Алгоритм сужения множества Парето при помощи набора квантов нечеткой информации*

В. Д. Ногин

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Рассматривается задача многокритериального выбора с числовой векторной функцией на подмножестве векторного пространства в предположении, что ЛПР в процессе выбора использует нечеткое отношение предпочтения. Считается известной информация об этом отношении в виде конечного набора нечетких квантов. Формулируется алгоритм, который за счет этой информации позволяет сузить множество Парето в задаче многокритериального выбора и, тем самым, облегчить окончательный выбор. Работа алгоритма иллюстрируется числовым примером.

Ключевые слова: нечеткие множества, многокритериальный выбор, сужение множества Парето, кванты нечеткой информации.

DOI 10.14357/20718594220401

Введение

Задача многокритериального выбора состоит в отыскании в общем случае «наилучшего» подмножества допустимых вариантов с учетом заданных числовых критериев и фрагментарных сведений об отношении предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Этими сведениями являются так называемые кванты информации. Наличие кванта информации означает готовность ЛПР к определенному компромиссу, состоящему в согласии пойти на некоторые потери по менее важным критериям ради получения определенного выигрыша по более важным.

Для решения задачи многокритериального выбора был предложен и обоснован аксиоматический подход к сужению множества Парето, развиваемый автором [1] на протяжении длительного времени. Этот подход допускает, что отношение предпочтения ЛПР может быть и нечетким; такого рода ситуация отвечает широкому кругу прикладных задач. Были получены результаты, которые позволяют строить оценку сверху для неизвестного множества «наилучших» вариантов при наличии определенных квантов нечеткой информации. В данной работе восполняется один из «пробелов» построенной аксиоматической теории, а именно, предлагается алгоритм, который указывает путь построения оценки сверху для множества «наилучших» вариантов с использованием *произвольного* конечного набора непротиворечивой информации о нечетком отношении ЛПР. Этот алгоритм можно рассматривать как развитие геометрического алгоритма учета набора квантов четкой информации, предложенного автором ранее [2].

1. Задача нечеткого многокритериального выбора

Пусть на универсальном множестве U задано нечеткое множество A с функцией принадлежности $\lambda_A : U \to [0, 1]$. Множество

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-07-00298).

✉ *Ногин Владимир Дмитриевич. E-mail*: *noghin@gmail.com*

$\text{supp}(X)=\{x\in A\,|\,\lambda_X(x)>0\}$ именуют носителем нечеткого множества *A*. Далее будем использовать стандартные операции объединения, пересечения и дополнения нечетких множеств [3, 4].

Нечеткое множество, заданное на R^m, с функцией принадлежности η называют конусом, если для любых $x\in R^m$ и $\alpha>0$ верно $\eta(\alpha\cdot x)=\eta(x)$.

Нечеткое бинарное отношение на множестве *U* с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$ называют:

- транзитивным, если $\mu(x,z)\geqq\min\{\mu(x,y);\mu(y,z)\}$ для всех $x,y,z\in U$;
- асимметричным, если $\mu(x,y)>0\Rightarrow\mu(y,x)=0$ для всех $x,y\in U$;
- конусным отношением на пространстве R^m, если найдется такой нечеткий конус $\eta:R^m\to[0,1]$, что $\mu(x,y)=\eta(x-y)$ для всех $x,y\in R^m$;
- инвариантным относительно линейного положительного преобразования на R^m, если $\mu(\alpha\cdot x+c,\alpha\cdot y+c)=\mu(x,y)$ верно для всех $x,y,c\in R^m$ и любого $\alpha>0$.

Для асимметричного бинарного отношения с функцией принадлежности $\mu(\cdot,\cdot)$, заданного на множестве $Y\subset R^m$, нечеткое множество недоминируемых векторов $Ndom(Y)$ с функцией принадлежности λ_Y^N, определяется равенством [5]:

$$\lambda_Y^N(y)=1-\sup_{z\in Y}\mu(z,y)\quad \text{для всех } y\in Y.$$

Обозначим X (четкое) множество возможных вариантов. Пусть имеются m числовых функций $f_1,f_2,...,f_m$, заданных на множестве *X,* с помощью которых ЛПР оценивает возможные варианты. Они образуют векторный критерий $f=(f_1,f_2,...,f_m)$, принимающий значения в *m*-мерном арифметическом векторном пространстве R^m. Каждому варианту $x\in X$ однозначно отвечает некоторый вектор $y=f(x)\in R^m$, характеризующий этот вариант. Множество всех возможных векторов есть $Y=f(X)$.

Предположим, что ЛПР не всегда имеет возможность однозначно решить, является ли один из двух сравниваемых вариантов (векторов) для него предпочтительнее другого. Именно такая ситуация, как правило, возникает, когда сравниваемые варианты (векторы) оцениваются с помощью нескольких критериев, поскольку по некоторым из них один вариант (вектор) может оказаться лучше другого, а по каким-то другим – хуже. Тем не менее, нередко, исходя их своих собственных предпочтений, ЛПР оказывается способным выбрать в качестве лучшего один из этих двух сравниваемых вариантов (векторов) и не выбрать другой, хотя его уверенность при таком выборе может оказаться менее 100%. В таких случаях оказывается удобным математический аппарат, основанный на нечетком отношении предпочтения.

По этой причине далее считается, что на множестве возможных вариантов X задано асимметричное нечеткое отношение предпочтения ЛПР с функцией принадлежности $\mu_X(\cdot,\cdot)$. В практике решения прикладных задач это отношение обычно полностью не известно. Фрагментарные сведения о нем будут учитываться в процессе принятия решений в виде так называемых квантов нечеткой информации, о чем пойдет речь ниже. Для вариантов $x',x''\in X$ число $\mu_X(x',x'')\in(0,1]$ интерпретируется как степень уверенности в том, что вариант x' предпочтительнее x'' (т.е. первый вариант доминирует второй). Иначе говоря, из двух вариантов x' и x'' ЛПР выберет первый и не выберет второй со степенью уверенности $\mu_X(x',x'')$.

Перечислим все элементы задачи нечеткого многокритериального выбора:

1) множество возможных вариантов *X*;
2) числовой векторный критерий *f,* определенный на множестве *X*;
3) нечеткое отношение предпочтения $\succ_X$ с функцией принадлежности $\mu_X(\cdot,\cdot)$, определенной на декартовом произведении $X\times X$ и принимающей значения в отрезке $[0,1]$.

Очевидно, при использовании нечеткой информации об отношении предпочтения ЛПР нелогично в общем случае ожидать четкого результата по завершению решения задачи выбора. Поэтому решением задачи нечеткого многокритериального выбора будем считать некоторое в общем случае нечеткое множество выбираемых вариантов $C(X)\subset X$, а его функцию принадлежности обозначим λ_X^C. Именно это множество (эта функция) подлежит нахождению в результате решения задачи выбора.

Указанную задачу многокритериального выбора можно сформулировать и в терминах векторов. С этой целью через $C(Y)$ обозначим нечеткое множество выбираемых векторов, функция принадлежности которого естественным образом сопрягается с функцией принадлежности нечеткого множества выбираемых вариантов:

$$\lambda_Y^C(y) = \begin{cases} \lambda_X^C(x), & \text{если} \quad y = f(x) \\ & \text{при} \quad \text{некотором} \quad x \in X; \\ 0, & \text{если} \quad y \in R^m \setminus Y. \end{cases}$$

Будем считать, что между множеством возможных вариантов и множеством соответствующих векторов имеется взаимно однозначное соответствие.

Функцией $\mu_X(\cdot,\cdot)$ индуцируется функция принадлежности $\mu_Y(\cdot,\cdot)$ нечеткого отношения предпочтения $\succ_Y$ на множестве векторов Y следующим образом:

$$\mu_Y(y, y') = \mu_X(x, x') \text{ для всех } x, x' \in \widetilde{X},$$

где $y = f(x), y' = f(x')$ и $\widetilde{X}$ – совокупность классов эквивалентности на X, порожденная отношением равенства на R^m.

Каждый класс эквивалентности состоит из вариантов, которым отвечает один и тот же возможный вектор критериального пространства. В свою очередь, можно говорить о том, что функция принадлежности нечеткого отношения предпочтения $\succ_Y$, заданного на Y, индуцирует функцию принадлежности нечеткого отношения предпочтения на множестве X.

В итоге задача нечеткого многокритериального выбора в терминах векторов включает два объекта: множество возможных векторов Y; нечеткое отношение предпочтения с функцией принадлежности $\mu_Y(\cdot,\cdot)$, заданной на множестве Y.

Сама задача нечеткого многокритериального выбора заключается в нахождении нечеткого множества выбираемых векторов $C(Y) \subset Y$ с функцией принадлежности μ_Y^C.

2. Аксиоматический подход к сужению множества Парето

Будем считать выполненными следующие четыре «разумные» аксиомы [1], которые накладывают определенные ограничения на поведение ЛПР в процессе принятия решений.

Аксиома 1. *Для всякой пары вариантов* $x', x'' \in X$, *для которых* $\mu_X(x', x'') = \mu^* \in (0,1]$, *справедливо неравенство* $\lambda_X^C(x'') \leqq 1 - \mu^*$.

Аксиома 2. *Нечеткое асимметричное отношение предпочтения* $\succ_Y$ *с функцией принадлежности* $\mu_Y(\cdot,\cdot)$ *(а значит, и с функцией принадлежности* $\mu_X(\cdot,\cdot)$*) является транзитивным и, кроме того, существует транзитивное отношение, функцию принадлежности которого обозначим* $\mu(\cdot,\cdot)$, *заданное на всем пространстве* R^m *и такое, что его сужение на* Y *совпадает с отношением предпочтения* $\mu_Y(\cdot,\cdot)$.

Говорят, что критерий f_i согласован с отношением предпочтения $\mu(\cdot,\cdot)$, если для любых векторов $y' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, ..., y_m)$ и $y'' = (y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y_m)$ из выполнения неравенства $y'_i > y''_i$ следует равенство $\mu(y', y'') = 1$.

Аксиома 3. *Каждый из критериев* $f_1, f_2, ..., f_m$ *согласован с отношением предпочтения* $\mu(\cdot,\cdot)$.

Аксиома 4. *Нечеткое отношение предпочтения* $\mu(\cdot,\cdot)$ *является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.*

Аксиомы 1–4 выделяют достаточно широкий класс задач, в которых отношение предпочтения ЛПР в общем случае является частичным. Тем самым, допускается возможность наличия пар несравнимых вариантов (векторов) по этому отношению. Установлено [1], что в условиях выполнения Аксиом 1–4 отношение предпочтения $\mu(\cdot,\cdot)$ является конусным с нечетким острым выпуклым конусом.

Для векторов $a, b \in R^m$ введем бинарное отношение (отношение Парето):

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geqq b_i \text{ для всех } i$$
$$\text{и, кроме того, } a \neq b.$$

Множество парето-оптимальных вариантов определяется равенством:

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует } x \in X, \text{ для которого } f(x) \geq f(x^*)\},$$

тогда как множество парето-оптимальных векторов – формулой:

$$P(Y) = f(P_f(X)) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует } y \in Y, \text{ для которого } y \geq y^*\}.$$

Функцию принадлежности множества парето-оптимальных векторов (характеристическую функцию этого множества) будем обозначать следующим образом:

$$\lambda_Y^P(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in P(Y); \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Свойства множества Парето подробно разобраны в [6].

Из Аксиомы 1 следует, что для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ имеет место включение $C(Y) \subset Ndom(Y)$. Таким образом, нечеткое множество недоминируемых векторов дает оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов. Более того, справедлив следующий результат.

Нечеткий принцип Эджворта-Парето [1]. *Пусть выполнены Аксиомы* 1–4. *Тогда для любого нечеткого множества выбираемых вариантов* $C(Y)$ *имеет место включение* $C(Y) \subset P(Y)$, *или, что то же самое, неравенство* $\lambda_Y^C(y) \leqq \lambda_Y^P(y)$ *выполняется для всех* $y \in Y$.

В соответствии с этим принципом ЛПР следует выбирать «наилучшие» векторы (варианты) только в пределах множества Парето. Оно представляет собой оценку сверху для $C(Y)$ (соответственно, для $C(X)$).

3. Кванты нечеткой информации и их непротиворечивость

Формализация сведений о нечетком отношении предпочтения для сужения множества Парето основана на следующем определении.

Определение 1 [1]. Говорят, что задан квант нечеткой информации со степенью уверенности $\mu^* \in (0,1]$, если для некоторого вектора

$$y' \in N^m = \{y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in R^m \mid y_i > 0, y_j < 0 \text{ при некоторых } i, j \in I\}$$

имеет место равенство $\mu(y', 0_m) = \mu^*$. Здесь $I = \{1, 2, ..., m\}$.

Для всякого вектора $y' \in N^m$ существуют две группы номеров критериев A и B ($A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$), такие, что $y'_i > 0$ для всех $i \in A$, $y'_j < 0$ для всех $j \in B$ и $y'_s = 0$ для всех $s \in I \setminus (A \cup B)$.

В случае, когда имеется квант нечеткой информации говорят, что группа критериев A более важна (более значима), чем группа критериев B с параметрами $w_i = y_i, w_j = -y_j$ при всех $i \in A, j \in B$ и степенью уверенности μ^*. В случае, когда оба множества A и B являются одноэлементными, т.е. $A = \{i\}, B = \{j\}$, говорят, что i-й критерий f_i важнее j-го f_j.

Тот факт, что для ЛПР группа критериев A важнее группы B означает готовность этого ЛПР пойти на компромисс, состоящий в том, что оно согласно потерять не более, чем w_j единиц по менее важным критериям группы B, рассчитывая при этом приобрести прибавки не менее, чем в w_i единиц по более важным критериям группы A. При этом склонность ЛПР к компромиссу составляет величину, равную $\mu^* \cdot 100\%$. Параметр $\mu^* \in (0,1]$ «регулирует» уровень неопределенности, связанной с указанным компромиссом, – чем больше этот параметр, тем меньше величина неопределенности. В случае $\mu^* = 1$ неопределенность как таковая исчезает, что соответствует абсолютной готовности ЛПР к указанному компромиссу.

Например, если $\mu((1,-2), 0_2) = 0.8$, то первый критерий важнее второго с параметрами $w_1 = 1, w_2 = 2$ и степенью уверенности 0.8.

В частном случае $\mu^* = 1$ имеем дело с квантом четкой информации. Изучению вопросов учета подобных квантов при решении задач многокритериального выбора посвящена монография [1].

Следующий результат показывает, каким образом следует использовать один квант нечеткой информации для осуществления сужения множества Парето.

Теорема 1 [1]. *Пусть задан квант нечеткой информации с группами критериев* A, B, *положительными параметрами* w_i, w_j *для всех* $i \in A, j \in B$ *и степенью уверенности* $\mu^* \in (0,1]$. *Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *с функцией принадлежности* $\lambda_Y^C(\cdot)$ *имеют место неравенства*

$$\lambda_Y^C(y) \leqq \lambda^M(y) \leqq \lambda_Y^P(y) \text{ для всех } y \in Y, \quad (1)$$

где $\lambda^M(\cdot)$ *– функция принадлежности, определяемая равенствами:*

$$\lambda^M(y) = 1 - \sup_{z \in Y} \varsigma(z, y) \quad \text{для всех } y \in Y, \quad (2)$$

$$\varsigma(z,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } z - y \in R_+^m, \\ \mu^*, & \text{если } \hat{z} - \hat{y} \in R_+^p, \quad z - y \notin R_+^m, \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{для всех } y, z \in Y,$$

причем $R_+^p = \{y \in R^p \mid y \geq 0_p\}$, $p = m - |B| + |A| \cdot |B|$ *и вектор* $\hat{y}$ *(а также* $\hat{z}$*) составлен из компонент* $y_i, i \in I \setminus B$ *(соответственно,* $z_i, i \in I \setminus B$*), тогда как остальные его компоненты имеют вид* $w_j y_i + w_i y_j$ *(соответственно,* $w_j z_i + w_i z_j$*) при всех* $i \in A, j \in B$.

Благодаря принятым выше аксиомам, нечеткое отношение предпочтения с функцией принадлежности μ является конусным с нечетким острым выпуклым *m*-мерным конусом [1]. Аналогичными свойствами обладают отношение Парето $\geq$ и нечеткое отношение, определяемое функцией принадлежности (3). Кроме того, заметим, что нечеткое множество с функцией принадлежности (2), которое согласно (1) дает результирующую оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов $C(Y)$, является не чем иным, как нечетким множеством недоминируемых векторов, порожденным отношением (3).

Пусть задан набор квантов нечеткой информации, т.е. совокупность векторов $u^i \in N^m$ вместе с набором чисел $\mu_i \in (0,1]$, обладающие тем свойством, что $\mu(u^i, 0_m) = \mu_i$, $i = 1,2,...,k$. Обозначим через $\mu_{11},...,\mu_{1k_1}; \mu_{21},...\mu_{2k_2}; ...; \mu_{l1},...,\mu_{lk_l}$ перестановку чисел $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$, которая представляет их в порядке убывания, т.е.

$$\begin{aligned} 1 \geqq \mu_{11} = ... = \mu_{1k_1} > \mu_{21} = ... \\ = \mu_{2k_2} > ... > \mu_{l1} = ... = \mu_{lk_l} > 0 \end{aligned}, \quad (4)$$

где $k_1 + ... + k_l = k$, $1 \leqq l \leqq k$.

Согласно введенному обозначению, имеет место следующее взаимно однозначное соответствие: каждому вектору u^i отвечает определенное положительное число μ_{rs} $(r \in \{1,2,...,l\}, s \in \{1,2,...,k_r\})$, такое, что $\mu_i = \mu_{rs}$. Обратно, каждому указанному числу μ_{rs} соответствует некоторый вектор из набора $\{u^1, u^2, ..., u^k\}$.

Пусть e^i – единичный вектор пространства R^m, $i = 1,2,...,m$. Введем четкие конусы K_h, $h = 1,2,...,l$, порождаемые единичными векторами $e^1, e^2, ..., e^m$ вместе со всеми теми векторами $u^1, u^2, ..., u^k \in N^m$, которым соответствуют числа μ_i вида $\mu_i = \mu_{rs}$ при некоторых *r* и *s*, причем $\mu_i \geqq \mu_{h1}$. Очевидно, введенные конусы удовлетворяют включениям $K_1 \subset K_2 \subset ... \subset K_l$.

Следующее определение вводит понятие непротиворечивого набора квантов нечеткой информации.

Определение 2 [1]. *Набор векторов* $u^1, u^2, ..., u^k \in N^m$ *вместе с набором чисел* $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k \in (0,1]$ *задают непротиворечивый набор квантов нечеткой информации, если существует такое нечеткое отношение предпочтения* $\mu(\cdot,\cdot)$*, удовлетворяющее Аксиомам* 1–4, *что* $\mu(u^i, 0_m) = \mu_i$, $i = 1,2,...,k$.

Пусть *A* – числовая матрица размера $m \times n$. Условимся говорить, что однородная система линейных уравнений $A \cdot z = 0_m$ имеет *N*-решение, если существует вектор $z^* \geq 0_n$, при котором справедливо равенство $A \cdot z^* = 0_m$.

Теорема 2 [1]. *Для того чтобы совокупность векторов* $u^1, u^2, ..., u^k \in N^m$ *вместе с набором чисел* $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k \in (0,1]$ *задавали непротиворечивый набор квантов нечеткой информации необходимо и достаточно, чтобы система линейных уравнений*

$$\lambda_1 e^1 + ... + \lambda_m e^m + \xi_1 u^1 + ... + \xi_k u^k = 0_m \quad (5)$$

относительно $\lambda_1, ..., \lambda_m, \xi_1, ..., \xi_k$ *не имела N-решений и, кроме того, каждый конус* K_h, $h = 1,...,l-1$, *не содержал ни одного вектора* u^i, *которому соответствует такое число* μ_i, *что* $\mu_i < \mu_{h1}$.

4. Алгоритм построения двойственного конуса и учет набора квантов четкой информации

Прежде чем перейти к вопросу использования квантов нечеткой информации для сужения множества Парето, приведем сведения, необходимые для его рассмотрения.

Пусть $a^1, a^2, ..., a^{m+k} \in R^m$ – конечный набор векторов. Выпуклый конус, порожденный указанными векторами, обозначим $K = cone\{a^1, a^2, ..., a^{m+k}\}$. Он представляет собой совокупность всех неотрицательных линейных комбинаций векторов $a^1, a^2, ..., a^{m+k}$. Будем считать, что этот конус острый и его размерность равна m. Напомним, что размерность конуса совпадает с размерностью минимального подпространства, содержащего данный конус.

Двойственный конус [7] по отношению к конусу K обозначим символом K^o. Он определяется равенством:

$$K^o = \{x \in R^m \,|\, \langle x, y\rangle \geqq 0 \text{ для всех } y \in K\}.$$

Двойственный конус для многогранного (полиэдрального) конуса так же является многогранным конусом, а значит, порождается некоторым конечным набором векторов. Известно также, что двойственный конус для острого m-мерного конуса сам является острым и m-мерным [7].

Было установлено [1], что для учета произвольного конечного набора квантов четкой информации необходимо иметь в распоряжении алгоритм, который для произвольного заданного конечного набора векторов $a^1, a^2, ..., a^{m+k}$, порождающих острый выпуклый m-мерный конус K, строит минимальный набор векторов $b^1, b^2, ..., b^n$, порождающих двойственный конус K^o, т.е. таких векторов, что $K^o = cone\{b^1, b^2, ..., b^n\}$. На геометрическом языке сформулированная задача заключается в построении минимального набора нормальных внутренних векторов для всех гиперплоскостей, образующих $(m-1)$-мерные грани конуса K [8].

Имея алгоритм построения двойственного конуса, можно для любого конечного непротиворечивого набора квантов четкой информации получать формулы для пересчета старого векторного критерия и формирования нового, при помощи которого строится оценка сверху для неизвестного множества выбираемых вариантов (векторов). Будем считать, что на вход такого алгоритма подается набор векторов $a^1, a^2, ..., a^{m+k}$, $k \geq 1$, порождающих m-мерный острый многогранный конус в пространстве R^m, а на выходе (в памяти) образуется новый набор векторов $b^1, b^2, ..., b^n$, порождающих двойственный конус в том же пространстве. Обоснование корректности приводимого алгоритма можно найти в [1]. Перейдем к его описанию.

Шаг 1. Открыть цикл по переменной i от 1 до C_{m+k}^{m-1} генерирования всех возможных поднаборов из $m-1$ векторов набора $a^1, a^2, ..., a^{m+k}$.

Шаг 2. Если текущий i-й поднабор $a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}$, выбранный из набора $a^1, a^2, ..., a^{m+k}$, линейно зависим, то следует увеличить номер i на единицу и вернуться к началу Шага 2. Когда увеличение номера i невозможно, т.е. когда $i = C_k^{m-1}$, необходимо перейти к Шагу 5. В противном случае, т.е. когда указанный поднабор линейно независим, выполнить Шаг 3.

Шаг 3. Образовать из вектор-столбцов поднабора $a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}$ квадратную матрицу D n-го порядка, приписав к указанным столбцам справа любой из векторов множества $I_i = \{a^1, a^2, ..., a^{m+k}\} \setminus \{a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}\}$, образующий вместе с $a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}$ линейно независимую систему. Вычислить последний столбец обратной матрицы $(D^T)^{-1}$, где T – символ транспонирования. Этот вектор-столбец (обозначим его $\bar{y}^i$) следует запомнить. По построению, вектор $\bar{y}^i$ будет ортогонален всем векторам поднабора $a^{i1}, a^{i2}, ..., a^{i(m-1)}$. Перейти на следующий шаг.

Шаг 4. Вычислить скалярные произведения $\langle a^j, \bar{y}^i\rangle$ для всех векторов $a^j \in I_i$. Если хотя бы одно такое произведение окажется отрицательным, то вектор $\bar{y}^i$ из памяти удалить. В случае, когда все указанные скалярные произведения неотрицательны, увеличить номер i на единицу и перейти на Шаг 2 (когда такое увеличение невозможно, – выполнить Шаг 5).

Шаг 5. По завершению полного цикла по переменной *i* будут сохранены вектор-столбцы, которые в ходе выполнения алгоритма записывались в память как $\overline{y}^i$. Они составят искомый минимальный набор векторов $b^1, b^2, ..., b^n$, порождающих двойственный конус K^o.

В следующей теореме указывается, каким именно образом следует использовать описанный алгоритм для учета произвольного конечного набора квантов четкой информации.

Теорема 3 [1]. *Пусть заданы векторы* $u^1, u^2, ..., u^k \in N^m$, *порождающие непротиворечивый набор квантов информации. Тогда для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *выполняются включения*

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \qquad (6)$$

где $\hat{P}(Y) = f(P_g(X)) = P_g(Y)$, *а вектор-функция*

$$g(x) = (\langle b^1, f(x)\rangle, ..., \langle b^n, f(x)\rangle) \quad (n \geq m) \qquad (7)$$

построена с использованием векторов $b^1, b^2, ..., b^n$, *полученных в результате применения алгоритма построения двойственного конуса к набору векторов* $\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^k\}$.

Согласно Теореме 3, для того чтобы воспользоваться набором квантов четкой информации для сужения множества Парето, нужно применить описанный выше алгоритм отыскания образующих двойственного конуса, подав на его вход набор векторов $e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^k$. Затем, на основе найденных в результате применения алгоритма векторов $b^1, b^2, ..., b^n$, необходимо сформировать новый векторный критерий *g* по формуле (7), множество Парето относительно которого и составит искомую оценку сверху $\hat{P}(Y)$ для неизвестного множества выбираемых векторов $C(Y)$ с учетом выявленного набора квантов информации.

5. Алгоритм учета набора квантов нечеткой информации

Перейдем к изложению ключевого результата данной работы, а именно, алгоритма, который дает возможность использовать имеющуюся в распоряжении ЛПР непротиворечивую нечеткую информацию об отношении предпочтения ЛПР, чтобы найти новую вектор-функцию g, с помощью которой может быть построена оценка сверху для неизвестного множества $C(Y)$.

Пусть задан набор векторов $u^i \in N^m$ вместе с набором чисел $\mu_i \in (0,1]$, такие, что выполняются равенства $\mu(u^i, 0_m) = \mu_i$, $i = 1,2,...,k$.

Шаг 1. Открыть цикл по переменной $h = 1,2,...,l$. Найти множество Парето $Y_h = P(Y)$ и начать формировать искомое нечеткое множество с носителем $\mathrm{supp}(Y)$, присвоив всем элементам множества Y_h степень принадлежности, равную 1, а остальным его элементам – 0.

Шаг 2. Для текущего конуса K_h ($h \in \{1,2,...,l\}$) набор его образующих вместе с единичными векторами пространства R^m отправить на вход алгоритма построения образующих двойственного конуса, а векторы, полученные в результаты завершения работы этого алгоритма, при помощи Теоремы 3 использовать для формирования вектор-функции g^h и построения с ее помощью нового текущего множества Парето $f(P_{g^h}(X))$. Перейти на следующий шаг.

Шаг 3. Присвоить элементам множества $Y_h \setminus f(P_{g^h}(X))$ степень принадлежности $1 - \mu_{h1}$. Если $h < l$, то положить $h = h + 1$, $Y_h = f(P_{g^{h-1}}(X))$ и вернуться на Шаг 2. В противном случае (т.е. когда $h = l$) перейти на Шаг 4.

Шаг 4. Конец. В результате работы алгоритма каждому элементу множества $\mathrm{supp}(Y)$ будет поставлено в соответствие одно из чисел $0, 1, 1 - \mu_{h1}, 1 - \mu_{h2} ..., 1 - \mu_{hl}$. Тем самым, будет образовано нечеткое множество, которое и является искомой оценкой сверху для неизвестного множества $C(Y)$, отвечающее заданному непротиворечивому набору квантов нечеткой информации.

Приведенный алгоритм конечен в силу конечности набора квантов информации и конечности алгоритма построения образующих двойственного конуса. Обоснованность алгоритма вытекает из того факта, что конус нечеткого отношения, обеспечивающего искомую оценку сверху для неизвестного нечеткого множества $C(Y)$, представляет собой объединение нечетких конусов, носителями которых являются конусы K_h, а значение функции принадлежности на каждом таком конусе постоянно и равно μ_{h1}. Алгоритм устроен так, что при его применении последовательно строится нечеткое множество недоминируемых векторов относительно указанного нечеткого конусного отношения с описанным выше объединением нечетких конусов. А это множество недоминируемых векторов с одной стороны входит в множество Парето, а с другой – содержит произвольное множество $C(Y)$.

6. Иллюстративный пример

Продемонстрируем работу описанного алгоритма на следующем примере. Пусть

$$m = 3,\ k = 3,\ u^1 = (-2, 3, 1),$$

$$u^2 = (4, -1, 1),\ u^3 = (0, -3, 2),$$

причем $\mu(u^1, 0_3) = \mu(u^2, 0_3) = 0.8,\ \mu(u^3, 0_3) = 0.6$. При этом множество $Y = \{y^1, y^2, y^3, y^4\}$ состоит из следующих четырех векторов:

$$y^1 = (2, 4, 1),\ y^2 = (2, 3, 1),\ y^3 = (3, 2, 1),$$

$$y^4 = (4, 1.5, 1).$$

Сначала проверим, что информация об отношении предпочтения, заданная указанными тремя квантами, является непротиворечивой. Для этого составим систему линейных уравнений (5) для данного случая:

$$\lambda_1 - 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0;$$

$$\lambda_2 + 3\xi_1 - \xi_2 - 3\xi_3 = 0;$$

$$\lambda_3 + \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0.$$

Из последнего уравнения в силу неотрицательности переменных следует: $\lambda_3 = \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. В таком случае из первых двух уравнений вытекает $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тем самым, система уравнений (5) в данном случае не может иметь *N*-решения.

Проверим второе условие Теоремы 3. Здесь $l = 2$. Конус K_1 порождается векторами e^1, e^2, e^3, u^1, u^2, а конус K_2 – векторами $e^1, e^2, e^3, u^1, u^2, u^3$. Если бы конус K_1 содержал вектор u^3, то существовали неотрицательные одновременно не равные нулю коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \xi_1, \xi_2$, при которых имело бы место векторное равенство $\lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \lambda_3 e^3 + \xi_1 u^1 + \xi_2 u^2 = u^3$, или в покоординатной форме система равенств:

$$\lambda_1 - 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0;$$

$$\lambda_2 + 3\xi_1 - \xi_2 = -3;$$

$$\lambda_3 + \xi_1 + \xi_2 = 2.$$

Используя тот факт, что переменные $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ неотрицательны, придем к системе неравенств:

$$-2\xi_1 + 4\xi_2 \leqq 0;\quad 3\xi_1 - \xi_2 \leqq -3;\quad \xi_1 + \xi_2 \leqq 2.$$

Складывая почленно последние два неравенства, находим $4\xi_1 \leqq -1$, что не совместимо с условием неотрицательности переменной ξ_1. Следовательно, второе условие Теоремы 3 также выполняется, а значит, имеющийся набор квантов действительно является непротиворечивым.

Применим описанный выше алгоритм построения оценки сверху для неизвестного нечеткого множества выбираемых векторов $C(Y)$.

Полагаем $h = 1$. В силу $y^1 \geq y^2$, вектор y^2 не является парето-оптимальным. Поэтому $\lambda^M(y^2) = 0$, $Y_1 = P(Y) = Y \setminus \{y^2\}$ и всем элементам текущего множества Парето Y_1 присваиваем единичную степень принадлежности. В частности, $\lambda^M(y^4) = 1$.

В соответствии с алгоритмом построения двойственного конуса на его вход следует подать набор из пяти векторов $\{e^1, e^2, e^3, u^1, u^2\}$, где $e^1 = (1, 0, 0), e^2 = (0, 1, 0), e^3 = (0, 0, 1)$, образующих конус K_1. При этом длина цикла $C_5^2 = 10$.

Рассмотрим первый поднабор из двух векторов $\{e^1, e^2\}$. Очевидно, ортогональным к этим векторам является, например, вектор e^3, причем $\langle e^3, u^1 \rangle = \langle e^3, u^2 \rangle = \langle e^3, e^3 \rangle = 1 > 0$. Следовательно, вектор $\bar{y}^1 = e^3$ нужно сохранить в памяти.

Перейдем ко второму поднабору $\{e^1, e^3\}$. Вектор e^2 ортогонален обоим векторам рассматриваемого поднабора, но $\langle e^2, u^2 \rangle = -1 < 0$. Это означает, что вектор e^2 запоминать не следует. Теперь рассмотрим пару $\{e^2, e^3\}$. Здесь для ортогонального вектора e^1 выполняется $\langle e^1, u^1 \rangle = -2 < 0$. Поэтому данный вектор тоже должен быть пропущен. Для набора $\{e^1, u^1\}$ в качестве ортогонального вектора можно взять, например, $(0, 1, -3)$. Поскольку $\langle(0, 1, -3), u^2\rangle = -4 < 0$, указанный ортогональный вектор опять пропускаем.

Для набора $\{e^2, u^1\}$ можно выбрать ортогональный вектор $\overline{y}^2 = (1, 0, 2)$, который, как легко проверить, следует запомнить. Далее действуем аналогично: для набора $\{e^3, u^1\}$, запоминаем ортогональный вектор $\overline{y}^3 = (3, 2, 0)$, а для набора $\{e^1, u^2\}$ – ортогональный вектор $\overline{y}^4 = (0, 1, 1)$. Рассмотрение остальных наборов $\{e^2, u^2\}$, $\{e^3, u^2\}$, $\{u^1, u^2\}$ не приведет к появлению дополнительных векторов в памяти алгоритма.

По завершении цикла в памяти сохранились четыре вектора $\overline{y}^1, \overline{y}^2, \overline{y}^3, \overline{y}^4$. В соответствии с Теоремой 3 им отвечает новый векторный критерий g^1 с компонентами $g_{11}(y) = y_3$, $g_{12}(y) = y_1 + 2y_3$, $g_{13} = 3y_1 + 2y_2$, $g_{14} = y_2 + y_3$. Простые вычисления показывают, что

$$g^1(Y_1) = \{(1, 10, 14, 5), (1, 7, 13, 3), (1, 7, 15, 2.5)\}.$$

В этом множестве парето-оптимальными являются векторы y^1 и y^4. Согласно предписанию на Шаге 2 алгоритма, полагаем $\lambda^M(y^3) = 0.2$

Увеличиваем h на 1, т.е. полагаем $h = 2$. Вводим новое текущее множество Парето $Y_2 = Y_1 \setminus \{y^3\} = \{y^1, y^4\}$. Теперь на вход алгоритма построения двойственного конуса подаем векторы $e^1, e^2, e^3, u^1, u^2, u^3$, которые являются образующими конуса K_2. Здесь к предыдущему набору добавился вектор u^3 и длина цикла теперь составит $C_6^2 = 15$.

Для сокращения последующих вычислений воспользуемся уже проведенными расчетами при $h = 1$. В дополнение к выполненному циклу длины 10 здесь остается лишь проверить знаки скалярных произведений пар векторов, в которых участвует добавленный вектор u^3. Имеем $\langle\overline{y}^1, u^3\rangle = 2 > 0$, $\langle\overline{y}^2, u^3\rangle = 4 > 0$, но $\langle\overline{y}^3, u^3\rangle = -6 < 0$. Следовательно, вектор $\overline{y}^3$ следует удалить из памяти.

Продолжим цикл. Остается рассмотреть 5 вариантов, в которых присутствует вектор u^3. Начнем с пары $\{e^1, u^3\}$. Для нее ортогональным вектором является, например, $(0, -2, 3)$. Проверяя знаки скалярных произведений, находим $\langle(0, -2, 3), e^2\rangle = -2 < 0$. Следовательно, его запоминать не следует. Аналогичным образом поступаем с остальными четырьмя парами. В итоге придем к единственному набору $\{u^1, u^3\}$ с ортогональным вектором, которому присвоим номер ранее удаленного вектора $\overline{y}^3 = (4.5, 2, 3)$. Его необходимо запомнить. В памяти сохранен обновленный набор векторов $\overline{y}^1, \overline{y}^2, \overline{y}^3, \overline{y}^4$, поэтому в соответствии с Теоремой 3 новый векторный критерий принимает вид:

$$g^2 = (y_3, y_1 + 2y_3, 4.5y_1 + 2y_2 + 3y_3, y_2 + y_3),$$

а значит $g^2(Y_2) = \{(1, 4, 14, 20), (1, 7, 15, 24)\}$.

В полученном множестве парето-оптимальным является второй вектор (т.е. y^4). Именно он образует итоговое текущее множество Парето, следовательно, $\lambda^M(y^1) = 0.4$.

В результате искомой оценкой сверху для множества $C(Y)$ оказывается нечеткое множество с функцией принадлежности:

$$\lambda^M(y^1) = 0.4, \quad \lambda^M(y^2) = 0, \; \lambda^M(y^3) = 0.2, \\ \lambda^M(y^4) = 1.$$

Как видим, наличие квантов нечеткой информации позволило заметно облегчить выбор для ЛПР. Так, если величину степени принадлежности окончательного решения считать приоритетной, то на основании полученного результата, ЛПР следует остановить свой выбор на векторе y^4. Он составляет так называемую четкую часть полученной оценки сверху.

Если же отказаться от указанной приоритетности величины степени принадлежности элементов, то на завершающем этапе принятия решения можно использовать, например, компромиссный подход, изложенный автором в [9].

Заключение

Для сужения множества Парето за счет использования квантов нечеткой информации предложен и обоснован конечный алгоритм, позволяющий строить оценку сверху для неизвестного нечеткого множества выбираемых векторов. На одном из его шагов используется алгоритм построения двойственного конуса. Иллюстративный пример показывает, что для задач с относительно небольшим числом критериев и конечным множеством возможных векторов этот алгоритм может быть использован «вручную», т.е. без применения компьютера.

Литература

1. Noghin V.D. Reduction of the Pareto set. An Axiomatic Approach. Springer Ser.: Studies in Systems, Decisions and Control. 2018. Vol. 126.
2. Noghin V.D., Baskov O.V. Pareto Set Reduction Based on an Arbitrary Finite Collection of Numerical Information on the Preference Relation // Doklady Mathematics. 2011. Vol. 83. No.3. P. 418-420.
3. Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. No.3. P. 338-353.
4. Klir G.J., Bo Yuan. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. Prentice Hall RTR. New Jersey. 1995.
5. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука. 1981.
6. Ногин В.Д. Множество и принцип Парето. Санкт-Петербург. Издательско-полиграфическая ассоциация вузов. 2022.
7. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир. 1973.
8. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир. 1991.
9. Noghin V.D. Multicriteria Choice Based on Fuzzy Information // Scientific and Technical Information Processing. 2020. Vol. 47. No.5. P. 275-283.

Ногин Владимир Дмитриевич. Доктор физико-математических наук, профессор, действительный член Международной академии наук высшей школы. Профессор, Санкт-Петербургский государственный университет. Области исследований: принятие решений при многих критериях, многокритериальная оптимизация. E-mail: noghin@gmail.com

Algorithm for Reduction of the Pareto Set Using a Collection of Fuzzy Information Quanta

V. D. Noghin

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russia

Abstract. The paper presents the multi-criteria choice problem with a numerical vector function on a subset of the vectors. It is assumed that the decision maker uses a fuzzy preference relation in the selection process. Information about the preference relation is considered to be known in the form of a finite collection of fuzzy quanta. We formulate an algorithm to reduce the Pareto set in the multicriteria choice problem using the set of quanta, and facilitate the final choice. A numerical example illustrates the algorithm work.

Keywords: fuzzy sets, multicriteria choice, the Pareto set reduction, quanta of fuzzy information

DOI 10.14357/20718594220401

References

1. Noghin V.D. Reduction of the Pareto Set. An Axiomatic Approach. Springer Ser.: Studies in Systems, Decisions and Control. 2018. Vol. 126.
2. Noghin V.D., Baskov O.V. Pareto Set Reduction Based on an Arbitrary Finite Collection of Numerical Information on the Preference Relation // Doklady Mathematics. 2011. Vol. 83. No.3. P. 418-420.
3. Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. Vol. 8, No. 3, P.338-353.
4. Klir G.J., Bo Yuan. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications. Prentice Hall RTR. New Jersey. 1995.
5. Orlovskij S.A. Problemy Prinyatiya Reshenij pri Nechetkoj Iskhodnoj Informacii [Dicision Making Problems under Fuzzy Initial Information]. M.: Nauka. 1981.
6. Noghin V.D. Mnozhestvo i Princip Pareto [Pareto Set and Principle]. Sankt-Peterburg. Izdatel'sko-poligraficheskaya associaciya vuzov. 2022.
7. Rokafellar T. R. Vypuklyj Analiz [Convex Analysis]. M.: Mir. 1973.
8. Skhrejver F. Teoriya Linejnogo i Celochislennogo Programmirovaniya [Theory of Linear and Integer Programming]. M.: Mir. 1991.
9. Noghin V.D. Multicriteria Choice Based on Fuzzy Information // Scientific and Technical Information Processing. 2020. Vol. 47. No.5, P. 275-283.

Noghin Vladimir D. Doctor of physical and mathematical sciences, professor, a full member of the International Higher Education Academy of Sciences. Professor, Saint-Petersburg State University. Research areas: multicriteria decision making, multicriteria optimization, fuzzy sets. E-mail: noghin@gmail.com