



Вид приведенных зависимостей позволяет допустить существование подобия. Для нахождения автомодельных переменных использовался анализ размерностей, с помощью которого получен универсальный для всех сечений закон автомодельного расширения струи в усложнённой физической обстановке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Маламанов С. Ю. Численное моделирование задач о силовом взаимодействии гидродинамического и электромагнитного полей // Известия РАН. Математическое моделирование. 2015. Том 27. №11. С. 56–62.

УДК 51.76

АТТРАКТОРЫ РАВНОВЕСИЯ НЕКОТОРОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ЛОТКИ – ВОЛЬТЕРРА

А. В. Флегонтов¹, В. М. Буре²

¹ Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,

¹ Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург, Россия

e-mail: ¹ flegontoff@yandex.ru; ² ya.vlbr@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается динамическое взаимодействие между отечественными, зарубежными компаниями и ростом ВВП на примере крупных стран еврозоны. Процесс взаимодействия моделируется трехмерной обобщенной системой Лотки – Вольтерра. Приводится полный анализ нетривиальной стабильности рассматриваемой системы для каждой из стран с учетом качественных характеристик.

Ключевые слова. моделирование, система Лотки – Вольтерра, обыкновенные дифференциальные уравнения, микро-макро экономика, устойчивость, аттракторы.

Equilibrium attractors of some three-dimensional generalized Lotka – Volterra system

A. V. Flegontov, V. M. Bure

Abstract. The dynamic interaction between domestic and foreign companies and GDP growth is considered on the example of large eurozone countries. The interaction process is modeled by a three-dimensional generalized Lotka–Volterra system. A complete analysis of the non-trivial stability of the system under consideration for each of the countries is given, taking into account the qualitative characteristics.

Традиционно для моделирование взаимодействующих процессов в популяционной динамике применяются обыкновенные дифференциальные уравнения в виде системы Лотки–Вольтерра (см., например, [1, 2]).

В последнее время эти же системы и их обобщения повсеместно применяются в моделировании эпидемиологических процессов, микро-макро экономических конкурентных процессах, динамики генетических структур (см., например, [2]–[5]).

Следуя работе [5], будем рассматривать динамическое взаимодействие между отечественными и зарубежными компаниями и ростом ВВП. Такое моделирование динамики микро–макро экономики появилось в результате анализа данных о доле рынка розничной торговли 13 крупнейших стран Еврозоны и идентификации параметров рассматриваемой системы по аналогии взаимоотношений «хищник – жертва». В качестве адекватной выборки использовались данные крупнейших стран Еврозоны, включая Австрию, Бельгию, Финляндию, Францию, Германию, Грецию, Ирландию, Италию, Нидерланды, Португалию, Словакию, Словению и Испанию. В работе [5] было показано, что при определенных режимах иностранные компании вносят отрицательный вклад в рост ВВП и такая динамика выявляет два уровня дисбалансов: конкурентоспособность компаний и рост национальной экономики. Эмпирические результаты показали, что большинство отечественных компаний можно рассматривать в роли «добычи», в то время как крупные иностранные компании играют, как правило, роль «хищников» в большинстве стран Еврозоны.

Рассмотрим трехмерную обобщенную систему Лотки–Вольтерра в виде:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1 = a_1x(1-x) + a_2x\frac{z}{1+z} + a_3xy, \\ \frac{dy}{dt} = f_2 = b_1y(1-y) + b_2y\frac{z}{1+z} + b_3xy, \\ \frac{dz}{dt} = f_3 = c_1z(1-z) + c_2z\frac{x}{1+x} + c_3z\frac{y}{1+y}. \end{cases} \quad (1)$$

где x и y обозначают доли рынка отечественных и иностранных компаний, а z – ВВП соответственно.

В отличие от работы [5] проведем полный анализ стабильности рассматриваемой системы (1) для каждой из рассматриваемых стран (см. таблицу). Будем принимать во внимание точки нетривиального равновесия и только те точки, которые находятся в $R+$, поскольку в силу экономической интерпретации должно выполняться условие $x, y, z \in R+$. По определению, точки равновесия $w^* = (x^*, y^*, z^*)$ находятся из решения системы уравнений $f_i(x^*, y^*, z^*) = 0, i = 1, 2, 3$. При этом таких точек может быть несколько, а может не быть ни одной.

Анализ устойчивости точек равновесия определяется собственными значениями матрицы Якоби в соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости. Качественные характеристики поведения системы в окрестности точек равновесия также определяются собственными значениями. Если, независимо от начального состояния в момент времени t_0 , решения сходятся к точке равновесия, то такая точка называется точечным аттрактором системы.

№ п/п	Страна	Количество точек равновесия	Координаты	Тип устойчивости	Качественный характер
1	Германия	1	(18,61; 1,69; 116,42)	неустойчивая	фокус
2	Австрия	нет	–	–	–
3	Бельгия	нет	–	–	–
4	Словения	1	(11,29; 6,69; 169,26)	устойчивая	фокус
5	Финляндия	нет	–	–	–
6	Словакия	1	(16,42; 5,74; 147,2)	устойчивая	фокус
7	Нидерланды	1	(10,19; 1,29; 124,28)	неустойчивая	седло
8	Франция	1	(20,72; 2,71; 113,58)	устойчивая	узел
9	Португалия	2	(1,28; 1,9; 0,71) (45,89; 10,26; 102)	неустойчивая устойчивая	фокус узел
10	Ирландия	1	(16,99; 5,39; 109,99)	неустойчивая	фокус
11	Испания	1	(23,52; 3,61; 133,05)	неустойчивая	фокус
12	Италия	2	(0,06; 0,05; 0,2) (17,86; 2,096; 95,86)	неустойчивая устойчивая	фокус фокус
13	Греция	1	(98,37; 9,12; 136,25)	неустойчивая	фокус

Построены интегральные кривые, фазовые портреты и проанализированы аттракторы в системе (1).

Более полный, по сравнению с работой [5], анализ дал возможность сравнить рассматриваемую модель в виде (1) с моделью Гинзбурга [4], а также поставить вопрос о полной управляемости анализируемой модели.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Свирежев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. – М.: Наука, 1978.
- [2] Пых Ю. А. Обобщенные системы Лотки – Вольтерра: теория и приложения. Монография. – СПб.: СПбГИПСР, 2017. – 229 с.
- [3] Романов В. П., Ахмадеев Б. А. Моделирование инновационной экосистемы на основе модели «хищник – жертва» // Бизнес–информатика. 2015. № 1 (31). С. 7–17.
- [4] Тютюнов Ю. В., Титова Л. И. От Лотки – Вольтерра к Ардиди – Гинзбургу: 90 лет эволюции трофических функций // Журнал общей биологии. 2018. Том 79. № 6. С. 428–448
- [5] Yang H., Shao C., Khashanah K. Multi–scale Economic Dynamics: The Micro–Macro Wealth Dynamics and the Two–Level Imbalances of the Euro Crisis // Comput. Econ. (2019) 53: 587–616 с.