

Аномальное поведение вертикальной структуры волн Россби на незональных сдвиговых течениях в окрестности фокуса

В. Г. Гневыхев¹, Т. В. Белоненко², ✉

¹ Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
✉ btvlisab@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.03.2022; одобрена после рецензирования 29.08.2022;
принята к публикации 09.09.2022.

Аннотация

Цель. Целью работы является исследование поведения вертикальных баротропно-бароклиных мод волн Россби на незональном сдвиговом потоке в окрестности фокуса.

Методы и результаты. В рамках эталонного уравнения рассматриваются различные варианты поведения собственных функций в окрестности фокуса. Показано, что количество возможных вариантов для незональных течений увеличивается при сравнении с зональным случаем. Показано, что если для зонального случая поведение волн Россби в окрестности уровня локализации качественно совпадает с задачей для внутренних волн и коэффициент прохождения через фокус всегда носит экспоненциально малый характер, то в случае незонального потока появляются качественно новые дополнительные сценарии. Решение становится крайне чувствительным к начальным параметрам волны, падающей на незональный фокус. Другим важным моментом является то, что на незональном течении появляется второй, дополнительный аномальный фокус. При падении волны на данный фокус с одной стороны он ведет себя как классический фокус с классическим налипанием во времени. А при падении с противоположной стороны волна Россби не замечает фокус и проходит его без коротковолновой трансформации. В задаче помимо сценария с бесконечно долгим во времени налипанием на фокус и экспоненциально малым коэффициентом прохождения появляются аномальные сценарии с прохождением фокуса без затруднений с коэффициентом прохождения, равным единице.

Выводы. Кинематика с аномальным поведением волн Россби в горизонтальной плоскости на незональных течениях сопровождается аномальным поведением вертикальной моды в отличие от строго зонального случая. Собственные значения задачи Штурма – Лиувилля при переходе от незонального к зональному случаю меняются скачкообразно. Как следствие, предельный переход от слабо незонального случая к строго зональному отсутствует. Такое, крайне неоднозначное, аналитическое поведение волн Россби в окрестности фокуса на бароклиных незональных течениях говорит, скорее, об отсутствии аналитического предсказания и необходимости более глубокого и подробного анализа с применением численных методов.

Ключевые слова: волны Россби, незональное течение, фокус, задача Штурма – Лиувилля

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 22-27-00004 и по теме государственного задания 0128-2021-0003.

Для цитирования: Гневыхев В. Г., Белоненко Т. В. Аномальное поведение вертикальной структуры волн Россби на незональных сдвиговых течениях в окрестности фокуса // Морской гидрофизический журнал. 2022. Т. 38, № 6. С. 585–604. EDN FTWOAV. doi:10.22449/0233-7584-2022-6-585-604

Anomalous Behavior of the Vertical Structure of Rossby Waves on Non-Zonal Shear Flow in the Vicinity of the Focus

V. G. Gnevyshev¹, T. V. Belonenko², ✉

¹ P. P. Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

² St Petersburg University, St Petersburg, Russian

✉ btvlisab@yandex.ru

Abstract

Purpose. The work aims to study the behavior of vertical barotropic-baroclinic modes of Rossby waves on a nonzonal shear flow in the vicinity of the focus.

Methods and Results. Inferred from the reference equation, we consider some variants of the behavior of eigenfunctions in the vicinity of the focus. It is shown that the number of possible variants for non-zonal flows increases compared with the zonal case. This means that qualitatively new additional scenarios appear in the case of a non-zonal flow compared with the problem for internal waves when the behavior of Rossby waves in the vicinity of the localization level qualitatively coincides with the behavior for the zonal case, herewith the coefficient of a passage through the focus is always exponentially small. The solution becomes extremely sensitive to the initial parameters of the wave incident on the non-zonal focus. Another important point is that the second, additional anomalous focus appears on the non-zonal flow. When a wave falls on this focus on one side, it behaves like a classic focus with a classic wave adhering. And when falling from the opposite side, the Rossby wave does not notice the focus and passes it without a short-wave transformation. In the problem, abnormal scenarios appear with the passage of the focus without difficulty with a coefficient of passage equal to one in addition to the scenario with an infinitely long time adhering to the focus and an exponentially small coefficient of passage.

Conclusions. The anomalous behavior of Rossby waves in the horizontal plane on non-zonal flows is accompanied by anomalous behavior of the vertical mode, in contrast to the strictly zonal case of flow with different kinematics. The eigenvalues of the Sturm-Liouville problem change abruptly during the transition from the non-zonal to the zonal case. As a consequence, there is no limit transition from a weakly non-zonal case to a strictly zonal one. Such an extremely ambiguous analytical behavior of Rossby waves in the vicinity of the focus on baroclinic nonzonal flows rather indicates the absence of analytical prediction and the need for a deeper and more detailed analysis using numerical methods.

Keywords: Rossby waves, non-zonal flow, focus, Sturm-Liouville problem

Acknowledgments: the study was carried out with support of the RSF grant No. 22-27-00004 and within the framework of the state assignment on theme 0128-2021-0003.

For citation: Gnevyshev, V.G. and Belonenko, T.V., 2022. Anomalous Behavior of the Vertical Structure Rossby Waves on Non-Zonal Shear Flow in the Vicinity of the Focus. *Physical Oceanography*, 29(6), pp. 567-586. doi:10.22449/1573-160X-2022-6-567-586

Введение

Проблема анализа взаимодействия сдвиговых течений и генерируемых ими волн в настоящее время является крайне актуальной для понимания синоптической изменчивости океана и изучается как в рамках линейной постановки для внутренних гравитационных волн и волн Россби [1–4], так и в нелинейной постановке [5–8]. Подавляющее количество работ в области геофизики, появившихся в последние годы, связано с численным счетом. В то же время крайне мало аналитических работ, авторы которых пытаются понять на качественном уровне основные вопросы взаимодействия волн и течений. В прикладном аспекте крайне важен следующий вопрос: можно ли известные в теоретической физике решения спроектировать на волны Россби в океане?

Известно, что математика, как правило, отлично «работает» для случая чисто зонального течения, однако любое, даже слабое, отклонение от зональности делает решения крайне капризными и часто многие теоремы перестают работать в принципе [9–11].

Прогресс современных методов дистанционного зондирования Земли в настоящее время, в частности достижения в области спутниковой альтиметрии и создание программных комплексов по автоматической идентификации океанских вихрей, делает задачу о собственных значениях волн Россби на баротропно-бароклинные течения крайне актуальной. Одним из методов изучения динамики волн в океане является метод «вертикальные моды – горизонтальные лучи» [12]. Поскольку горизонтальные масштабы волн Россби – от десятков до сотен километров, данное приближение хорошо работает в открытом океане. Если принять стратификацию постоянной и не учитывать топографию и бароклинные фоновые течения, тогда вертикальная мода волн Россби определяется одной стратификацией и не зависит от β -параметра. В этом плане волна Россби становится похожей на обычную внутреннюю волну и ее вертикальная мода – это обычная тригонометрическая функция с классическим квантованием собственных значений задачи Штурма – Лиувилля. В такой постановке определяющим фактором является горизонтальная неоднородность крупномасштабного потока. Горизонтальные изменения течения являются лидерами в задаче. Однако наряду со схожестью постановки задач для внутренних волн и волн Россби имеются как качественные, так и количественные различия.

Первое отличие волн Россби от внутренних волн состоит в том, что для волн Россби есть два качественно разных сценария эволюции лучей волн, что, по сути, является следствием наличия в задаче β -параметра как для зонального фонового течения [13], так и для незонального течения [14]. Для незонального случая появляется качественно новый сценарий, связанный с таким явлением, как *overshooting* (овершутинг), т. е. подныривание волны Россби под критический слой. Другой сценарий – это *adhering* (адхеринг), когда волна Россби асимптотически приближается к критическому слою [3].

Второе и наиболее существенное отличие внутренних волн от волн Россби состоит в следующем. Для внутренних волн добавление бароклинности фонового потока качественно не меняет сценарий эволюции волнового пакета. Бесконечный счетный спектр краевой задачи Штурма – Лиувилля с тригонометрическим набором собственных функций плавно переходит в новый бесконечный счетный спектр, но уже с собственными функциями в виде экспоненциально-мажорированных полиномов Эрмита. При этом появляются такие явления, как вертикальная фокусировка и «недисперсионная» фокусировка [15]. Но для внутренних волн фокальная точка все равно остается некой «черной дырой», при этом лучи – это «лидеры», а вертикальные моды – это «ярые последователи» с некой второстепенной ролью.

Математические понятия «фокус» и «фокусировка» из теории дифференциальных уравнений применительно к задачам взаимодействия волн Россби с течениями подробно рассмотрены в работе [10], и для океана они имеют определенный физический смысл. Если в оптике фокус – это некий параболоид

из металла, который фокусирует пучок лучей в точку, то в океане таким «металлическим параболоидом» выступает неоднородность полей скорости фонового потока. Образно говоря, у океана есть «уши». Это по физике близко к акустическому волноводу, только там волновод однородный и бесконечный, а здесь он как бы постепенно сужается от конечных размеров до точки, и тем самым волна тоже сжимается по вертикали до точки, т. е. фокусируется. Таким образом, фокус – это сжатие волны по вертикали до точечного размера на некотором вертикальном горизонте, при этом в горизонтальной плоскости это обычная плоская волна.

Известно, что самые сильные волновые процессы наблюдаются в окрестности фронтальных образований. Для открытого океана горизонтальные градиенты фоновых потоков гораздо слабее вертикальных, и тогда аналитический подход в рамках ВКБ-приближения, где малым параметром является медленность горизонтальных градиентов по сравнению с вертикальной изменчивостью, выглядит вполне оправданным. Напротив, для области сильных сдвиговых течений необходимо учитывать одновременно горизонтальные и вертикальные градиенты фоновых потоков. Аналитическим методом, который одновременно учитывает эти градиенты в подобного рода задачах, является построение эталонного двумерного уравнения [10].

На практике [16–18] для расчета фазовых скоростей волн Россби решают принципиально одномерную задачу, в которой учитывается только вертикальный профиль поля скорости $U(z)$. Важно отметить, что идея о вертикальной фокусировке волн Россби, которая изначально была сформулирована чисто аналитически [13], впоследствии подтверждена при практическом численном счете для реальных океанических течений в работах [17, 18]. Однако вопрос «Насколько сильно изменит спектральную задачу учет одновременного влияния как вертикальных, так и горизонтальных градиентов поля фонового потока?» пока в полной мере не изучен даже аналитически. Для зональных течений аналитические расчеты говорят о том, что такая фокусировка имеет место по крайней мере для открытого океана [13]. Для незонального потока известны результаты, когда незональность приводит к крайне непонятным и неожиданным эффектам, когда вихрь «въезжает» в свой собственный бета-плюс [6, 7]. Отметим, это все эти выводы получены в приближении «мелкой воды». В нашей постановке мы строим эталонное уравнение в приближении квазигеострофики, для которой имеется галилеевская инвариантность [11]. Мы рассматриваем аналитическую двумерную модель вертикальной фокусировки, учитывающую незональность фонового потока, и показываем, что вертикальная фокусировка – крайне сильное явление, при этом незональность проявляется в слагаемых с первыми производными в модельном уравнении и никак не влияет на старшую вторую производную. Однако решение в окрестности незонального критического слоя не единственно. Это связано с явлением *overshooting*, когда волна может пересечь критический слой, и в этом случае решение в окрестности критического слоя уже не является фокусом, а описывается некой константой. Таким образом, целью работы является исследование поведения вертикальных баротропно-бароклинных мод волн Россби на незональном потоке в окрестности фокуса.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение завихренности на β -плоскости, линейризованное на фоне плоскопараллельного сдвигового потока U , направленного под некоторым фиксированным углом θ к параллели [3]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\nabla_h^2 \Psi_A(x, y, z, t) + \left(\frac{1}{S} \Psi_A(x, y, z, t) \right)_z \right] - \frac{\partial \Psi_A(x, y, z, t)}{\partial y} \beta \sin \theta + \frac{\partial \Psi_A(x, y, z, t)}{\partial x} \left[\beta \cos \theta - U_{yy} - \left(\frac{1}{S} U_z \right)_z \right] = 0, \quad (1)$$

где $\Psi_A(x, y, z, t)$ – функция тока (давление); $S = N^2 / f^2$, N – частота Брента – Вайсала, f – параметр Кориолиса; $\beta = \frac{df}{dy}$. Система координат (x, y, z)

правая, t – время; ось x направлена по течению под углом θ к параллели (рис. 1). Для анализа этого уравнения мы используем волновой подход.

Так как фоновое течение является однородным вдоль продольной координаты x и не зависящим от t , решение для возмущений будет иметь следующий вид:

$$\Psi_A(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(k, y, z, \omega) \exp[i(kx - \omega t)] dk d\omega. \quad (2)$$

Здесь k – волновое число в направлении оси x ; ω – частота волны. Подставляя (2) в (1), получаем следующее уравнение для функции $\Psi(k, y, z, \omega)$:

$$(\omega - kU) \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 + \left(S^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \right)_z \right] \Psi - i \frac{\partial \Psi}{\partial y} \beta \sin \theta - k \Psi \left[\beta \cos \theta - U_{yy} - \left(S^{-1} U_z \right)_z \right] = 0. \quad (3)$$

Ключевым моментом данной работы является нетривиальная нелинейная замена переменных, позволяющая произвести разделение переменных в двумерном неоднородном уравнении с первоначально неразделяющимися переменными. Такой подход был представлен в работе [10], однако в ней не давалось разъяснения, как обосновать такую замену. Ниже мы покажем, что такой подход обусловлен применением ВКБ-приближения, после чего становится очевидным, как нужно преобразовать переменные, чтобы увидеть автомодельность решения.

Одномерное эталонное уравнение. Баротропный случай

В приближении мелкой воды решение можно искать методом разделения переменных:

$$\Psi_2(k, y, z, \omega) = \Phi(k, y, \omega) \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{H} z\right), \quad (4)$$

где H – глубина океана. Для функции $\Phi(k, y, \omega)$ из (3) для линейного профиля скорости фонового потока получаем следующее линейное одномерное уравнение:

$$(\omega - kU) \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 - S^{-1}m^2 \right] \Phi - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} \beta \sin \theta - \Phi k \beta \cos \theta = 0, \quad (5)$$

где $m = \pi n / H$, $S = N^2 / f^2$, N – частота Вайселя – Брента считается постоянной, H – глубина океана.

Рассмотрим поведение решения в окрестности критического слоя y_c . Сделаем следующую замену:

$$-(\omega - kU) = kU_y y - kU_y y_c = kU_y (y - y_c). \quad (6)$$

Далее переместим начало координат в критический слой. При сделанных предположениях из (5) получаем следующее баротропное эталонное (модельное, $m = 0$) уравнение в окрестности критического слоя:

$$y \Phi_{yy} + a \Phi_y + b \Phi = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$a = i a_0, \quad a_0 = \frac{\beta \sin \theta}{kU_y}, \quad b = \frac{\beta \cos \theta}{U_y}. \quad (8)$$

Решение уравнения (7) имеет точку ветвления в нуле. Традиционный подход к анализу решения уравнения (7) можно выполнить в терминах функции Бесселя. Однако для целостности изложения и сохранения единого подхода найдем решение уравнения (7) в виде интеграла Фурье и построим его асимптотики самостоятельно, без привлечения аппарата специальных функций.

Итак, ищем решение в следующем виде:

$$\Phi(k, y, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(k, l, \omega) \exp(il y) dl. \quad (9)$$

Используя свойства преобразования Фурье (которые выводятся из определения преобразования Фурье и формально получаются из (9) дифференцированием по y как по параметру), получаем

$$\Phi \rightarrow G, \quad \Phi_y \rightarrow ilG, \quad \Phi_{yy} \rightarrow -l^2G, \quad y \Phi_{yy} \rightarrow -i(l^2G)_l, \quad (10)$$

где стрелка означает соответствующее преобразование Фурье; i – мнимая единица. Для Фурье-образа G получаем следующее уравнение:

$$-il^2G_l - 2ilG + (ial + b)G = 0. \quad (11)$$

Интегрируя (11) и подставляя в (9), находим искомое общее решение в виде интеграла Фурье. Поскольку в подынтегральном выражении имеется слагаемое, содержащее множитель $\ln|l|$, пределы интегрирования $(-\infty, +\infty)$ нужно разбить на два интервала $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Тем самым общее решение будет представлено в виде суммы решений справа и слева от особой точки. Далее формально мы должны будем сшить эти решения. Проанализируем сначала одну часть решения – с одной стороны от критического слоя, и выясним

поведение решения на бесконечности и в окрестности критического слоя, не переходя через особую точку. Итак, ниже мы ограничиваемся рассмотрением только одного из решений:

$$\Phi(k, y, \omega) = A(k, \omega) \int_0^{+\infty} l^{-2} \exp\left(i\left(a_0 \ln l + \frac{b}{l} + l y\right)\right) dl. \quad (12)$$

Чтобы проанализировать интеграл (12), предположим, что решение локализовано в некоторой области физического пространства и затухает на бесконечности. Тогда Фурье-образ нашего решения будет также локализован в окрестности некоторого волнового числа l_0 в фазовом l -пространстве. При этом ширина области локализации Δl в фазовом пространстве должна быть меньше центрального волнового числа l_0 , чтобы вклад от степенной особенности в подынтегральном выражении (12) не давал вклада в асимптотику общего решения:

$$\Delta l \ll l_0. \quad (13)$$

Введем определение фазы решения (12) следующим образом:

$$\varphi(k, l, y, \omega) = a_0 \ln l + \frac{b}{l} + l y. \quad (14)$$

Тогда уравнение для стационарной точки фазы ($l = l_c$) имеет вид

$$\varphi(k, l, y, \omega)_l = \frac{a_0}{l_c} - \frac{b}{l_c^2} + y = 0. \quad (15)$$

Из (15) с использованием (8) находим выражение для y -координаты квазимонохроматического волнового решения (пакета):

$$y = -\frac{\beta \cos \theta}{U_y l_c^2} + \frac{\beta \sin \theta}{k U_y l_c}. \quad (16)$$

Уравнение (16) является квадратным относительно $l_c = l_c(y)$. При этом квадратное уравнение будет иметь два корня в области прозрачности, одно решение в точке отражения и не иметь решений в области геометрической тени. Из уравнения (16) находим два режима при подходе к критическому слою. Первый режим – прохождение критического слоя без коротковолновой трансформации, когда решение пропорционально некоей константе в окрестности критического слоя. Второй режим – это коротковолновая трансформация. В коротковолновом пределе для незональных течений из (16) получаем следующую асимптотику:

$$y \sim \frac{\beta \sin \theta}{k U_y l_c}, \quad l_c \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Итак, математически качественно новым моментом для незонального критического слоя, помимо режима фокусировки, является второе решение – некая константа. Поясним, что представляет собой данное решение с физической точки зрения. На рис. 1 (зональное течение) критический слой показан

пунктирной линией. Приближение к критическому слою происходит асимптотически долго во времени и сопровождается вертикальной фокусировкой моды в окрестности экстремума профиля скорости. На рис. 2 (незональное течение) есть уже два критических слоя. При этом для траектории, обозначенной на рис. 2 цифрой 3, при приближении к критическому слою имеет место *overshooting*.

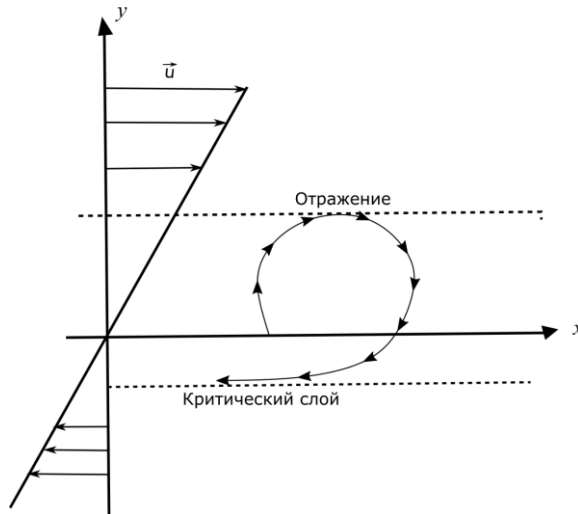


Рис. 1. Трек волн Россби при их взаимодействии с зональным потоком
Fig. 1. Rossby waves track while their interaction with a zonal flow

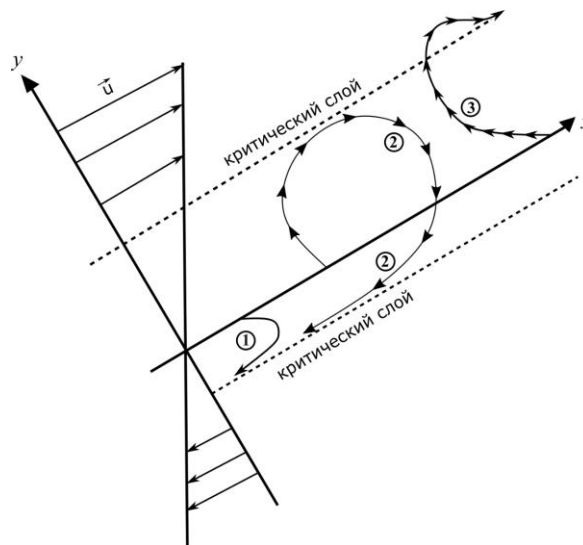


Рис. 2. Треки волн Россби при взаимодействии с незональным течением: 1 – асимптотическое приближение к критическому слою (*adhering*); 2 – асимптотическое приближение к двум критическим слоям (*double adhering*); 3 – пересечение критического слоя и асимптотическое приближение к нему с противоположной стороны (*overshooting*)

Fig. 2. Rossby wave tracks while their interaction with a non-zonal flow: 1 – asymptotic approximation to the critical layer (*adhering*); 2 – asymptotic approximation to two critical layers (*double adhering*); 3 – crossing of the critical layer and asymptotic approximation to it from the opposite side (*overshooting*)

Волна изначально без особых трансформаций пересекает критический слой и затем, отразившись от большего значения поля скорости, приближается к критическому слою асимптотически с вертикальной фокусировкой моды. Именно точка пересечения критического слоя и является новым моментом для неazonального потока. В этой точке решение описывается константами – и волновое число, и амплитуда. Такая неоднозначность решения в окрестности критического слоя делает понятие «критический слой как асимптотический режим» некорректным, так как теряется смысл термина «асимптота». Асимптота в переводе с греческого означает «никогда не достижимый». *Overshooting* – прохождение критического слоя – делает это утверждение неверным.

Отметим следующее важное обстоятельство. Выражение для координаты центра квазимонохроматического пакета (16) не зависит от того, малые значения или большие принимает величина y , т. е. выражение (16) справедливо при $y \in (0, +\infty)$. Далее, раскладывая фазу (15) по слагаемым (до квадратного), в коротковолновом пределе получаем

$$\mu_y \equiv \left. \frac{\partial^2 \Phi(k, l, y, \omega)}{\partial l^2} \right|_{l=l_c} \sim -\frac{a_0}{l_c^2}. \quad (18)$$

Используя интеграл Пуассона, окончательно получаем

$$\Phi(k, y, \omega) \sim A(k, \omega) \frac{1}{\sqrt{|\mu_y|}} \exp(+i a_0 \ln l_c). \quad (19)$$

Подставляя (17) и (18) в (19), находим асимптотику в коротковолновом пределе для волны, падающей на критический слой:

$$\Phi(k, y, \omega) \sim A(k, \omega) y^{1-i a_0} \sim A(k, \omega) y \cos(a_0 \ln y). \quad (20)$$

Полученное нами одномерное решение (20) – асимптотический закон, это решение совпадает с известными асимптотиками в терминах специальных функций [19]. Построенное решение позволяет получить двумерное решение как простое умножение двух одномерных решений (см. формулу (4)), в котором уже присутствует вертикальная мода.

На рис. 1 схематически показано поведение волны Россби при взаимодействии с зональным течением \vec{U} . Видно, что есть точка отражения (верхняя точка, волна отражается от течения) и есть критический слой (нижняя точка, волна асимптотически долго налипает на критический слой).

Двумерное эталонное уравнение. Бароклинный случай

В данной работе мы модифицируем двумерное эталонное уравнение, рассмотренное ранее [10]:

$$(\Psi_1)_{zz} + \left(\frac{y}{L_y} + \frac{z^2}{L_z^2} \right) (\Psi_1)_{yy} + a(\Psi_1)_y = 0. \quad (21)$$

Здесь $a \sim i \sin \theta$ является чисто мнимой величиной и отражает факт неazonальности течения [9, 10]. Новое эталонное уравнение, несмотря на комплексность

коэффициентов, выдерживает процедуру построения решения в терминах интеграла Фурье. По аналогии с работой [10] будем рассматривать интеграл на промежутке $(0, +\infty)$:

$$\Psi_1(k, y, z, \omega) = \int_0^{+\infty} G(k, l, z, \omega) \exp[+il y] dl. \quad (22)$$

Подставим разложение (22) в уравнение (21) и, принимая во внимание (10), получаем

$$G_{zz} - \frac{l^2 z^2}{L_z^2} G - i \frac{l^2}{L_y} G_y - i \frac{2l}{L_y} G + i a l G = 0. \quad (23)$$

Разделим (23) на l и умножим на L_z . Получаем

$$\frac{L_z}{l} G_{zz} - \frac{l z^2}{L_z} G - i \frac{l L_z}{L_y} G_y + i \left(a - \frac{2}{L_y} \right) L_z G = 0, \quad (24)$$

где традиционно используются следующие обозначения: L_y – характерный масштаб изменчивости по координате y в окрестности фокуса; L_z – характерный масштаб изменчивости по координате z в окрестности фокуса [20, 21].

Выполним следующую замену переменных: $(l, z) \rightarrow (\eta, \varphi)$, где

$$\eta = \frac{z l^{1/2}}{L_z^{1/2}}, \quad \varphi = l. \quad (25)$$

В новых переменных (η, φ) уравнение (24) принимает вид уравнения с разделяющимися переменными:

$$G_{\eta\eta} - \eta^2 G - i \frac{\eta L_z}{2L_y} G_\eta - i \frac{\varphi L_z}{L_y} G_\varphi + Q G = 0. \quad (26)$$

Здесь введено следующее обозначение:

$$Q = i \left(a - \frac{2}{L_y} \right) L_z. \quad (27)$$

Будем искать решения, используя метод разделения переменных:

$$G(\eta, \varphi) = H(\eta) F(\varphi). \quad (28)$$

Тогда для $H(\eta)$ получаем следующее уравнение:

$$H_{\eta\eta} - i \frac{\eta L_z}{2L_y} H_\eta - (\eta^2 + \mu_0^* - Q) H = 0. \quad (29)$$

Здесь μ_0^* – постоянная разделения. В дальнейшем полагаем

$$\mu_0^* - Q \equiv \mu_0. \quad (30)$$

Слагаемое с H_η в уравнении (29) исключаем следующей заменой:

$$H_\eta = P(\eta) \exp\left(i \frac{L_z}{8L_y} \eta^2\right). \quad (31)$$

Для $P(\eta)$ получаем уравнение

$$P_{\eta\eta} + P\left[-\eta^2\left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right) - \mu_0 + i \frac{L_z}{4L_y}\right] = 0. \quad (32)$$

Асимптотический анализ одномерной вертикальной задачи в коротковолновом приближении является классическим (см. Приложение). Остановимся на этом немного подробнее. Поскольку мы ищем решения, локализованные в окрестности некоего уровня $z = z_0$, то из уравнения (32) видим, что коэффициент при η^2 должен быть положительным. Следовательно, мы получаем следующее условие существования локализованных решений:

$$\left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < |L_z| < 4|L_y|. \quad (33)$$

Условие (33) свидетельствует о том, что ветви параболы, которая ограничивает внутреннюю область прозрачности от внешней области тени, должны быть практически параллельны друг другу. В противном случае вертикальная мода не сформируется и волна не будет приближаться к критической точке бесконечно долго. Следовательно, если условие (33) не выполнено, то будет режим отражения от критического слоя [10].

Из уравнения (32) определяем собственные значения переменной разделения μ_0 :

$$-(2m+1) = \left(\mu_0 - i \frac{L_z}{4L_y}\right) / \left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

Из (34) получаем собственные значения

$$\mu_0 = \frac{L_z}{L_y} \left[\frac{1}{4}i - \frac{\delta}{2} \left(m + \frac{1}{2}\right) \right], \quad \delta \equiv \left(\frac{16L_y^2}{L_z^2}\right)^{1/2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

и собственные функции

$$P(\eta) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} H_m \eta \left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/4} \right] \exp\left[-\frac{\eta^2}{2} \left(1 - \frac{L_z^2}{16L_y^2}\right)^{1/2}\right], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (36)$$

где H_m – полиномы Эрмита.

Перейдем к определению $F(\varphi)$ – второго множителя в решении (28). Из (26) получаем уравнение

$$-i \frac{\varphi L_z}{L_y} F_\varphi + \mu_0^* F = 0. \quad (37)$$

Решение уравнения (37) имеет следующий вид:

$$F(\varphi) = \varphi^\mu, \quad \mu \equiv -i \mu_0^* \frac{L_y}{L_z}. \quad (38)$$

Распишем подробно параметр μ :

$$\mu \equiv -i \mu_0^* \frac{L_y}{L_z} = -i (\mu_0 + Q) \frac{L_y}{L_z} = \left[-i \frac{\beta \sin \theta}{kU_y} L_y - 2 \right] + \left[\frac{1}{4} + i \frac{\delta}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (39)$$

Из (39) видно, что собственные значения состоят из двух частей. Первая часть

$\left[-i \frac{\beta \sin \theta}{kU_y} L_y - 2 \right]$ – баротропная, она совпадает с фазой баротропной задачи

(12). Вторая часть $\left[\frac{1}{4} + i \frac{\delta}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]$ – бароклинная. Окончательно получаем

следующие собственные значения:

$$\mu = -\frac{7}{4} + i \left[-\frac{\beta \sin \theta}{kU_y} L_y + \frac{\delta}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (40)$$

Подставляя все найденные части решения в исходный интеграл (22), находим собственные функции:

$$\begin{aligned} \Psi_1(k, y, z, \omega) = & A(k, \omega) \int_0^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} l^\mu \left[\sum_{m=0}^{\infty} H_m \left(\frac{z l^{1/2}}{L_z} \left(1 - \frac{L_z^2}{16 L_y^2} \right)^{1/4} \right) \right] \times \\ & \times \exp \left[\frac{z^2 l}{2 L_z} \left(1 - \frac{L_z^2}{16 L_y^2} \right)^{1/2} \right] \exp \left[+i l \left(y + \frac{z^2}{8 L_y} \right) \right] dl. \end{aligned} \quad (41)$$

Далее полученные собственные функции (41) можно с помощью несложных преобразований свести к вырожденной гипергеометрической функции от некоторого комплексного аргумента. Однако для нахождения асимптотик собственных функций именно интегральная запись (41) является предпочтительной. Несмотря на то что построенные собственные функции (41) являются функциями от двух физических переменных (z и y), интеграл, выражающий их, является одномерным. Поэтому мы снова воспользуемся методом стационарной фазы.

Перепишем мнимую часть интеграла (41) в следующем виде:

$$\exp \left[+i l \left(y + \frac{z^2}{8 L_y} \right) + i \left(-\frac{\beta \sin \theta}{kU_y} L_y + \frac{\delta}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right) \ln l \right]. \quad (42)$$

Дифференцируя (42) по переменной l и приравнявая его к нулю, получаем уравнение для стационарной точки l_c (аналог дисперсионного соотношения):

$$y + \frac{z^2}{8L_y} = \frac{\frac{\beta \sin \theta}{kU_y} L_y - \frac{\delta}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right)}{l_c}. \quad (43)$$

Из (43) также получаем следующее ограничение на количество мод, которые определяют вертикальную структуру решения в окрестности особой точки:

$$\left(m + \frac{1}{2} \right) < 2 \frac{\left| \frac{\beta \sin \theta}{kU_y} L_y \right|}{\delta}. \quad (44)$$

При этом, как и в ВКБ-приближении, может оказаться, что таких мод вообще не существует.

Если переписать соотношение (43) в виде

$$l_c = \frac{\frac{\beta \sin \theta}{kU_y} L_y - \frac{\delta}{2} \left(m + \frac{1}{2} \right)}{y + \frac{z^2}{8L_y}}, \quad (45)$$

то нетрудно показать, что для неazonального течения асимптотика собственных функций в окрестности критической точки будет иметь следующий вид:

$$\Psi_1(k, y, z, \omega) = A(k, \omega) \sum_{m=0}^{\infty} l_c^{m-1} \left[H_m \left(\frac{z l_c^{1/2}}{L_z} \left(1 - \frac{L_z^2}{16 L_y^2} \right)^{1/4} \right) \right] \exp \left[-\frac{z^2 l_c}{2L_z} \left(1 - \frac{L_z^2}{16 L_y^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (46)$$

Анализируя асимптотики (46), можно сказать, что построенные решения являются функциями не от переменных (z, y) , а от некоторых криволинейных переменных, которые имеют следующий вид:

$$(y, z) \rightarrow \left(\left(y + \frac{z^2}{8L_y} \right), \frac{z}{\left(y + \frac{z^2}{8L_y} \right)} \right). \quad (47)$$

Однако данный подход с применением криволинейных переменных использовался и при решении в ВКБ-приближении, в котором формально происходила следующая замена переменных: $(y, z) \rightarrow \left(y, \frac{z}{y} \right)$. Поэтому асимптотики одномерных интегралов, по большому счету, никаких качественно новых результатов, отличных от ВКБ-решений, не дают, кроме условия (33).

На рис. 2 схематически показано поведение волн Россби при взаимодействии с незональным течением \vec{U} . В этом случае существует уже не один, а два критических слоя и характер треков волн Россби отличается большим разнообразием. Помимо режима распространения волн 1 (*adhering*) существует режим 2 (*double adhering* – двойной адхеринг), а также режим 3 (*overshooting*). Эти режимы рассмотрены в работах [3, 4, 22, 23].

Обсуждение и выводы

Классическое двумерное эталонное уравнение, описывающее трансформацию решения в окрестности фокуса, уже рассматривалось ранее [10, 20, 21]. Новизна настоящей работы состоит в том, что это уравнение обобщается на случай незонального баротропно-бароклинного потока. В модифицированном эталонном уравнении появляется новое комплексное слагаемое, а нелинейная замена переменных позволяет привести задачу к уравнению с разделяющимися переменными. Математический анализ, развитый в работах [9, 10], позволяет учесть особенности, связанные с появлением этого слагаемого. Однако возникает другая особенность: собственные значения задачи для незонального потока хотя структурно и похожи на зональный случай (сумма баротропной и бароклинной составляющих), уже не имеют предельного перехода в зональный случай при стремлении угла наклона фонового потока к нулю.

Известно, что на незональных течениях кинематика волн Россби имеет качественные отличия от кинематики для строго зонального течения [9, 10]. Основное отличие заключается в том, что незональное сдвиговое течение имеет не один, как у зонального, а два критических слоя, при этом в окрестности первого фокуса действительны все математические выкладки, полученные в работе [10], а нелинейная замена переменных позволяет найти соответствующие спектральные характеристики. В результате полученные собственные значения, как и ранее, являются суммой баротропной и бароклинной задачи, однако принципиальным моментом является то, что при стремлении угла наклона течения к нулю спектр собственных значений незональной задачи уже не стремится к спектру для зонального случая, и при этом наблюдается скачкообразное поведение собственных значений.

Второй критический слой на незональном течении лежит в области прозрачности и имеет нетривиальную кинематику в виде *overshooting* [9, 10]. В данной работе показано, что подобная нетривиальная кинематика волн Россби сопровождается и нетривиальным поведением моды в окрестности фокуса (критического слоя). Если для зонального случая фокус является абсолютным поглотителем волн Россби, а коэффициент прохождения экспоненциально мал, то в случае выполнения режима *overshooting* волн Россби на незональном течении задача становится крайне чувствительной к начальным данным. При этом возможны абсолютно противоположные варианты: от полного поглощения волны критическим слоем до ее полного прохождения через критический слой. Во втором случае трансформация вертикальной моды волны Россби не происходит.

В предыдущей работе авторов решена задача для строго зонального течения [10]. Был найден альтернативный, крайне простой и физически понятный способ построения эталонного решения. Этот подход ранее был разработан

в теории плазмы и позже перенесен Н. С. Ерохиным и Р. З. Сагдеевым для волн на воде [20, 21]. Наше решение строится с помощью Фурье-анализа и некоторой оригинальной замены переменных. В приложении работы [10] произведена идентификация построенного решения и показано, что оно в точности соответствует известному решению в терминах вырожденной гипергеометрической функции от некоторого комплексного аргумента с интегрированием в комплексной плоскости по некоей окружности, а также первичным и вторичным квантованием с использованием неких рассуждений об автомодельности. Мы показываем, что за всем этим нагромождением из физики плазмы, малопонятным для специалистов в области геофизики, стоит довольно простая физическая суть: происходит некое пространственное искривление координат, а вместе с этим – и получаемого решения.

В этом плане критические слои оказываются крайне устойчивыми, и это и есть результат данной работы. Мы показали, что на качественном уровне добавление неzonальности не изменяет результат, полученный для зонального случая. Это приводит к выводу, что глобальные процессы энергообмена в океане сосредоточены в узких областях, причем резонансные процессы (где скорость фонового потока сравнивается с фазовой скоростью волнового возмущения) крайне важны для понимания генерации волн и вихрей крупномасштабными океанскими течениями (подробнее см. [24]).

Таким образом, для неzonальной задачи распространения волн Россби в окрестности фокуса, скорее, не существует аналитического однозначного предсказания поведения вертикальной моды. Спектральная задача крайне чувствительна к начальным данным, и никакого предельного перехода к зональному случаю не наблюдается.

Приложение

Вертикальная фокусировка в коротковолновом приближении

Уравнение (3) на течениях, имеющих вертикальную изменчивость, может иметь решения, сильно локализованные в окрестности некоторого фиксированного горизонтального уровня $z = z_0$, где фазовая скорость волны в продольном направлении x совпадает с экстремумом поля скорости основного течения (так называемый критический слой) и затухает во всей остальной области. Вид экстремума поля скорости выводится в процессе решения задачи, при этом граничные условия для задачи Штурма – Лиувилля будут выполнены автоматически. В этом случае выполняется предположение, что уровень локализации вертикальной моды не совпадает с границами области по вертикали, что обусловлено экспоненциальным затуханием решения вне области уровня локализации решения.

Важно отметить, что представленные ниже решения не претендуют на единственность и полноту и описывают только один из возможных сценариев, определяемый выполнением необходимых условий. Специфика данной задачи состоит в том, что прохождение волной критического слоя обычно связано с трансформацией спектра в коротковолновую область. Для волн Россби на зональном течении прохождение через критический слой также однозначно влечет коротковолновую трансформацию.

Однако если течение не является строго зональным, то имеются два сценария, связанные с прохождением через критический слой. Первый сценарий – критический слой и граница области прозрачности совпадают. При приближении к критическому слою происходит коротковолновая трансформация волны. При этом достижение критического слоя носит асимптотический характер: волна приближается к критическому слою бесконечно долго во времени. Второй сценарий – критический слой находится внутри области прозрачности. Здесь возможны режимы прохождения критического слоя при конечных значениях волновых чисел, и волна проходит критический слой, практически не реагируя на его присутствие. Какой именно из двух сценариев будет реализован, зависит от начальных условий задачи. В этом смысле решение является крайне чувствительным к выбору начальных данных.

Рассмотрим первый сценарий, когда при прохождении критического слоя происходит коротковолновая трансформация. Для решения, сильно локализованного в окрестности вертикального уровня $z = z_0$ и затухающего во всей остальной области, уравнение (32) можно аппроксимировать следующим образом:

$$(\Psi_1)_{zz} + \left[P_0 + \frac{1}{2} P_2 (z - z_0)^2 \right] \Psi_1 = 0, \quad (\text{A.1})$$

где

$$P_0 \equiv -S \left[k^2 + l^2 - \frac{K_\beta}{kU - \omega} \right] \Bigg|_{z=z_0}, \quad (\text{A.2})$$

$$P_2 \equiv -S \left[\frac{K_\beta k U_{zz}}{(kU - \omega)^2} \right] \Bigg|_{z=z_0}, \quad (\text{A.3})$$

$$K_\beta \equiv \left[k \left(\beta \cos \theta - \left(\frac{1}{S} U_z \right)_z \right) - l \beta \sin \theta \right] \Bigg|_{z=z_0}. \quad (\text{A.4})$$

Полученное ранее уравнение (32) есть не что иное, как аналог уравнения (A.1), которое имеет следующие локализованные решения:

$$\Psi_1 = A(k, \varepsilon, y, \omega) \sum_{m=0}^{\infty} (2^n n! \sqrt{\pi}) (\Psi_1)_n, \quad (\text{A.5})$$

$$(\Psi_1)_n = H_n \left[\left(-\frac{P_2}{2} \right)^{1/4} (z - z_0) \right] \exp \left[-\left(-\frac{P_2}{2} \right)^{1/2} \frac{(z - z_0)^2}{2} \right].$$

Здесь $H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ – полиномы Эрмита.

Из соотношения (см. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва : Физматлит, 1961. С. 408)

$$(2n + 1) = P_0 \left(-\frac{P_2}{2} \right)^{-1/2} \quad (\text{A.6})$$

находим дисперсионные соотношения

$$\omega = \frac{-K_\beta + (2n+1)S^{-1/2} \left[K_\beta k U_{zz} \Big|_{z=z_0} \right]^{1/2}}{k^2 + l^2} + k U \quad (\text{A.7})$$

при $(\omega - k U) < 0$,

$$\omega = \frac{-K_\beta - (2n+1)S^{-1/2} \left[K_\beta k U_{zz} \Big|_{z=z_0} \right]^{1/2}}{k^2 + l^2} + k U \quad (\text{A.8})$$

при $(\omega - k U) > 0$.

Выражения (A.7) и (A.8) являются аналогом дисперсионного соотношения для баротропной задачи. Отметим, что при этом было сделано следующее ограничение:

$$P_0 > 0. \quad (\text{A.9})$$

Принимая во внимание выражение (A.2), находим, что знаки выражений K_β и $(\omega - k U)$ совпадают. Далее должно быть выполнено условие

$$P_2 < 0. \quad (\text{A.10})$$

Учитывая выражение (A.3), получаем $K_\beta k U_{zz} \Big|_{z=z_0} < 0$. Опуская подробности, можно констатировать следующий результат. Дисперсионное соотношение (A.7) соответствует случаю, когда волна сначала проходит критический слой, затем отражается от области больших значений скорости фонового течения и затем подходит к критическому слою с обратной стороны, асимптотически приближаясь к максимуму скорости основного течения со стороны больших значений. Дисперсионное соотношение (A.8) соответствует случаю, когда волна подходит к критическому слою, асимптотически приближаясь к минимуму скорости основного течения со стороны меньших значений. При зональных течениях ($\theta = 0$) критический слой реализуется только для западных течений и только в виде асимптотики (A.8). (Здесь мы придерживаемся принятой в океанологии терминологии, где западным течением называется течение, направленное на запад, в то время как в физике атмосферы западным ветром называется ветер, распространяющийся с запада). Для западных зональных течений вертикальный уровень z_0 по координате z , на котором фокусируется мода, является уровнем абсолютного максимума скорости основного потока. При этом достижение критического слоя является асимптотическим во времени и сопровождается коротковолновой трансформацией.

Для незональных течений ситуация распадается на частные случаи, зависящие от начальных параметров задачи. При этом критические слои могут реализовываться как для положительных значений скорости основного течения, так и для отрицательных. Что именно будет происходить с волной в окрестности критического слоя для незонального случая, зависит от начального поло-

жения волны (с какой стороны и под каким углом подходит волна к критическому слою) и от параметров поля скорости основного потока в окрестности экстремума по вертикальной координате. На незональном течении возможны варианты: прохождение волны через критический слой и вертикальная фокусировка на экстремуме поля скорости основного потока.

Отметим один важный результат, который получается из формулы (А.7). Как для зональных, так и для незональных течений вертикальная изменчивость поля скорости приводит к одному общему свойству: если вертикальная структура моды фокусируется на экстремуме поля скорости, то существует ограничение на количество мод, которые можно вписать в окрестности этого уровня:

$$(2n+1) < \frac{|K_\beta|}{S^{-1/2} [K_\beta k U_{zz}|_{z=z_0}]^{1/2}}. \quad (\text{A.11})$$

Этот факт является для волн Россби общеизвестным (*LeBlond P. H., Mysak L. A. Waves in the ocean. Amsterdam : Elsevier, 1978. 602 p.*). Однако в данной задаче бароклинность может привести к тому, что вертикальной моды вообще не будет. Такие случаи при численном счете вертикальной задачи на собственные значения рассматривались в работах *P. D. Killworth, J. R. Blundell* (Long extratropical planetary wave propagation in the presence of slowly varying mean flow and bottom topography. Part I: The local problem // *Journal of Physical Oceanography*. 2003. Vol. 33, iss. 4. P. 784–801. doi:10.1175/1520-0485(2003)33<784:LEPWPI>2.0.CO;2 ; The dispersion relation for planetary waves in the presence of mean flow and topography. Part II: Two-dimensional examples and global results // *Journal of Physical Oceanography*. 2005. Vol. 35. P. 2110–2133. doi:10.1175/JPO2817.1). Для решений (А.5) введем определение масштаба вертикальной изменчивости решения D :

$$D^{-1} \equiv \left(-\frac{P_2}{2} \right)^{1/4} = \left[\frac{S K_\beta k U_{zz}|_{z=z_0} (k^2 + l^2)}{\left(-K_\beta \pm (2n+1) S^{-1/2} [K_\beta k U_{zz}|_{z=z_0}]^{1/2} \right)^2} \right]^{1/4}. \quad (\text{A.12})$$

Формула (А.12) дает характерный масштаб вертикальной изменчивости и также определяет так называемую автомодельность решения. Нетрудно видеть, что в коротковолновом пределе вертикальный D и продольный L масштабы решения связаны соотношением $D^{-1} \sim L^{1/2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *LaCasce J. H.* The Prevalence of Oceanic Surface Modes // *Geophysical Research Letters*. 2017. Vol. 44, iss. 21. P. 11,097–11,105. doi:10.1002/2017gl075430
2. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Analytical Approximations of Dispersion Relations for Internal Gravity Waves Equation with Shear Flows // *Symmetry*. 2020. Vol. 12, iss. 11. 1865. doi:10.3390/sym12111865
3. *Gnevyshev V. G., Badulin S. I., Belonenko T. V.* Rossby Waves on Non-zonal Currents: Structural Stability of Critical Layer Effects // *Pure and Applied Geophysics*. 2020. Vol. 177. P. 5585–5598. doi:10.1007/s00024-020-02567-0

4. Rossby Waves on Non-zonal Flows: Vertical Focusing and Effect of the Current Stratification / V. G Gnevyshev [et al.] // Pure and Applied Geophysics. 2021. Vol. 178. P. 3247–3261. doi:10.1007/s00024-021-02799-8
5. One possible mechanism for eddy distribution in zonal current with meridional shear / Y. L. Shi [et al.] // Scientific Reports. 2018. Vol. 8. 10106. doi:10.1038/s41598-018-28465-z
6. Резник Г. М., Кравцов С. В. Сингулярные вихри бета-плоскости: краткий обзор и недавние результаты // Морской гидрофизический журнал. 2020. Т. 36, № 6. С. 720–739. doi:10.22449/0233-7584-2020-6-720-739
7. Kravtsov S., Reznik G. Monopoles in a uniform zonal flow on a quasi-geostrophic β -plane: Effects of the Galilean non-invariance of the rotating shallow-water equations // Journal of Fluid Mechanics. 2020. Vol. 909. A23. doi:10.1017/jfm.2020.906
8. Сутырин Г. Г. Каким образом океанические вихри могут быть столь долгоживущими // Морской гидрофизический журнал. 2020. Т. 36, № 6. С. 740–756. doi:10.22449/0233-7584-2020-6-740-756
9. Гневыйшев В. Г., Белоненко Т. В. Вихревой слой на β -плоскости в формулировке Майлса – Рибнера. Полнос на действительной оси // Морской гидрофизический журнал. 2021. Т. 37, № 5. С. 525–537. doi:10.22449/0233-7584-2021-5-525-537
10. Гневыйшев В. Г., Белоненко Т. В. Параболические ловушки волн Россби в океане // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2021. Т. 14, № 4. С. 14–24. doi:10.7868/S207366732104002X
11. Gnevyshev V. G., Belonenko T. V. Analytical Solution of the Ray Equations of Hamilton for Rossby Waves on Stationary Shear Flows // Fundamental and Applied Hydrophysics. 2022. Vol. 15, iss. 2. P. 8–18. doi:10.48612/fpg/4eh4-83zr-r1fm
12. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6, № 2. С. 55–70.
13. Гневыйшев В. Г., Шпира В. И. Динамика пакетов волн Россби в окрестности зонального критического слоя с учетом вязкости // Известия Академии наук СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25, № 10. С. 1064–1074.
14. Гневыйшев В. Г., Шпира В. И. Кинематика волн Россби на неоднородном меридиональном течении // Океанология. 1989. Т. XXIX, вып. 4. С. 543–548.
15. Badulin S. I., Shrira V. I. On the irreversibility of internal-wave dynamics due to wave trapping by mean flow inhomogeneities. Part 1. Local analysis // Journal of Fluid Mechanics. 1993. Vol. 251. P. 21–53. doi:10.1017/S0022112093003325
16. Tulloch R., Marshall J., Smith K. S. Interpretation of the propagation of surface altimetric observations in terms of planetary waves and geostrophic turbulence // Journal of Geophysical Research. Oceans. 2009. Vol. 114, iss. C2. C02005. doi:10.1029/2008jc005055
17. Killworth P. D., Blundell J. R. Long Extratropical Planetary Wave Propagation in the Presence of Slowly Varying Mean Flow and Bottom Topography. Part I: The Local Problem // Journal of Physical Oceanography. 2003. Vol. 33, iss. 4. P. 784–801. https://doi.org/10.1175/1520-0485(2003)33<784:LEPWPI>2.0.CO;2
18. Killworth P. D., Blundell J. R. The Dispersion Relation for Planetary Waves in the Presence of Mean Flow and Topography. Part II: Two-Dimensional Examples and Global Results // Journal of Physical Oceanography. 2005. Vol. 35, iss. 11. P. 2110–2133. doi:10.1175/JPO2817.1
19. LeBlond P. H., Mysak L. A. Waves in the Ocean. Amsterdam : Elsevier, 1978. 602 p. (Elsevier Oceanography Series, vol. 20). https://doi.org/10.1016/0377-0265(80)90007-X
20. Ерохин Н. С., Сагдеев П. З. К теории аномальной фокусировки внутренних волн в двумерно-неоднородной жидкости. Часть 1. Стационарная задача // Морской гидрофизический журнал. 1985. № 2. С. 15–27.
21. Ерохин Н. С., Сагдеев П. З. К теории аномальной фокусировки внутренних волн в двумерно-неоднородной жидкости. Часть 2. Точное решение двумерной задачи с учетом вязкости и нестационарности // Морской гидрофизический журнал. 1985. № 4. С. 3–10.

22. *Yamagata T.* On the Propagation of Rossby Waves in a Weak Shear Flow // Journal of Meteorological Society of Japan. 1976. Vol. 54, iss. 2. P. 126–128.
23. *Yamagata T.* On Trajectories of Rossby Wave-packets Released in a Lateral Shear Flow // Journal of Oceanographic Society of Japan. 1976. Vol. 32, iss. 4. P. 162–168.
24. *Степанянц Ю. А., Фабрикант А. Л.* Распространение волн в сдвиговых гидродинамических течениях // Успехи физических наук. 1989. Т. 159, № 1. С. 83–123. doi:10.3367/UFNr.0159.198909с.0083

Об авторах:

Гневъшев Владимир Григорьевич, старший научный сотрудник, ФГБУН ИО им. П. П. Ширшова РАН (117997, Россия, г. Москва, Нахимовский пр., д. 5), кандидат физико-математических наук, **ORCID ID: 0000-0001-6654-5570**, **ResearcherID: AAZ-6352-2021**, **Scopus Author ID: 6507346231**, avi9783608@gmail.com

Белоненко Татьяна Васильевна, профессор, кафедра океанологии, СПбГУ (199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9), доктор географических наук, **ORCID ID: 0000-0003-4608-7781**, **ResearcherID: K-2162-2013**, **Scopus Author ID: 6507005889**, btvlisab@yandex.ru