КРАТКИЕ НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.5

В. М. Буре

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ НЕРАВЕНСТВА СЕЛБЕРГА

В работе [1] было получено неравенство

$$\int_{x_0}^{\infty} g(x)dx \leqslant \frac{4}{9x_0^2}\int_0^{\infty} x^2 g(x)dx, \tag{1}$$

где $g(x) \geqslant 0$ – убывающая (невозрастающая) функция; $x_0 > 0$ – произвольная точка. Неравенство нашло применение в задаче статистической оценки биоэквивалентности двух лекарств [2]. Приведем обобщение неравенства (1).

Теорема. *Пусть $p(x)$ – неотрицательная, дифференцируемая на $[0,a]$ функция, $p'(x)$ – строго положительная, возрастающая на $[0,a]$ функция. Пусть $x_0 \in [0,a)$ и точка $x_1 \in [0,a]$, $x_1 > x_0$, такова, что выполнено равенство*

$$p'(x_1)(x_1 - x_0) = p(x_1) - p(0). \tag{2}$$

Тогда для любой убывающей, неотрицательной на $[0,a]$ функции $g(x)$ выполнено неравенство

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \leqslant \frac{1}{p'(x_1)}\Big(\int_{x_0}^{x_1} p'(x)g(x)dx + g(x_0)\big(p(x_0) - p(0)\big)\Big), \tag{3}$$

причем постоянная $[p'(x_1)]^{-1}$ не может быть уменьшена.

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{1}{p'(x_1)}\Big(\int_{x_0}^{x_1} p'(x)g(x)dx + g(x_0)\big(p(x_0) - p(0)\big)\Big) - \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx =$$

$$= \frac{1}{p'(x_1)}\int_{x_0}^{x_1} g(x)(p'(x) - p'(x_1))dx + \frac{g(x_0)}{p'(x_1)}\big(p(x_0) - p(0)\big) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{g(x_0)}{p'(x_1)}\big(p(x_1) - p(x_0)\big) + \frac{g(x_0)}{p'(x_1)}\big(p(x_0) - p(0)\big) - g(x_0)(x_1 - x_0) =$$

$$= \frac{g(x_0)}{p'(x_1)}\big(p(x_1) - p(0)\big) - g(x_0)(x_1 - x_0) = 0.$$

Неулучшаемость константы $[p'(x_1)]^{-1}$ в (3) следует из того, что для функции $g(x)$, тождественно равной положительной константе, неравенство (3) переходит в равенство.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $p(x)$ – неотрицательная, дифференцируемая на $[0,\infty)$ функция, $p'(x)$ – строго положительная, возрастающая на $[0,\infty)$ функция. Пусть $x_0 \in [0,\infty)$ и точка $x_1 \in [0,\infty)$, $x_1 > x_0$, такова, что выполнено равенство*

$$p'(x_1)(x_1 - x_0) = p(x_1) - p(0). \tag{4}$$

Тогда для любой убывающей, неотрицательной на $[0,\infty]$ функции $g(x)$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} g(x)dx \leqslant \frac{1}{p'(x_1)} \int\limits_{0}^{\infty} p'(x)g(x)dx, \tag{5}$$

причем постоянная $[p'(x_1)]^{-1}$ не может быть уменьшена.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} g(x)dx \leqslant \frac{1}{p'(x_1)} \int\limits_{0}^{x_1} p'(x)g(x)dx,$$

но, как нетрудно видеть,

$$\frac{1}{p'(x_1)} \int\limits_{0}^{x_1} p'(x)g(x)dx \geqslant \frac{1}{p'(x_1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} p'(x)g(x)dx + \frac{g(x_0)}{p'(x_1)}(p(x_0) - p(0)).$$

Применение неравенства (3) доказывает утверждение.

Неравенство (5) обращается в равенство для функции $g(x)$, равной положительной константе на $[0,x_1]$ и нулю на (x_1,∞). Отсюда следует неулучшаемость константы.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть $b > 1$, тогда для любой убывающей, неотрицательной на $[0,\infty)$ функции $g(x)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} g(x)dx \leqslant \left(\frac{b-1}{b}\right)^{(b-1)} \frac{1}{{x_0}^{(b-1)}} \int\limits_{0}^{\infty} x^{(b-1)} g(x)dx. \tag{6}$$

В частности, при $b = 3$ неравенство (6) переходит в неравенство (1).

Для доказательства следствия 2 достаточно в следствии 1 положить $p(x) = \frac{1}{b}x^b$.

Замечание. Условие (2) теоремы выполняется, если из точки с координатами $(x_0, p(0))$ можно провести касательную к графику функции $p(x)$, $x \in [0,a]$, причем абсцисса точки касания принадлежит отрезку $[0,a]$. Указанную абсциссу следует принять за x_1. Условие (4) из следствия 1 выполняется аналогичным образом.

Summary

Boure V. M. On Selberg inequality extension.

The Selberg inequality extension for wide class of functions is proposed. One new inequality is proposed also.

Литература

1. *Selberg H. L.* Zwei Ungleichungen zur Erganzung des Tchebycheffschen Lemmas //Skand. Aktuar. 1940. Vol. 23. P. 121–125.

2. *Daniel J. Holder, Francis Hsuan.* Moment-based criteria for determining bioequivalence //Biometrika. 1993. Vol. 80, N 4. P. 835–846.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С. В. Чистяковым.

Статья поступила в редакцию 7 июня 2006 г.