

А. А. Мишулович, В. А. Слоущ, Т. А. Суслина

**УСРЕДНЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО  
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА НА КРАЮ  
СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛАКУНЫ: ОПЕРАТОРНЫЕ  
ОЦЕНКИ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

**1.1. Усреднение в пределе малого периода.** Работа относится к теории усреднения (гомогенизации). Задачам гомогенизации посвящена обширная литература. Прежде всего укажем книги [1–3].

Пусть  $\Gamma$  – решетка в  $\mathbb{R}^d$  и  $\Omega$  – элементарная ячейка решетки  $\Gamma$ . Для всякой  $\Gamma$ -периодической функции  $\varphi(\mathbf{x})$  в  $\mathbb{R}^d$  используем обозначение  $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Обсудим типичную задачу теории усреднения. В  $L_2(\mathbb{R}^d)$  рассмотрим эллиптический оператор  $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ , формально заданный выражением

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla. \quad (1.1)$$

Здесь  $g(\mathbf{x})$  – симметричная матрица-функция размера  $d \times d$  с вещественными элементами; предполагается, что  $g(\mathbf{x})$  положительно определена, ограничена и  $\Gamma$ -периодична. Строгое определение оператора  $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$  дается через квадратичную форму. Пусть  $u_\varepsilon(\mathbf{x})$  – обобщенное решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + \varkappa^2 u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad (1.2)$$

где  $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$  и  $\varkappa > 0$ . Базовый результат теории усреднения: при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение  $u_\varepsilon$  сходится (в некотором смысле) к решению  $u_0$  “усредненного” уравнения

$$-\operatorname{div} g^0 \nabla u_0(\mathbf{x}) + \varkappa^2 u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \quad (1.3)$$

---

*Ключевые слова:* Периодические дифференциальные операторы, спектральная лагуна, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 22-11-00092).

Здесь  $g^0$  – постоянная положительная матрица, называемая *эффективной*. Оператор  $\widehat{\mathcal{A}}^0 = -\operatorname{div} g^0 \nabla$  называется *эффективным оператором* для  $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ . В теории усреднения применительно к уравнению (1.2) изучаются различные вопросы: нахождение эффективной матрицы  $g^0$ , характер сходимости  $u_\varepsilon$  к  $u_0$ , оценка погрешности  $u_\varepsilon - u_0$ , построение дальнейших членов асимптотического разложения решения  $u_\varepsilon$  по степеням  $\varepsilon$ . Поскольку  $u_\varepsilon = (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} f$ , то в операторных терминах вопрос состоит в нахождении аппроксимаций резольвенты  $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$  при малом  $\varepsilon$ .

Процедура нахождения эффективной матрицы хорошо известна. Для описания  $g^0$  нужно рассмотреть вспомогательную краевую задачу на ячейке  $\Omega$ . Пусть  $\Phi_j(\mathbf{x})$  есть  $\Gamma$ -периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{\Omega} \Phi_j(\mathbf{x}) dx = 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$  – стандартный ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^d$ . Тогда  $g^0$  – это  $(d \times d)$ -матрица со столбцами

$$\mathbf{g}_j^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) dx, \quad j = 1, \dots, d. \quad (1.5)$$

Выясняется, что эффективная матрица положительно определена.

**1.2. Операторные оценки погрешности.** В работах Бирмана и Суслиной [4–7] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам теории усреднения (вариант спектрального метода). При этом явление усреднения трактовалось как спектральный пороговый эффект на краю спектра эллиптического оператора. В рамках этого подхода в [4, 5] была установлена оценка

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (1.6)$$

где  $u_\varepsilon$  – решение уравнения (1.2), а  $u_0$  – решение усредненного уравнения (1.3). Оценка (1.6) точна по порядку; постоянная  $C$  явно контролируется в терминах данных задачи. В операторных терминах (1.6) означает, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  резольвента  $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$  сходится по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  к резольвенте эффективного оператора  $\widehat{\mathcal{A}}^0$ , причем

$$\left\| (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon.$$

В [6] была получена более точная аппроксимация резольвенты оператора  $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ :

$$\left\| (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} - \varepsilon \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2. \quad (1.7)$$

Оператор  $\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon)$ , называемый *корректором*, имеет вид

$$\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon) = \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon) + \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)^*, \quad \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon) = \sum_{j=1}^d [\Phi_j^\varepsilon] \partial_j (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1}, \quad (1.8)$$

где  $\Phi_j(\mathbf{x})$  есть  $\Gamma$ -периодическое решение задачи (1.4). В работе [7] была найдена аппроксимация резольвенты  $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$  по “энергетической” норме (т. е. по норме операторов, действующих из  $L_2(\mathbb{R}^d)$  в пространство Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d)$ ):

$$\left\| (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} - \varepsilon \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (1.9)$$

Обратим внимание, что корректоры в (1.7) и (1.9) различны.

В [5–7] изучались также более общие операторы вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} \tilde{g}^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla + \varepsilon^{-2} p^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (1.10)$$

где  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  – положительно определенная и ограниченная матрица-функция с вещественными элементами, а  $p(\mathbf{x})$  – вещественная функция. Предполагалось, что  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  и  $p(\mathbf{x})$   $\Gamma$ -периодичны и  $p(\mathbf{x})$  принадлежит классу  $L_q(\Omega)$  с подходящим  $q$ . Будем считать, что край спектра соответствующего оператора  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = -\operatorname{div} \tilde{g}(\mathbf{x}) \nabla + p(\mathbf{x})$  есть точка  $\lambda_0 = 0$ . Тогда оператор  $\mathcal{A}$  допускает удобную факторизацию

$$\mathcal{A} = -\omega(\mathbf{x})^{-1} \operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla \omega(\mathbf{x})^{-1}, \quad g(\mathbf{x}) = \tilde{g}(\mathbf{x}) \omega^2(\mathbf{x}).$$

Здесь  $\omega(\mathbf{x})$  – положительное  $\Gamma$ -периодическое решение уравнения

$$-\operatorname{div} \tilde{g}(\mathbf{x}) \nabla \omega(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) = 0,$$

подчиненное условию нормировки  $\|\omega\|_{L_2(\Omega)}^2 = |\Omega|$ . Тогда оператор (1.10) запишется в факторизованном виде

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -(\omega^\varepsilon)^{-1} \operatorname{div} g^\varepsilon \nabla (\omega^\varepsilon)^{-1} = (\omega^\varepsilon)^{-1} \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad (1.11)$$

где  $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$  – оператор (1.1). Для оператора (1.11) уже не удастся найти такой оператор с постоянными коэффициентами, к резольвенте которого сходилась бы резольвента  $(\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$ . В [5] было показано, что

$$\left\| (\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - [\omega^\varepsilon] (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\omega^\varepsilon] \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (1.12)$$

Здесь  $\widehat{\mathcal{A}}^0$  – эффективный оператор для оператора (1.1) при  $g = \widetilde{g}\omega^2$ , а  $[\omega^\varepsilon]$  – оператор умножения на функцию  $\omega^\varepsilon(\mathbf{x})$ . Аппроксимация теперь содержит быстро осциллирующие множители по краям от резольвенты оператора  $\widehat{\mathcal{A}}^0$ .

В работе [6] аппроксимация (1.12) была уточнена за счет учета корректора

$$\left\| (\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - [\omega^\varepsilon] (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\omega^\varepsilon] - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2. \quad (1.13)$$

Здесь  $\mathcal{K}(\varepsilon) = [\omega^\varepsilon] \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon) [\omega^\varepsilon]$ , а оператор  $\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon)$  определен в (1.8). В [7] была найдена аппроксимация резольвенты оператора (1.11) по “энергетической” норме:

$$\left\| (\omega^\varepsilon)^{-1} (\mathcal{A}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\omega^\varepsilon] - \varepsilon \widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon) [\omega^\varepsilon] \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (1.14)$$

Оператор  $\widehat{\mathcal{K}}_1(\varepsilon)$  определен в (1.8).

Отметим, что в работах [4–7] аппроксимации для резольвенты были найдены не только для операторов вида (1.1), (1.10), но для широкого класса матричных дифференциальных операторов второго порядка.

Поясним метод на примере более простого оператора (1.1). *Масштабным преобразованием* изучение оператора  $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \varkappa^2 I)^{-1}$  при малом  $\varepsilon$  сводится к изучению поведения резольвенты  $(\widehat{\mathcal{A}} + \varkappa^2 \varepsilon^2 I)^{-1}$ . Здесь  $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}_1 = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla$ . С помощью теории Флоке–Блоха оператор  $\widehat{\mathcal{A}}$  раскладывается в прямой интеграл по операторам  $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$ . Оператор  $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$  действует в  $L_2(\Omega)$  и задается дифференциальным выражением  $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla$  при  $\boldsymbol{\xi}$ -квазипериодических граничных условиях. Параметр  $\boldsymbol{\xi}$  называют *квазипульсом*. Спектр оператора  $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$  дискретен. Пусть  $E_1(\boldsymbol{\xi})$  – первое собственное значение и  $\psi_1(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$  – первая собственная функция оператора  $\widehat{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\xi})$ . Выясняется, что поведение резольвенты  $(\widehat{\mathcal{A}} + \varkappa^2 \varepsilon^2 I)^{-1}$  можно описать в терминах “пороговых” характеристик, то есть, спектральных характеристик оператора  $\widehat{\mathcal{A}}$  на краю спектра (имеются в виду асимптотики для  $E_1(\boldsymbol{\xi})$  и  $\psi_1(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$  при  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow 0$ ). В частности, эффективная матрица  $g^0$  получается из асимптотики первой зонной функции  $E_1(\boldsymbol{\xi})$  при  $|\boldsymbol{\xi}| \rightarrow 0$ :  $E_1(\boldsymbol{\xi}) \sim \langle g^0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle$ . Таким образом, эффект усреднения можно трактовать как пороговый эффект на краю спектра периодического оператора  $\widehat{\mathcal{A}}$ .

Отметим, что другой подход к операторным оценкам погрешности при усреднении эллиптических уравнений в  $\mathbb{R}^d$  (так называемый метод сдвига) был развит Жиковым и Пастуховой [8, 9]; см. также обзор [10].

**1.3. Усреднение на краю внутренней спектральной лакуны.** Ясное понимание порогового характера эффекта усреднения влечет следующий естественный вопрос. Спектр периодического оператора  $\mathcal{A}$  имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Имеет ли смысл связывать с краями внутренних лакун аналоги задач усреднения? Этот вопрос изучался в работах [11, 12] в одномерном случае и в [13, 14] в случае произвольной размерности  $d$ .

Пусть  $\nu > 0$  – край внутренней лакуны в спектре оператора  $\mathcal{A}$ . Для определенности будем считать, что это правый край и точка  $\nu - \varkappa^2$  лежит в лакуне. Для оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  этот край перейдет в точку  $\varepsilon^{-2}\nu$ , то есть, в область высоких энергий. При  $0 < \varepsilon \leq 1$  точка  $\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2$  лежит в лакуне оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$ . Вместо (1.2) рассматривается уравнение

$$(\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x}) - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}),$$

где  $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Вопрос о поведении решения  $u_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сводится к изучению оператора  $(\mathcal{A}_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}$ , а после масштабного преобразования – к изучению резольвенты  $(\mathcal{A} - (\nu - \varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1}$ . Аппроксимация описывается в терминах спектральных характеристик оператора  $\mathcal{A}$  на данном краю лакуны.

Сформулируем результат в одномерном случае. Рассматривается оператор вида (1.10) при  $d = 1$ ; в одномерном случае для этого оператора будем использовать обозначение  $A_\varepsilon$ , см. (1.18) ниже. Выясняется, что с каждым краем лакуны  $\nu$  связан свой эффективный оператор  $A_\nu^0 = -b_\nu \frac{d^2}{dx^2}$ ,  $b_\nu > 0$ . Для определенности считаем, что  $\nu$  – правый край “периодической” лакуны (см. п. 2.2 ниже). Справедлива оценка

$$\left\| (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon, \quad (1.15)$$

$$0 < \varepsilon \leq 1.$$

Здесь  $b_\nu$  – коэффициент в асимптотике зонной функции  $\lambda(\xi)$  (отвечающей той зоне, для которой точка  $\nu$  является левым краем):  $\lambda(\xi) - \nu \sim b_\nu \xi^2$  при  $|\xi| \rightarrow 0$ , а  $\varphi_0(x)$  – вещественное периодическое решение уравнения  $A\varphi_0 = \nu\varphi_0$ , нормированное в  $L_2(0, 1)$ .

Оценка (1.15) была установлена в [11] в случае  $p(x) = 0$ . В [13] аналог оценки (1.15) получен для оператора вида (1.10) в произвольной

размерности  $d \geq 1$ . В работе [12] при  $d = 1$  установлена более точная аппроксимация резольвенты  $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}$  с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  при учете корректора:

$$\left\| (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] - \varepsilon K_\nu(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon^2. \quad (1.16)$$

Корректор  $K_\nu(\varepsilon)$  имеет структуру, аналогичную корректору  $\mathcal{K}(\varepsilon)$  из (1.13):

$$K_\nu(\varepsilon) = K_\nu^{(1)}(\varepsilon) + (K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^*, \quad K_\nu^{(1)}(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon] \frac{d}{dx} (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon], \quad (1.17)$$

где  $\Lambda(x)$  – некоторая вещественная периодическая функция, определенная ниже в п. 2.3.

В [14] более точная аппроксимация резольвенты найдена в случае произвольной размерности. Задача усреднения на краю лакуны для параболического уравнения при  $d = 1$  изучалась в [15].

В настоящей работе при  $d = 1$  получена аппроксимация в энергетической норме для резольвенты оператора  $A_\varepsilon$  на краю лакуны (аналог оценки (1.14)).

**1.4. Постановка задачи.** В  $L_2(\mathbb{R})$  рассматривается оператор вида (1.10) при  $d = 1$ . Оператор  $A_\varepsilon$  формально задан дифференциальным выражением

$$A_\varepsilon = -\frac{d}{dx} \tilde{g}^\varepsilon(x) \frac{d}{dx} + \varepsilon^{-2} p^\varepsilon(x), \quad (1.18)$$

где вещественные измеримые функции  $p(x)$  и  $\tilde{g}(x)$  подчинены условиям

$$0 < c_0 \leq \tilde{g}(x) \leq c_1 < \infty; \quad \tilde{g}(x+1) = \tilde{g}(x), \quad x \in \mathbb{R}; \quad (1.19)$$

$$p \in L_1(0, 1), \quad p(x+1) = p(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

Точное определение оператора  $A_\varepsilon$  дается через квадратичную форму

$$a_\varepsilon[u, u] = \int_{\mathbb{R}} (\tilde{g}^\varepsilon(x) |u'(x)|^2 + \varepsilon^{-2} p^\varepsilon(x) |u(x)|^2) dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}).$$

При наших предположениях эта форма замкнута и полуограничена снизу. Обозначим  $A := A_1 = -\frac{d}{dx} \tilde{g}(x) \frac{d}{dx} + p(x)$ . Введем масштабное преобразование – семейство унитарных операторов  $T_\varepsilon$  в  $L_2(\mathbb{R})$ :

$$(T_\varepsilon u)(x) = \varepsilon^{1/2} u(\varepsilon x), \quad \varepsilon > 0. \quad (1.21)$$

Нетрудно убедиться, что справедливо равенство

$$A_\varepsilon = T_\varepsilon^* (\varepsilon^{-2} A) T_\varepsilon. \quad (1.22)$$

Спектр оператора  $A$  имеет зонную структуру:  $\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [\nu_j, \mu_j]$ . За счет добавления к  $p(x)$  подходящей постоянной можно считать, что нижним краем спектра оператора  $A$  является точка ноль, то есть  $\nu_1 = 0$ . В силу (1.22) спектр оператора  $A_\varepsilon$  имеет вид  $\sigma(A_\varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [\varepsilon^{-2}\nu_j, \varepsilon^{-2}\mu_j]$ .

Мы находим аппроксимацию в “энергетической” норме резольвенты оператора  $A_\varepsilon$  в точке, близкой к краю лакуны. Ограничимся формулировкой для случая правого края “периодической” лакуны:

$$\begin{aligned} & \left\| (\omega^\varepsilon)^{-1} \left( (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} \right. \right. \\ & \left. \left. - [\varphi_0^\varepsilon](A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_0^\varepsilon] - \varepsilon K_\nu(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (1.23) \end{aligned}$$

Здесь эффективный оператор  $A_\nu^0$ , периодическая функция  $\varphi_0$  и корректор  $K_\nu(\varepsilon)$  определены так же, как в (1.15)–(1.17). Таким образом, в случае внутренней лакуны корректор в оценке (1.23) – тот же самый, что и в (1.16). В случае, когда  $\nu = \nu_1 = 0$  (и  $\varphi_0 = \omega$ ), второй член корректора  $(K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^*$  можно отбросить, поскольку норма  $\|(\omega^\varepsilon)^{-1}(K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^*\|_{L_2 \rightarrow H^1}$  равномерно ограничена. Поэтому результат согласуется с (1.14). Если же  $\nu$  – край внутренней лакуны, то указанная норма имеет порядок  $O(\varepsilon^{-1})$  и потому второй член корректора отбросить нельзя.

Оценка (1.23) и ее аналоги для других краев лакун представляют собой основные результаты работы.

Работа состоит из введения и трех параграфов. В §2 обсуждается спектральное разложение оператора  $A$  и формулируются основные результаты работы. В §3 приведены доказательства основных результатов. Приложение (§4) посвящено доказательству технического результата – леммы 2.2.

**1.5. Обозначения.** Через  $L_q(\mathbb{R})$ ,  $L_q(a, b)$  обозначим стандартные  $L_q$ -классы на оси и на промежутке  $(a, b)$ . Для измеримой функции  $f$  через  $[f]$  или  $[f(x)]$  обозначим оператор умножения на функцию  $f$  в

пространстве  $L_2$ . Через  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  обозначается класс бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на оси; через  $H^1(\mathbb{R})$  – стандартный класс Соболева;  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  – класс функций  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , для которых произведение  $f\varphi$  принадлежит  $H^1(\mathbb{R})$  при всех  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ;  $\tilde{H}^1(0, 1)$  – подпространство тех функций из  $H^1(0, 1)$ , периодическое продолжение которых принадлежит классу  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ ; через  $\tilde{H}_\xi^1(0, 1)$ , где  $\xi \in \mathbb{R}$ , обозначим класс функций  $u(x)$ , для которых произведение  $e^{-i\xi x}u(x)$  принадлежит  $\tilde{H}^1(0, 1)$ .

Пусть  $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_*$  – комплексные сепарабельные гильбертовы пространства; для линейного ограниченного оператора  $T: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$  через  $\|T\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*}$  обозначим операторную норму. Иногда мы опускаем индексы. Для замкнутого оператора  $T$  в гильбертовом пространстве  $\mathfrak{H}$  через  $\text{Dom } T$  обозначается его область определения, а через  $T^*$  – сопряженный оператор. Пусть  $A$  – самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве. В этом случае  $\sigma(A)$  обозначает спектр оператора  $A$ . Если  $\delta$  – произвольное борелевское множество на  $\mathbb{R}$ , то  $E_A(\delta)$  – спектральный проектор оператора  $A$ , отвечающий множеству  $\delta$ .

Для всякой 1-периодической функции  $\varphi(x)$  на оси положим  $\varphi^\varepsilon(x) := \varphi(x/\varepsilon)$ . Через  $\Phi$  обозначим оператор Фурье, действующий по правилу

$$(\Phi v)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} v(x) dx, \quad v \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}).$$

## §2. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В $L_2(\mathbb{R})$ .

### ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**2.1. Оператор  $A$ . Факторизация.** В  $L_2(\mathbb{R})$  рассматривается оператор, отвечающий дифференциальному выражению

$$A = -\frac{d}{dx} \tilde{g}(x) \frac{d}{dx} + p(x), \quad (2.1)$$

где  $\tilde{g}(x)$ ,  $p(x)$  – вещественные измеримые функции на оси, удовлетворяющие условиям (1.19) и (1.20). Строго говоря, самосопряженный оператор  $A$  порождается замкнутой квадратичной формой

$$a[u, u] = \int_{\mathbb{R}} (\tilde{g}(x)|u'(x)|^2 + p(x)|u(x)|^2) dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}). \quad (2.2)$$



Добавлением вещественной постоянной к  $p(x)$  можем добиться справедливости равенства

$$\inf \sigma(A) = 0. \quad (2.3)$$

При условии (2.3) существует 1-периодическое (обобщенное) решение  $\omega(x)$  уравнения

$$-(\tilde{g}(x)\omega'(x))' + p(x)\omega(x) = 0. \quad (2.4)$$

Иными словами, функция  $\omega \in \tilde{H}^1(0, 1)$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^1 (\tilde{g}(x)\omega'(x)\overline{\eta'(x)} + p(x)\omega(x)\overline{\eta(x)}) dx = 0, \quad \eta \in \tilde{H}^1(0, 1).$$

Решение определено с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, что решение положительно:  $\omega(x) > 0$  и выполнено условие нормировки

$$\int_0^1 \omega^2(x) dx = 1. \quad (2.5)$$

При этом справедливы соотношения

$$0 < \omega_0 \leq \omega(x) \leq \omega_1 < \infty \quad (2.6)$$

с некоторыми постоянными  $\omega_0, \omega_1$ . Кроме того,  $\omega \in C^\alpha$  с некоторым  $\alpha > 0$  и  $\omega$  является мультипликатором в классе  $H^1(\mathbb{R})$  и в классе  $\tilde{H}^1(0, 1)$ .

Подстановка  $u = \omega v$  преобразует форму (2.2) к виду

$$a[u, u] = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x)\omega^2(x)|v'(x)|^2 dx, \quad v = \omega^{-1}u \in H^1(\mathbb{R}). \quad (2.7)$$

Это означает, что оператор  $A$  допускает факторизацию

$$A = -\omega^{-1} \frac{d}{dx} g \frac{d}{dx} \omega^{-1}, \quad g := \tilde{g}\omega^2. \quad (2.8)$$

Факторизованную запись (2.8) можно принять за исходную. Тогда достаточно предположить, что  $\omega$  – 1-периодическая измеримая функция, удовлетворяющая условиям (2.5) и (2.6). *Далее будем считать, что оператор  $A$  есть самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R})$ , порожденный*

квадратичной формой (2.7), где  $\tilde{g}(x)$  и  $\omega(x)$  являются 1-периодическими измеримыми функциями, удовлетворяющими условиям (1.19), (2.5) и (2.6).

Вернуться к представлению (2.1) можно, полагая (см. (2.4))  $p = \omega^{-1}(\tilde{g}\omega)'$ . При этом потенциал  $p(x)$  может оказаться сингулярной обобщенной функцией.

**Замечание 2.1.** *Описанные выше факты, касающиеся свойств периодического решения уравнения (2.4) и факторизации оператора (2.1), проверены в [16] при  $\tilde{g}(x) = 1$  и в [17, §4] в общем случае. См. также [5, гл. 6, §1].*

**2.2. Спектральные свойства оператора  $A$ .** Опишем спектральные свойства оператора  $A$  (мы следуем работам [11], [12], [18], [19], см. также [20]). Определим в  $L_2(0, 1)$  семейство замкнутых неотрицательных квадратичных форм

$$a(\xi)[u, u] = \int_0^1 g(x)|v'(x)|^2 dx, \quad v = \omega^{-1}u \in \tilde{H}_\xi^1(0, 1), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Параметр  $\xi$  будем называть *квазиимпульсом*. Форма  $a(\xi)$  порождает самосопряженный оператор  $A(\xi)$  в  $L_2(0, 1)$ . Спектр оператора  $A(\xi)$  дискретен. Обозначим через  $E_j(\xi)$  и  $\psi_j(\xi, x)$  последовательные собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора  $A(\xi)$ :

$$E_1(\xi) \leq E_2(\xi) \leq \dots \leq E_j(\xi) \leq \dots, \quad \sigma(A(\xi)) = \{E_j(\xi)\}_{j=1}^\infty.$$

Собственные функции  $\psi_j(\xi, \cdot)$  являются обобщенными решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} -\omega(x)^{-1} \frac{d}{dx} g(x) \frac{d}{dx} \omega(x)^{-1} \psi_j(\xi, x) &= E_j(\xi) \psi_j(\xi, x), \quad 0 < x < 1, \\ (\omega^{-1} \psi_j)(\xi, 1) &= e^{i\xi} (\omega^{-1} \psi_j)(\xi, 0), \\ \frac{d}{dx} (\omega^{-1} \psi_j)(\xi, 1) &= e^{i\xi} \frac{d}{dx} (\omega^{-1} \psi_j)(\xi, 0). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функции  $E_j(\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , будем называть *зонными функциями*; зонные функции липшицевы (и даже кусочно аналитичны) и периодичны с периодом  $2\pi$ . При  $\xi \neq 0 \pmod{\pi}$  собственные значения  $E_j(\xi)$  являются простыми. Собственные функции  $\psi_j(\xi, x)$  можно выбрать  $(2\pi)$ -периодическими по  $\xi$ . Мы считаем, что  $\psi_j(\xi, x)$  доопределены

при всех  $x \in \mathbb{R}$  так, что функции  $\varphi_j(\xi, x) := e^{-i\xi x} \psi_j(\xi, x)$  являются 1-периодическими по переменной  $x$  и  $(\omega^{-1}\varphi_j)(\xi, \cdot) \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ .

Введем частично изометрические интегральные операторы

$$X_j: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(-\pi, \pi)$$

по правилу

$$(X_j u)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi_j(\xi, x)} u(x) dx, \quad u \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}).$$

Операторы  $X_j^* X_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , – ортогональные проекторы на попарно ортогональные подпространства в  $L_2(\mathbb{R})$ , причем  $\sum_{j=1}^{\infty} X_j^* X_j = I$ . Для оператора  $A$  имеет место разложение Флоке

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} X_j^* [E_j(\cdot)] X_j. \quad (2.10)$$

В силу (2.10) спектр оператора  $A$  имеет зонную структуру. Именно, справедливо равенство

$$\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} [\nu_j, \mu_j], \quad [\nu_j, \mu_j] = E_j([-\pi, \pi]), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Отрезки  $[\nu_j, \mu_j]$  будем называть *спектральными зонами*. Справедливы равенства  $E_A([\nu_j, \mu_j]) = X_j^* X_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Образ отображения  $\xi \rightarrow E_j(\xi)$ ,  $\xi \in [-\pi, \pi]$ , дважды покрывает зону  $[\nu_j, \mu_j]$ . Для функций  $E_j(\xi)$  точки  $\xi = 0, \pi \pmod{2\pi}$  являются точками экстремумов. При этом для нечетных зон справедливо

$$\nu_j = \min_{0 \leq |\xi| \leq \pi} E_j(\xi) = E_j(0), \quad \mu_j = \max_{0 \leq |\xi| \leq \pi} E_j(\xi) = E_j(\pi), \quad j = 2n+1, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Для четных зон выполнены равенства

$$\nu_j = \min_{0 \leq |\xi| \leq \pi} E_j(\xi) = E_j(\pi), \quad \mu_j = \max_{0 \leq |\xi| \leq \pi} E_j(\xi) = E_j(0), \quad j = 2n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В одномерном случае спектральные зоны не могут перекрываться. Разделяющие их интервалы

$$(-\infty, \nu_1), (\mu_1, \nu_2), (\mu_2, \nu_3), \dots$$

будем называть *спектральными лакунами*. Возможно, однако, пересечение зон по граничным точкам, т. е. некоторые лакуны могут оказаться пустыми. В общем случае открывается бесконечно много лакун. Лакуны вида  $(\mu_{2n}, \nu_{2n+1})$  называют “периодическими”, поскольку собственные функции, отвечающие краям  $\mu_{2n}, \nu_{2n+1}$ , являются периодическими. Условимся считать  $\mu_0 = -\infty$ . Полубесконечная лакуна  $(-\infty, \nu_1) = (\mu_0, \nu_1)$  является периодической. Лакуны вида  $(\mu_{2n-1}, \nu_{2n})$  называют “антипериодическими”, поскольку собственные функции, отвечающие краям  $\mu_{2n-1}, \nu_{2n}$ , являются антипериодическими.

**2.3. Спектральные характеристики на правом краю периодической лакуны.** Для определенности при некотором  $n \in \mathbb{Z}_+$  зафиксируем  $(\mu_{2n}, \nu_{2n+1}) \neq \emptyset$  – открытую периодическую лакуну;  $[\nu_{2n+1}, \mu_{2n+1}]$  – фиксированная нечетная зона. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \nu &:= \nu_{2n+1}; & \lambda(\xi) &:= E_{2n+1}(\xi); & \psi(\xi, x) &:= \psi_{2n+1}(\xi, x), \\ \varphi(\xi, x) &:= \varphi_{2n+1}(\xi, x) = e^{-i\xi x} \psi(\xi, x), & \xi &\in [-\pi, \pi], & x &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(0, 1) &:= \{f : \omega^{-1}f \in H^1(0, 1)\}, & \tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1) &:= \{f : \omega^{-1}f \in \tilde{H}^1(0, 1)\}, \\ \|f\|_{\mathcal{H}^1(0, 1)} &:= \|\omega^{-1}f\|_{H^1(0, 1)}, & f &\in \mathcal{H}^1(0, 1). \end{aligned}$$

Отметим следующие факты. Функцию  $\psi(\xi, x)$  можно выбрать (см., например, [11], а также [20] и [21]) измеримой по паре переменных  $(\xi, x)$  и вещественно аналитической (по  $\xi$ ) функцией со значениями в  $\mathcal{H}^1(0, 1)$  при  $|\xi| < \pi$ . Тогда функция  $\varphi(\xi, x)$  оказывается вещественно аналитической по  $\xi \in (-\pi, \pi)$  со значениями в  $\tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$ . Функция  $\lambda(\xi)$  непрерывна и четна при  $|\xi| \leq \pi$ , при  $\xi = 0$  имеет невырожденный минимум; при  $0 \leq \xi \leq \pi$  она строго монотонна. Имеет место представление [20]

$$\lambda(\xi) = \nu + b_\nu \xi^2 + \xi^4 \gamma(\xi), \quad |\xi| \leq \pi, \quad b_\nu > 0, \quad (2.11)$$

где функция  $\gamma(\xi)$  непрерывна на  $[-\pi, \pi]$ .

Для функции  $\varphi(\xi, x)$  справедливо разложение (см., например, [12])

$$\varphi(\xi, x) = \varphi_0(x) + \xi \varphi_1(x) + \xi^2 \theta(\xi, x), \quad \xi \in (-\pi, \pi), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

где  $\theta(\xi, \cdot)$  – вещественно аналитическая по  $\xi \in (-\pi, \pi)$  функция со значениями в  $\tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$ . Можно показать (см. [11], [12]), что функцию  $\psi(\xi, x)$  можно выбрать так, чтобы функция  $\varphi_0(x) = \varphi(0, x) = \psi(0, x)$  была вещественной, а функция  $\varphi_1(x) = \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(0, x)$  принимала чисто

мнимые значения. Таким образом,  $\varphi_0(x)$  – вещественная функция, удовлетворяющая условию нормировки  $\int_0^1 \varphi_0^2(x) dx = 1$  и краевой задаче

$$\begin{aligned} -\omega(x)^{-1} \frac{d}{dx} g(x) \frac{d}{dx} \omega(x)^{-1} \varphi_0(x) &= \nu \varphi_0(x), \quad 0 < x < 1, \\ (\omega^{-1} \varphi_0)(1) &= (\omega^{-1} \varphi_0)(0), \quad \frac{d}{dx} (\omega^{-1} \varphi_0)(1) = \frac{d}{dx} (\omega^{-1} \varphi_0)(0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Функция  $\varphi_1 \in \tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$  допускает представление

$$\varphi_1(x) = i\Lambda(x) + i\beta\varphi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Здесь  $\beta \in \mathbb{R}$  – некоторая постоянная,  $\Lambda$  – единственное 1-периодическое слабое решение задачи

$$\begin{aligned} -\omega^{-1} \frac{d}{dx} g \frac{d}{dx} \omega^{-1} \Lambda &= \nu \Lambda + g\omega^{-1} \frac{d}{dx} (\omega^{-1} \varphi_0) + \omega^{-1} \frac{d}{dx} (g\omega^{-1} \varphi_0), \\ &0 < x < 1, \\ \int_0^1 \Lambda(x) \varphi_0(x) dx &= 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Условие разрешимости выполнено. В силу вещественности функции  $\varphi_0(x)$  решение  $\Lambda(x)$  также оказывается вещественным. Отметим, что функции  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  и  $\Lambda$  принадлежат классу  $\tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$ , а потому ограничены. Мы считаем, что функции  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$  и  $\Lambda$  периодически продолжены на всю ось  $\mathbb{R}$ .

Далее, из (2.13) видно, что выполнено уравнение  $(g(\omega^{-1} \varphi_0)')' = -\nu \omega \varphi_0$ , а потому производная функции  $g(\omega^{-1} \varphi_0)'$  ограничена. Следовательно, эта функция абсолютно непрерывна, откуда следует, что  $(\omega^{-1} \varphi_0)' \in L_\infty$ . Нам понадобятся также включения  $(\omega^{-1} \varphi_1)' \in L_\infty$  и  $(\omega^{-1} \Lambda)' \in L_\infty$ , которые вытекают из соотношений  $\varphi_1(x) = \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(0, x)$  и (2.14) на основании следующей леммы.

**Лемма 2.2.** *В предположениях пункта 2.3 функция  $\frac{d}{dx}(\omega^{-1}(x)\varphi(\xi, x))$  является вещественно аналитической функцией от  $\xi \in (-\pi, \pi)$  со значениями в  $L_\infty(0, 1)$ .*

Доказательство этого важного утверждения вынесено в приложение (§ 4).

**Замечание 2.3.** Как показано в [15, п. 3.3], коэффициент  $b_\nu$  из (2.11) может быть выражен в терминах решений вспомогательных задач:

$$b_\nu = \int_0^1 g(x) \left( \left( \frac{\Lambda(x)}{\omega(x)} \right)' \frac{\varphi_0(x)}{\omega(x)} - \left( \frac{\varphi_0(x)}{\omega(x)} \right)' \frac{\Lambda(x)}{\omega(x)} + \frac{\varphi_0^2(x)}{\omega^2(x)} \right) dx. \quad (2.16)$$

Здесь  $\varphi_0$  – вещественное нормированное решение задачи (2.13), а  $\Lambda$  – 1-периодическое решение задачи (2.15).

**2.4. Основные результаты для правого края периодической лакуны.** В  $L_2(\mathbb{R})$  рассмотрим оператор  $A_\varepsilon$ , формально заданный выражением

$$A_\varepsilon = -(\omega^\varepsilon)^{-1} \frac{d}{dx} g^\varepsilon \frac{d}{dx} (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g := \tilde{g}\omega^2. \quad (2.17)$$

Строго говоря, оператор  $A_\varepsilon$  есть самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R})$ , порожденный квадратичной формой

$$a_\varepsilon[u, u] = \int_{\mathbb{R}} g^\varepsilon(x) |v'(x)|^2 dx, \quad v = (\omega^\varepsilon)^{-1} u \in H^1(\mathbb{R}), \quad (2.18)$$

где  $g = \tilde{g}\omega^2$ , а  $\tilde{g}(x)$  и  $\omega(x)$  являются 1-периодическими измеримыми функциями, удовлетворяющими условиям (1.19), (2.5) и (2.6). Область определения формы (2.18)

$$\mathcal{H}_\varepsilon^1(\mathbb{R}) := \{u \in L_2(\mathbb{R}) : (\omega^\varepsilon)^{-1} u \in H^1(\mathbb{R})\}$$

назовем *энергетическим пространством*; это гильбертово пространство относительно нормы  $\|u\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^1(\mathbb{R})} = \|(\omega^\varepsilon)^{-1} u\|_{H^1(\mathbb{R})}$ .

Напомним, что оператор вида (1.18), где  $p(x)$  и  $\tilde{g}(x)$  – вещественные функции, подчиненные условиям (1.19) и (1.20), при условии (2.3) допускает запись в виде (2.17).

Пусть  $\nu_{2n+1} = \nu$  – правый край периодической лакуны в спектре оператора  $A$ , порожденного формой (2.7). Фиксируем число  $\varkappa > 0$  такое, что  $\nu - \varkappa^2 > \mu_{2n}$ . Тогда для оператора  $A_\varepsilon$  точка  $\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2$  заведомо принадлежит лакуне  $(\varepsilon^{-2}\mu_{2n}, \varepsilon^{-2}\nu)$ , если  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Наша цель – найти аппроксимацию резольвенты  $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}$  при малом  $\varepsilon$ .

В  $L_2(\mathbb{R})$  введем самосопряженный оператор

$$A_\nu^0 := -b_\nu \frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{Dom } A_\nu^0 = H^2(\mathbb{R}), \quad (2.19)$$

где  $b_\nu > 0$  – коэффициент при  $\xi^2$  в разложении (2.11);  $b_\nu$  определено в (2.16). Оператор (2.19) называется *эффективным оператором на краю лакуны  $\nu$* . Введем еще операторы

$$\begin{aligned} K_\nu^{(1)}(\varepsilon) &:= [\Lambda^\varepsilon] \frac{d}{dx} (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon], \\ K_\nu(\varepsilon) &:= K_\nu^{(1)}(\varepsilon) + (K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^* \\ &= [\Lambda^\varepsilon] \frac{d}{dx} (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] - [\varphi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} \frac{d}{dx} [\Lambda^\varepsilon], \end{aligned} \quad (2.20)$$

где  $\varphi_0$  – вещественное нормированное решение задачи (2.13), а  $\Lambda$  – 1-периодическое решение задачи (2.15). Оператор  $K_\nu(\varepsilon)$  назовем *корректором*. Следующее утверждение показывает, что корректор является непрерывным оператором из  $L_2(\mathbb{R})$  в “энергетическое” пространство  $\mathcal{H}_\varepsilon^1(\mathbb{R})$ .

**Предложение 2.4.** *При  $0 < \varepsilon \leq 1$  выполнены оценки*

$$\|K_\nu(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq \mathfrak{C}_1, \quad (2.21)$$

$$\left\| \frac{d}{dx} [(\omega^\varepsilon)^{-1}] K_\nu(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq \mathfrak{C}_2 \varepsilon^{-1} + \mathfrak{C}_3. \quad (2.22)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$  определены ниже;  $\mathfrak{C}_1$  зависит от  $\varkappa, b_\nu, \|\varphi_0\|_{L_\infty}, \|\Lambda\|_{L_\infty}$ ;  $\mathfrak{C}_2$  зависит от  $\varkappa, b_\nu, \|\varphi_0\|_{L_\infty}, \|\Lambda\|_{L_\infty}, \|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}, \|(\omega^{-1}\Lambda)'\|_{L_\infty}$ ;  $\mathfrak{C}_3$  зависит от  $b_\nu, \|\omega^{-1}\|_{L_\infty}, \|\varphi_0\|_{L_\infty}$  и  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** Оценка (2.21) вытекает из следующих очевидных соотношений:

$$\begin{aligned} \|K_\nu(\varepsilon)\|_{L_2 \rightarrow L_2} &\leq 2 \|K_\nu^{(1)}(\varepsilon)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ &\leq 2 \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} \left\| \frac{d}{dx} (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} \right\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ &= 2 \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{|\xi|}{b_\nu \xi^2 + \varkappa^2} \leq 2 \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} b_\nu^{-1/2} \varkappa^{-1} =: \mathfrak{C}_1. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(\omega^\varepsilon)^{-1}] K_\nu^{(1)}(\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} \left( \frac{d}{dx} (\omega^{-1} \Lambda) \right)^\varepsilon \frac{d}{dx} (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] \\ &\quad + [(\omega^\varepsilon)^{-1} \Lambda^\varepsilon] \frac{d^2}{dx^2} (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dx} [(\omega^\varepsilon)^{-1}] K_\nu^{(1)}(\varepsilon) \right\|_{L_2 \rightarrow L_2} &\leq \varepsilon^{-1} \|(\omega^{-1}\Lambda)'\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{|\xi|}{b_\nu \xi^2 + \varkappa^2} \\ &+ \|\omega^{-1}\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{\xi^2}{b_\nu \xi^2 + \varkappa^2} \leq \mathfrak{C}'_2 \varepsilon^{-1} + \tilde{\mathfrak{C}}_3, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где

$$\mathfrak{C}'_2 = \|(\omega^{-1}\Lambda)'\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} b_\nu^{-1/2} \varkappa^{-1}$$

и

$$\tilde{\mathfrak{C}}_3 = \|\omega^{-1}\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} b_\nu^{-1}.$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dx} [(\omega^\varepsilon)^{-1}] (K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^* \right\|_{L_2 \rightarrow L_2} &\leq \varepsilon^{-1} \|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{|\xi|}{b_\nu \xi^2 + \varkappa^2} \\ &+ \|\omega^{-1}\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\varphi_0\|_{L_\infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \frac{\xi^2}{b_\nu \xi^2 + \varkappa^2} \leq \mathfrak{C}''_2 \varepsilon^{-1} + \tilde{\mathfrak{C}}_3, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $\mathfrak{C}''_2 = \|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} b_\nu^{-1/2} \varkappa^{-1}$ . Из (2.23) и (2.24) вытекает искомая оценка (2.22) с постоянными  $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}'_2 + \mathfrak{C}''_2$ ,  $\mathfrak{C}_3 = 2\tilde{\mathfrak{C}}_3$ .  $\square$

Напомним результат [11, 12] об аппроксимации резольвенты  $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}$  по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R})$ .

**Теорема 2.5** ([11, 12]). Пусть  $A_\varepsilon$  – самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R})$ , порожденный формой (2.18). Пусть выполнены предположения пунктов 2.3, 2.4. Пусть  $\nu_{2n+1} = \nu$  – правый край периодической лакуны в спектре оператора  $A$ . Пусть  $A_\nu^0$  – эффективный оператор (2.19) на краю лакуны  $\nu$ , а  $\varphi_0$  – вещественное нормированное решение задачи (2.13). Тогда справедлива оценка

$$\begin{aligned} \left\| (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} &\leq C^\circ \varepsilon, \\ 0 < \varepsilon \leq 1. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Постоянная  $C^\circ$  зависит от  $\varkappa$ ,  $\mu_{2n}$ ,  $\nu = \nu_{2n+1}$ ,  $\nu_{2n+2}$ ,  $b_\nu$ ,  $\|\gamma\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$ ,  $\|\theta\|_M$ , где

$$\|\theta\|_M := \operatorname{ess-sup}_{x \in \mathbb{R}} \|\theta(\cdot, x)\|_{C^1([-3\pi/4, 3\pi/4])}.$$



Основной результат работы в случае правого края периодической лакуны представляет следующая теорема.

**Теорема 2.6.** Пусть выполнены условия теоремы 2.5. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедлива оценка

$$\left\| (\omega^\varepsilon)^{-1} \left( (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2\nu} - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] - \varepsilon K_\nu(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon. \quad (2.26)$$

Здесь корректор  $K_\nu(\varepsilon)$  определен в (2.20). Постоянная  $C$  зависит от  $\varkappa, \mu_{2n}, \nu = \nu_{2n+1}, \mu_{2n+1}, \nu_{2n+2}, b_\nu, \|\gamma\|_{L_\infty}, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\omega^{-1}\|_{L_\infty}, \|\varphi_0\|_{L_\infty}, \|\varphi_1\|_{L_\infty}, \|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}, \|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}, \|\theta\|_M, \|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$ .

**Замечание 2.7.** 1) В случае внутренней лакуны корректор  $K_\nu(\varepsilon)$  в аппроксимации резольвенты по энергетической норме (оценка (2.26)) совпадает с корректором в аппроксимации резольвенты по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R})$  с погрешностью  $O(\varepsilon^2)$  (оценка (1.16)). 2) Полу-бесконечная лакуна  $(-\infty, 0)$  является периодической. В этом случае  $\nu = \nu_1 = 0$  и  $\varphi_0(x) = \omega(x)$ . Тогда в оценке (2.26) в пределах допустимой погрешности можно отбросить второй член корректора и заменить  $K_\nu(\varepsilon)$  на  $K_\nu^{(1)}(\varepsilon)$ . Действительно, в рассматриваемом случае оценка (2.24) дает  $\left\| \frac{d}{dx} [(\omega^\varepsilon)^{-1}] (K_\nu^{(1)}(\varepsilon))^* \right\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \tilde{C}_3$ . Это согласуется с известным результатом об аппроксимации в энергетической норме для резольвенты на нижнем краю спектра; см. оценку (1.14).

**2.5. Случай левого края периодической лакуны.** Для определенности при некотором  $n \in \mathbb{N}$  зафиксируем  $(\mu_{2n}, \nu_{2n+1}) \neq \emptyset$  – открытую периодическую лакуну;  $[\nu_{2n}, \mu_{2n}]$  – фиксированная четная зона. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mu &:= \mu_{2n}; \quad \lambda(\xi) := E_{2n}(\xi); \quad \psi(\xi, x) := \psi_{2n}(\xi, x), \\ \varphi(\xi, x) &:= \varphi_{2n}(\xi, x) = e^{-i\xi x} \psi(\xi, x), \quad \xi \in [-\pi, \pi], \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Как и прежде, можно выбрать функции  $\psi(\xi, x)$  и  $\varphi(\xi, x)$  при  $|\xi| < \pi$  вещественно аналитическими со значениями в  $\mathcal{H}^1(0, 1)$  и в  $\tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$  соответственно. Функция  $\lambda(\xi)$  непрерывна и четна при  $|\xi| \leq \pi$ , при  $\xi = 0$  имеет невырожденный максимум; при  $0 \leq \xi \leq \pi$  она строго монотонна. Имеет место представление

$$\lambda(\xi) = \mu - b_\mu \xi^2 + \xi^4 \gamma(\xi), \quad |\xi| \leq \pi, \quad b_\mu > 0, \quad (2.27)$$

где функция  $\gamma(\xi)$  непрерывна на  $[-\pi, \pi]$ .

Для функции  $\varphi(\xi, x)$  справедливо разложение вида (2.12), где  $\theta(\xi, \cdot)$  – вещественно аналитическая по  $\xi \in (-\pi, \pi)$  функция со значениями в  $\tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$ . Функция  $\varphi_0(x)$  – нормированное вещественное решение краевой задачи вида (2.13) с заменой  $\nu$  на  $\mu$ . Функция  $\varphi_1(x)$  допускает представление (2.14), где  $\Lambda$  – 1-периодическое решение задачи вида (2.15) с заменой  $\nu$  на  $\mu$ .

Фиксируем число  $\varkappa > 0$  такое, что  $\mu + \varkappa^2 < \nu_{2n+1}$ . Тогда для оператора  $A_\varepsilon$  точка  $\varepsilon^{-2}\mu + \varkappa^2$  заведомо принадлежит лакуне  $(\varepsilon^{-2}\mu, \varepsilon^{-2}\nu_{2n+1})$ , если  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Мы находим аппроксимацию при малом  $\varepsilon$  для резольвенты  $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\mu + \varkappa^2)I)^{-1}$ .

По аналогии с (2.19), (2.20) введем эффективный оператор и корректор на краю лакуны  $\mu$ :

$$A_\mu^0 := -b_\mu \frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{Dom } A_\mu^0 = H^2(\mathbb{R}), \quad (2.28)$$

$$K_\mu(\varepsilon) := [\Lambda^\varepsilon] \frac{d}{dx} (A_\mu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] - [\varphi_0^\varepsilon] (A_\mu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} \frac{d}{dx} [\Lambda^\varepsilon]. \quad (2.29)$$

Здесь  $b_\mu > 0$  – коэффициент при  $\xi^2$  в разложении (2.27); для  $b_\mu$  справедлив полный аналог представления (2.16);  $\varphi_0$  – нормированное вещественное решение задачи вида (2.13) с заменой  $\nu$  на  $\mu$ ;  $\Lambda$  – 1-периодическое решение задачи вида (2.15) с заменой  $\nu$  на  $\mu$ .

Как показано в [11, 12], аналогом оценки (2.25) на левом краю лакуны служит оценка

$$\left\| (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\mu + \varkappa^2)I)^{-1} + [\varphi_0^\varepsilon] (A_\mu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C^\circ \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.30)$$

Основной результат работы в случае левого края периодической лакуны представляет следующая теорема.

**Теорема 2.8.** Пусть  $A_\varepsilon$  – самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R})$ , порожденный формой (2.18). Пусть выполнены предположения пункта 2.5. Пусть  $\mu_{2n} = \mu$  – левый край периодической лакуны в спектре оператора  $A$ . Пусть  $A_\mu^0$  – эффективный оператор (2.28) на краю лакуны  $\mu$ , а  $\varphi_0$  – вещественное нормированное решение задачи вида (2.13)

с заменой  $\nu$  на  $\mu$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедлива оценка

$$\left\| (\omega^\varepsilon)^{-1} \left( (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\mu + \varkappa^2)I)^{-1} + [\varphi_0^\varepsilon] (A_\mu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] + \varepsilon K_\mu(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon.$$

Здесь корректор  $K_\mu(\varepsilon)$  определен в (2.29). Постоянная  $C$  зависит от  $\varkappa$ ,  $\mu_{2n-1}$ ,  $\mu = \mu_{2n}$ ,  $\nu_{2n+1}$ ,  $b_\mu$ ,  $\|\gamma\|_{L_\infty}$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$ ,  $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$ ,  $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$ ,  $\|\theta\|_M$ ,  $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$ .

**2.6. Случай правого края антипериодической лакуны.** Для определенности при некотором  $n \in \mathbb{N}$  фиксируем  $(\mu_{2n-1}, \nu_{2n}) \neq \emptyset$  – открытую антипериодическую лакуну в спектре оператора  $A$ ;  $[\nu_{2n}, \mu_{2n}]$  – фиксированная четная зона. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \nu &:= \nu_{2n}; \quad \lambda(\xi) := E_{2n}(\xi), \quad \psi(\xi, x) := \psi_{2n}(\xi, x), \\ \varphi(\xi, x) &:= \varphi_{2n}(\xi, x) = e^{-i\xi x} \psi(\xi, x), \quad \xi \in [0, 2\pi], \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Аналогично (2.11) и (2.12) справедливы представления

$$\lambda(\xi) = \nu + b_\nu(\xi - \pi)^2 + (\xi - \pi)^4 \gamma(\xi), \quad \xi \in [0, 2\pi], \quad b_\nu > 0; \quad (2.31)$$

$$\varphi(\xi, x) = \varphi_0(x) + (\xi - \pi)\varphi_1(x) + (\xi - \pi)^2 \theta(\xi, x), \quad \xi \in (0, 2\pi), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.32)$$

Здесь функция  $\gamma(\xi)$  непрерывна на  $[0, 2\pi]$ ;  $\theta(\xi, \cdot)$  – вещественно аналитическая по  $\xi \in (0, 2\pi)$  функция со значениями в  $\tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$ . Функция  $\psi_0(x) := e^{i\pi x} \varphi_0(x)$  является обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{aligned} -\omega(x)^{-1} \frac{d}{dx} g(x) \frac{d}{dx} \omega(x)^{-1} \psi_0(x) &= \nu \psi_0(x), \quad 0 < x < 1, \\ (\omega^{-1} \psi_0)(1) &= -(\omega^{-1} \psi_0)(0), \quad \frac{d}{dx} (\omega^{-1} \psi_0)(1) = -\frac{d}{dx} (\omega^{-1} \psi_0)(0). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Известно (см. [11], [12]), что функцию  $\psi(\xi, x)$  можно выбрать так, чтобы  $\psi_0(x)$  была вещественной и удовлетворяла условию нормировки  $\int_0^1 \psi_0^2(x) dx = 1$ . При этом функция  $\psi_1(x) := e^{i\pi x} \varphi_1(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , допускает представление

$$\psi_1(x) = i\Lambda(x) + i\beta\psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.34)$$

при некотором  $\beta \in \mathbb{R}$ . Здесь  $\Lambda$  – единственное антипериодическое решение задачи

$$\begin{aligned} -\omega^{-1} \frac{d}{dx} g \frac{d}{dx} \omega^{-1} \Lambda &= \nu \Lambda + g \omega^{-1} \frac{d}{dx} (\omega^{-1} \psi_0) + \omega^{-1} \frac{d}{dx} (g \omega^{-1} \psi_0), \\ &0 < x < 1, \\ \int_0^1 \Lambda(x) \psi_0(x) dx &= 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В силу вещественности функции  $\psi_0(x)$  решение  $\Lambda(x)$  также оказывается вещественным. Мы считаем, что функция  $\Lambda(x)$  продолжена на всю ось  $\mathbb{R}$  так, чтобы  $e^{-i\pi x} \Lambda(x)$  была 1-периодической.

Фиксируем число  $\varkappa > 0$  такое, что  $\nu - \varkappa^2 > \mu_{2n-1}$ . Тогда для оператора  $A_\varepsilon$  точка  $\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2$  заведомо принадлежит лакуне  $(\varepsilon^{-2}\mu_{2n-1}, \varepsilon^{-2}\nu)$ , если  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Мы находим аппроксимацию резольвенты  $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1}$  при малом  $\varepsilon$ .

В  $L_2(\mathbb{R})$  введем эффективный оператор

$$A_\nu^0 := -b_\nu \frac{d^2}{dx^2}, \quad \text{Dom } A_\nu^0 = H^2(\mathbb{R}), \quad (2.36)$$

и корректор

$$K_\nu(\varepsilon) := [\Lambda^\varepsilon] \frac{d}{dx} (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\psi_0^\varepsilon] - [\psi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} \frac{d}{dx} [\Lambda^\varepsilon]. \quad (2.37)$$

Здесь  $b_\nu > 0$  – коэффициент при  $(\xi - \pi)^2$  в разложении (2.31); для  $b_\nu$  справедливо представление вида (2.16) с заменой  $\varphi_0$  на  $\psi_0$ ;  $\psi_0$  – вещественное нормированное решение задачи (2.33);  $\Lambda$  – антипериодическое решение задачи (2.35).

Как показано в [11, 12], в случае правого края антипериодической лакуны справедлива оценка вида (2.25) с заменой  $\varphi_0$  на  $\psi_0$ .

Сформулируем наш основной результат в случае правого края антипериодической лакуны.

**Теорема 2.9.** Пусть  $A_\varepsilon$  – самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R})$ , порожденный формой (2.18). Пусть выполнены предположения пункта 2.6. Пусть  $\nu_{2n} = \nu$  – правый край антипериодической лакуны в спектре оператора  $A$ . Пусть  $A_\nu^0$  – эффективный оператор (2.36) на

краю лакуны  $\nu$ , а  $\psi_0$  – вещественное нормированное решение задачи (2.33). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедлива оценка

$$\left\| (\omega^\varepsilon)^{-1} \left( (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} - [\psi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\psi_0^\varepsilon] - \varepsilon K_\nu(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon.$$

Здесь корректор  $K_\nu(\varepsilon)$  определен в (2.37). Постоянная  $C$  зависит от  $\varkappa, \mu_{2n-1}, \nu = \nu_{2n}, \mu_{2n}, \nu_{2n+1}, b_\nu, \|\gamma\|_{L_\infty}, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\omega^{-1}\|_{L_\infty}, \|\varphi_0\|_{L_\infty}, \|\varphi_1\|_{L_\infty}, \|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}, \|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}, \|\theta\|_M, \|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$ . Здесь норма  $\|\cdot\|_M$  определяется равенством

$$\|\theta\|_M := \operatorname{ess-sup}_{x \in \mathbb{R}} \|\theta(\cdot, x)\|_{C^1([\pi/4, 7\pi/4])}.$$

**2.7. Случай левого края антипериодической лакуны.** Для определенности при некотором  $n \in \mathbb{N}$  фиксируем  $(\mu_{2n-1}, \nu_{2n}) \neq \emptyset$  – открытую антипериодическую лакуну в спектре оператора  $A$ ;  $[\nu_{2n-1}, \mu_{2n-1}]$  – фиксированная нечетная зона. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mu &:= \mu_{2n-1}; & \lambda(\xi) &:= E_{2n-1}(\xi), & \psi(\xi, x) &:= \psi_{2n-1}(\xi, x), \\ \varphi(\xi, x) &:= \varphi_{2n-1}(\xi, x) = e^{-i\xi x} \psi(\xi, x), & \xi &\in [0, 2\pi], & x &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Аналогично (2.31) справедливо представление

$$\lambda(\xi) = \mu - b_\mu(\xi - \pi)^2 + (\xi - \pi)^4 \gamma(\xi), \quad \xi \in [0, 2\pi], \quad b_\mu > 0. \quad (2.38)$$

Здесь функция  $\gamma(\xi)$  непрерывна на  $[0, 2\pi]$ .

Для функции  $\varphi(\xi, x)$  справедливо разложение вида (2.32), где  $\theta(\xi, \cdot)$  – вещественно аналитическая по  $\xi \in (0, 2\pi)$  функция со значениями в  $\tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$ . Функция  $\psi_0(x) := e^{i\pi x} \varphi_0(x)$  – нормированное вещественное решение краевой задачи вида (2.33) с заменой  $\nu$  на  $\mu$ . Функция  $\psi_1(x) := e^{i\pi x} \varphi_1(x)$  допускает представление (2.34), где  $\Lambda$  – решение задачи вида (2.35) с заменой  $\nu$  на  $\mu$ .

Фиксируем число  $\varkappa > 0$  такое, что  $\mu + \varkappa^2 < \nu_{2n}$ . Тогда для оператора  $A_\varepsilon$  точка  $\varepsilon^{-2}\mu + \varkappa^2$  заведомо принадлежит лакуне  $(\varepsilon^{-2}\mu, \varepsilon^{-2}\nu_{2n})$ , если  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Мы находим аппроксимацию резольвенты

$$(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\mu + \varkappa^2)I)^{-1} \text{ при малом } \varepsilon.$$

В  $L_2(\mathbb{R})$  введем эффективный оператор

$$A_\mu^0 := -b_\mu \frac{d^2}{dx^2}, \quad \operatorname{Dom} A_\mu^0 = H^2(\mathbb{R}), \quad (2.39)$$

и корректор

$$K_\mu(\varepsilon) := [\Lambda^\varepsilon] \frac{d}{dx} (A_\mu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\psi_0^\varepsilon] - [\psi_0^\varepsilon] (A_\mu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} \frac{d}{dx} [\Lambda^\varepsilon]. \quad (2.40)$$

Здесь  $b_\mu > 0$  – коэффициент при  $(\xi - \pi)^2$  в разложении (2.38); для  $b_\mu$  справедливо представление вида (2.16) с заменой  $\varphi_0$  на  $\psi_0$ ;  $\psi_0$  – вещественное нормированное решение задачи вида (2.33) с заменой  $\nu$  на  $\mu$ ;  $\Lambda$  – антипериодическое решение задачи вида (2.35) с заменой  $\nu$  на  $\mu$ .

Согласно [11, 12], в случае левого края антипериодической лакуны справедлива оценка вида (2.30) с заменой  $\varphi_0$  на  $\psi_0$ .

Сформулируем наш основной результат в случае левого края антипериодической лакуны.

**Теорема 2.10.** Пусть  $A_\varepsilon$  – самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R})$ , порожденный формой (2.18). Пусть выполнены предположения пункта 2.7. Пусть  $\mu_{2n-1} = \mu$  – левый край антипериодической лакуны в спектре оператора  $A$ . Пусть  $A_\mu^0$  – эффективный оператор (2.39) на краю лакуны  $\mu$ , а  $\psi_0$  – вещественное нормированное решение задачи вида (2.33) с заменой  $\nu$  на  $\mu$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедлива оценка

$$\left\| (\omega^\varepsilon)^{-1} \left( (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2} \mu + \varkappa^2) I)^{-1} + [\psi_0^\varepsilon] (A_\mu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\psi_0^\varepsilon] + \varepsilon K_\mu(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{R})} \leq C\varepsilon.$$

Здесь корректор  $K_\mu(\varepsilon)$  определен в (2.40). Постоянная  $C$  зависит от  $\varkappa$ ,  $\mu_{2n-2}$ ,  $\mu = \mu_{2n-1}$ ,  $\nu_{2n}$ ,  $b_\mu$ ,  $\|\gamma\|_{L_\infty}$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$ ,  $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$ ,  $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$ ,  $\|\theta\|_M$ ,  $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$ .

### §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведем доказательство основного результата для случая правого края периодической лакуны (теорема 2.6). Ниже мы следуем обозначениям, введенным в пунктах 2.2–2.4.

**3.1. Приближение резольвенты**  $(A - (\nu - \varkappa^2 \varepsilon^2) I)^{-1}$ . На протяжении пунктов 3.1, 3.2 предполагаются выполненными условия теоремы 2.6. Мы выводим теорему 2.6 с помощью масштабного преобразования из следующего ключевого результата.

**Теорема 3.1.** При  $0 < \varepsilon \leq 1$  выполнена оценка

$$\left\| A^{1/2} \left( (A - (\nu - \varkappa^2 \varepsilon^2)I)^{-1} - [\varphi_0] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0] - \Sigma(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C_0. \quad (3.1)$$

Здесь

$$\Sigma(\varepsilon) := [\Lambda] \frac{d}{dx} (A_\nu^0 + \varkappa^2 \varepsilon^2 I)^{-1} [\varphi_0] - [\varphi_0] (A_\nu^0 + \varkappa^2 \varepsilon^2 I)^{-1} \frac{d}{dx} [\Lambda]. \quad (3.2)$$

Постоянная  $C_0$  зависит от  $\varkappa, \mu_{2n}, \nu = \nu_{2n+1}, \mu_{2n+1}, \nu_{2n+2}, b_\nu, \|\gamma\|_{L_\infty}, \|g\|_{L_\infty}, \|\omega^{-1}\|_{L_\infty}, \|\varphi_0\|_{L_\infty}, \|\varphi_1\|_{L_\infty}, \|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}, \|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}, \|\theta\|_M, \|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_M$ .

Доказательство этой теоремы удобно разбить на несколько вспомогательных утверждений.

Обозначим оператор  $X_{2n+1}$  через  $X$ ; через  $\chi_\sigma(\xi)$  обозначим характеристическую функцию отрезка  $[-\sigma, \sigma]$ ,  $\sigma \in (0, \pi]$ ; через  $X_\sigma$  обозначим оператор  $[\chi_\sigma]X$ , действующий из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(-\pi, \pi)$ .

**Лемма 3.2.** При  $\sigma \in (0, \pi]$  и  $0 < \varepsilon \leq 1$  выполнена оценка

$$\left\| A^{1/2} \left( (A - (\nu - \varkappa^2 \varepsilon^2)I)^{-1} - X_\sigma^* [(\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C_1. \quad (3.3)$$

Постоянная  $C_1$  зависит от  $\sigma, \varkappa, \mu_{2n}, \nu = \nu_{2n+1}, \mu_{2n+1}, \nu_{2n+2}$ .

**Доказательство.** В силу представления (2.10) справедливо равенство

$$\begin{aligned} A^{1/2} (A - (\nu - \varkappa^2 \varepsilon^2)I)^{-1} &= A^{1/2} X_\sigma^* [(\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma \\ &+ X^* \left[ \lambda(\xi)^{1/2} (\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} (1 - \chi_\sigma(\xi)) \right] X \\ &+ A^{1/2} (A - (\nu - \varkappa^2 \varepsilon^2)I)^{-1} E_A([0, \mu_{2n}] \cup [\nu_{2n+2}, \infty)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем обозначение  $d_1(\sigma) := \min_{\sigma \leq |\xi| \leq \pi} (\lambda(\xi) - \nu) = \lambda(\sigma) - \nu > 0$ . Очевидно, норма второго слагаемого в правой части (3.4) не превосходит константы  $\mu_{2n+1}^{1/2} d_1(\sigma)^{-1}$ . Далее, в силу спектральной теоремы норма

третьего слагаемого оценивается через

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in [0, \mu_{2n}] \cup [\nu_{2n+2}, \infty)} \frac{x^{1/2}}{|x - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2|} \\ & \leq \sup_{x \in [0, \mu_{2n}] \cup [\nu_{2n+2}, \infty)} \left( \frac{1}{|x - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2|^{1/2}} + \frac{\nu^{1/2}}{|x - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2|} \right) \\ & \leq d_2^{-1/2} + \nu^{1/2} d_2^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь  $d_2 := \min\{\nu_{2n+2} - \nu, \nu - \varkappa^2 - \mu_{2n}\}$ . В итоге из (3.4) следует оценка (3.3) с постоянной  $C_1 = \mu_{2n+1}^{1/2} d_1(\sigma)^{-1} + d_2^{-1/2} + \nu^{1/2} d_2^{-1}$ .  $\square$

**Лемма 3.3.** *Положим*

$$\sigma_0 = \sigma_0(b_\nu, \|\gamma\|_{L_\infty}) := \min\{b_\nu^{1/2}(2\|\gamma\|_{L_\infty})^{-1/2}, 3\pi/4\}.$$

При всех  $\sigma \in (0, \sigma_0]$  и  $0 < \varepsilon \leq 1$  выполнена оценка

$$\begin{aligned} & \left\| A^{1/2} \left( X_\sigma^* [(\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - X_\sigma^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Постоянная  $C_2$  зависит от  $\mu_{2n+1}$ ,  $b_\nu$ ,  $\|\gamma\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** С учетом (2.11) левую часть неравенства (3.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \left\| X_\sigma^* \left[ \lambda(\xi)^{1/2} \left( (\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} - (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} \right) \right] X_\sigma \right\| \\ & = \left\| X_\sigma^* \left[ \lambda(\xi)^{1/2} \xi^4 \gamma(\xi) (\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} \right] X_\sigma \right\|. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при условии  $|\xi| \leq \sigma \leq \sigma_0$  выполнена оценка

$$\xi^4 |\gamma(\xi)| \leq \frac{1}{2} b_\nu \xi^2,$$

а потому  $\lambda(\xi) - \nu \geq \frac{1}{2} b_\nu \xi^2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left\| X_\sigma^* \left[ \lambda(\xi)^{1/2} \xi^4 \gamma(\xi) (\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} \right] X_\sigma \right\| \\ & \leq \max_{|\xi| \leq \sigma} \left| \lambda(\xi)^{1/2} \xi^4 \gamma(\xi) (\lambda(\xi) - \nu + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1} \right| \\ & \leq 2\mu_{2n+1}^{1/2} b_\nu^{-2} \|\gamma\|_{L_\infty}. \end{aligned}$$

В итоге получаем оценку (3.5) с постоянной  $C_2 = 2\mu_{2n+1}^{1/2} b_\nu^{-2} \|\gamma\|_{L_\infty}$ .  $\square$



Определим оператор  $X_\sigma^1$ , действующий из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(-\pi, \pi)$ :

$$X_\sigma^1 := [\chi_\sigma(\xi)]\Phi[\varphi_0(x)] - [\xi\chi_\sigma(\xi)]\Phi[\varphi_1(x)], \quad \sigma \in (0, \pi). \quad (3.6)$$

**Лемма 3.4.** При всех  $\sigma \in (0, \pi)$  и  $0 < \varepsilon \leq 1$  выполнено неравенство

$$\left\| A^{1/2} \left( X_\sigma^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma - (X_\sigma^1)^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma^1 \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C_3. \quad (3.7)$$

Постоянная  $C_3$  зависит от  $b_\nu$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$ ,  $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$ ,  $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$ ,  $\|\theta\|_{M_\sigma}$ ,  $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_{M_\sigma}$ ; норма  $\|\cdot\|_{M_\sigma}$  определена ниже в (3.9).

**Доказательство.** Отметим, что  $X_\sigma$ ,  $X_\sigma^1$  – интегральные операторы из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(-\pi, \pi)$  с ядрами

$$t_\sigma(\xi, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_\sigma(\xi) e^{-ix\xi} \overline{\varphi(\xi, x)},$$

$$t_\sigma^1(\xi, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_\sigma(\xi) e^{-ix\xi} (\varphi_0(x) - \xi\varphi_1(x)).$$

В силу (2.12) с учетом того, что функция  $\varphi_1(x)$  – чисто мнимая, имеем

$$\overline{\varphi(\xi, x)} = \varphi_0(x) - \xi\varphi_1(x) + \xi^2 \overline{\theta(\xi, x)}.$$

Следовательно, оператор  $X_\sigma - X_\sigma^1$  является интегральным оператором с ядром

$$t_\sigma(\xi, x) - t_\sigma^1(\xi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \xi^2 \chi_\sigma(\xi) e^{-ix\xi} \overline{\theta(\xi, x)}. \quad (3.8)$$

Ядро  $r_\sigma(\xi, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_\sigma(\xi) e^{-ix\xi}$  задает ограниченный оператор  $[\chi_\sigma]\Phi$ , нетривиально действующий из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(-\sigma, \sigma)$ . Функция  $\overline{\theta(\xi, x)}$  является мультипликатором на множестве ядер ограниченных интегральных операторов, переводящих  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(-\sigma, \sigma)$ ; см. [12]. Действительно, функция  $\theta(\xi, x)$  при  $\xi \in [-\sigma, \sigma]$  является аналитической по  $\xi$  со значениями в  $\tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$ . С учетом непрерывности вложения  $\tilde{\mathcal{H}}^1(0, 1)$  в  $L_\infty(0, 1)$  она также является аналитической по  $\xi$  со значениями в  $L_\infty(0, 1)$ . Поэтому, с учетом периодичности этой функции по  $x$ , выполнено

$$\|\theta\|_{M_\sigma} := \operatorname{ess-sup}_{x \in \mathbb{R}} \|\theta(\cdot, x)\|_{C^1([-\sigma, \sigma])} < \infty. \quad (3.9)$$

Мультипликаторная норма функции  $\overline{\theta(\xi, x)}$  оценивается через величину (3.9). Подробности по поводу мультипликаторов для ядер интегральных операторов можно найти в [22, §8,9].

Следовательно, ядро  $r_\sigma(\xi, x)\overline{\theta(\xi, x)}$  задает ограниченный оператор  $U_\sigma$  из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(-\sigma, \sigma)$ . Из (3.8) вытекает равенство

$$X_\sigma - X_\sigma^1 = [\xi^2 \chi_\sigma(\xi)] U_\sigma. \quad (3.10)$$

Далее, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} D_{\sigma, \varepsilon} &:= X_\sigma^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma - (X_\sigma^1)^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma^1 \\ &= (X_\sigma - X_\sigma^1)^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma + (X_\sigma^1)^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] (X_\sigma - X_\sigma^1). \end{aligned}$$

Вместе с (3.10) это дает

$$D_{\sigma, \varepsilon} = U_\sigma^* [\xi^2 (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma + (X_\sigma^1)^* [\xi^2 (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] U_\sigma. \quad (3.11)$$

Левую часть искомого неравенства (3.7) можно записать в виде  $\|A^{1/2} D_{\sigma, \varepsilon}\|$ . С учетом (3.11) имеем

$$\begin{aligned} \|A^{1/2} D_{\sigma, \varepsilon}\| &= \left\| g^{1/2} \frac{d}{dx} \omega^{-1} D_{\sigma, \varepsilon} \right\| \\ &\leq \|g\|_{L^\infty}^{1/2} \left\| \frac{d}{dx} \omega^{-1} U_\sigma^* [\xi^2 (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma \right\| \\ &\quad + \|g\|_{L^\infty}^{1/2} \left\| \frac{d}{dx} \omega^{-1} (X_\sigma^1)^* [\xi^2 (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] U_\sigma \right\|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Оператор  $[\xi^2 (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] U_\sigma$  ограничен: его норма не превосходит  $b_\nu^{-1} \|U_\sigma\|$ . Оператор  $\frac{d}{dx} \omega^{-1} (X_\sigma^1)^*$  представляет собой интегральный оператор с ядром

$$\begin{aligned} k_1(x, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi} \chi_\sigma(\xi) \\ &\times \left( \frac{d(\omega^{-1}(x)\varphi_0(x))}{dx} + \xi \frac{d(\omega^{-1}(x)\varphi_1(x))}{dx} + i\xi \omega^{-1}(x)(\varphi_0(x) + \xi\varphi_1(x)) \right). \end{aligned}$$

Его норма оценивается через

$$\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L^\infty} + \pi\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L^\infty} + \pi\|\omega^{-1}\varphi_0\|_{L^\infty} + \pi^2\|\omega^{-1}\varphi_1\|_{L^\infty}.$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части (3.12) не превосходит константы

$$\begin{aligned} \tilde{C}_3 = \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} + \pi\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty} \\ + \pi\|\omega^{-1}\varphi_0\|_{L_\infty} + \pi^2\|\omega^{-1}\varphi_1\|_{L_\infty}) b_\nu^{-1} \|U_\sigma\|. \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое. Норма оператора  $[\xi^2(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}]X_\sigma$  не превосходит  $b_\nu^{-1}$ . Оператор  $\frac{d}{dx}\omega^{-1}U_\sigma^*$  представляет собой интегральный оператор с ядром

$$k_2(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi} \chi_\sigma(\xi) \left( \frac{d(\omega^{-1}(x)\theta(\xi, x))}{dx} + i\xi\omega^{-1}(x)\theta(\xi, x) \right).$$

Сопряженный к нему оператор действует из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(-\sigma, \sigma)$  как интегральный оператор с ядром

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \chi_\sigma(\xi) \frac{d(\omega^{-1}(x)\overline{\theta(\xi, x)})}{dx} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi} \chi_\sigma(\xi) i\xi\omega^{-1}(x)\overline{\theta(\xi, x)}. \quad (3.13)$$

Ядро  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\xi\chi_\sigma(\xi) e^{-ix\xi}$  задает ограниченный интегральный оператор из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(-\sigma, \sigma)$ . Как уже отмечалось, функция  $\overline{\theta(x, \xi)}$  – мультипликатор на классе ядер таких операторов. Поэтому второе слагаемое в (3.13) является ядром ограниченного интегрального оператора, его норма контролируется через  $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$  и  $\|\theta\|_{M_\sigma}$ . Аналогично, ядро  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_\sigma(\xi) e^{-ix\xi}$  задает ограниченный интегральный оператор из  $L_2(\mathbb{R})$  в  $L_2(-\sigma, \sigma)$ . Функция  $\frac{d(\omega^{-1}(x)\theta(\xi, x))}{dx}$  является мультипликатором, поскольку в силу леммы 2.2, с учетом периодичности этой функции по  $x$ , выполнено

$$\left\| \frac{d(\omega^{-1}\theta)}{dx} \right\|_{M_\sigma} = \operatorname{ess-sup}_{x \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(\omega^{-1}(x)\theta(\cdot, x))}{dx} \right\|_{C^1([- \sigma, \sigma])} < \infty.$$

Поэтому первое слагаемое в (3.13) является ядром ограниченного интегрального оператора, его норма контролируется через  $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_{M_\sigma}$ . Таким образом, первое слагаемое в правой части (3.12) не превосходит константы  $\hat{C}_3$ , контролируемой через  $b_\nu$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\|\theta\|_{M_\sigma}$  и  $\|\frac{d}{dx}(\omega^{-1}\theta)\|_{M_\sigma}$ .

В итоге получаем искомое неравенство (3.7) с постоянной  $C_3 = \hat{C}_3 + \tilde{C}_3$ .  $\square$

**Лемма 3.5.** При всех  $\sigma \in (0, \pi)$  и  $0 < \varepsilon \leq 1$  выполнено неравенство

$$\left\| A^{1/2} \left( (X_\sigma^1)^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma^1 - [\varphi_0] (A_\nu^0 + \varkappa^2 \varepsilon^2 I)^{-1} [\varphi_0] - \Sigma(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C_4, \quad (3.14)$$

где оператор  $\Sigma(\varepsilon)$  определен в (3.2). Постоянная  $C_4$  зависит от  $\sigma$ ,  $b_\nu$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_0\|_{L_\infty}$ ,  $\|\varphi_1\|_{L_\infty}$ ,  $\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty}$ ,  $\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** В силу (3.6) справедливо представление

$$(X_\sigma^1)^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma^1 = J_{\sigma, \varepsilon}^{(1)} + J_{\sigma, \varepsilon}^{(2)} + J_{\sigma, \varepsilon}^{(3)} + J_{\sigma, \varepsilon}^{(4)}, \quad (3.15)$$

где

$$J_{\sigma, \varepsilon}^{(1)} = [\varphi_0] \Phi^* [\chi_\sigma(\xi) (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] \Phi [\varphi_0], \quad (3.16)$$

$$J_{\sigma, \varepsilon}^{(2)} = -[\varphi_0] \Phi^* [\chi_\sigma(\xi) \xi (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] \Phi [\varphi_1], \quad (3.17)$$

$$J_{\sigma, \varepsilon}^{(3)} = [\varphi_1] \Phi^* [\chi_\sigma(\xi) \xi (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] \Phi [\varphi_0], \quad (3.18)$$

$$J_{\sigma, \varepsilon}^{(4)} = -[\varphi_1] \Phi^* [\chi_\sigma(\xi) \xi^2 (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] \Phi [\varphi_1].$$

Оценим норму оператора  $A^{1/2} J_{\sigma, \varepsilon}^{(4)}$ :

$$\begin{aligned} \left\| A^{1/2} J_{\sigma, \varepsilon}^{(4)} \right\| &= \left\| g^{1/2} \frac{d}{dx} \omega^{-1} J_{\sigma, \varepsilon}^{(4)} \right\| \\ &\leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|[(\omega^{-1}\varphi_1)'] \Phi^* [\chi_\sigma(\xi) \xi^2 (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] \Phi [\varphi_1]\| \\ &\quad + \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|[\omega^{-1}\varphi_1] \Phi^* [\chi_\sigma(\xi) \xi^3 (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] \Phi [\varphi_1]\| \\ &\leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} b_\nu^{-1} \|\varphi_1\|_{L_\infty} (\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty} + \pi \|\omega^{-1}\varphi_1\|_{L_\infty}) =: \tilde{C}_4. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.15) вытекает оценка

$$\left\| A^{1/2} (X_\sigma^1)^* [(b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma^1 - A^{1/2} (J_{\sigma, \varepsilon}^{(1)} + J_{\sigma, \varepsilon}^{(2)} + J_{\sigma, \varepsilon}^{(3)}) \right\| \leq \tilde{C}_4. \quad (3.19)$$

Покажем теперь, что в пределах погрешности эта оценка сохранит силу, если в выражениях для  $J_{\sigma, \varepsilon}^{(1)}$ ,  $J_{\sigma, \varepsilon}^{(2)}$ ,  $J_{\sigma, \varepsilon}^{(3)}$  “устранить”  $\chi_\sigma(\xi)$ . Имеем

$$\begin{aligned} &\left\| A^{1/2} [\varphi_0] \Phi^* [(1 - \chi_\sigma(\xi)) (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] \Phi [\varphi_0] \right\| \\ &\leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|[(\omega^{-1}\varphi_0)'] \Phi^* [(1 - \chi_\sigma(\xi)) (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] \Phi [\varphi_0]\| \\ &\quad + \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|[\omega^{-1}\varphi_0] \Phi^* [(1 - \chi_\sigma(\xi)) \xi (b_\nu \xi^2 + \varkappa^2 \varepsilon^2)^{-1}] \Phi [\varphi_0]\| \\ &\leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} b_\nu^{-1} \|\varphi_0\|_{L_\infty} (\sigma^{-2} \|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} + \sigma^{-1} \|\omega^{-1}\varphi_0\|_{L_\infty}) =: \hat{C}_4'. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} & \left\| A^{1/2}[\varphi_0]\Phi^* [(1 - \chi_\sigma(\xi))\xi(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}] \Phi[\varphi_1] \right\| \\ & \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} b_\nu^{-1} \|\varphi_1\|_{L_\infty} (\sigma^{-1}\|(\omega^{-1}\varphi_0)'\|_{L_\infty} + \|\omega^{-1}\varphi_0\|_{L_\infty}) =: \widehat{C}_4'', \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} & \left\| A^{1/2}[\varphi_1]\Phi^* [(1 - \chi_\sigma(\xi))\xi(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}] \Phi[\varphi_0] \right\| \\ & \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} b_\nu^{-1} \|\varphi_0\|_{L_\infty} (\sigma^{-1}\|(\omega^{-1}\varphi_1)'\|_{L_\infty} + \|\omega^{-1}\varphi_1\|_{L_\infty}) =: \widehat{C}_4'''. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Сопоставляя (3.16)–(3.18), (3.19)–(3.22), приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \left\| A^{1/2}(X_\sigma^1)^* [(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}] X_\sigma^1 - A^{1/2} \left( \widetilde{J}_{\sigma,\varepsilon}^{(1)} + \widetilde{J}_{\sigma,\varepsilon}^{(2)} + \widetilde{J}_{\sigma,\varepsilon}^{(3)} \right) \right\| \\ & \leq C_4 = \widetilde{C}_4 + \widehat{C}_4' + \widehat{C}_4'' + \widehat{C}_4''', \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$\widetilde{J}_{\sigma,\varepsilon}^{(1)} = [\varphi_0]\Phi^* [(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}] \Phi[\varphi_0] = [\varphi_0](A_\nu^0 + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}[\varphi_0], \quad (3.24)$$

$$\widetilde{J}_{\sigma,\varepsilon}^{(2)} = -[\varphi_0]\Phi^* [\xi(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}] \Phi[\varphi_1] = -[\varphi_0](A_\nu^0 + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1} \frac{1}{i} \frac{d}{dx}[\varphi_1],$$

$$\widetilde{J}_{\sigma,\varepsilon}^{(3)} = [\varphi_1]\Phi^* [\xi(b_\nu\xi^2 + \varkappa^2\varepsilon^2)^{-1}] \Phi[\varphi_0] = [\varphi_1] \frac{1}{i} \frac{d}{dx} (A_\nu^0 + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1}[\varphi_0].$$

Учитывая равенство  $\varphi_1 = i\Lambda + i\beta\varphi_0$  и (3.2), убеждаемся, что

$$\widetilde{J}_{\sigma,\varepsilon}^{(2)} + \widetilde{J}_{\sigma,\varepsilon}^{(3)} = \Sigma(\varepsilon). \quad (3.25)$$

В итоге, из (3.23), (3.24), (3.25) вытекает искомая оценка (3.14).  $\square$

**Доказательство теоремы 3.1.** Из оценок (3.3), (3.5), (3.7) и (3.14) при  $\sigma = \sigma_0(b_\nu, \|\gamma\|_{L_\infty})$  вытекает искомое неравенство (3.1) с постоянной  $C_0 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ .  $\square$

**3.2. Доказательство теоремы 2.6.** Пусть  $T_\varepsilon$  – оператор масштабного преобразования, определенный в (1.21). В силу (1.22) справедливы соотношения

$$A_\varepsilon^{1/2} = \varepsilon^{-1} T_\varepsilon^* A^{1/2} T_\varepsilon, \quad (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* (A - (\nu - \varkappa^2\varepsilon^2)I)^{-1} T_\varepsilon.$$

Аналогично,

$$(A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* (A_\nu^0 + \varkappa^2\varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon.$$

Наконец, операторы (2.20) и (3.2) также связаны масштабным преобразованием:

$$K_\nu(\varepsilon) = \varepsilon T_\varepsilon^* \Sigma(\varepsilon) T_\varepsilon.$$

Из приведенных соотношений вытекает, что

$$\begin{aligned} & A_\varepsilon^{1/2} \left( (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] - \varepsilon K_\nu(\varepsilon) \right) \\ &= \varepsilon T_\varepsilon^* A^{1/2} \left( (A - (\nu - \varkappa^2 \varepsilon^2)I)^{-1} - [\varphi_0] (A_\nu^0 + \varkappa^2 \varepsilon^2 I)^{-1} [\varphi_0] - \Sigma(\varepsilon) \right) T_\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 3.1 с учетом унитарности оператора  $T_\varepsilon$  вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| A_\varepsilon^{1/2} \left( (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - [\varphi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] - \varepsilon K_\nu(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq C_0 \varepsilon \quad (3.26) \end{aligned}$$

при  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Из (3.26) сразу получаем, что при  $0 < \varepsilon \leq 1$  выполнена оценка

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{d}{dx} (\omega^\varepsilon)^{-1} \left( (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varepsilon K_\nu(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} C_0 \varepsilon. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Далее, в силу (2.21) и (2.25) имеем

$$\begin{aligned} & \left\| (\omega^\varepsilon)^{-1} \left( (A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\nu - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_0^\varepsilon] (A_\nu^0 + \varkappa^2 I)^{-1} [\varphi_0^\varepsilon] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varepsilon K_\nu(\varepsilon) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})} \leq \|\omega^{-1}\|_{L_\infty} (C^\circ + \mathfrak{C}_1) \varepsilon. \end{aligned}$$

Вместе с (3.27) это влечет искомую оценку (2.26) с постоянной

$$C = \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} C_0 + \|\omega^{-1}\|_{L_\infty} (C^\circ + \mathfrak{C}_1)$$

и завершает доказательство теоремы 2.6.

Теоремы 2.8, 2.9 и 2.10 доказываются тем же способом, что и теорема 2.6.

#### §4. ПРИЛОЖЕНИЕ: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2

Пусть выполнены предположения пункта 2.3. Нам известно, что при  $\xi \in (-\pi, \pi)$  функция  $\lambda(\xi)$  вещественно аналитична, а функция  $f(\xi, x) := \omega(x)^{-1} \psi(\xi, x)$  вещественно аналитична со значениями в  $H^1(0, 1)$ .

Фиксируем точку  $\xi_0 \in (-\pi, \pi)$ . Обозначим  $B_\delta(\xi_0) = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi - \xi_0| < \delta\}$ . При достаточно малом  $0 < \delta < \pi - |\xi_0|$  справедливы степенные разложения

$$\lambda(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m(\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \quad (4.1)$$

$$f(\xi, x) = \omega(x)^{-1} \psi(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)(\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0). \quad (4.2)$$

Ряд (4.1) сходится абсолютно, ряд (4.2) сходится по норме в  $H^1(0, 1)$ .

**Предложение 4.1.** *Ряд (4.2) сходится абсолютно по норме в  $H^1(0, 1)$ , т. е.*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|f_m\|_{H^1(0,1)} |\xi - \xi_0|^m < \infty, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0). \quad (4.3)$$

**Доказательство.** Фиксируем  $\xi \in B_\delta(\xi_0)$  и выберем точку  $\xi_1 \in B_\delta(\xi_0)$  такую, что  $|\xi - \xi_0| < |\xi_1 - \xi_0|$ . Поскольку ряд  $\sum_{m=0}^{\infty} f_m(x)(\xi_1 - \xi_0)^m$  сходится в  $H^1(0, 1)$ , то общий член ряда стремится к нулю:  $\|f_m\|_{H^1(0,1)} \times |\xi_1 - \xi_0|^m \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ . Следовательно, общий член ряда равномерно ограничен:  $\|f_m\|_{H^1(0,1)} |\xi_1 - \xi_0|^m \leq c = c(\xi_0, \xi_1)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Положим  $q = \frac{|\xi - \xi_0|}{|\xi_1 - \xi_0|} < 1$ . Тогда

$$\|f_m\|_{H^1(0,1)} |\xi - \xi_0|^m = \|f_m\|_{H^1(0,1)} |\xi_1 - \xi_0|^m q^m \leq c q^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, ряд (4.3) мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, а потому сходится.  $\square$

**Следствие 4.2.** *Функция  $\frac{d}{dx} f(\xi, x) = \frac{d}{dx} (\omega(x)^{-1} \psi(\xi, x))$  раскладывается в ряд*

$$\frac{d}{dx} f(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} f'_m(x)(\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \quad (4.4)$$

*абсолютно сходящийся по норме в  $L_2(0, 1)$ .*

*Наша цель – усилить это утверждение и показать, что ряд (4.4) абсолютно сходится в  $L_\infty(0, 1)$ .*

**Предложение 4.3.** *Положим*

$$F(\xi, x) := \lambda(\xi) f(\xi, x) = \lambda(\xi) \omega(x)^{-1} \psi(\xi, x). \quad (4.5)$$

Тогда имеет место разложение

$$F(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(x)(\xi - \xi_0)^m, \quad F_m(x) = \sum_{l=0}^m \lambda_{m-l} f_l(x), \quad \xi \in B_\delta(\xi_0). \quad (4.6)$$

Ряд (4.6) сходится абсолютно по норме в  $H^1(0, 1)$ , при этом

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|F_m\|_{H^1(0,1)} |\xi - \xi_0|^m \leq \left( \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| |\xi - \xi_0|^j \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \|f_l\|_{H^1(0,1)} |\xi - \xi_0|^l \right), \\ \xi \in B_\delta(\xi_0). \quad (4.7)$$

**Доказательство.** Рассмотрим ряд  $\sum_{m=0}^{\infty} F_m(x)(\xi - \xi_0)^m$ , где  $F_m(x) = \sum_{l=0}^m \lambda_{m-l} f_l(x)$ . Абсолютная сходимость этого ряда в  $H^1(0, 1)$  вместе с оценкой (4.7) следует из выкладки

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|F_m\|_{H^1(0,1)} |\xi - \xi_0|^m \leq \sum_{m=0}^{\infty} |\xi - \xi_0|^m \sum_{l=0}^m |\lambda_{m-l}| \|f_l\|_{H^1(0,1)} \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} |\xi - \xi_0|^{m-l} |\lambda_{m-l}| |\xi - \xi_0|^l \|f_l\|_{H^1(0,1)} \\ = \left( \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j| |\xi - \xi_0|^j \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} \|f_l\|_{H^1(0,1)} |\xi - \xi_0|^l \right) < \infty.$$

Далее, поскольку  $H^1(0, 1)$  непрерывно вложено в  $C([0, 1])$ , то ряд  $\sum_{m=0}^{\infty} F_m(x)(\xi - \xi_0)^m$  абсолютно сходится в  $C([0, 1])$ , а значит, сходится в каждой точке. При фиксированных  $x$  и  $\xi$  вычислим сумму (числового) ряда:

$$\sum_{m=0}^{\infty} F_m(x)(\xi - \xi_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (\xi - \xi_0)^m \sum_{l=0}^m \lambda_{m-l} f_l(x) \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} (\xi - \xi_0)^{m-l} \lambda_{m-l} (\xi - \xi_0)^l f_l(x) \\ = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j (\xi - \xi_0)^j \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} f_l(x) (\xi - \xi_0)^l \right) = \lambda(\xi) f(\xi, x) = F(\xi, x).$$

Мы учли соотношения (4.1), (4.2) и (4.5).  $\square$



Воспользуемся уравнением вида (2.9) для функции  $\psi(\xi, x)$ :

$$-\omega(x)^{-1} \frac{d}{dx} g(x) \frac{d}{dx} \omega(x)^{-1} \psi(\xi, x) = \lambda(\xi) \psi(\xi, x), \quad 0 < x < 1.$$

С учетом обозначений  $f(\xi, x) = \omega(x)^{-1} \psi(\xi, x)$  и (4.5) перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d}{dx} g(x) \frac{d}{dx} f(\xi, x) = -\omega^2(x) F(\xi, x), \quad 0 < x < 1. \quad (4.8)$$

Поскольку функция  $F(\xi, x)$  непрерывна по  $x$ , а  $\omega(x)$  ограничена, то правая часть в (4.8) принадлежит  $L_\infty(0, 1)$  при фиксированном  $\xi$ . Следовательно, функция

$$G(\xi, x) := g(x) \frac{d}{dx} f(\xi, x) = g(x) \frac{d}{dx} \omega(x)^{-1} \psi(\xi, x) \quad (4.9)$$

абсолютно непрерывна по  $x$ .

**Предложение 4.4.** *Функция (4.9) допускает разложение в ряд*

$$G(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(x) (\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0),$$

абсолютно сходящийся по норме в  $C([0, 1])$ .

**Доказательство.** В силу следствия 4.2 функция (4.9) раскладывается в ряд

$$G(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(x) (\xi - \xi_0)^m, \quad G_m(x) = g(x) f'_m(x), \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \quad (4.10)$$

абсолютно сходящийся в  $L_2(0, 1)$ . Мы стремимся показать, что этот ряд абсолютно сходится в  $C([0, 1])$ .

Поскольку функция  $G(\xi, x)$  абсолютно непрерывна (по  $x$ ) и в силу (4.8) выполнено  $\frac{d}{dx} G(\xi, x) = -\omega^2(x) F(\xi, x)$ , то

$$G(\xi, x) = G(\xi, 0) - \int_0^x \omega^2(t) F(\xi, t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad \xi \in (-\pi, \pi). \quad (4.11)$$

Следовательно,

$$G(\xi, 0) = G(\xi, x) + \int_0^x \omega^2(t) F(\xi, t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad \xi \in (-\pi, \pi).$$

При  $\xi \in B_\delta(\xi_0)$  первое слагаемое справа раскладывается в ряд (4.10), абсолютно сходящийся в  $L_2(0, 1)$ . Из предложения 4.3 следует, что второе слагаемое также раскладывается в ряд

$$\int_0^x \omega^2(t)F(\xi, t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \int_0^x \omega^2(t)F_m(t) dt \right) (\xi - \xi_0)^m, \quad x \in [0, 1], \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \quad (4.12)$$

который абсолютно сходится в  $C([0, 1])$  (и, тем более, в  $L_2(0, 1)$ ). Положим  $B_m(x) := G_m(x) + \int_0^x \omega^2(t)F_m(t) dt$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ . Мы показали, что

$$G(\xi, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x)(\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \quad (4.13)$$

где ряд абсолютно сходится в  $L_2(0, 1)$ . Но левая часть в (4.13) не зависит от  $x$ , а потому и коэффициенты  $B_m(x)$  не зависят от  $x$ .

Действительно, при  $\xi = \xi_0$  из (4.13) следует, что коэффициент  $B_0$  равен  $G(\xi_0, 0)$ , а потому не зависит от  $x$ . С учетом этого перепишем (4.13) в виде

$$G(\xi, 0) = G(\xi_0, 0) + (\xi - \xi_0) \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x)(\xi - \xi_0)^{m-1}.$$

Отсюда получаем, что коэффициент  $B_1$  равен  $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{G(\xi, 0) - G(\xi_0, 0)}{\xi - \xi_0}$ , а потому не зависит от  $x$ . По индукции легко проверить, что все коэффициенты  $B_m$  не зависят от  $x$ . Тогда равенство (4.13) превращается в

$$G(\xi, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \quad (4.14)$$

где ряд абсолютно сходится.

Возвращаясь к (4.11) и применяя разложения (4.12) и (4.14), получаем

$$G(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( B_m - \int_0^x \omega^2(t)F_m(t) dt \right) (\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0),$$

где ряд абсолютно сходится в  $C([0, 1])$ . Сопоставляя это с (4.10), получаем соотношения  $G_m(x) = B_m - \int_0^x \omega^2(t) F_m(t) dt$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ , и абсолютную сходимость ряда (4.10) в  $C([0, 1])$ .  $\square$

**Доказательство леммы 2.2.** Из (4.9) и предложения 4.4 вытекает, что функция  $\frac{d}{dx} f(\xi, x) = \frac{d}{dx} (\omega(x)^{-1} \psi(\xi, x))$  раскладывается в ряд

$$\frac{d}{dx} (\omega(x)^{-1} \psi(\xi, x)) = \sum_{m=0}^{\infty} g(x)^{-1} G_m(x) (\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \quad (4.15)$$

абсолютно сходящийся по норме в  $L_\infty(0, 1)$ .

Вспомним, что  $\varphi(\xi, x) = e^{-i\xi x} \psi(\xi, x)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\omega(x)^{-1} \varphi(\xi, x)) &= e^{-i\xi x} \frac{d}{dx} (\omega(x)^{-1} \psi(\xi, x)) - i\xi e^{-i\xi x} \omega(x)^{-1} \psi(\xi, x) \\ &= e^{-i\xi x} H(\xi, x). \end{aligned} \quad (4.16)$$

В силу (4.2) и (4.15) функция

$$H(\xi, x) := \frac{d}{dx} (\omega(x)^{-1} \psi(\xi, x)) - i\xi \omega(x)^{-1} \psi(\xi, x)$$

раскладывается в ряд

$$H(\xi, x) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x) (\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \quad (4.17)$$

абсолютно сходящийся в  $L_\infty(0, 1)$ . Здесь

$$\begin{aligned} H_0(x) &= g(x)^{-1} G_0(x) - i\xi_0 f_0(x), \\ H_m(x) &= g(x)^{-1} G_m(x) - i\xi_0 f_m(x) - i f_{m-1}(x), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Функцию  $e^{-i\xi x}$  также представим в виде абсолютно сходящегося ряда

$$e^{-i\xi x} = e^{-i\xi_0 x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-ix)^m}{m!} (\xi - \xi_0)^m.$$

Покажем, что функция  $Q(\xi, x) := e^{-i\xi x} H(\xi, x)$  раскладывается в ряд

$$\begin{aligned} Q(\xi, x) &= \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x) (\xi - \xi_0)^m, \\ Q_m(x) &= e^{-i\xi_0 x} \sum_{l=0}^m H_{m-l}(x) \frac{(-ix)^l}{l!}, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0), \end{aligned} \quad (4.18)$$

абсолютно сходящийся в  $L_\infty(0, 1)$ .

Действительно, при  $\xi \in B_\delta(\xi_0)$  ряд  $\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x)(\xi - \xi_0)^m$  абсолютно сходится в  $L_\infty(0, 1)$ , поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \|Q_m\|_{L_\infty} |\xi - \xi_0|^m &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \|H_{m-l}\|_{L_\infty} \frac{1}{l!} |\xi - \xi_0|^m \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} \|H_{m-l}\|_{L_\infty} |\xi - \xi_0|^{m-l} \frac{1}{l!} |\xi - \xi_0|^l \\ &= \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} |\xi - \xi_0|^l \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \|H_j\|_{L_\infty} |\xi - \xi_0|^j \right) < \infty \end{aligned}$$

в силу абсолютной сходимости ряда (4.17) в  $L_\infty(0, 1)$ . Тогда ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x)(\xi - \xi_0)^m$$

абсолютно сходится при почти всех  $x \in (0, 1)$ . В точках сходимости, очевидно, выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x)(\xi - \xi_0)^m &= e^{-i\xi_0 x} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m H_{m-l}(x) \frac{(-ix)^l}{l!} (\xi - \xi_0)^m \\ &= e^{-i\xi_0 x} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} H_{m-l}(x) (\xi - \xi_0)^{m-l} \frac{(-ix)^l}{l!} (\xi - \xi_0)^l \\ &= e^{-i\xi_0 x} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-ix)^l}{l!} (\xi - \xi_0)^l \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} H_j(x) (\xi - \xi_0)^j \right) = e^{-i\xi x} H(\xi, x). \end{aligned}$$

Сопоставляя (4.16) и (4.18), убеждаемся, то функция

$$\frac{d}{dx} (\omega(x)^{-1} \varphi(\xi, x))$$

раскладывается в ряд

$$\frac{d}{dx} (\omega(x)^{-1} \varphi(\xi, x)) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m(x)(\xi - \xi_0)^m, \quad \xi \in B_\delta(\xi_0),$$

абсолютно сходящийся по норме  $L_\infty(0, 1)$ . Ввиду произвола в выборе точки  $\xi_0 \in (-\pi, \pi)$  это означает, что функция  $\frac{d}{dx}(\omega(x)^{-1}\varphi(\xi, x))$  является вещественно аналитической по  $\xi \in (-\pi, \pi)$  со значениями в  $L_\infty(0, 1)$ .  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*. — Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., 1978.
2. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
3. В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.
4. M. Sh. Birman, T. A. Suslina, *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, In: Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.
5. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*. — Алгебра и анализ **15**, No. 5 (2003), 1–108.
6. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*. — Алгебра и анализ **17**, No. 6 (2005), 1–104.
7. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d)$* . — Алгебра и анализ **18**, No. 6 (2006), 1–130.
8. В. В. Жиков, *Об операторных оценках в теории усреднения*. — Докл. РАН **403**, No. 3 (2005), 305–308.
9. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, *On operator estimates for some problems in homogenization theory*. — Russ. J. Math. Phys. **12**, No. 4 (2005), 515–524.
10. В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, *Об операторных оценках в теории усреднения*. — Успехи матем. наук. **71**, No. 3 (2016), 27–122.
11. М. Ш. Бирман, *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны*. — Алгебра и анализ **15**, No. 4 (2003), 61–71.
12. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи кра внутренней лакуны*. — Проблемы математического анализа **41** (2009), 127–141.
13. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны*. — Записки научных семинаров ПОМИ **318** (2004), 60–74.
14. Т. А. Суслина, А. А. Харин, *Усреднение с учетом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*. — Проблемы математического анализа **59** (2011), 177–193.

15. A. R. Akhmatova, E. S. Aksenova, V. A. Sloushch, T. A. Suslina, *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap*. — Complex Variables and Elliptic Equations **67**, No. 3 (2022), 523–555.
16. W. Kirsch, B. Simon, *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators*. — J. Funct. Anal. **75**, No. 2 (1987), 396–410.
17. M. Sh. Birman, T. A. Suslina, *Two-dimensional periodic Pauli operator. The effective masses at the lower edge of the spectrum*, In: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 108, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 13–31.
18. M. Sh. Birman, *The discrete spectrum in gaps of the perturbed periodic Schrödinger operator. I. Regular perturbations*, In: Boundary Value Problems, Schrödinger Operators, Deformation Quantization, Math. Top., vol. 8. Adv. Partial Differential Equations, Akademie Verlag, Berlin, 1995, pp. 334–352.
19. М. Ш. Бирман, *Дискретный спектр в лакунах возмущенного периодического оператора Шрёдингера. II. Нерегулярные возмущения*. — Алгебра и анализ **9**, No. 6 (1997), 62–89.
20. Э. Ч. Титчмарш, *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, том 2, Изд-во ИЛ, М., 1961.
21. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
22. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Оценки сингулярных чисел интегральных операторов*. — Успехи мат. наук **32**, No. 1 (1977), 17–84.

Mishulovich A. A., Sloushch V. A., Suslina T. A. Homogenization of a one-dimensional periodic elliptic operator at the edge of a spectral gap: operator estimates in the energy norm.

In  $L_2(\mathbb{R})$ , we consider an elliptic second-order differential operator  $A_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , given by  $A_\varepsilon = -\frac{d}{dx}g(x/\varepsilon)\frac{d}{dx} + \varepsilon^{-2}p(x/\varepsilon)$ , with periodic coefficients. For small  $\varepsilon$ , we study the behavior of the resolvent of  $A_\varepsilon$  in a regular point close to the edge of a spectral gap. We obtain approximation of this resolvent in the “energy” norm with error  $O(\varepsilon)$ . Approximation is described in terms of the spectral characteristics of the operator at the edge of the gap.

С.-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7/9,  
199034, С.-Петербург, Россия

*E-mail:* st062829@student.spbu.ru

*E-mail:* v.slouzh@spbu.ru

*E-mail:* t.suslina@spbu.ru

Поступило 29 октября 2022 г.