Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 519, 2022 г.

В. Г. Осмоловский

СРАВНЕНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ДВУХФАЗОВЫХ УПРУГИХ СРЕД В МОДЕЛЬНОЙ И ТРАДИЦИОННОЙ ПОСТАНОВКАХ

§1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$ – ограниченная область, $\mathbb{R}^{m\times m}_s$ – линейное пространство всех симметричных $m \times m$-матриц со скалярным произведением

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \operatorname{tr} \alpha\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m\times m}_s. \tag{1.1}$$

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, \mathbb{R}^{m\times m}_s)$ со скалярным произведением

$$(\mathfrak{e}', \mathfrak{e}'')_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \langle \mathfrak{e}', \mathfrak{e}'' \rangle \, dx \tag{1.2}$$

фиксируем замкнутое линейное подпространство

$$\mathbb{H}(\Omega) = \{\mathfrak{e} \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^{m\times m}_s) : \int\limits_{\Omega} \mathfrak{e}(x)\, dx = 0\}. \tag{1.3}$$

Его ортогональное дополнение в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^{m\times m}_s)$ состоит из независящих от $x \in \Omega$ элементов.

Введём интегральный функционал

$$\begin{gathered} \mathfrak{I}[\mathfrak{e}, \chi, t, \Omega] = \int\limits_{\Omega} \{\chi(x)(F^+(\mathfrak{e}(x)) + t) + (1 - \chi(x))F^-(\mathfrak{e}(x))\}\, dx, \\ \mathfrak{e} \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^{m\times m}_s), \quad \chi \in \mathbb{Z}(\Omega), \quad t \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $\mathbb{Z}(\Omega)$ – множество всех измеримых характеристических функций, а

$$F^{\pm}(\mathfrak{e}) = \langle A^{\pm}(\mathfrak{e} - \zeta^{\pm}), \mathfrak{e} - \zeta^{\pm} \rangle, \tag{1.5}$$

Ключевые слова: невыпуклые вариационные задачи, фазовые переходы, свободные поверхности.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант 20-01-00630 А.

$\zeta^{\pm} \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$, $A^{\pm}$ – линейные отображения $\mathbb{R}_s^{m\times m} \to \mathbb{R}_s^{m\times m}$ со свойствами

$$\begin{gathered}\langle A^{\pm}\alpha,\beta\rangle = \langle \alpha, A^{\pm}\beta\rangle, \quad \nu|\xi|^2 \leqslant \langle A^{\pm}\xi,\xi\rangle \leqslant \nu^{-1}|\xi|^2,\\ \alpha,\beta,\xi \in \mathbb{R}_s^{m\times m}, \quad \nu\in(0,1), \quad |\xi|^2 = \langle \xi,\xi\rangle.\end{gathered} \tag{1.6}$$

Для мотивации его возникновения обратимся к теории упругости двухфазовых сред [1].

По векторнозначной функции $u \in W_2^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$ зададим тензор деформации $e(\nabla u)$ равенством

$$e_{ij}(\nabla u) = \frac{1}{2}(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}), \quad i,j = 1,\dots,m. \tag{1.7}$$

Очевидно, что $e(\nabla u) \in L_2(\Omega,\mathbb{R}_s^{m\times m})$. Функционал

$$\begin{gathered}I[u,\chi,t,\Omega] = \int\limits_{\Omega}\{\chi(x)(F^{+}(e(\nabla u(x))+t) + (1-\chi(x))F^{-}(\nabla u(x))\}\,dx,\\ u\in W_2^1(\Omega,\mathbb{R}^m), \quad \chi\in\mathbb{Z}(\Omega), \quad t\in\mathbb{R}\end{gathered} \tag{1.8}$$

определяет энергию деформации двухфазовой упругой среды с полем смещений $u(x)$, распределением фаз $\chi(x)$ и температурой t. Матрицы $\zeta^{\pm}$ называются тензорами остаточной деформации, отображения $A^{\pm}$ – тензорами модулей упругости. Нас будут интересовать не все поля смещений $u \in W_2^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$ а лишь принадлежащие некоторому замкнутому линейному подпространству $\mathbb{X}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$, для элементов которого

$$\int\limits_{\Omega} e(\nabla u(x))\,dx = 0. \tag{1.9}$$

Как правило, ограничение (1.9) возникает при постановке некоторых граничных условий на функции $u(x)$. Пусть

$$\mathbb{H}'(\Omega) = \{e(\nabla u):\ u\in\mathbb{X}(\Omega)\}. \tag{1.10}$$

Очевидно включение

$$\mathbb{H}'(\Omega) \subset \mathbb{H}(\Omega). \tag{1.11}$$

Для функционалов (1.4), (1.8) рассмотри две пары вариационных задач

$$\mathfrak{I}[\mathfrak{e}_\chi,\chi,t,\Omega] = \inf_{\mathfrak{e}\in\mathbb{H}(\Omega)} \mathfrak{I}[\mathfrak{e},\chi,t,\Omega], \quad \mathfrak{e}_\chi\in\mathbb{H}(\Omega), \quad \chi\in\mathbb{Z}(\Omega), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.12}$$

$$I[u_\chi,\chi,t,\Omega]=\inf_{u\in\mathbb{X}(\Omega)} I[u,\chi,t,\Omega],\ u_\chi\in\mathbb{X}(\Omega),\ \chi\in\mathbb{Z}(\Omega),\ t\in\mathbb{R} \quad (1.13)$$

и

$$\mathfrak{I}[\mathfrak{e}_t,\chi_t,t,\Omega]=\inf_{\mathfrak{e}\in\mathbb{H}(\Omega),\chi\in\mathbb{Z}(\Omega)} \mathfrak{I}[\mathfrak{e},\chi,t,\Omega],\quad \mathfrak{e}_t\in\mathbb{H}(\Omega),\quad \chi_t\in\mathbb{Z}(\Omega),\quad t\in\mathbb{R}, \quad (1.14)$$

$$I[\widehat{u}_t,\widehat{\chi}_t,t,\Omega]=\inf_{u\in\mathbb{X}(\Omega),\chi\in\mathbb{Z}(\Omega)} I[u,\chi,t,\Omega],\quad \widehat{u}_t\in\mathbb{X}(\Omega),\quad \widehat{\chi}_t\in\mathbb{Z}(\Omega),\quad t\in\mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Постановка задач (1.13), (1.15) является традиционной для теории упругости. При фиксированном распределении фаз $\chi(x)$ решение задачи (1.13) описывает равновесное поле смещений композитной среды (очевидно, что оно не зависит от t). В задаче (1.15) искомым является пара $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}_t$ – равновесное поле смещение и равновесное распределение фаз. Благодаря включению (1.11) задачи (1.12) и (1.14) являются расширением задач (1.13) и (1.15), соответственно. Задачи (1.12) и (1.14) будем называть модельными.

Вне зависимости от постановки решения $\mathfrak{e}_\chi$, u_χ назовём равновесными состояниями композитной среды, а решения $\mathfrak{e}_t,\chi_t$, $\widehat{u}_t,\widehat{\chi}_t$ – равновесными состояниями двухфазовой среды: однофазовыми в случае $\chi_t,\widehat{\chi}_t\equiv 0$, $\chi_t,\widehat{\chi}_t\equiv 1$ и двухфазовыми в противном случае.

Задачи (1.12) и (1.14) устроены существенно проще, чем (1.13) и (1.15), их решения могут быть получены в явном (правда, громоздком) виде и использованы [2,3] для априорных оценок решений (1.13), (1.15).

Для облегчения выкладок при исследовании задач (1.12), (1.14) мы остановимся лишь на случае

$$A^+=A^-\equiv A. \quad (1.16)$$

Для задач (1.13), (1.15) будем дополнительно предполагать, что

$$A\cdot=a\,\mathrm{Id}\cdot+b\langle\cdot,\mathfrak{i}\rangle\mathfrak{i},\quad \zeta^+-\zeta^-=c\mathfrak{i},\quad a,b,c\in\mathbb{R},\quad a>0,\ b\geqslant 0, \quad (1.17)$$

где Id – тождественное отображение в $\mathbb{R}^{m\times m}_s$, $\mathfrak{i}$ – единичная матрица в пространстве $\mathbb{R}^m$. Условия (1.17) соответствуют однородным изотропным средам, константы a, b выражаются через коэффициенты Ламэ.

Для задач (1.12), (1.14) область Ω считается произвольной, а для задач (1.13), (1.15) в качестве Ω возьмём единичный куб $K=(0,1)^m$.

Его противоположные, ортогональные оси x_i, грани обозначим через $S_{0,i}$, $S_{1,i}$, $i=1,\dots,m$. Положим

$$\mathbb{X}(K)=\Big\{u\in W_2^1(K,\mathbb{R}^m):\ u|_{S_{0,i}}=u|_{S_{1,i}},\ i=1,\dots,m,\qquad \int\limits_K u(x)\,dx=0\Big\}. \tag{1.18}$$

Функции из $\mathbb{X}(K)$ назовём периодическими. Условие (1.9) для них очевидно.

Остановимся на содержании работы. В §2 указан явный вид всех решений задачи (1.12) и описано множество всех решений задачи (1.13). В §3 то же самое сделано для решений задач (1.14), (1.15). В §4 найдены в явном виде все критические точки функционала (1.4) исследована их устойчивость, в §5 то же самое выполнено для функционала (1.8).

Оказывается, что при сделанных предположениях свойства решений задач (1.12) и (1.13), (1.14) и (1.15), а также критических точек функционалов (1.4) и (1.8) совпадают. Как в модельной, так и в традиционной постановках равновесная энергия композитной среды зависит только от объёмной доли фазы с индексом $+$, процесс фазовых переходов и зависимость объёмной доли фаз от температуры одинаковы (за исключением несовпадения температур фазовых переходов). Множества критических точек функционалов энергии (1.4) и (1.8) также устроены одинаково: они состоят из состояний равновесия и пары однофазовых состояний с одинаковым характером устойчивости. Ранее такое совпадение было известно лишь в одномерном случае [9] с $\mathbb{X}(0,l)=\mathring{W}_2^1(0,l)$.

§2. Решения вариационных задач (1.12), (1.13)

Теорема 2.1. (1) *При справедливости условия* (1.16) *задача* (1.12) *для каждого* $\chi\in\mathbb{Z}(\Omega)$ *имеет единственное решение*

$$\mathfrak{e}_\chi=(\chi-Q)[\zeta],\quad [\zeta]=\zeta^+-\zeta^-,\quad Q=\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega \chi(x)\,dx, \tag{2.1}$$

где $|\Omega|$ – *мера области* Ω.

(2) *Задача* (1.13) *при условии* (1.17) *для каждого* $\chi\in\mathbb{Z}(K)$ *имеет единственное решение* $u_\chi\in\mathbb{X}(K)$

$$u_\chi(x)=\nabla p(x), \tag{2.2}$$

в котором $p(.) \in W_2^2(K)$ – *единственное (с точностью до постоянного слагаемого) решение уравнения*

$$\Delta p(x) = \frac{a+bm}{a+b} c(\chi(x) - Q), \quad p|_{S_{i,0}} = p|_{S_{i,1}}, \quad p_{x_i}|_{S_{i,0}} = p_{x_i}|_{S_{i,1}}, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2.3}$$

Доказательство. (1) С помощью несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \chi(F^+(\mathfrak{e}) + t) + (1-\chi)F^-(\mathfrak{e}) = -2\langle \mathfrak{e}, A(Q[\zeta] + \zeta^-)\rangle \\ + |A^{1/2}(\mathfrak{e} - (\chi - Q)[\zeta])|^2 - (\chi - Q)^2 |A^{1/2}[\zeta]|^2 \\ + \chi(t - t^*) + \langle A\zeta^-, \zeta^- \rangle \\ t^* = -(\langle A\zeta^+, \zeta^+\rangle - \langle A\zeta^- \zeta^-\rangle). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Тогда для всех $\mathfrak{e} \in \mathbb{H}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}(\Omega)$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}[\mathfrak{e}, \chi, t, \Omega] = \int_\Omega |A^{1/2}(\mathfrak{e} - (\chi - Q)[\zeta])|^2 \, dx + |\Omega| \mathfrak{G}(Q, t), \\ \mathfrak{G}(Q, t) = (t - t^*)Q - Q(1-Q)|A^{1/2}[\zeta]|^2 + \langle A\zeta^-, \zeta^-\rangle, \end{aligned} \tag{2.5}$$

приводящее к справедливости (2.1).

(2) Для произвольной области Ω положим

$$(\operatorname{rot} u)_{ij} = u^i_{x_j} - u^j_{x_i}, \quad |\operatorname{rot} u|^2 = (\operatorname{rot} u)_{ij} (\operatorname{rot} u)_{ij}, \quad u \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^m). \tag{2.6}$$

Так как

$$|e(\nabla u)|^2 = \frac{|\operatorname{rot} u|^2}{4} + u^i_{x_j} u^j_{x_i}, \tag{2.7}$$

непосредственно проверяется, что при $u \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $\chi \in \mathbb{Z}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle A(e(\nabla u) - (\chi - Q)[\zeta]), e(\nabla u) - (\chi - Q)[\zeta]\rangle \\ = a(u^i_{x_j} u^j_{x_i} - u^i_{x_i} u^j_{x_j}) + \frac{a |\operatorname{rot} u|^2}{4} \\ + (a+b)\Big(\operatorname{div} u - \frac{a+bm}{a+b} c(\chi - Q)\Big)^2 \\ + (\chi - Q)^2 \frac{a+bm}{a+b}(m-1)ac^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Учитывая полученное равенство и (2.4), приходим к формуле для функционала энергии (1.8) при условии (1.17)

$$I[u,\chi,t,\Omega] = a\int\limits_{\Omega}(u^i_{x_j}u^j_{x_i} - u^i_{x_i}u^j_{x_j})\,dx + \frac{a}{4}\int\limits_{\Omega}|\operatorname{rot} u|^2\,dx + (a+b)$$

$$\times\int\limits_{\Omega}\Big(\operatorname{div} u - \frac{a+bm}{a+b}c(\chi-Q)\Big)^2\,dx + |\Omega|G(Q,t), \tag{2.9}$$

$$G(Q,t) = Q(t-t^*) - Q(1-Q)\frac{(a+bm)^2c^2}{a+b} + \langle A\zeta^-,\zeta^-\rangle.$$

Поскольку множество гладких функций, удовлетворяющих условиям периодичности вместе со всеми производными, плотно в множестве (1.18), а для каждой такой функции

$$\int\limits_K(\operatorname{div} u)^2\,dx - \int\limits_K u^i_{x_j}u^j_{x_i}\,dx$$

$$= \int\limits_{\partial K}(\operatorname{div} u)u\cdot n\,dS - \Sigma^m_{i=1}\Big(\int\limits_{S_{1,i}} - \int\limits_{S_{0,i}}\Big)u^i_{x_j}u^j\,dS = 0, \tag{2.10}$$

первое слагаемое правой части (2.9) обнуляется. Поэтому

$$I[u,\chi,t,K] = \frac{a}{4}\int\limits_K|\operatorname{rot} u|^2\,dx + (a+b)$$

$$\times\int\limits_K\Big(\operatorname{div} u - \frac{a+bm}{a+b}c(\chi-Q)\Big)^2\,dx + G(Q,t), \tag{2.11}$$

$$u\in\mathbb{X}(K), \quad \chi\in\mathbb{Z}(K), \quad Q = \int\limits_K\chi(x)\,dx.$$

Разрешимость уравнения (2.3) хорошо известна [4]. Очевидно, что функция (2.2) обнуляет интегральные слагаемые в (2.11) и поэтому является решением задачи (1.13) для функционала (2.11). Предположим, что у задачи (1.13) для функционала (2.11) при фиксированном $\chi\in\mathbb{Z}(K)$ существуют два решения. Тогда их разность $u\in\mathbb{X}(K)$ и для неё $\operatorname{rot} u = 0$, $\operatorname{div} u = 0$. Пользуясь (2.7), получаем

$$0 = |\operatorname{rot} u|^2 + 2(\operatorname{div} u)^2 = 2u^i_{x_j}u^i_{x_j} + 2((\operatorname{div} u)^2 - u^i_{x_j}u^j_{x_i}). \tag{2.12}$$

Учитывая (2.10), приходим к выводу, что $u = 0$. □

В [3] найдена формула решения задачи (1.12) без предположения (1.16). Наличие (1.16) позволяет существенно упростить выкладки, благодаря представлению (2.5) для функционала энергии. Схема сведения вариационной задачи (1.13) для изотропных двухфазовых сред к дифференциальным уравнениям векторного анализа в случае нулевых граничных условий на поле смещений была реализована в [5].

Из теоремы 2.1 следуют формулы для равновесных энергий композитной среды в случае модельной и естественной постановок

$$\mathfrak{I}[\mathfrak{e}_\chi, \chi, t, \Omega] = |\Omega|\mathfrak{G}(Q,t), \quad I[u_\chi, \chi, t, \Omega] = |\Omega|G(Q,t), \tag{2.13}$$

соответственно. Заметим, что их зависимость от функции χ сводится лишь к зависимости от числа Q.

Поскольку для плотностей энергии (2.17) выполняется равенство $|A^{1/2}[\zeta]|^2 = (a+bm)mc^2$, функция $\mathfrak{G}(Q,t)$ в этом случае имеет вид

$$\mathfrak{G}(Q,t) = Q(t-t^*) - Q(1-Q)(a+bm)mc^2 + \langle A\zeta^-, \zeta^-\rangle, \tag{2.14}$$

а равенство $\mathfrak{G}(Q,t) = G(Q,t)$ реализуется лишь при $m=1$.

§3. Решения вариационных задач (1.14), (1.15)

Для формулировки результатов этого параграфа будет полезно следующее обозначение

$$\begin{gathered} \mathbb{Z}_Q(\Omega) = \{\chi \in \mathbb{Z}(\Omega) : \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega \chi(x)\,dx = Q\}, \quad Q \in [0,1], \\ \mathfrak{t}_\pm = t^* \pm |A^{1/2}[\zeta]|^2, \quad t_\pm = t^* \pm \frac{(a+bm)^2c^2}{a+b}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Числа $\mathfrak{t}_\pm$, $t_\pm$ назовём температурами фазовых переходов для модельной и естественной постановок [6]. Очевидно, что критерием обои равенств $\mathfrak{t}_+ = \mathfrak{t}_-$, $t_+ = t_-$ является соотношение $[\zeta] = 0$.

Лемма 1. (1) *Множество всех решений задачи*

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(t), t) = \min_{Q\in[0,1]} \mathfrak{G}(Q,t), \quad \mathfrak{Q}(t) \in [0,1] \tag{3.2}$$

определяется равенствами

$$\begin{aligned} &\mathfrak{Q}(t) = 1, \quad \text{при} \quad t < \mathfrak{t}_-, \quad \mathfrak{Q}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > \mathfrak{t}_+, \\ &\mathfrak{Q}(t) = \frac{\mathfrak{t}_+ - t}{\mathfrak{t}_+ - \mathfrak{t}_-} \quad \text{при} \quad t \in [\mathfrak{t}_-, \mathfrak{t}_+], \quad [\zeta] \neq 0, \\ &\mathfrak{Q}(t) = [0,1] \quad \text{при} \quad t = t^*, \quad [\zeta] = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Последнее соотношение означает многозначность функции $\mathfrak{Q}(t)$ *в вырожденном случае* $[\zeta] = 0$: *её значение в точке* $t = t^*$ *пробегает весь интервал* $[0, 1]$.

(2) *Множество всех решений задачи*

$$G(Q(t), t) = \min_{Q\in[0,1]} G(Q, t), \quad Q(t) \in [0, 1] \tag{3.4}$$

определяется равенствами

$$\begin{aligned} &Q(t) = 1, \quad \textit{при} \quad t < t_-, \quad Q(t) = 0 \quad \textit{при} \quad t > t_+, \\ &Q(t) = \frac{t_+ - t}{t_+ - t_-} \quad \textit{при} \quad t \in [t_-, t_+], \quad [\zeta] \neq 0, \\ &Q(t) = [0, 1] \quad \textit{при} \quad t = t^*, \quad [\zeta] = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Последнее соотношение означает многозначность функции $Q(t)$ *в вырожденном случае* $[\zeta] = 0$: *её значение в точке* $t = t^*$ *пробегает весь интервал* $[0, 1]$.

Доказательство. Сформулированные утверждения вытекают из гладкости и строгой выпуклости функций $\mathfrak{G}(., t)$, $G(., t)$. Числа $\mathfrak{t}_\pm$, $t_\pm$ однозначно определяются из формул

$$\mathfrak{G}_Q(0, \mathfrak{t}_+) = 0, \quad \mathfrak{G}_Q(1, \mathfrak{t}_-) = 0, \quad G_Q(0, t_+) = 0, \quad G_Q(1, t_-) = 0, \tag{3.6}$$

а $\mathfrak{Q}(t)$, $t \in (\mathfrak{t}_-, \mathfrak{t}_+)$, $Q(t)$, $t \in (t_-, t_+)$ == из равенств

$$\mathfrak{G}_Q(\mathfrak{Q}(t), t) = 0, \quad G_Q(Q(t), t) = 0. \tag{3.7}$$

□

Теорема 3.1. (1) *Для каждого* t *множество всех решений задачи* (1.14) *исчерпывается парами*

$$\mathfrak{e}_t = (\chi_t - \mathfrak{Q}(t))[\zeta], \quad \chi_t - \textit{любой элемент множества } \mathbb{Z}_{\mathfrak{Q}(t)}(\Omega). \tag{3.8}$$

(2) *Для каждого* t *множество всех решений задачи* (1.15) *с функционалом* (2.11) *исчерпывается парами*

$$\widehat{u}_t = u_{\widehat{\chi}_t}, \quad \widehat{\chi}_t - \textit{произвольный элемент множества} \quad \mathbb{Z}_{Q(t)}(K), \tag{3.9}$$

Доказательство. Сформулированное утверждение являются следствиями представлений (2.5), (2.11) и предыдущей леммы. Заметим, что для однофазовых состояний

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e}_t = 0 \quad \text{при} \quad \mathfrak{Q}(t) = 0, \quad \mathfrak{Q}(t) = 1, \\ &\widehat{u}_t = 0 \quad \text{при} \quad Q(t) = 0, \quad Q(t) = 1. \end{aligned}$$

□

§4. Критические точки функционала (1.4)

4.1. Определение критической точки функционала (1.4). Поскольку множество $\mathbb{Z}(\Omega)$ не является линейным, при определении критической точки функционала (1.4) естественно использовать, так называемую, внутреннюю вариацию функции χ [7]. В теории двухфазовых газов необходимым условием равновесия является постоянство давления и химического потенциала. Для функционала (1.8) за исключением одномерного случая это уже не так [8]. Оказывается, что необходимые условия равновесия в задаче (1.14) близки к таковым для одномерной задачи (1.15) [9] и также сводятся к постоянству напряжения и химического потенциала.

В построениях этого раздела предположение (1.16) не используется. Мы вернёмся к нему позже.

Фиксируем функции $\mathfrak{e}, \mathfrak{v} \in \mathbb{H}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}(\Omega)$ и диффеоморфизм $y = y(x)$ класса $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ области Ω на себя. Определим возмущения $\bar{\mathfrak{e}}$, $\bar{\chi}$ функций $\mathfrak{e}$, χ согласно правилу

$$\begin{gathered} \bar{\mathfrak{e}}(x) = \mathfrak{e}(y(x)) + \mathfrak{v}(y(x)) - \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} (\mathfrak{e}(y(x)) + \mathfrak{v}(y(x)))\, dx, \\ \bar{\chi}(x) = \chi(y(x)). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Очевидно, что $\bar{\mathfrak{e}} \in \mathbb{H}(\Omega)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{Z}(\Omega)$. Замена переменных под знаком интеграла приводит к равенству

$$\begin{aligned} &\mathfrak{I}[\bar{\mathfrak{e}}, \bar{\chi}, t, \Omega] \\ &= \int\limits_{\Omega} \big(\chi(y)(F^+(\mathfrak{w}(y)) + t) + (1 - \chi(y))F^-(\mathfrak{w}(y))\big) |\det \dot{x}(y)|\, dy, \\ &\mathfrak{w}(y) = \mathfrak{e}(y) + \mathfrak{v}(y) - \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} (\mathfrak{e}(z) + \mathfrak{v}(z)) |\det \dot{x}(z)|\, dz, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $x = x(y)$ – отображение, обратное к $y = y(x)$, а $\dot{x}(.)$ – его матрица Якоби. Представим $x = x(y)$ в виде

$$x(y) = y + h(y), \quad h \in C_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m). \tag{4.3}$$

Для всех h с достаточно малой C^1 нормой данная конструкция задаёт семейство тождественных в окрестности границы диффеоморфизмов области Ω.

Положим

$$\begin{aligned} \Theta^{\pm}(e) &= 2A^{\pm}(e - \zeta^{\pm}), \quad e \in \mathbb{R}_s^{m\times m}, \\ \Theta^{\pm}[\mathfrak{e}](x) &= 2A^{\pm}(\mathfrak{e}(x) - \zeta^{\pm}), \\ \Theta[\mathfrak{e},\chi](x) &= \chi(x)\Theta^{+}[\mathfrak{e}](x) + (1-\chi(x))\Theta^{-}[\mathfrak{e}](x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Последнюю из введённых величин будем интерпретировать как тензор напряжения для модельной задачи (1.14).

Непосредственно проверяется, что с точностью до квадратичных по $\mathfrak{v}$ и h слагаемых

$$\begin{aligned} &\mathfrak{I}[\bar{\mathfrak{e}},\bar{\chi},t,\Omega] - \mathfrak{I}[\mathfrak{e},\chi,t,\Omega] \doteq \mathfrak{I}_{\mathfrak{v}}[\mathfrak{e},\chi,t,\Omega]\mathfrak{v} + \mathfrak{I}_h[\mathfrak{e},\chi,t,\Omega]h, \\ &\mathfrak{I}_{\mathfrak{v}}[\mathfrak{e},\chi,t,\Omega]\mathfrak{v} = \int\limits_{\Omega} \langle \Theta[\mathfrak{e},\chi](x), \mathfrak{v}(x)\rangle\,dx \\ &\mathfrak{I}_h[\mathfrak{e},\chi,t,\Omega]h = \int\limits_{\Omega} \big(\chi(x)(F^{+}(\mathfrak{e}(x)) + t) \\ &\qquad + (1-\chi(x))F^{-}(\mathfrak{e}(x))\big)\operatorname{div} h(x)\,dx \\ &\qquad - \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\big(\langle \mathfrak{e}(x), \int\limits_{\Omega}\Theta[\mathfrak{e},\chi](z)\,dz\rangle \operatorname{div} h(x)\big)\,dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Пару $\check{\mathfrak{e}}_t \in \mathbb{H}(\Omega)$, $\check{\chi}_t \in \mathbb{Z}(\Omega)$ назовём критической точкой функционала (1.4), если

$$\begin{gathered} \mathfrak{I}_{\mathfrak{v}}[\check{\mathfrak{e}}_t,\check{\chi}_t,t,\Omega]\mathfrak{v} = 0, \quad \mathfrak{I}_h[\check{\mathfrak{e}}_t,\check{\chi}_t,t,\Omega]h = 0 \\ \text{для всех} \quad \mathfrak{v} \in \mathbb{H}, \quad h \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^m). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Очевидно, что пара $\check{\mathfrak{e}}_t$, $\check{\chi}_t$ является критической точкой в том и только том случае, если для каждого t найдутся такие $C \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$ и $c \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} &\Theta[\check{\mathfrak{e}}_t,\check{\chi}_t](x) = C, \\ &\check{\chi}_t(x)(F^{+}(\check{\mathfrak{e}}_t(x)) + t) + (1-\check{\chi}_t(x))F^{-}(\check{\mathfrak{e}}_t(x)) - \frac{1}{|\Omega|}\langle \check{e}_t(x), \\ &\int\limits_{\Omega}\Theta[\check{e}_t,\check{\chi}_t](z)\,dz\rangle = c \end{aligned} \tag{4.7}$$

при почти всех $x \in \Omega$.

Положим

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\pm}(e) &= F^{\pm}(e) - \langle \Theta^{\pm}(e), e\rangle, \quad e \in \mathbb{R}_s^{m\times m},\\
\Phi^{\pm}[\mathfrak{e}](x) &= F^{\pm}(\mathfrak{e}(x)) - \langle \Theta^{\pm}\mathfrak{e}(x), \mathfrak{e}(x)\rangle, \qquad (4.8)\\
\Phi[\mathfrak{e},\chi,t](x) &= \chi(x)(\Phi^{+}[\mathfrak{e}](x)+t) + (1-\chi(x))\Phi^{-}[\mathfrak{e}](x).
\end{aligned}
$$

Последнюю из введённых величин будем интерпретировать как химический потенциал для задачи (1.14).

Лемма 2. *Пара $\check{\mathfrak{e}}_t$, $\check{\chi}_t$ является критической точкой в том и только том случае, если при фиксированном t*

$$
\Theta[\check{\mathfrak{e}}_t,\check{\chi}_t](x) = C, \quad \Phi[\check{\mathfrak{e}}_t,\check{\chi}_t,t](x) = c \qquad (4.9)
$$

почти всюду в Ω.

Доказательство. Первые условия в (4.7) и (4.9) совпадают. Поэтому в обоих случаях

$$
\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \Theta[\check{\mathfrak{e}}_t,\check{\chi}_t](z)\,dz = \Theta[\check{\mathfrak{e}}_t,\check{\chi}_t](x) \quad \text{почти всюду},
$$

что приводит к эквивалентности (4.7) и (4.9). □

4.2. Вычисление всех критических точек функционала (1.4) и их устойчивость.

Лемма 3. *Пусть выполняется предположение* (1.16), *$\mathfrak{e} \in \mathbb{H}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}(\Omega)$, $C \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$. Тогда*

(1) *равенство*

$$
\Theta[\mathfrak{e},\chi](x) = C \qquad (4.10)
$$

справедливо в том и только том случае, если

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{e} = (\chi - Q)[\zeta], \quad C = -2(QA\zeta^{+} + (1-Q)A\zeta^{-}),\\
&Q = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\chi(x)\,dx,
\end{aligned} \qquad (4.11)
$$

(2) *для удовлетворяющих* (4.10) *функций $\mathfrak{e}$, χ*

$$
\Phi[\mathfrak{e},\chi,t](x) = \chi(x)\mathfrak{G}_Q(Q,t) - Q^2\langle A[\zeta],[\zeta]\rangle + \langle A\zeta^{-},\zeta^{-}\rangle. \qquad (4.12)
$$

Доказательство. (1) Перепишем (4.10) в эквивалентном виде

$$
A\mathfrak{e}(x) = \chi(x)A\zeta^{+} + (1-\chi(x))A\zeta^{-} + \frac{C}{2}. \qquad (4.13)
$$

Интегрируя это равенство по области Ω, придём к формуле (4.11) для величины C. Подстановка полученного выражения в правую часть (4.13) даёт формулу (4.11) для $\mathfrak{e}$.

(2) Пользуясь определением (4.8), имеем

$$\Phi^{\pm}(e) = F^{\pm}(e) - \langle \Theta^{\pm} e, e\rangle = -\langle Ae, e\rangle + \langle A\zeta^{\pm}, \zeta^{\pm}\rangle, \quad e \in \mathbb{R}^{m\times m}_s.$$

Тогда в силу (4.11)

$$\Phi^{\pm}[\mathfrak{e}](x) = -(\chi(x) - Q)^2 \langle A[\zeta], [\zeta]\rangle + \langle A\zeta^{\pm}, \zeta^{\pm}\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\Phi[\mathfrak{e}, \chi, t](x) = \chi(x)(\Phi^{+}[\mathfrak{e}](x) + t) + (1 - \chi(x))\Phi^{-}[\mathfrak{e}](x) \\ &\quad = \chi(x)\{(2Q-1)\langle A[\zeta], [\zeta]\rangle + t - t^*\} - Q^2\langle A[\zeta], [\zeta]\rangle + \langle A\zeta^{-}, \zeta^{-}\rangle. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Учитывая определение (2.1) функции $\mathfrak{G}(Q, t)$, придём к (4.3). □

Теорема 4.1. *Пусть выполняется условие* (1.16)*. Тогда для каждого* t *множество всех критических точек* $\check{\mathfrak{e}}_t$*,* $\check{\chi}_t$ *функционала* (1.4) *состоит из его минимизаторов* (3.8) *и двух однофазовых состояний* $\check{\mathfrak{e}}_t \equiv 0$, $\check{\chi}_t \equiv 0$ *и* $\check{\mathfrak{e}}_t \equiv 0$, $\check{\chi}_t \equiv 1$.

Доказательство. Благодаря леммам 4.1, 4.2, для данного t множество всех критических точек $\check{\mathfrak{e}}_t$, $\check{\chi}_t$ функционала (1.4) и счерпывается парами

$$\begin{aligned} &\check{\mathfrak{e}}_t = (\check{\chi}_t - Q)[\zeta], \quad Q = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \check{\chi}_t(x)\,dx, \\ &\check{\chi}_t \text{ – любой элемент множества } \mathbb{Z}_Q(\Omega), \text{ для которого} \\ &\mathfrak{G}_Q(Q,t)\check{\chi}_t(x) = \mathrm{const} \text{ почти всюду в } \Omega. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Реализация последнего равенства в (4.15) возможна лишь при одном из трёх условий

$$\check{\chi}_t(x) \equiv 0, \quad \check{\chi}_t(x) \equiv 1, \quad \mathfrak{G}_Q(Q,t) = 0. \tag{4.16}$$

При выполнении первых двух условий (4.16), определённые по функциям $\check{\chi}_t$ с помощью первого равенства (4.15) величины $\check{\mathfrak{e}}_t = 0$. Заметим, что полученные $\check{\mathfrak{e}}_t$, $\check{\chi}_t$ находятся в списке (3.8) решений задачи (1.14) при $t \geqslant \mathfrak{t}_+$ и $t \leqslant \mathfrak{t}_-$, соответственно.

В силу (3.7) реализация последнего условия (4.16) означает, что $t \in [\mathfrak{t}_-, \mathfrak{t}_+]$ и $Q = \mathfrak{Q}(t)$ – решению задачи (3.2). Поэтому в этом случае критическая точка (4.15) попадает в список (3.8). □

Таким образом, лишь критические точки

$$\begin{aligned} &\check{\mathfrak{e}}_t(x) \equiv 0, \quad \check{\chi}_t(x) \equiv 1 \quad \text{при} \quad t > \mathfrak{t}_-, \\ &\check{\mathfrak{e}}_t(x) \equiv 0, \quad \check{\chi}_t(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < \mathfrak{t}_+ \end{aligned} \tag{4.17}$$

не являются решениями задачи (1.14). Чем они являются для функционала (1.4) – обсуждается в следующей теореме.

Дадим следующее определение: пару $\mathfrak{u} \in \mathbb{H}(\Omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}(\Omega)$ назовём седловой точкой функционала $\mathfrak{I}[\mathfrak{e}, \chi, t, \Omega]$, если для любого $\delta > 0$ найдутся такие функции $\mathfrak{e}^\delta_\pm \in \mathbb{H}(\Omega)$, $\chi^\delta_\pm \in \mathbb{Z}(\Omega)$, что $\|\mathfrak{e} - \mathfrak{e}^\delta_\pm\|_{L_2(\Omega)} < \delta$, $\|\chi - \chi^\delta_\pm\|_{L_1(\Omega)} < \delta$ и

$$\mathfrak{I}[\mathfrak{e}^\delta_+, \chi^\delta_+, t, \Omega] > \mathfrak{I}[\mathfrak{e}, \chi, t, \Omega], \quad \mathfrak{I}[\mathfrak{e}^\delta_-, \chi^\delta_-, t, \Omega] < \mathfrak{I}[\mathfrak{e}, \chi, t, \Omega]. \tag{4.18}$$

Теорема 4.2. *Критические точки* (4.17) *являются седловыми для функционала* (1.4).

Доказательство. Для любой критической точки $\check{\mathfrak{e}}_t$, $\check{\chi}_t$ обязано выполняться первое равенство (4.11). Пользуясь представлением (2.5), приходим к справедливости первого неравенства (4.18) с

$$\mathfrak{e} = \check{\mathfrak{e}}_t, \quad \chi = \chi^\delta_+ = \check{\chi}_t, \quad \mathfrak{e}^\delta_+ \neq \check{\mathfrak{e}}_t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.19}$$

Фиксируем t и критическую точку $\check{\mathfrak{e}}_t$, $\check{\chi}_t$ из (4.17). Учитывая (2.5) и первое равенство (4.11), получаем

$$\mathfrak{I}[\check{\mathfrak{e}}_t, \check{\chi}_t, t, \Omega] = |\Omega| \begin{cases} \mathfrak{G}(0,t), & t < \mathfrak{t}_+ \\ \mathfrak{G}(1,t), & t > \mathfrak{t}_- \end{cases}. \tag{4.20}$$

Поскольку критические точки (4.17) не минимизируют функционал (1.4), числа $Q = 0$ и $Q = 1$ не минимизируют выпуклую функцию $\mathfrak{G}(\,.\,, t)$ при $t < \mathfrak{t}_+$ и $t > \mathfrak{t}_-$, соответственно. Поэтому

$$\mathfrak{G}_Q(0,t) < 0 \quad \text{при} \quad t < \mathfrak{t}_+, \quad \mathfrak{G}_Q(1,t) > 0 \quad \text{при} \quad t > \mathfrak{t}_-. \tag{4.21}$$

Следовательно, при достаточно малых $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(0,t) > \mathfrak{G}(Q,t), \quad Q \in (0,\epsilon), \quad t < \mathfrak{t}_+, \\ \mathfrak{G}(1,t) > \mathfrak{G}(Q,t), \quad Q \in (1-\epsilon,1), \quad t > \mathfrak{t}_-, \end{aligned} \tag{4.22}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{I}[\mathfrak{e}_\chi, \chi, t, \Omega] = |\Omega| \mathfrak{G}(Q,t) < \mathfrak{I}[\check{\mathfrak{e}}_t, \check{\chi}_t, t, \Omega], \\ &\chi \in \mathbb{Z}_Q(\Omega), \quad \mathfrak{e}_\chi = (\chi - Q)[\zeta], \\ &Q \in (0,\epsilon), \quad t < \mathfrak{t}_+, \quad Q \in (1-\epsilon,1), \quad t > \mathfrak{t}_-. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \|\check{\chi}_t - \chi\|_{L_1} &= |\Omega| Q < \epsilon|\Omega|, \quad t < \mathfrak{t}_+, \\ \|\check{\chi}_t - \chi\|_{L_1} &= |\Omega|(1-Q) < \epsilon|\Omega|, \quad t > \mathfrak{t}_-, \\ \|\mathfrak{e}_\chi\|_{L_2}^2 &= |\Omega| Q(1-Q)|[\zeta]|^2 < \epsilon|\Omega||[\zeta]|^2, \quad t \notin [\mathfrak{t}_-, \mathfrak{t}_+], \end{aligned} \tag{4.24}$$

приходим к второму неравенству (4.18) с

$$\begin{aligned} &\mathfrak{e} = \check{\mathfrak{e}}_t, \quad \mathfrak{e}_-^\delta = \mathfrak{e}_\chi, \quad \chi \in \mathbb{Z}_Q(\Omega), \\ &Q \in (0,\epsilon),\ t < \mathfrak{t}_+, \qquad Q \in (1-\epsilon, 1),\ t > \mathfrak{t}_-. \end{aligned} \tag{4.25}$$

и достаточно малым ϵ. □

§5. Критические точки функционала (2.11)

В этом параграфе мы будем иметь дело с функционалом (1.8) в области $\Omega = K$, $u \in \mathbb{X}(K)$, $\chi \in \mathbb{Z}(K)$ в предположении (1.17).

5.1. Определение критической точки функционала (1.8). Аналог возмущения (4.1) запишем в виде [8]

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= u(y(x)) + v(y(x)) - \int\limits_K \Big(u(y(x)) + v(y(x))\Big)\,dx, \\ \bar{\chi}(x) &= \chi(y(x)), \quad u, v \in \mathbb{X}(K), \quad \chi \in \mathbb{Z}(K), \end{aligned} \tag{5.1}$$

а $y = y(x) =$ – диффеоморфизм класса C^1 куба K на себя, тождественный в окрестности ∂K, обратный к которому представи́м в виде $x = x(y) = y + h(y)$, $h \in C_0^1(K)$ с достаточно малой $\|h\|_{C^1}$.

Положим

$$\begin{aligned} \Theta_{kj}[u,\chi](x) &= \chi(x)\Theta^+_{kj}(\nabla u(x)) + (1-\chi(x))\Theta^-_{kj}(\nabla u(x)), \\ \Theta^\pm_{kj}(\nabla u(x)) &= F^\pm_{M_{ij}}(\nabla u(x)), \\ \Phi_{kj}[u,\chi](x,t) &= \chi(x)(\Phi^+_{kj}(\nabla u(x)) + t\delta_{kj}) + (1-\chi(x))\Phi^-_{kj}(\nabla u(x)), \\ \Phi^\pm_{kj}(\nabla u(x)) &= F^\pm(\nabla u(x))\delta_{kj} - u^i_{x_k}(x) F^\pm_{M_{ij}}(\nabla u(x)). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Для поля смещений $u(x)$ и распределения фаз $\chi(x)$ величина $\Theta[u,\chi]$ называется тензором напряжения, а $\Phi[u,\chi]$ – тензором химического потенциала.

С точностью до квадратичных по v и h слагаемых

$$I[\bar{u},\bar{\chi},t,K]-I[u,\chi,t,K]\doteq I_u[u,\chi,t,K]v+I_h[u,\chi,t,K]h,$$
$$I_u[u,\chi,t,K]v=\int\limits_K \Theta_{kj}[u,\chi]v_j^k\,dx,\quad I_h[u,\chi,t,K]h=\int\limits_K \Phi_{kj}[u,\chi]h^k_{x_j}\,dx. \tag{5.3}$$

Пару $\check{u}_t\in\mathbb{X}(K)$, $\check{\chi}_t\in\mathbb{Z}(K)$ назовём критической точкой функционала (1.8), если

$$\begin{aligned} &I_u[\check{u}_t,\check{\chi}_t,t,K]v=0,\quad v\in\mathbb{X}(K),\\ &I_h[\check{u}_t,\check{\chi}_t,t,K]h=0,\quad h\in C_0^1(K,R^m). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Лемма 4. *Пара $\check{u}_t$, $\check{\chi}_y$ является критической точкой функционала* (1.8) *в том и только том случае, если*

$$\begin{aligned} &\check{u}_t(x)=\nabla p(x),\quad p\in W_2^2(K),\\ &\Delta p(x)=\frac{a+bm}{a+b}c(\check{\chi}_t-Q),\quad p|_{S_{i,0}}=p|_{S_{i,1}},\\ &p_{x_i}|_{S_{i,0}}=p_{x_i}|_{S_{i,1}},\quad i=1,\dots,m, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} &\check{\chi}_t \text{ – произвольный элемент множества } \mathbb{Z}_Q(K) \text{ для которого}\\ &G_Q(Q,t)\check{\chi}_t(x)=\mathrm{const}\quad \text{почти всюду в}\quad K. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Доказательство. Из первого равенства (5.4) и представления (2.11) вытекает тождество для критической точки

$$\int\limits_K \big(\mathrm{rot}_{ij}\,\check{u}_t\,\mathrm{rot}_{ij}\,v+(\mathrm{div}\,\check{u}_t-\frac{a+bm}{a+b}c(\check{\chi}_t-Q))\,\mathrm{div}\,v\big)\,dx=0,\quad v\in\mathbb{X}(K).$$

Поскольку этому же тождеству удовлетворяет решение $u_{\check{\chi}_t}$ задачи (1.13), приходим к выводу, что $\check{u}_t=u_{\check{\chi}_t}$ и для доказательства (5.5) осталось воспользоваться теоремой 2.1.

Заметим, что с точностью до квадратичных по h слагаемых

$$\bar{Q}=\int\limits_K \check{\chi}_t(y(x))\,dx\doteq Q+\int\limits_K \check{\chi}_t(y)\,\mathrm{div}\,h(y)\,dy,$$
$$G(\bar{Q},t)-G(Q,t)\doteq\int\limits_K G_Q(Q,t)\check{\chi}_t(y)\,\mathrm{div}\,h(y)\,dy.$$

учитывая (5.5) и представление (2.11), получаем

$$I_h[\check{u}_t, \check{\chi}_t, t, K]h = \int\limits_K G_Q(Q,t)\check{\chi}_t(y)\,\mathrm{div}\,h(y)\,dy,$$

что приводит к справедливости (5.6). □

Из леммы 5.1 как и в случае модельной задачи получаем следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Для каждого t множество всех критических точек $\check{u}_t$, $\check{\chi}_t$ функционала* (1.8) *состоит из его минимизаторов* (3.9) *и двух однофазовых состояний $\check{u}_t \equiv 0$, $\check{\chi}_t \equiv 0$ и $\check{u}_t \equiv 0$, $\check{\chi}_t \equiv 1$.*

Таким образом, только критические точки

$$\check{u}_t \equiv 0, \quad \check{\chi}_t \equiv 1, \quad t > t_-, \qquad \check{u}_t \equiv 0, \quad \check{\chi}_t \equiv 0, \quad t < t_+. \tag{5.7}$$

не являются решениями задачи (1.15). Как и в модельной постановке они будут седловыми точками функционала (1.8). Доказательство этого факта приведено в [10].

Список литературы

1. М. А. Гринфельд, *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений.*, Москва. Наука (1990).
2. Y. Grabovsky, *Bounds and extremal microstructures for two-component composites: A unified treatment based on the translation method.* — Proc. R. Soc. Lond., Ser. A **452** (1996), 919–944.
3. В. Г. Осмоловский, *Модельная вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред.* — Пробл. мат. анал, **108** (2021), 113–124.
4. Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, *Уравнения с частными производными*, Москва, Мир (1966).
5. В. Г. Осмоловский, *Точные решения вариационной задачи теории фазовых переходов механики сплошных сред.* — Пробл. мат. анал, **27** (2004), 171–205.
6. В. Г. Осмоловский, *Математические вопросы теории фазовых переходов.* — Алгебра и анализ 29, **5** (2017), 111–178.
7. Д. Буттацо, М. Джаквинта, С. Гильдебрандт, *Одномерные вариационные задачи. Введение.* Новосибирск, Научная Книга (2002).
8. В. Г. Осмоловский, *Теорема существования и слабая форма уравнений Лагранжа для вариационной задачи теории фазовых превращений.* — Сиб. мат. ж. **35**, No. 4 835–846, (1994).
9. V. G. Osmolovskii, *Boundary Value Problems with Free Surfaces in the Theory of Phase Transitions.* — Differential equations, **53**, No. 13 (2017), 1734–1763.
10. В. Г. Осмоловский, *Устойчивость однофазовых состояний равновесия в вариационной задаче теории упругости двухфазовых сред. Многомерный случай.* — Пробл. мат. анал, **91** (2018), 473–479.

Osmolovskii V. G. Comparision of properties of solutions of variational problems of the theory of two-phase elastic bodies in model and traditional formulations.

The paper presents two statements of the variational problem of phase transitions in the mechanics of elastic media and compares of their solutions.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: victor.osmolovskii@gmail.com

Поступило 3 ноября 2022 г.