно:

$$\frac{e^{-2p}}{p(p^2+1)} \risingdotseq (-\cos\,(t-2)+1)\eta(t-2).$$

Решение заданного уравнения:

$$x(t) = (1-\cos\, t)\eta(t) - (1-\cos\,(t-2))\eta(t-2).$$

4. Решение интегральных уравнений. Интегральные уравнения содержат неизвестную функцию под знаком интеграла. Например, в задачах математической физики приходится иметь дело с интегральными уравнениям Вольтерра и Фредгольма первого и второго рода. Решения таких уравнений также можно выполнить с помощью преобразования Лапласа.

4.1. Решить интегральное уравнение:

$$\varphi(x) = \sin\, x + \int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

Применяем для обеих частей преобразование Лапласа. При этом интеграл $\int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt$ рассматриваем как свёртку функций $g(x) = x$, $f(x) = \varphi(x)$, изображения для которых мы знаем:

$$x \risingdotseq \frac{1}{p^2},\ \ \varphi(x) \risingdotseq \Phi(p).$$

Тогда по теореме о свёртке (Теорема 9):

$$\int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt \risingdotseq \frac{1}{p^2}\cdot\Phi(p).$$

Записываем операторное уравнение:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2}\Phi(p).$$

Находим из этого уравнения $\Phi(p)$

$$\Phi(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2-1}\right)$$

и вычисляем оригинал $\varphi(x)$. При этом оригинал для второго слагаемого в скобках найдем, используя свойство линейности (Теорема 1):

$$\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p+1)} \risingdotseq \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \mathrm{sh}\ t.$$

Получаем решение интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\sin\, x + \mathrm{sh}\ x).$$

Список литературы

[1] Алешков Ю. З. Лекции по теории функций комплексного переменного. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та., 1999. 196 с.

[2] Камачкин А. М., Старков В. Н., Степенко Н. А. Преобразования Лапласа и их применения. Учеб. пособие. СПб: ВВМ, 2016. 151 с.

[3] Евграфов М. А. Аналитические функции: учеб. пособие . СПб, 2008. 447 с.

[4] Волков И. К., Канатников А. Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / Под ред. В.С.Зарубина, А.П.Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана., 2002. 228 с.

УДК 517.373

Бочкарев А.О.[1]

Вычисление криволинейных интегралов по неявно заданным кривым

Аннотация. Проводится разбор задач, связанных с вычислением криволинейных интегралов I-го и II-го родов по пространственным кривым, заданным неявно (как пересечение двух поверхностей). Рассматриваются альтернативные способы решения, с привлечением математического аппарата из алгебры и аналитической геометрии. Даны графические иллюстрации. Все примеры, с небольшим вариациями, заимствованы из «Сборника задач и упражнений по математическому анализу» Б.П. Демидовича.

Ключевые слова: криволинейный интеграл первого рода, криволинейный интеграл второго рода, неявно заданная пространственная кривая.

1. Криволинейные интегралы I-го рода. Сведение криволинейного интеграла I-го рода к определенному [1, 2] — элементарная задача, если кривая задана параметрически:

$$\int\limits_{(L)} f(x,y,z)ds = \int\limits_{t_0}^{T} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt$$

В случае же неявного способа задания кривой — например, как пересечение двух поверхностей — не всегда очевидно, как такую кривую параметризовать. Такие задачи заставляют включать математическую эрудицию и привлекать разнообразные математические средства из смежных областей, из алгебры, из геометрии, ну и, конечно, предполагают понимание сути понятий и владение инструментами математического анализа.

1.1. *Вычисление интегралов.*

Пример 1. Рассмотрим задачи в которых надо вычислить криволинейные интегралы 1-го рода следующего вида:

$$\oint\limits_{(L)} x^2ds, \quad \oint\limits_{(L)} y^2ds, \quad \oint\limits_{(L)} z^2ds, \quad \oint\limits_{(L)} xyds, \ldots$$

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, e-mail: a.bochkarev@spbu.ru

где (L) — окружность, заданная как пересечение сферы с центральной плоскостью (Рис. 1)

$$(L): \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$$

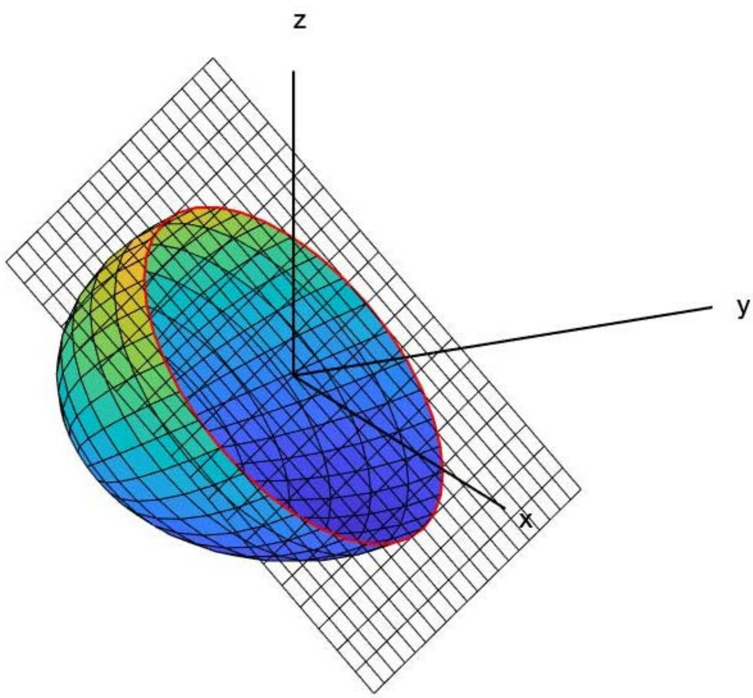

Рис. 1. Пересечение сферы с центральной плоскостью

Способ 1 (эвристический). Можно заметить, что уравнения поверхностей полностью симметричны по всем трем переменным, а потому первые три интеграла равны

$$\oint\limits_{(L)} x^2 ds = \oint\limits_{(L)} y^2 ds = \oint\limits_{(L)} z^2 ds =$$

$$= \frac{1}{3} \oint\limits_{(L)} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) ds = \frac{1}{3} \oint\limits_{(L)} a^2 ds = \frac{a^3 2\pi}{3}$$

Однако для интеграла $\oint\limits_{(L)} xyds$ такой способ не годится, и нужно искать удобную параметризацию кривой.

Способ 2 (пространственный поворот координатных осей). Конкретно для этой задачи заметим, что пространственный замкнутый контур (L) (здесь: окружность) — плоский, пусть и наклоненный. Поэтому идея состоит в том, чтобы повернуть оси координат так, чтобы новая ось z_1 была направлена по нормали к плоскости контура. Тогда окружность (L) естественно параметризовать полярным углом в новой координатной плоскости Ox_1y_1. Осталось найти линейное преобразование старых координат x, y, z через новые x_1, y_1, z_1.

Орт новой оси Oz_1 известен из уравнения плоскости:

$$\mathbf{k}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Оси Ox_1, Oy_1 можно направить произвольно в плоскости контура. Однако заметим, что эта плоскость пересекается с координатной плоскостью $z = 0$ по прямой $x + y = 0$. Поэтому удобно направить по этой прямой с ортом $\mathbf{j}_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, например, ось Oy_1, а оставшуюся ось Ox_1 задать векторным произведением: $\mathbf{i}_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{k}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$. Итак (Рис. 2),

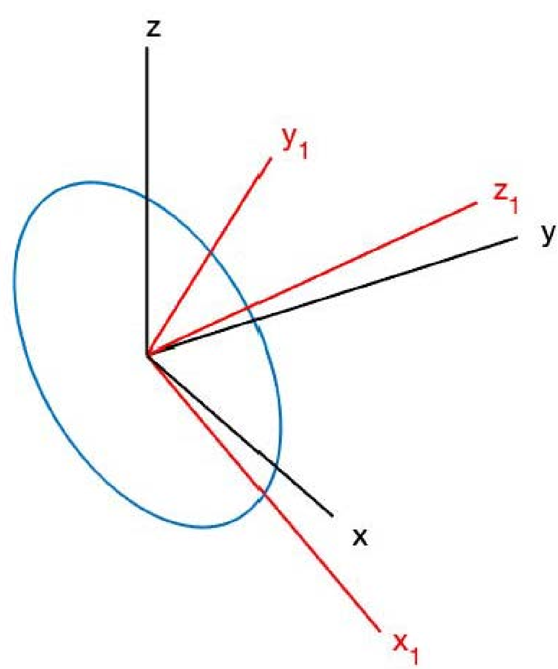

Рис. 2. Параметризация кривой в плоскости окружности

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} \quad \text{или матрично} \quad \mathbf{x_1} = \mathbf{Ax}$$

Но нам нужно выразить наоборот, $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}x_1}$. Учитывая, что по построению матрица $\mathbf{A}$ ортогональная, т. е. $\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A}^*$, получаем искомое преобразование координат

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Vmatrix}$$

Строим параметризацию пространственной кривой (L) в новых осях

$$x_1 = a\cos\varphi_1, \quad y_1 = a\sin\varphi_1, \quad z_1 = 0$$

что и дает нам через линейное преобразование параметризацию в исходных осях

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 = a\Big(\dfrac{\cos\varphi_1}{\sqrt{6}} - \dfrac{\sin\varphi_1}{\sqrt{2}}\Big) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}x_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_1 = a\Big(\dfrac{\cos\varphi_1}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sin\varphi_1}{\sqrt{2}}\Big) \\ z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 = -2a\dfrac{\cos\varphi_1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

Чтобы перейти к определенному интегралу, нужно еще найти элемент длины дуги. Конечно, можно посчитать его по формуле $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,d\varphi_1$, предварительно вычислив производные x', y', z' по параметру φ_1. Однако мы всего лишь еще раз убедимся, что элемент дуги окружности равен $ds = ad\varphi_1$

Окончательно получаем определенный интеграл

$$\oint\limits_{(L)} x^2 ds = a^3 \int\limits_0^{2\pi} \Big(\frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{6}} - \frac{\sin\varphi_1}{\sqrt{2}}\Big)^2 d\varphi_1 = \frac{a^3 2\pi}{3}$$

Точно так же можно найти интеграл от функции xy.

Способ 3 (в обобщенных цилиндрических координатах). Использование криволинейных координат удобно, когда одна из них выступает как естественный параметр кривой. Сферические координаты, несмотря на то, что все происходит на поверхности сферы, приводят к нелинейной системе уравнений относительно ее углов, что делает ее использование затруднительным. Применение же цилиндрических координат напрямую также проблематично, из-за того что проекция контура (L) на плоскость Oxy есть повёрнутый на $\pi/4$ эллипс. Поэтому напрашивается идея использования повёрнутых эллиптических цилиндрических координат. Найдем этот эллипс (Рис. 3):

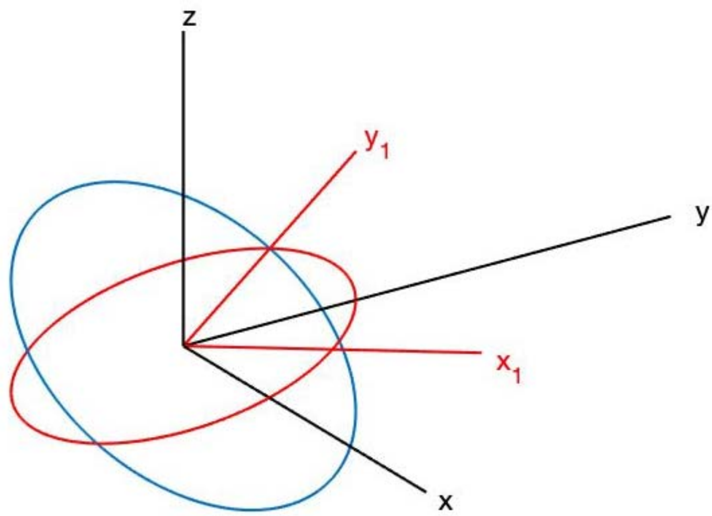

Рис. 3. Параметризация кривой в проекции на плоскость xy (на повернутом эллипсе)

$$z = -(x+y), \quad x^2 + y^2 + (x+y)^2 = a^2$$

Так как его оси лежат на прямых $x \pm y = 0$, то естественно сделать замену

$$x_1 = 0.5(x+y), \quad y_1 = 0.5(y-x),$$

в которых получим искомое уравнение эллипса и его параметризацию

$$\frac{3x_1^2}{2a^2} + \frac{y_1^2}{2a^2} = 1; \qquad \begin{cases} x_1 = a\dfrac{2}{\sqrt{6}}\cos\varphi \\ y_1 = a\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin\varphi \end{cases}$$

В исходных координатах получим параметризацию исходной кривой

$$\begin{cases} x = x_1 + y_1 = a\left(\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{6}} - \dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\right) \\ y = x_1 - y_1 = a\left(\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}\right) \\ z = -(x+y) = -2x_1 = -a\dfrac{2\cos\varphi}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

которая, как видно, получилась той же, что и при способе 2.

1.2. *Вычисление длин дуг.*

Пример 2. Вычислить длину дуги пространственной кривой (Рис. 4)

$$(L):\ x^2 + y^2 = cz,\ \frac{x}{y} = \operatorname{tg}\frac{z}{c} \quad \text{от O}\,(0{,}0{,}0) \ \text{ до } \ \text{A}\,(x_0, y_0, z_0).$$

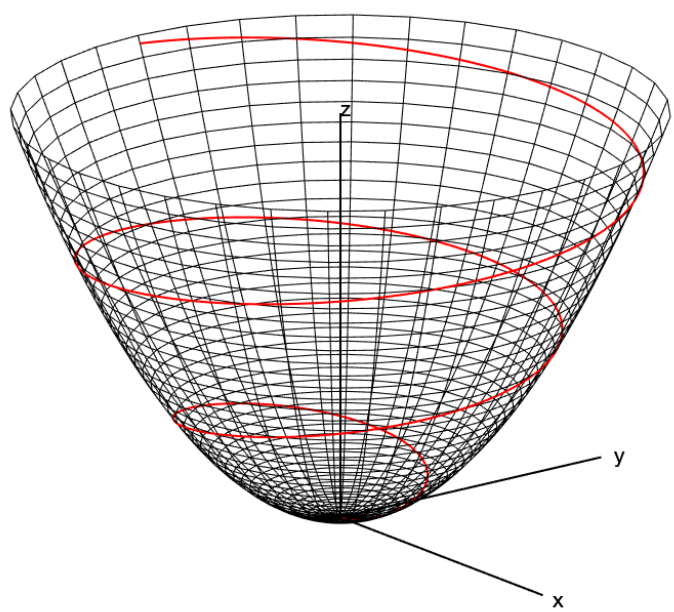

Рис. 4. Параболическая спираль

Способ 1 (в декартовых координатах). В силу определенной симметрии переменных x, y в уравнении поверхностей в качестве параметра кривой (L) напрашивается взять переменную z. Не сразу очевидно, как явно будут выражаться x, y через z. Но по постановке задачи нам это не особо и нужно, так как требуется вычислить длину дуги, элемент которой выражается через x'_z, y'_z. В отличие от самих функций найти их производные всегда проще: дифференцируем по z систему неявно заданных функции

$x(z), y(z)$ и решаем линейную систему уравнений относительно x'_z, y'_z

$$\begin{cases} 2xx'_z + 2yy'_z = c \\ xy'_z - yx'_z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_z = \dfrac{x}{2z} - \dfrac{y}{c} \\ y'_z = \dfrac{y}{2z} + \dfrac{x}{c} \end{cases}$$

Затем вычисляем элемент длины дуги

$$ds = \sqrt{x'^2_z + y'^2_z + 1}\, dz = \sqrt{\frac{c}{4z} + \frac{z}{c} + 1}\, dz = \Big(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{z}} + \sqrt{\frac{z}{c}}\Big) dz$$

Наконец, вычисляем саму длину дуги, сводя криволинейный интеграл к определенному

$$L = c\int\limits_0^{z_0} \Big(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{z}} + \sqrt{\frac{z}{c}}\Big) d\frac{z}{c} = c\Big(\sqrt{\frac{z_0}{c}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{z_0}{c}}^3\Big) = \sqrt{\frac{z_0}{c}}\frac{3c + 2z_0}{3}$$

Способ 2 (в цилиндрических координатах). Явную параметризацию $x(z)$, $y(z)$ можно все-таки получить, используя цилиндрические координаты, в которых уравнения поверхностей принимают вид

$$r = \sqrt{cz}, \quad \varphi = \frac{z}{c}$$

Получаем явную параметризацию пространственной кривой и ее производные

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi = \sqrt{cz}\cos\dfrac{z}{c} \\ y = r\sin\varphi = \sqrt{cz}\sin\dfrac{z}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_z = \sqrt{1}2\sqrt{\dfrac{c}{z}}\cos\dfrac{z}{c} - \sqrt{\dfrac{z}{c}}\sin\dfrac{z}{c} \\ y'_z = \sqrt{1}2\sqrt{\dfrac{c}{z}}\sin\dfrac{z}{c} + \sqrt{\dfrac{z}{c}}\cos\dfrac{z}{c} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что на самом деле это та же параметризация, что и при способе 1, только выраженная явно.

Пример 3. Вычислить длину дуги пространственной кривой

$$(L):\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ \sqrt{x^2 + y^2}\cdot \mathrm{ch}\Big(\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}\Big) = 1$$

от A(a,0,0) до B(x, y, z) (см. Рис. 5).

Здесь уравнения поверхностей, задающих пространственную кривую, удобно выражаются в сферических координатах, из которых и выделяем параметр φ

$$\rho = a, \quad \cos\psi\,\mathrm{ch}\,\varphi = 1 \Rightarrow \psi = \arccos\frac{1}{\mathrm{ch}\,\varphi}$$

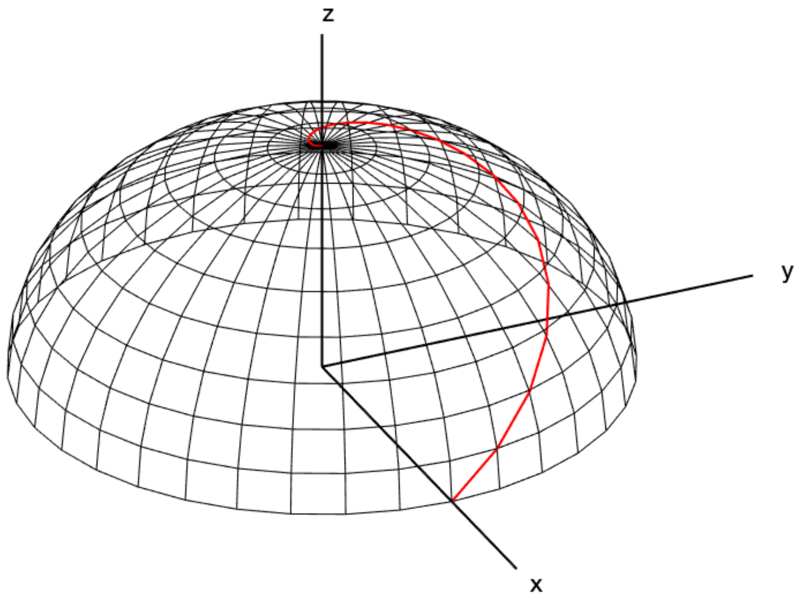

Рис. 5. Кривая на сфере

Получаем явную параметризацию пространственной кривой и ее производные

$$\begin{cases} x = a\cos\psi\cos\varphi = a\dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{ch}\varphi} \\ y = a\cos\psi\sin\varphi = a\dfrac{\sin\varphi}{\operatorname{ch}\varphi} \\ z = a\sin\psi = a\sqrt{1-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi}} = a\operatorname{th}\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x'_\varphi = a\dfrac{-\sin\varphi\operatorname{ch}\varphi - \cos\varphi\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi} \\ y'_\varphi = a\dfrac{\cos\varphi\operatorname{ch}\varphi - \sin\varphi\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}^2\varphi} \\ z'_\varphi = \dfrac{a}{\operatorname{ch}^2\varphi} \end{cases}$$

Элемент длины дуги при такой параметризации легко вычисляется:

$$ds = \sqrt{x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi}\,d\varphi = \frac{a}{\operatorname{ch}^2\varphi}\sqrt{\operatorname{ch}^2\varphi + \operatorname{sh}^2\varphi + 1}\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}a}{\operatorname{ch}\varphi}d\varphi\ .$$

Окончательно длина дуги кривой от A(a,0,0), где $\varphi = 0$, до

В(x, y, z) составляет

$$L = \int\limits_0^{\varphi} \frac{a\sqrt{2}d\varphi}{\operatorname{ch}\varphi} = a\sqrt{2}\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\operatorname{sh}\varphi}{1+\operatorname{sh}^2\varphi} =$$

$$= a\sqrt{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh}\varphi = a\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\ .$$

И ещё одна поучительная задача.

Пример 4. Найти длину дуги пространственной кривой, заданной как пересечение параболического цилиндра с образующими, параллельными оси z, и эллиптического конуса с осью x (см. Рис. 6):

$$(L):\ (x-y)^2 = a(x+y),\ x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2\ ,$$

от $O(0,0,0)$ до $A(x_0, y_0, z_0)$.

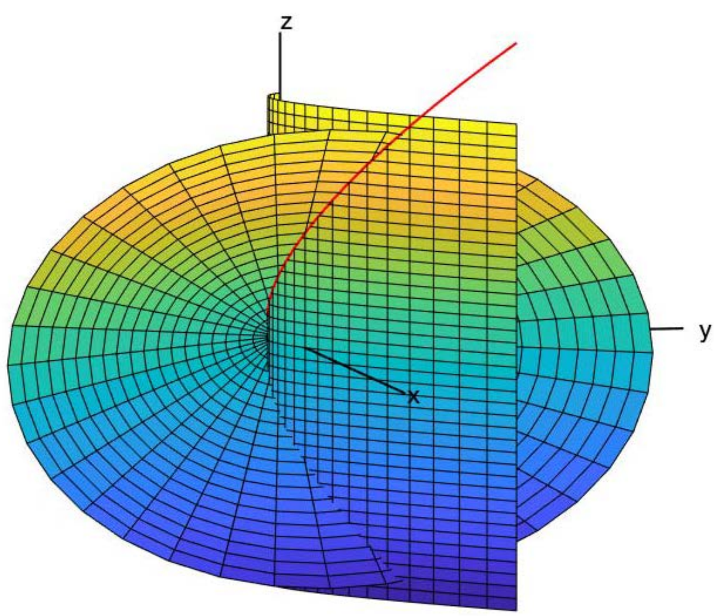

Рис. 6. Пересечение параболического цилиндра и эллиптического конуса

В отличие от предыдущей задачи применение криволинейных координат (полярных или сферических) в этой задаче неуместно, а выбор удобного параметра из декартовых переменных здесь не очевиден. Подсказку нам дает структура уравнений поверхностей, задающих пространственную кривую,— ввести вспомогательные переменные

$$x_1 = x + y, \quad y_1 = x - y$$

В новых переменных уравнения поверхностей приводят к явному выражению x_1, z через y_1

$$\begin{cases} y_1^2 = a x_1 \\ x_1 y_1 = \dfrac{9}{8} z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1^2}{a} \\ z = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{a}} y_1^{3/2} \end{cases}$$

Откуда получаем явную параметризацию пространственной кривой по y_1

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + y_1}{2} = \dfrac{y_1^2}{2a} + \dfrac{y_1}{2} \\ y = \dfrac{x_1 - y_1}{2} = \dfrac{y_1^2}{2a} - \dfrac{y_1}{2} \\ z = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{a}} y_1^{3/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{y_1}{2} + \dfrac{1}{2} \\ y' = \dfrac{y_1}{2} - \dfrac{1}{2} \\ z' = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sqrt{y_1} \end{cases}$$

Элемент длины дуги при такой параметризации также легко вычисляется

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dy_1 = \sqrt{2\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{1}{2} + 2\frac{y_1}{2}}\, dy_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(2\frac{y_1}{a} + 1\Big) dy_1$$

Окончательно длина дуги кривой от O(0,0,0) до A(x_0, y_0, z_0) составляет

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{x_0 - y_0} \Big(2\frac{y_1}{a} + 1\Big) dy_1 = \frac{(x_0 + y_0) + (x_0 - y_0)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} x_0 \ .$$

2. Криволинейные интегралы II-го рода. Сведение криволинейных интегралов II-го рода к определенным технически осуществляется проще чем у интегралов I-го рода, так как при этом не возникает радикал с элементом дуги [1, 2]

$$\int\limits_{(L)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{T} \big(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(\ldots(t))y'(t) + R(\ldots(t))z'(t)\big)dt.$$

Но для интегралов II-го рода имеется и своя специфика: нужно учитывать направление обхода, для них, как правило, задействованы все проекции на координатные оси. Это дает возможность проводить анализ, какие проекции имеют нулевой вклад, ещё до стадии вычисления. В случае замкнутого контура это приводит к альтернативному пути решения с применением формулы Стокса

$$\oint\limits_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy + \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)dydz + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)dzdx.$$

Однако такой подход не всегда является более простым, так как приходится вычислять поверхностный интеграл. Но в ряде случаев этот прием оказывается вполне приемлемым.

Пример 5. Вычислить криволинейный интеграл II-го рода

$$I = \oint\limits_{(L)} (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

(L) — окружность, заданная как пересечение сферы с центральной плоскостью

$$(L): \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = x \operatorname{tg}\alpha \ (0 < \alpha < \pi)$$

пробегая против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси x (см. Рис. 7).

Способ 1 (непосредственное вычисление). Использование сферических координат

$$\begin{cases} x = a\cos\psi\cos\alpha \\ y = a\cos\psi\sin\alpha \\ z = a\sin\psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_\psi = -a\sin\psi\cos\alpha \\ y'_\psi = -a\sin\psi\sin\alpha \\ z'_\psi = a\cos\psi \end{cases}$$

позволяет ввести параметризацию пространственной окружности через угол $\psi \in [0, 2\pi]$ как полярный в плоскости кривой и сразу вычислить интеграл

$$I = a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} \Big[\big(\sin\alpha\cos\psi - \sin\psi\big)(-\cos\alpha)\sin\psi +$$

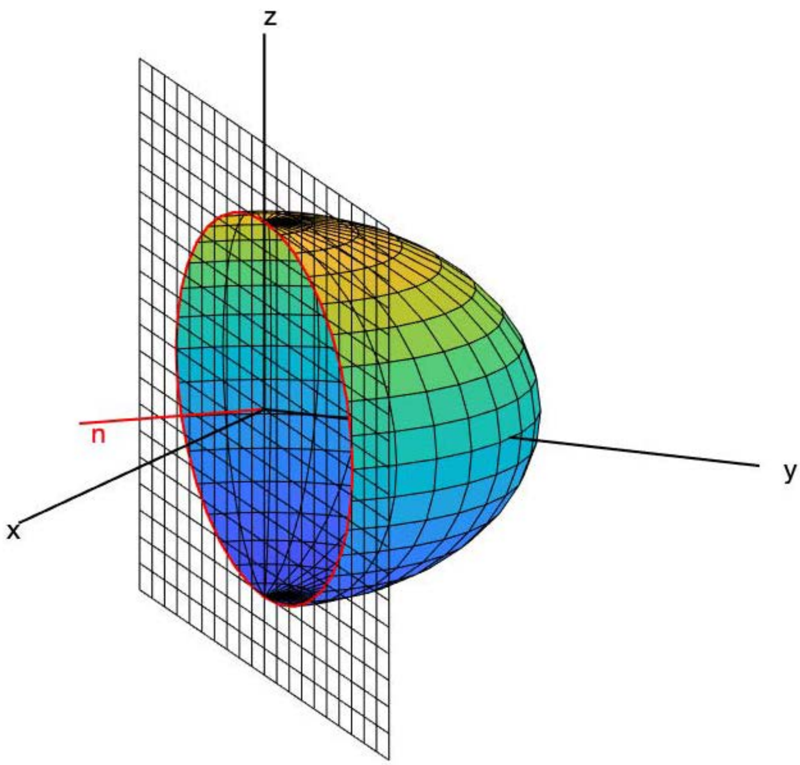

Рис. 7. Пересечение сферы с центральной плоскостью

$$+\left(\sin\psi-\cos\alpha\cos\psi\right)(-\sin\alpha)\sin\psi+$$

$$+\left(\cos\alpha\cos\psi-\sin\alpha\cos\psi\right)\cos\psi\Big]d\psi=2\pi a^2\left(\cos\alpha-\sin\alpha\right).$$

Способ 2 (применение формулы Стокса). Применение формулы Стокса даёт

$$I=-2\iint\limits_{(S)}dxdy+dydz+dzdx$$

где в качестве (S) удобно выбрать круг, натянутый на окружность (L). Сразу заметим, что проекция этого круга на xy будет нулевой площади. Чтобы найти проекции на две другие координатные плоскости, удобнее перейти к интегралу I-рода. Для этого нам понадобятся направляющие косинусы положительной нормали $\mathbf{n}=(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)$. Сам поверхностный интеграл вычислять не придется, так как от константы он будет пропорционален площади поверхности (здесь: круга)

$$I = -2 \iint\limits_{(S)} (\sin\alpha - \cos\alpha) dS = 2\pi a^2 (\cos\alpha - \sin\alpha)\ .$$

Пример 6. Вычислить криволинейный интеграл II-го рода

$$I = \oint\limits_{(L)} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$$

(L) — пересечение сферы с цилиндром половинного радиуса, проходящим через центр сферы (кривая Вивиани)

$$(L): \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = 2ax,\ z \geq 0$$

пробегая против часовой стрелки, если смотреть со положительной стороны оси x (см. Рис. 8).

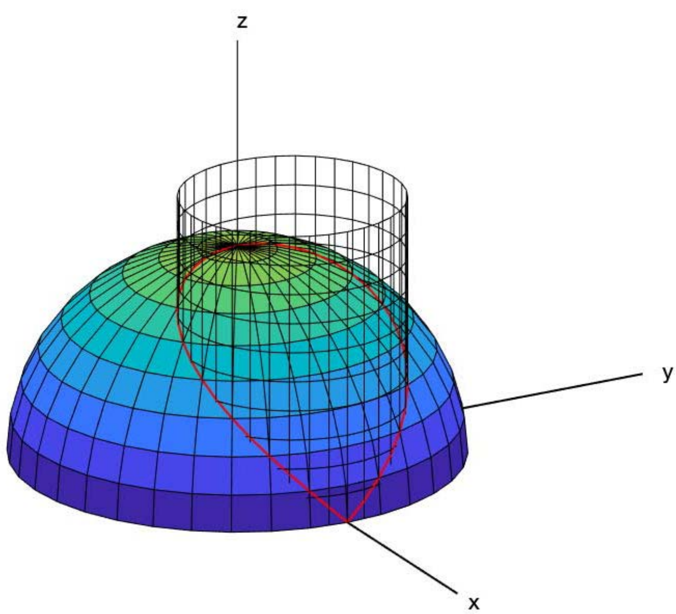

Рис. 8. Пересечение сферы с цилиндром половинного радиуса, проходящим через центр сферы (кривая Вивиани)

Способ 1 (непосредственное вычисление). Введём параметреизацию пространственной кривой с помощью полярного угла из центра проекции цилиндра на Oxy.

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}\cos\varphi \\ y=\dfrac{a}{2}\sin\varphi \\ z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=a\sin\dfrac{\varphi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_\varphi=-\dfrac{a}{2}\sin\varphi \\ y'_\varphi=\dfrac{a}{2}\cos\varphi \\ z'_\varphi=\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} \end{cases}.$$

Удачно выбранная параметризация позволяет сразу вычислить интеграл

$$I=a^3\int\limits_0^{2\pi}\Big(-\frac{1}{8}\sin^3\varphi+\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi+\frac{1}{8}(1+\cos\varphi)^2\cos\frac{\varphi}{2}\Big)d\varphi=$$

$$=a^3\int\limits_0^{2\pi}\Big(-\frac{1}{8}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)+\frac{1}{4}(1-\cos\varphi)\cos\varphi+$$

$$+\frac{1}{2}\Big(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\Big)^2\cos\frac{\varphi}{2}\Big)d\varphi=\frac{a^3}{8}\int\limits_1^1(1-z^2)dz+\frac{a^3}{4}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi-$$

$$-\frac{a^3}{8}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi+a^3\int\limits_0^0(1-z^2)^2dz=-\frac{\pi a^3}{4}\ .$$

Как видно из вычислений, первый и последний интеграл равны 0, и только средний интеграл даёт ненулевой вклад. Этот факт можно было обнаружить и при постановке задачи, ещё не производя никакую параметризацию. Действительно, в первом интеграле, двигаясь по x от a до 0 при $y>0$ и обратно от 0 до a при $y<0$ по симметричной ветви замкнутого контура, подынтегральная функция также принимает симметричные значения, а вот знаки проекции элемента дуги на ось x на этих двух участках кривой будут противоположных знаков. В последнем интеграле, двигаясь по z от 0 до a при $y>0$ и обратно от a до 0 при $y<0$, в силу симметрии также сложатся два равных значения противоположных знаков. И только в среднем интеграле, двигаясь по y от $+a/2$ до $-a/2$ при $x<a/2$ и обратно уже не по симметричной ветви от $-a/2$ до $+a/2$ при $x>a/2$, подынтегральная функция z^2 не будет принимать равные значения на этих участках.

Способ 2 (применение формулы Стокса). Здесь такого эффекта как в предыдущей задаче не ожидается. Формула Стокса приходит нас к поверхностному интегралу II-рода

$$I = -2 \iint\limits_{(S)} y dx dy + z dy dz + x dz dx$$

или I-рода

$$I = -\frac{2}{a} \iint\limits_{(S)} (yx + zy + xz) dS$$

по верхней части поверхности сферы, вырезанной цилиндром. Они явно не проще исходного криволинейного интеграла!

Список литературы

[1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1–3. М.: Физматлит., 2003–2006

[2] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 1–3. М.: Дрофа., 2005

[3] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель., 2005

Содержание

»

Подписано в печать 28.10.2022. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 20,80. Тираж 100 экз. Заказ № 1862.

Отпечатано в Издательстве ВВМ.
198095, Санкт-Петербург, ул. Швецова, 41.