В. Д. Ногин

# ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ СРЕДЕ

## КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2002

УДК 519.8
ББК 22.18
Но 72

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 02-01-14109*

Н о г и н В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 176 с. — ISBN 5–9221–0274–5.

Рассматриваются вопросы, связанные с выбором решений при наличии нескольких критериев. Впервые в мировой научной литературе строго формулируется известный принцип Эджворта–Парето и устанавливается при выполнении каких требований применение этого принципа оправдано.

Развивается оригинальный общий подход к решению многокритериальных задач при наличии количественной информации об относительной важности критериев. Показывается, что с помощью предлагаемого подхода, используя лишь конечный набор информации об относительной важности критериев, можно достаточно хорошо аппроксимировать множество потенциально-оптимальных решений многокритериальной задачи.

Предназначена для всех, кто по роду своей деятельности сталкивается с необходимостью решения многокритериальных задач — исследователям, инженерам-разработчикам, конструкторам, проектировщикам, экономистам-аналитикам и т. п. Может быть использована студентами старших курсов и аспирантами не только математических, но и экономических, а также технических специальностей.

Ил. 16. Библ. 43 наим.

ISBN 5–9221–0274–5



# СОДЕРЖАНИЕ

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A \setminus B$ — теоретико-множественная разность множеств $A$ и $B$

$A \times B$ — декартово произведение множеств $A$ и $B$

$R^m$ — евклидово пространство $m$-мерных векторов с вещественными компонентами

$0_m = (0, 0, ..., 0) \in R^m$ — начало координат (нуль) пространства $R^m$

$R_+^m$ — неотрицательный ортант пространства $R^m$ (т. е. множество всех векторов с неотрицательными компонентами без начала координат)

$R_+$ — множество положительных вещественных чисел

$N^m$ — множество всех векторов пространства $R^m$, у которых имеется по крайней мере одна положительная и хотя бы одна отрицательная компоненты

$|A|$ — число элементов конечного множества $A$

$\sup Z$ — точная верхняя грань числового множества $Z$

$\inf Z$ — точная нижняя грань числового множества $Z$

$[z]$ — целая часть числа $z$

$\langle a, b \rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_i$ — скалярное произведение векторов $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$

$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2}$

$a > b \;\Leftrightarrow\; a_i > b_i, \quad i = 1, 2, ..., m$

$a \geqq b \;\Leftrightarrow\; a_i \geqq b_i, \quad i = 1, 2, ..., m$

$a \geq b \;\Leftrightarrow\; a \geqq b$ и $a \neq b$

$\operatorname{cone}\{a^1, a^2, ..., a^k\}$ — выпуклый конус, порожденный векторами $a^1, a^2, ..., a^k$ (т. е. множество всех линейных неотрицательных комбинаций данных векторов)

$m$ — число критериев

$I = \{1, 2, ..., m\}$ — множество номеров критериев

$X$ — множество возможных решений

$f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ — векторный критерий

$Y = f(X)$ — множество возможных векторов (оценок)

$\succ_X$ — отношение предпочтения ЛПР, заданное на множестве $X$

$\succ_Y$ — отношение предпочтения ЛПР, индуцированное отношением $\succ_X$ и заданное на множестве $Y$

$\succ$ — продолжение отношения $\succ_Y$ на все пространство $R^m$

$\mathrm{Sel}\, X$ — множество выбираемых решений

$\mathrm{Sel}\, Y$ — множество выбираемых векторов (выбираемых оценок)

$\mathrm{Ndom}\, X$ — множество недоминируемых решений

$\mathrm{Ndom}\, Y$ — множество недоминируемых векторов (недоминируемых оценок)

$P_f(X)$ — множество парето-оптимальных решений

$P(Y)$ — множество парето-оптимальных векторов (парето-оптимальных оценок)

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Моей жене Наталии Волковой

*И высочайший гений не прибавит*
*Единой мысли к тем, что мрамор сам*
*Таит в избытке, — и лишь это нам*
*Рука, послушная рассудку, явит...*

Микеланджело Буонарроти
(пер. А. Эфроса)

Практически любой вид человеческой деятельности связан с ситуациями, когда имеется несколько возможностей и человек волен из этих возможностей выбрать любую, наиболее подходящую ему.

Задачи наилучшего выбора изучает теория принятия решений. С ее помощью можно научиться осуществлять выбор более обоснованно, эффективно используя имеющуюся в наличии информацию о предпочтениях. Эта теория помогает избежать принятия заведомо негодных решений и учесть возможные отрицательные последствия непродуманного выбора.

Чрезвычайно широкий и крайне важный с практической точки зрения класс задач выбора составляют многокритериальные задачи, в которых качество принимаемого решения оценивается по нескольким критериям одновременно. Успешное решение многокритериальных задач невозможно без использования различного рода сведений о предпочтениях лица, принимающего решение. При этом одним из самых главных источников таких сведений является информация об относительной важности критериев. Но прежде чем учиться выявлять и использовать эту информацию, необходимо выяснить, что она собой представляет.

Какой смысл содержит высказывание о том, что один критерий (или одна группа критериев) важнее другого критерия (другой группы критериев)? Как имеющуюся в распоряжении информацию об относительной важности критериев можно использовать в процессе принятия решений? Существуют ли и если существуют, то каковы принципиальные границы использования произвольного набора подобного рода информации при решении вопросов выбора решений?

Обсуждению и решению этих и близких к ним вопросов посвящена эта книга. По существу, она представляет собой систематическое введение в теорию относительной важности критериев, развиваемую автором на протяжении двух десятков лет. В книге используется аксиоматический метод изложения, когда заранее формулируется ряд требований (аксиом), предъявляемых к классу рассматриваемых задач, строго определяются все ключевые понятия и результаты формулируются в виде теорем, доказываемых с применением соответствующих математических средств.

Избрав строгую форму изложения, автор стремился не потерять связи теории с практикой и использовал все доступные ему средства для неформального обсуждения и наглядной иллюстрации вводимых понятий и полученных результатов.

Предлагаемая книга, для чтения которой вполне достаточно владения курсом математики обычного технического вуза, рассчитана, прежде всего, на специалистов в области принятия решений, поскольку в ней впервые в мировой монографической литературе изложен известный принцип Эджворта–Парето, а также абсолютно новый подход к решению задач многокритериального выбора, основанный на точном введении и строгом учете количественной информации об относительной важности критериев. Несомненно, она будет полезна всем тем, кто по роду своей деятельности сталкивается с необходимостью решения многокритериальных задач — инженерам-разработчикам, конструкторам, проектировщикам, экономистам-аналитикам и т. п. Кроме того, данная книга может быть успешно использована студентами старших курсов и аспирантами математических, экономических, а также технических специальностей вузов.

Предусмотрено несколько вариантов прочтения книги. Первый вариант — полный, с изучением доказательств и деталей. Второй — когда можно пропускать все встречающиеся в тексте математические доказательства. Наконец, согласно третьему варианту, читатель, не желающий вникать в математические тонкости, и которому нужно лишь получить общее представление о предлагаемом подходе, достаточное для его применения, может после поверхностного просмотра первой главы сразу переходить к последней главе, где в доступной форме представлены основные идеи и результаты предлагаемого подхода.

Для формул, рисунков и утверждений принята двойная нумерация, причем первый номер означает номер главы.

Символом ⮝ отмечается начало доказательства утверждения, тогда как знак ⮟ означает его конец.

Автор выражает благодарность Ирине Толстых, которая, прочтя рукопись, своими многочисленными замечаниями способствовала заметному улучшению качества изложения. Кроме того, она внесла определенный вклад и в содержательную часть книги (в частности, ею, например, была получена теорема 4.10).

Особая признательность — Российскому фонду фундаментальных исследований, который, начиная с 1998 года, осуществляет финансовую поддержку исследований автора в данном направлении.

# ВВЕДЕНИЕ

Важнейшим инструментом решения многокритериальных задач является принцип Эджворта–Парето (принцип Парето), который стали успешно применять еще в XIX веке. Однако до самого недавнего времени этот принцип не был четко сформулирован, и многие из тех специалистов и исследователей, которые его применяли и применяют, были (и до сих пор остаются) абсолютно уверены в том, что этот принцип можно использовать при решении любых многокритериальных задач. Оказывается, что это не так! Принцип Эджворта–Парето имеет вполне определенные границы применимости и его использование при решении некоторых задач рискованно или же вообще не допустимо.

В данной книге впервые принцип Эджворта–Парето получает определенную математическую формулировку, и что самое главное — четко очерчивается класс задач многокритериального выбора, в которых применение этого принципа является обоснованным. За пределами указанного класса на его основе можно получить далеко не лучшие результаты.

Для того чтобы сформулировать принцип Эджворта–Парето, постановку обычной многокритериальной задачи, включающей множество возможных решений и набор критериев (векторный критерий), необходимо дополнить бинарным отношением предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Расширенная подобным образом многокритериальная задача названа *задачей многокритериального выбора*. Ее решение заключается в отыскании так называемого множества выбираемых решений, которое может состоять из одного элемента, но, в общем случае, оно является подмножеством множества возможных решений.

Итак, постановка всякой задачи многокритериального выбора включает три объекта — множество возможных решений, векторный критерий и отношение предпочтения ЛПР. Решить эту задачу — означает, на основе векторного критерия и имеющихся сведений об отношении предпочтения ЛПР, найти множество выбираемых решений.

В рамках рассматриваемой модели многокритериального выбора принцип Эджворта–Парето может быть сформулирован в виде утверждения о том, что множество выбираемых решений содержится в множестве Парето. Иначе говоря, каждое выбираемое решение является парето-оптимальным. Математический эквивалент этому высказыванию — включение одного множества в другое. Для того чтобы доказать это включение, следует определенным образом ограничить весь класс задач многокритериального выбора, наложив специальные требования на указанные выше три объекта. Эти требования (аксиомы) относятся главным образом к отношению предпочтения ЛПР и могут быть интерпретированы как «рациональное» (или «разумное», «последовательное») поведение в процессе выбора. Кроме того, среди этих требований имеется условие согласованности отношения предпочтения ЛПР и векторного критерия, поскольку каждый из этих двух объектов выражает определенные устремления (цели) одного и того же ЛПР, и потому они обязаны быть каким-то образом связаны друг с другом.

Формулировка и доказательство принципа Эджворта–Парето вместе со всеми необходимыми начальными понятиями и сведениями из теории принятия решений даны в первой главе книги. Материал этой главы служит фундаментом для всего последующего изложения.

Применение принципа Эджворта–Парето позволяет из множества всех возможных исключить заведомо неприемлемые решения, т. е. те, которые никогда не могут оказаться выбранными, если выбор осуществляется достаточно «разумно». После такого исключения остается множество, которое называют *множеством Парето* или *областью компромиссов*. Оно, как правило, является достаточно широким, и в процессе принятия решений неизбежно встает вопрос о том, какое именно возможное решение выбрать среди парето-оптимальных? Выражаясь иначе, какие из парето-оптимальных решений следует удалить для того, чтобы произвести дальнейшее сужение области компромиссов и, тем самым, получить более точное представление об искомом множестве выбираемых решений? Этот вопрос при решении практических многокритериальных задач является наиболее трудным и наименее проработанным к настоящему времени.

В общем случае, располагая лишь множеством возможных решений и набором критериев (т. е. оставаясь в рамках модели многокритериальной задачи), обоснованного ответа на поставленный вопрос не сможет дать ни один специалист по принятию решений, поскольку осуществление компромисса (выбора того или иного парето-оптимального решения) возможно лишь при расширении модели выбора за счет привлечения дополнительной информации об этом отношении предпочтения ЛПР. В зависимости от типа, характера и объема имеющейся в наличии дополнительной информации используют тот или иной метод принятия решений (или же их комбинацию). К настоящему времени таких методов, схем и подходов поиска компромисса насчитывается не один десяток. Следует, однако, отметить, что они, как правило, имеют слабое теоретическое обоснование и носят, в основном, эвристический характер. А самое главное — авторы предложенных методов не могут четко описать класс тех задач выбора, для решения которых применение данного метода гарантированно приводит к действительно наилучшему решению.



Основной тип дополнительной информации, с которым чаще всего приходится иметь дело при решении прикладных многокритериальных задач, — это информация об относительной важности критериев. Поэтому многие из существующих подходов к решению многокритериальных задач используют именно эту информацию, чаще всего в виде так называемых коэффициентов относительной важности критериев. Формальные определения этих коэффициентов у авторов таких подходов отсутствуют. Обычно считается, что эти коэффициенты должны назначаться экспертами. Но разве эксперт может оценить все возможные последствия своего назначения, проследить и просчитать влияние каждого из оцениваемых коэффициентов на механизм выбора, соответствующий тому или иному методу? Как правило, эксперты вообще не имеют никакого представления о том методе, в котором будут использоваться назначенные ими коэффициенты. Таким образом, одни специалисты назначают коэффициенты относительной важности, затем другие специалисты применяют тот или иной метод, а ЛПР, несущее ответственность за принятое решение, является некоей третьей стороной, не разбирающейся ни в коэффициентах, ни в методах принятия решений. В итоге — низкое качество принимаемых решений со всеми вытекающими их этого последствиями.

Отсюда следует, что прежде чем строить и предлагать какой-либо метод принятия решений, использующий понятие относительной важности критериев, необходимо договориться о том, какой именно смысл вкладывать в это понятие. Другими словами, сначала нужно дать соответствующее определение, а затем строить метод. Причем это определение должно быть доступно для понимания не только специалистам, но и самому ЛПР, потому что, не разобравшись в определении относительной важности критериев, ЛПР не сможет назначить те коэффициенты относительной важности, которые наиболее точно выражают его предпочтения.

В этой книге принято последовательное изложение и основывается оно на формальном определении понятия количественной информации об относительной важности критериев. В его основе — математическое определение высказывания «один критерий важнее другого с определенным коэффициентом относительной важности». Примечательно, что предлагаемое определение имеет настолько простую логику, что вполне доступно для понимания не только специалистам, но и лицам, ответственным за принятие решений и не располагающим особыми знаниями в области математики. Последнее обстоятельство немаловажно, если учесть, что сведения об относительной важности критериев поступают чаще всего именно от этих лиц и чем лучше они понимают смысл относительной важности, тем более точную информацию о важности критериев они представят специалистам.

Располагая определением относительной важности критериев и изучив простейшие его свойства, можно приступить к решению главного вопроса, ради которого это понятие вводилось: каким образом учитывать информацию об относительной важности критериев в форме сообщения о том, что один критерий важнее другого? Оказывается (это демонстрируется во второй главе книги), если несколько ограничить класс задач многокритериального выбора, для которых справедлив принцип Эджворта–Парето, добавлением еще одного достаточно разумного требования (аксиомы) к отношению предпочтения ЛПР, то учет этой информации можно производить очень просто — нужно лишь в соответствии с выведенной несложной формулой пересчитать менее важный критерий, оставив все остальные критерии и множество возможных решений прежними. В результате получится новая многокритериальная задача, множество Парето которой будет у́же множества Парето исходной задачи, причем ни одно выбираемое решение исходной задачи не окажется за пределами нового множества Парето. Иначе говоря, при переходе от старого множества Парето к новому произойдет сужение области компромиссов и при этом не будет потеряно ни одно выбираемое (потенциально-оптимальное) решение. Область поиска выбираемых решений после указанного учета информации об относительной важности критериев станет более узкой и, тем самым, задача выбора упростится.

В третьей главе вводится общее определение относительной важности для двух групп критериев. Основной результат главы — теорема, показывающая, каким образом для сужения области компромиссов можно использовать информацию о том, что одна группа критериев важнее другой группы. Здесь принцип учета информации точно такой же, как и в случае, когда информация о важности касается двух критериев, — т. е. строится новый векторный критерий, множество Парето относительно которого является более узким, чем множество Парето исходной задачи, причем все выбираемые решения заведомо содержатся в новом множестве Парето. В новом векторном критерии по определенным несложным формулам пересчитаны все критерии менее важной группы. Любопытно, что этот новый векторный критерий кроме замененных критериев менее важной группы может содержать и некоторые дополнительные критерии. В таких случаях число критериев в новой многокритериальной задаче оказывается больше, чем в исходной задаче.



В четвертой главе выясняется, каким образом производить учет не одного сообщения об относительной важности критериев, а целого набора такого рода сообщений. Сначала подробно разбирается случай двух сообщений. В частности, выясняется, что при определенных значениях числовых коэффициентов относительной важности вполне возможен случай, когда один критерий важнее другого, а тот, в свою очередь, важнее первого. В этой же главе изучается вопрос непротиворечивости произвольного набора информации об относительной важности критериев. Приведены три утверждения, с помощью которых всегда можно проверить является ли определенный набор информации противоречивым или нет. Далее исследуется вопрос учета произвольного набора количественной информации об относительной важности критериев и предлагается отличный от упомянутого ранее так называемый алгоритмический подход. Для случая конечного множества возможных решений формулируется алгоритм этого подхода, использующий симплекс-метод решения канонической задачи линейного программирования.

Пятая глава содержит исследование вопроса полноты набора количественной информации об относительной важности критериев. Здесь выясняется, что, используя лишь конечный набор информации об относительной важности критериев, можно получить в определенном смысле сколь угодно точное приближение к неизвестному множеству недоминируемых решений в виде множества Парето некоторой новой многокритериальной задачи. Полученные результаты свидетельствуют о важной роли, которую играет информация об относительной важности критериев в вопросах принятия решений в многокритериальной среде. Эта информация полна в том смысле, что для достаточно широкого класса задач многокритериального выбора с конечным множеством возможных решений одной такой информации достаточно для того, чтобы получить точное представление о неизвестном множестве недоминируемых решений.

Результаты, полученные в предыдущих главах, аккумулируются в последней, шестой главе, где в доступной форме описывается общий *метод последовательного сужения множества Парето* на основе количественной информации об относительной важности критериев. Изложение начинается с рассмотрения психологических аспектов принятия решений человеком. Далее формулируется и обсуждается сам метод. Принцип его работы наглядно можно пояснить при помощи сравнения с творческим приемом Микеланджело. Как известно, когда великого скульптора спросили, как ему удается из бесформенной каменной глыбы создавать шедевры, он ответил: «Нужно отсечь от камня все лишнее». Та же самая идея лежит в основе метода последовательного сужения области компромиссов — из исходного множества возможных решений на основе информации об относительной важности критериев последовательно удаляются все парето-оптимальные решения, которые не могут быть выбранными согласно имеющейся информации об отношении предпочтения. Удаление осуществляется до тех пор, пока не будет получено множество решений, удовлетворяющее ЛПР.

Одно их главных достоинств метода последовательного сужения области компромиссов заключается в том, что удается аксиоматически очертить класс задач многокритериального выбора, для которых в результате применение данного метода на каждом шаге сужения заведомо не будет удалено ни одно потенциально-оптимальное решение. Тем самым, набор аксиом четко указывает возможные границы его применимости.

Кроме того, следует отметить, что данный метод можно использовать в комбинации с некоторыми другими известными приемами решения многокритериальных задач. Так например, в конце шестой главы обсуждается возможность комбинирования метода последовательного сужения области компромиссов вместе с методом целевого программирования и методом достижимых целей.

В заключение дается краткая справка о двух выдающихся экономистах — Френсисе Эджворте и Вильфредо Парето, без блестящих идей которых эта книга никогда бы не появилась.

# Глава 1

# НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА

В этой главе вводятся и обсуждаются базисные понятия, связанные с принятием решений в многокритериальной среде: множество возможных решений, векторный критерий и отношение предпочтения лица, принимающего решение. Дается постановка задачи многокритериального выбора. Кроме того, здесь определяются такие принципиально важные для дальнейшего изложения понятия, как множество недоминируемых решений и множество Парето, без которых невозможна формулировка и строгое обоснование принципа Эджворта–Парето.

Именно формулировка и обоснование этого принципа составляет центральный результат первой главы. Устанавливается, что принцип Эджворта–Парето следует применять лишь для решения задач многокритериального выбора из некоторого, хотя и достаточно широкого класса. Этот класс составляют такие задачи, которые удовлетворяют определенным трем требованиям (аксиомам), выражающим «рациональность» поведения лица, принимающего решение. За пределами указанного класса использование принципа Парето сопряжено с риском и может привести к далеко не лучшим результатам.

## 1.1. Задача многокритериального выбора

**1. Множество возможных и множество выбираемых решений**. Человек в своей деятельности постоянно сталкивается с ситуациями, в которых ему приходится осуществлять выбор. Например, зайдя в магазин, мы выбираем тот или иной товар; чтобы добраться до нужного места в городе или стране, мы выбираем маршрут и соответствующий вид транспорта. Выпускник школы выбирает вуз, в котором он собирается учиться, или же место работы, если он намерен работать. Как правило, каждый мужчина и каждая женщина в определенные моменты своей жизни выбирают представителя противоположного пола для образования семьи. Руководители различных уровней и рангов постоянно вынуждены заниматься формированием персонала возглавляемых ими подразделений, выбирать ту или иную стратегическую линию поведения, принимать конкретные хозяйственные и экономические решения. Специалисты в самых различных областях науки и техники, занимающиеся разработкой всевозможных устройств и приспособлений, проектированием тех или иных сооружений, конструированием новых моделей и типов автомобилей, самолетов и т. п., так же всякий раз стремятся выбрать наилучшее инженерное, конструкторское или проектное решение. Работники банков выбирают объекты для инвестирования, экономисты предприятий и фирм планируют оптимальную экономическую программу и т. д. и т. п.

Приведенный список практических задач выбора можно было бы продолжать и дальше. Ограничимся сказанным и выявим общие элементы, присущие всякой задаче выбора.

Прежде всего, должен быть задан набор решений (вариантов), из которого следует осуществлять выбор. Обозначим его $X$ и будем называть *множеством возможных решений*. Минимальное число элементов этого множества — два (для того, чтобы действительно был выбор). Ограничений сверху на количество возможных решений нет, оно может быть как конечным, так и бесконечным. При этом природа самих решений не играет никакой роли; это могут быть проектные решения, варианты поведения, политические или экономические стратегии, сценарии поведения, краткосрочные или долгосрочные планы и т. п.

Собственно выбор решения состоит в указании среди всех возможных такого решения, которое объявляется выбранным. Следует заметить, что нередко происходит выбор не одного, а целого набора решений, являющегося определенным подмножеством множества возможных решений $X$. Простейший тому пример: требуется выбрать несколько человек, претендующих на замещение определенного числа вакантных должностей.

Обозначим *множество выбираемых решений* $\operatorname{Sel} X$. Оно и представляет собой решение задачи выбора. Таким образом, решить задачу выбора, значит, найти множество $\operatorname{Sel} X$, $\operatorname{Sel} X \subset X$. Когда множество выбираемых решений не содержит ни одного элемента (т. е. пусто), собственно выбора не происходит, так как ни одно решение не оказывается выбранным. Подобная ситуация не представляет практического интереса, поэтому множество $\operatorname{Sel} X$ должно содержать, по крайней мере, один элемент. В некоторых задачах оно может быть бесконечным.



**2. Лицо, принимающее решение**. Процесс выбора невозможен без наличия того, кто осуществляет этот выбор, преследуя свои цели. Человека (или целый коллектив, подчиненный достижению определенной цели), который производит выбор и несет полную ответственность за его последствия, называют *лицом, принимающим решение* (сокращенно: ЛПР).

Сама природа ЛПР при решении задачи выбора, как правило, не имеет особого значения. Например, если в качестве ЛПР выступает некоторый человек, то, как всякий человек, он представляет собой сложное биологическое и социальное существо. Это существо имеет тело определенного строения, и в этом теле протекают различные, возможно, до конца не изученные, биохимические, психофизические, физиологические и психические процессы. Однако для принятия, например, решения о выборе той или иной экономической стратегии фирмы совсем не обязательно учитывать строение черепа или состояние позвоночника этого человека. В процессе выбора важно, насколько богатым опытом в области экономики обладает этот человек, каким он представляет будущее своей фирмы, какие интересы, связанные с фирмой, он старается удовлетворить и т. п. Таким образом, говоря о ЛПР в контексте задачи выбора, мы будем иметь в виду не его целиком, а лишь ту его «часть», те его характеристики, которые так или иначе связаны с процессом выбора.

Если различные индивиды в одних и тех же ситуациях выбора ведут себя одинаковым образом, то с точки зрения теории принятия решений они ничем не отличаются друг от друга, т. е. представляют собой одно и то же ЛПР.

**3. Векторный критерий**. Обычно считается, что выбранным (наилучшим) является такое возможное решение, которое наиболее полно удовлетворяет желаниям, интересам или целям данного ЛПР. Стремление ЛПР достичь определенной цели нередко в математических терминах удается выразить в виде максимизации (или минимизации) некоторой числовой функции, заданной на множестве $X$. Однако в более сложных ситуациях приходится иметь дело не с одной, а сразу с несколькими функциями. Так будет, например, когда исследуемое явление, объект или процесс рассматриваются с различных точек зрения и для формализации каждой точки зрения используется соответствующая функция. Если явление изучается в динамике, поэтапно и для оценки каждого этапа приходится вводить отдельную функцию, — в этом случае также приходится учитывать несколько функциональных показателей.

Данная книга посвящена рассмотрению ситуации, когда имеется сразу несколько числовых функций $f_1, f_2, ..., f_m$, $m \geqq 2$, определенных на множестве возможных решений $X$. В зависимости от содержания задачи выбора эти функции называют *критериями оптимальности*, *критериями эффективности*, *целевыми функциями*, *показателями* или *критериями качества*.

Проиллюстрируем введенные термины, рассмотрев *задачу выбора наилучшего проектного решения*. В этой задаче множество $X$ состоит из нескольких конкурсных проектов (например, строительства нового предприятия), а критериями оптимальности могут служить стоимость реализации проекта $f_1$ и величина прибыли $f_2$, которую обеспечит данное проектное решение (т. е. построенное предприятие). Если ограничить рассмотрение данной задачи лишь одним критерием оптимальности, практическая значимость решения такой задачи будет незначительной. В самом деле, при использовании только первого критерия будет выбран самый дешевый проект, но его реализация может привести к недопустимо малой прибыли. С другой стороны, на строительство самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия оптимальности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если же дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, то к двум указанным следует добавить еще один — третий критерий, учитывающий экологический ущерб от строительства предприятия, и т. д. Что касается ЛПР, то в данной задаче таковым является глава администрации района, на территории которого будет построено предприятие, при условии, что это предприятие является государственным. Если же предприятие — частное, то в качестве ЛПР выступает глава соответствующей фирмы.

Указанные выше числовые функции $f_1, f_2, ..., f_m$ образуют *векторный критерий*

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m), \tag{1.1}$$

который принимает значения в пространстве $m$-мерных векторов $R^m$. Это пространство называют *критериальным пространством* или *пространством оценок*, а всякое значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in R^m$ векторного критерия $f$ при определенном $x \in X$ именуют *векторной оценкой* возможного решения $x$. Все возможные векторные оценки образуют *множество возможных оценок* (*возможных векторов*)



$$Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\}.$$

Наряду с множеством выбираемых решений удобно ввести в рассмотрение *множество выбираемых векторов* (*выбираемых оценок*)

$$\operatorname{Sel} Y = f(\operatorname{Sel} X) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in \operatorname{Sel} X\},$$

представляющее собой некоторое подмножество критериального пространства $R^m$.

**4. Многокритериальная задача**. Задачу выбора, содержащую множество возможных решений $X$ и векторный критерий $f$, обычно называют *многокритериальной задачей*. Изучению свойств таких задач посвящена многочисленная литература (см., например, [3, 5, 17, 26]).

Как было указано выше, в рамках рассматриваемой модели выбора решений множество возможных решений $X$ может иметь произвольную природу. В частности, если решениями являются $n$-мерные векторы, то $X \subset R^n$. Например, в *задачах математического программирования* $X$ представляет собой множество решений определенной системы неравенств:

$$X = \{x \in R^n \mid g_s(x) \geqq 0, \quad s = 1, 2, ..., k\},$$

где $g_1, g_2, ..., g_k$ — некоторые числовые функции, определенные на пространстве $R^n$.

Необходимо отметить, что формирование математической модели принятия решений (т. е. построение множества $X$ и векторного критерия $f$) нередко представляет собой сложный процесс, в котором тесно взаимодействуют специалисты двух сторон. А именно, представители конкретной области знаний, к которой относится исследуемая проблема, и специалисты по принятию решений (математики). С одной стороны, следует учесть все важнейшие черты и детали реальной задачи, а с другой — построенная модель не должна оказаться чрезмерно сложной для того, чтобы для ее исследования и решения можно было успешно применить разработанный к настоящему времени математический аппарат. Именно поэтому этап построения математической модели в значительной степени зависит от опыта, интуиции и искусства исследователей обеих сторон. Его невозможно отождествить с простым формальным применением уже известных, хорошо описанных алгоритмов.

Здесь следует еще добавить, что любая задача выбора (в том числе и многокритериальная) тесно связана с конкретным ЛПР. Уже на стадии формирования математической модели при построении множества возможных решений и векторного критерия дело не обходится без советов, рекомендаций и указаний ЛПР, тем более что векторный критерий как раз и служит для выражения целей ЛПР. При этом ясно, что построить модель в точности соответствующую всем реальным обстоятельствам невозможно. Модель всегда является упрощением действительности. Важно добиться, чтобы она содержала те черты и детали, которые в наибольшей степени влияют на окончательный выбор наилучшего решения.

Предположим, что указанные две компоненты задачи выбора сформированы, четко описаны и зафиксированы. Опыт показывает, что в терминах критерия $f$ чаще всего не удается выразить всю гамму «пристрастий», «вкусов» и предпочтений данного ЛПР. С помощью векторного критерия лишь намечаются определенные локальные цели, которые нередко оказываются взаимно противоречивыми. Эти цели одновременно, как правило, достигнуты быть не могут, и поэтому требуется определенная дополнительная информация для осуществления компромисса. Иначе говоря, если ограничиться лишь указанными выше двумя компонентами — множеством возможных решений и векторным критерием — то задача выбора оказывается в некотором смысле «недоопределенной». Эта «недоопределенность» сказывается затем в слабой логической обоснованности выбора наилучшего решения на основе векторного критерия. Многочисленные процедуры выбора (методы построения множества $\operatorname{Sel} X$), предлагаемые в литературе по принятию решений (см., например, [5, 10, 29, 35, 42, 43]) и основанные лишь на знании векторного критерия обычно содержат элементы эвристики и не имеют четкого логического обоснования.

Для того чтобы осуществить более обоснованный выбор, следует помимо векторного критерия располагать какими-то дополнительными сведениями о предпочтениях ЛПР. С этой целью необходимо включить в многокритериальную задачу еще один элемент, который позволил бы выразить и описать эти предпочтения.

**5. Отношение предпочтения**. Рассмотрим два возможных решения $x'$ и $x''$. Предположим, что после предъявления ЛПР этой пары решений, оно выбирает (отдает предпочтение) первому из них. В этом случае пишут

$$x' \succ_X x''.$$

Знак $\succ_X$ служит для обозначений предпочтений данного ЛПР и называется *отношением строгого предпочтения* или, короче, *отношением предпочтения*.



Следует отметить, что не всякие два возможных решения $x'$ и $x''$ связаны соотношением $x' \succ_X x''$, либо соотношением $x'' \succ_X x'$. Иначе говоря, не из любой пары решений ЛПР может сделать окончательный выбор. Вполне могут существовать такие пары, что ЛПР не в состоянии отдать предпочтение какому-то одному решению этой пары, даже если это пара различных решений. Описанная ситуация вполне соответствует реальному положению вещей. Более того, если бы от ЛПР требовалась способность в произвольной паре возможных решений уметь определять решение, более предпочтительное по сравнению с другим, то в таком случае теория, построенная на указанном «жестком» требовании к ЛПР, не представляла бы практического интереса. Подобные «всемогущие» ЛПР в жизни встречаются крайне редко!

Отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений, естественным образом

$$f(x') \succ_Y f(x'') \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x'' \quad \text{для } x',\ x'' \in X$$

индуцирует (порождает) отношение предпочтения $\succ_Y$ на множестве возможных векторов $Y$. Тем самым, вектор $y' = f(x')$ является предпочтительнее вектора $y'' = f(x'')$ (т. е. $y' \succ_Y y''$) тогда и только тогда, когда решение $x'$ предпочтительнее решения $x''$ (т. е. $x' \succ_X x''$).

**6. Задача многокритериального выбора**. Теперь можно сформулировать все основные элементы задачи многокритериального выбора. Итак, постановка всякой *задачи многокритериального выбора* включает

– множество возможных решений $X$,

– векторный критерий $f$ вида (1.1),

– отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений.

Само ЛПР в постановку задачи многокритериального выбора не включено. В этом нет необходимости. Подразумевается, что все его устремления, вкусы, пристрастия и предпочтения, оказывающие влияние на процесс выбора, «материализованы» в терминах векторного критерия и отношения предпочтения.

Следует, однако, заметить, что приведенный список основных компонентов задачи многокритериального выбора в дальнейшем при необходимости может быть расширен за счет добавления каких-то новых объектов, с помощью которых дополнительно удастся учесть интересы, мотивацию и пристрастия ЛПР.

Приведенная выше задача многокритериального выбора сформулирована в терминах решений. Нередко данную задачу формулируют в терминах векторов. В таком случае она содержит два объекта:

– множество возможных векторов $Y$, $Y \subset R^m$,

– отношение предпочтения $\succ_Y$, заданное на множестве возможных векторов.

## 1.2. Бинарные отношения

**1. Определение бинарного отношения**. Для описания и изучения введенного выше отношения предпочтения существует специальное математическое понятие — бинарное отношение. Настоящий раздел содержит вспомогательный математический аппарат, связанный с бинарными отношениями. Читатель, знакомый с бинарными отношениями, может бегло просмотреть его и переходить к следующему разделу.

Прежде всего, напомним понятие декартова произведения двух множеств. Пусть имеются два произвольных множества $A$ и $B$. *Декартовым произведением* этих множеств называется множество, обозначаемое $A \times B$ и определяемое равенством

$$A \times B = \{(a, b) \mid \text{при некоторых } a \in A,\ b \in B\}.$$

Иными словами, декартово произведение образуется из всех возможных пар элементов данных двух множеств, причем первым элементом пары является элемент первого множества, а вторым — элемент второго множества.

Например, декартово произведение двух конечных числовых множеств $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$ содержит шесть элементов и имеет вид

$$A \times B = \{((1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (2, 4)\}.$$

Перейдем к определению бинарного отношения. *Бинарным отношением* $\Re$, заданным на множестве $A$, называется подмножество декартова произведения $A \times A$, т. е. $\Re \subset A \times A$. Другими словами, всякое множество пар, составленных из элементов множества $A$, образует некоторое бинарное отношение. В частности, самым «широким» бинарным отношением является множество $\Re = A \times A$, совпадающее с данным декартовым произведением.

Если имеет место включение $(a, b) \in \Re$, то обычно пишут $a \Re b$ и говорят, что *элемент $a$ находится в отношении $\Re$ с элементом $b$.*

Заметим, что в общем случае из $a \Re b$ не следует выполнение соотношения $b \Re a$.



Приведем примеры некоторых бинарных отношений. Из курса арифметики известен целый ряд бинарных отношений, определенных на множестве вещественных чисел: $=$, $\geqq$, $\leqq$, $>$ и $<$. В теории множеств рассматривается бинарное отношение включения $\subset$, заданное на множестве всех подмножеств некоторого фиксированного множества.

Введем следующие активно используемые в дальнейшем изложении бинарные отношения для произвольных векторов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ пространства $R^m$:

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a_i > b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$a \geqq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geqq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a \geqq b \quad \text{и} \quad a \neq b.$$

Выполнение последнего соотношения $a \geq b$ означает, что каждая компонента вектора $a$ больше либо равна соответствующей компоненты вектора $b$, причем хотя бы одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

**2. Типы бинарных отношений**. В зависимости от свойств, которыми обладают бинарные отношения, производят их типизацию. Приведем определения некоторых распространенных типов бинарных отношений.

Бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве $A$, называют

– *рефлексивным*, если соотношение $a \Re a$ имеет место для всех $a \in A$;

– *иррефлексивным*, если соотношение $a \Re a$ не выполняется ни для одного $a \in A$;

– *симметричным*, если всякий раз из выполнения соотношения $a \Re b$ для элементов $a, b \in A$ следует выполнение соотношения $b \Re a$;

– *асимметричным*, если из выполнения соотношения $a \Re b$ для элементов $a, b \in A$ всегда следует, что соотношение $b \Re a$ места не имеет;

– *антисимметричным*, если всякий раз из выполнения соотношений $a \Re b$, $b \Re a$ для элементов $a, b \in A$ вытекает равенство $a = b$;

– *транзитивным*, если для любой тройки элементов $a, b, c \in A$ из выполнения соотношений $a \Re b$, $b \Re c$ всегда следует справедливость соотношения $a \Re c$;

– *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если для любых трех элементов $a, b, c \in A$ и произвольного положительного числа $\alpha$ из выполнения соотношения

$a \Re b$ всегда вытекает соотношение $(\alpha \cdot a + c) \Re (\alpha \cdot b + c)$ (здесь считается, что $A = R^m$);

– *полным*, если для любой пары элементов $a, b \in A$ выполняется соотношение $a \Re b$, или соотношение $b \Re a$, или оба эти соотношения одновременно;

– *частичным*, если это отношение не является полным.

Отношения равенства $=$ и нестрогого неравенства $\geqq$ дают примеры рефлексивных, а отношение строгого неравенства $>$ и отношение $\geq$ — иррефлексивных отношений на $R^m$. Отношения равенства и нестрогого неравенства являются симметричным и антисимметричными, а отношения $>$ и $\geq$ — асимметричны. Все отношения $=$, $\geq$, $>$, $\geqq$ транзитивны и инвариантны относительно линейного положительного преобразования. Отношения равенства и отношение строгого неравенства, очевидно, являются частичными. Отношение нестрогого неравенства $\geqq$, рассматриваемое на множестве чисел, является полным, потому, что для любых двух чисел $a$ и $b$ выполнено $a \geqq b$, либо $b \geqq a$, либо оба эти неравенства одновременно. Если же отношения нестрогого неравенства рассмотреть на множестве векторов $R^m$ при $m > 1$, то оно окажется лишь частичным.

Нетрудно проверить, что *всякое асимметричное отношение иррефлексивно.*

⮝ Действительно, если, напротив, некоторое асимметричное отношение $\Re$ не является иррефлексивным, то для некоторого $a \in A$ выполнено соотношение $a \Re a$. Но благодаря асимметричности данного отношения последнее соотношение не должно иметь места. Полученное противоречие устанавливает иррефлексивность $\Re$.⮟

**3. Отношения порядка**. Комбинации некоторых типов бинарных отношений играют важную роль в последующем изложении. Введем соответствующие определения.

Бинарное отношение $\Re$, заданное на множестве $A$, называют

– *порядком* (*отношением порядка*), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно;

– *строгим порядком* (*отношением строгого порядка*), если оно является иррефлексивным и транзитивным;

– *линейным порядком*, если оно является полным порядком.

Из определений следует, что строгий порядок и линейный порядок являются представителями отношений порядка.

Отношение нестрогого неравенства $\geqq$ на множестве вещественных чисел представляет собой линейный порядок, тогда как на множестве векторов это отношение будет лишь частичным.



Отношение $\geq$, рассматриваемое на множестве векторов, является строгим частичным порядком.

**Лемма 1.1.** *Всякое отношение строгого порядка является асимметричным.*

⮝ Предположим противное: некоторое отношение $\Re$ иррефлексивно и транзитивно, но не является асимметричным. Это означает, что найдется пара элементов $a, b \in A$, для которой выполнены соотношения $a \Re b$ и $b \Re a$ одновременно. На основании транзитивности отсюда следует $a \Re a$, что несовместимо с условием иррефлексивности отношения $\Re$.⮟

Еще один пример строгого порядка, заданного на пространстве $R^m$, дает лексикографическое отношение порядка, задаваемое следующим образом. Вектор $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)$ *лексикографически больше* вектора $y'' = (y''_1, y''_2, \ldots, y''_m)$ тогда и только тогда, когда выполнено какое-либо одно из следующих условий

1) $y'_1 > y''_1$;

2) $y'_1 = y''_1,\ \ y'_2 > y''_2$;

3) $y'_1 = y''_1,\ \ y'_2 = y''_2,\ \ y'_3 > y''_3$;

..............................................

m) $y'_i = y''_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, m-1;\ \ y'_m > y''_m$.

Нетрудно понять, что любые два вектора пространства $R^m$ либо равны друг другу, либо один из них лексикографически больше другого вектора.

### 1.3. Множество недоминируемых решений

**1. Требование, предъявляемое к отношению предпочтения**. Рассмотрим задачу многокритериального выбора, включающую множество возможных решений $X$, векторный критерий $f$ и отношение предпочтения $\succ_X$. Поскольку отношение предпочтения задается на парах возможных решений, то, как нетрудно понять, оно представляет собой некоторое бинарное отношение.

Предположим, что ЛПР в процессе выбора ведет себя достаточно «разумно» и обсудим требования, которым в таком случае должно удовлетворять его бинарное отношение предпочтения.

Прежде всего, следует напомнить, что отношение предпочтения $\succ_X$ по своей сути является отношением строгого предпочтения в том смысле, что выполнение соотношения $x \succ_X x$ невозможно ни для какого решения $x \in X$, поскольку ни одно решение не может быть строго предпочтительнее самого себя. В терминах бинарных отношений, рассмотренных в предыдущем разделе, это означает, что отношение предпочтения должно быть иррефлексивным. Тем самым, далее при изучении задач выбора будут рассматриваться только такие отношения предпочтения, на которые наложено требование иррефлексивности.

Рассмотрим ситуацию, когда одно решение предпочтительнее второго, а оно, в свою очередь, предпочтительнее некоторого третьего решения. В таком положении здравомыслящий человек при сравнении первого и третьего решения всегда выберет первое. Здесь происходит примерно то же самое, что и при сравнении чисел с помощью отношения строгого неравенства. Например, если $5 > 3$ и $3 > 1$, то непременно выполнено $5 > 1$. В терминах возможных решений это свойство может быть сформулировано следующим образом: для любой тройки возможных решений $x'$, $x''$, $x'''$ из выполнения соотношений $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'''$ обязательно следует справедливость соотношения $x' \succ_X x'''$. На языке бинарных отношений это означает, что отношение предпочтения, используемое в задачах многокритериального выбора, должно быть подчинено требованию транзитивности.

В соответствии с приведенными рассуждениями сформулируем условие (требование), которому должны удовлетворять все рассматриваемые в данной книге бинарные отношения предпочтения.

*Отношение предпочтения $\succ_X$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, представляет собой строгий порядок, т. е. является иррефлексивным и транзитивным.*

На основании леммы 1.1 отношение предпочтения, удовлетворяющее данному требованию, обязательно будет асимметричным.

Забегая вперед, отметим, что последующее принятие аксиомы 2 (см. разд. 1.4) автоматически влечет выполнение сформулированного выше требования.

**2. Множество недоминируемых решений**. Как указано в разд. 1.1, решение задачи многокритериального выбора заключается в отыскании множества выбираемых решений $\mathrm{Sel}\,X$. Выясним, каким образом сведения об отношении предпочтения могут быть использованы в процессе решения задачи многокритериального выбора.

Рассмотрим два произвольных возможных решения $x'$ и $x''$. Для них имеет место один и только один случай из следующих трех:

– справедливо соотношение $x' \succ_X x''$, а соотношение $x'' \succ_X x'$ не выполняется;

– справедливо соотношение $x'' \succ_X x'$, а соотношение $x' \succ_X x''$ не выполняется;



– не выполняется ни соотношение $x' \succ_X x''$, ни соотношение $x'' \succ_X x'$.

Заметим, что четвертый случай, когда оба участвующих здесь соотношения $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'$ выполняются, невозможен благодаря асимметричности отношения предпочтения $\succ_X$.

В первом указанном выше случае, т. е. при выполнении соотношения $x' \succ_X x''$, говорят, что решение $x'$ *доминирует* решение $x''$ (по отношению $\succ_X$). Во втором случае $x''$ *доминирует* $x'$. Если же реализуется третий случай, то говорят, что решения $x'$ и $x''$ *не сравнимы* по отношению предпочтения.

Вернемся к задаче выбора. Пусть для некоторого возможного решения $x''$ найдется такое возможное решение $x'$, что выполнено соотношение $x' \succ_X x''$. По определению отношения предпочтения это означает, что из данной пары решений ЛПР выберет первое решение. Тогда второе решение $x''$ не может быть выбранным из данной пары $x''$ и $x'$, так как это означало бы выполнение соотношения $x'' \succ_X x'$, противоречащее вместе с $x' \succ_X x''$ условию асимметричности отношения $\succ_X$. Сказанное в терминах множества выбираемых решений можно выразить в виде следующей эквивалентности

$$x' \succ x'' \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sel}\,\{x', x''\} = \{x'\}$$

для $x', x'' \in X$.

Если второе решение $x''$ не выбирается из пары в силу того, что для него в этой паре есть лучшее решение, то, рассматривая $x''$ в пределах всего множества возможных решений $X$, разумно предположить, что решение $x''$ в таком случае не может быть выбранным и из всего множества возможных решений, так как для него в $X$ существует, по крайней мере, одно заведомо более предпочтительное решение $x'$.

Приведенные рассуждения показывают, что при выборе первого решения из пары $x'$, $x''$ естественно считать, что второе решение не может оказаться выбранным и из всего множества возможных решений $X$. Тем самым, всюду далее будет предполагаться выполненным следующее требование, которое выразим в виде следующей аксиомы.

**Аксиома 1** (исключение доминируемых решений). *Если для некоторой пары решений $x', x'' \in X$ имеет место соотношение* [1]) $x' \succ_X x''$, то $x'' \notin \mathrm{Sel}\,X$.

[1]) Можно показать (см.[22]), что *обратное условие Кондорсе* [1] влечет выполнение аксиомы 1, но не наоборот.

В аксиоме 1 участвует не только отношение предпочтения $\succ_X$, которым руководствуется ЛПР в процессе принятия решений, но и множество $\operatorname{Sel} X$. Это означает, что данное требование следует рассматривать как определенное ограничение на множество выбираемых решений. А именно, любое множество выбираемых решений не должно содержать ни одного такого решения, для которого может найтись более предпочтительное решение. Более точно и полно этот факт будет выражен далее в лемме 1.2.

Нетрудно привести простой содержательный пример, в котором аксиома исключения не выполняется. Рассмотрим задачу выбора из трех возможных претендентов на два вакантных места. При этом считается, что оба вакантных места обязательно должны быть заполнены. Предположим, что при сравнении претендентов выяснилось, что первый является предпочтительнее второго и третьего, а второй предпочтительнее третьего. Поскольку согласно условию из трех кандидатов обязательно следует выбрать двоих, то, очевидно, ими окажутся первый и второй. Таким образом, второй претендент из пары первых двух не выбирается, тем не менее из всего множества трех возможных претендентов он оказывается выбранным. Следовательно, аксиома исключения доминируемых решений в этом примере нарушается.

В соответствии с аксиомой 1 любое доминируемое решение следует исключать из списка решений, претендующих на роль выбираемых. Исключение всех доминируемых решений приводит к множеству, которое играет важную роль в дальнейшем изложении.

*Множество недоминируемых решений* [1]) обозначается $\operatorname{Ndom} X$ и определяется равенством

$$\operatorname{Ndom} X = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{ что } x \succ_X x^*\}.$$

Таким образом, $\operatorname{Ndom} X$ представляет собой определенное подмножество множества возможных решений $X$. В зависимости от вида множества $X$ и конкретного типа отношения предпочтения $\succ_X$ множество недоминируемых решений может

– быть пустым, т. е. не содержать ни одного решения;
– состоять в точности из одного решения;
– содержать некоторое конечное число решений;
– состоять из бесконечного числа решений.

[1]) Напоминаем, что здесь отношение предпочтения $\succ_X$ предполагается иррефлексивным и транзитивным. При этом заметим, что на самом деле для введения множества недоминируемых решений достаточно требовать от отношения предпочтения лишь свойства асимметричности.



**Лемма 1.2.** *Для любого непустого множества выбираемых решений* $\operatorname{Sel} X$, *удовлетворяющего аксиоме* 1, *справедливо включение*

$$\operatorname{Sel} X \subset \operatorname{Ndom} X. \tag{1.2}$$

⮝ Если предположить, что включение (1.2) для некоторого непустого множества $\operatorname{Sel} X$ не имеет места, то среди элементов этого множества найдется решение $x'' \in \operatorname{Sel} X$, для которого выполнено соотношение $x'' \notin \operatorname{Ndom} X$. Тогда, по определению множества недоминируемых решений, существует такое решение $x' \in X$, что $x' \succ_X x''$. Отсюда, используя аксиому 1, получаем $x'' \notin X$. Это противоречит начальному предположению о том, что $x''$ — выбранное решение.⮟

**Замечание.** В формулировке леммы 1.2 утверждается, что включение 1.2 выполняется для произвольного непустого множества выбираемых решений. Если $\operatorname{Sel} X = \varnothing$, то включение (1.2) также имеет место, поскольку, как принято в теории множеств, пустое множество содержится в качестве подмножества в любом множестве. Поэтому условие непустоты множества выбираемых решений в формулировке леммы 1.2 можно было бы опустить; при этом справедливость рассматриваемой леммы не нарушается. Но тогда при доказательстве следовало бы специально оговаривать этот «вырожденный» случай, который с практической точки зрения интереса не представляет (если нет выбора, то и нет смысла изучать законы такого выбора). По этой причине здесь и всюду далее в подобных ситуациях, когда речь пойдет о включениях, содержащих множество выбираемых решений (или множество выбираемых векторов), мы будем подчеркивать непустоту этих множеств, чтобы сразу исключить из рассмотрения бессодержательные с практической точки зрения случаи.

Включение (1.2) устанавливает, что для достаточно широкого класса задач (а именно, для тех задач, для которых выполнена аксиома 1): ***выбор решений следует производить только среди недоминируемых решений***. Кроме того, поскольку все последующие требования (аксиомы), предъявляемые к рассматриваемому здесь классу задач многокритериального выбора, как мы увидим далее, не содержат множества выбираемых решений (и выбираемых векторов), включение (1.2) показывает, что выбранным может оказаться любое подмножество множества недоминируемых решений.

Когда $\operatorname{Sel} X \neq \varnothing$ и множество недоминируемых решений состоит из единственного элемента, задача выбора в принципе решена, поскольку это единственное недоминируемое решение в силу включения (1.2) является выбираемым решением и остается только найти его. Следует, однако, заметить, что подобного рода ситуации в практике встречаются крайне редко. Чаще всего, тех сведений, которые имеются об отношении предпочтения, оказывается недостаточно не только для нахождения множества выбираемых решений, но и для построения множества недоминируемых решений.

Тем не менее, даже неполные, фрагментарные сведения об отношении предпочтения ЛПР позволяют из всего множества возможных решений исключить доминируемые решения (как заведомо непригодные для выбора) и, тем самым, упростить последующий выбор.

Наряду с множеством недоминируемых решений удобно ввести в рассмотрение *множество недоминируемых векторов* (*недоминируемых оценок*)

$$\operatorname{Ndom} Y = f(\operatorname{Ndom} X) =$$
$$= \{f(x^*) \in Y \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{ что } x \succ_X x^*\} =$$
$$= \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \succ_Y y^*\}.$$

Для введенного множества недоминируемых векторов аксиому 1 и лемму 1.2 можно переформулировать следующим образом.

**Аксиома 1** (исключение доминируемых векторов). *Если для некоторой пары векторов $y', y'' \in Y$ выполнено соотношение $y' \succ_Y y''$,* то $y'' \notin \operatorname{Sel} Y$.

**Лемма 1.2.** (в терминах оценок). *Для любого непустого множества выбираемых векторов* Sel $Y$, *удовлетворяющего аксиоме* 1, *справедливо включение*

$$\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom} Y.$$

**3. Алгоритм построения множества недоминируемых решений**. В предыдущем пункте была отмечена важная роль множества недоминируемых решений (и векторов) в теории принятия решений. Последующее изложение книги позволит еще не раз убедиться в справедливости этого высказывания. По этой причине следует иметь в распоряжении какой-нибудь метод или алгоритм построения множества недоминируемых решений (и векторов).

В общем случае вопрос построения множества недоминируемых решений и/или векторов представляется чрезвычайно сложным, однако для конечного множества возможных решений $X$ (множества возможных векторов $Y$) он решается достаточно просто.

Итак, пусть множество возможных решений $X$ состоит из конечного числа элементов, а отношение предпочтения является



иррефлексивным и транзитивным. Для построения множества недоминируемых решений Ndom $X$ прежде всего следует перенумеровать все возможные решения. Пусть, например,

$$X = X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

*Первый шаг* алгоритма нахождения множества недоминируемых решений заключается в последовательном сравнении первого решения $x_1$ со всеми остальными $x_2, \dots, x_n$. Это сравнение заключается в проверке справедливости соотношения $x_1 \succ_X x_i$ и соотношения $x_i \succ_X x_1$ при каждом $i = 2, \dots, n$.

В случае истинности для некоторого $i$ первого соотношения $x_1 \succ_X x_i$, доминируемое решение $x_i$ следует удалить из множества $X_1$ и продолжить указанную проверку для следующего за $x_i$ решения.

При выполнении второго соотношения $x_i \succ_X x_1$ удалению подлежит первое решение $x_1$, после чего сразу же следует перейти ко второму шагу. Если же ни одно из двух приведенных соотношений $x_1 \succ_X x_i$ и $x_i \succ_X x_1$ не является истинным, ничего удалять не нужно. В том случае, когда сравнения решения $x_1$ были проведены со всеми остальными решениями $x_2, \dots, x_n$, и ни для какого $i = 2, \dots, n$ не оказалось выполненным соотношение $x_i \succ_X x_1$, первое решение следует запомнить как недоминируемое и удалить его из (оставшегося) множества возможных решений. Указанные действия описывают первый шаг алгоритма.

Если после выполнения первого шага во множестве возможных решений не осталось ни одного решения (т. е. все оказались удаленными), то алгоритм заканчивает работу. При этом в памяти будет храниться одно недоминируемое решение $x_1$. Оно и представляет собой множество недоминируемых решений. В противном случае (т. е. когда не все решения оказались удаленными), необходимо перейти ко второму шагу.

Обозначим множество, оставшееся после выполнения первого шага $X_2$.

*Второй шаг* полностью аналогичен первому. А именно, сначала нужно перенумеровать элементы множества $X_2$. После этого следует провести последовательное сравнение первого решения этого множества со всеми остальными его элементами. При этом сравнение осуществляется совершенно аналогично тому, как это было описано на первом шаге. Выполнение сравнений на втором шаге либо закончится удалением первого решения множества $X_2$, как доминируемого, либо такого удаления не произойдет. Во втором случае это решение следует запомнить как недоминируемое, а затем удалить его из множества $X_2$. Если после этого во множестве возможных решений не останется ни одного решения, то вычисления заканчиваются; в памяти будет храниться множество недоминируемых решений. В противном случае к оставшемуся непустому множеству возможных решений нужно применить аналогичный третий шаг алгоритма и т. д. В результате, после окончания работы алгоритма в памяти будет храниться множество всех недоминируемых решений [1]) $\mathrm{Ndom}\,X$.

На каждом шаге алгоритма происходит удаление, по крайней мере, одного возможного решения. Следовательно, после выполнения некоторого конечного числа шагов будут удалены все возможные решения кроме некоторого одного и алгоритм закончит свою работу, так как оставшееся решение не с чем будет сравнивать и потому оно также будет недоминируемым. Это рассуждение доказывает конечность приведенного алгоритма.

Применение описанного алгоритма к произвольному конечному множеству возможных решений за конечное число шагов приведет к отысканию, по крайней мере, одного недоминируемого решения. Действительно, недоминируемым запоминается лишь первое решение из множества, которое участвует в выполнении очередного шага алгоритма. Если на всех предыдущих шагах (кроме последнего) не было выявлено ни одного недоминируемого решения, то таковым должно быть последнее решение, поскольку его не может доминировать ни одно из всех остальных возможных решений. Тем самым, получен следующий результат.

**Теорема 1.1.** *Пусть множество возможных решений $X$ (множество возможных векторов $Y$) состоит из конечного числа элементов. Если отношение предпочтения $\succ_X$ является иррефлексивным и транзитивным, то множество возможных решений (векторов) содержит хотя бы одно недоминируемое решение (один недоминируемый вектор), т. е.* $\mathrm{Ndom}\,X \neq \varnothing$ ($\mathrm{Ndom}\,Y \neq \varnothing$).

Чаще всего в практических задачах выбора отношение предпочтения задано лишь частично, либо вообще не задано и его следует построить прежде, чем приступать к решению задачи. В таких случаях схему приведенного выше алгоритма можно использовать для опроса ЛПР с целью выявления его отношения предпочтения и одновременного построения множества недоминируемых решений. Для этого ЛПР сначала предлагают выбрать предпочтительное решение из каждой пары, содержащей первое решение. При этом доминируемые решения, по мере их выявления, сразу

[1]) Следует отметить, что это высказывание имеет место не только благодаря конечности множества возможных решений, но и вследствие транзитивности отношения предпочтения.



же удаляются. Далее, для сравнения предлагаются все пары, содержащие первое решение из множества, оставшегося после первого шага, и т. д.

Кроме того, необходимо отметить, что схема приведенного выше алгоритма может быть использована для построения множества Парето (см. следующий разд.).

## 1.4. Множество Парето

**1. Дальнейшие требования, предъявляемые к отношению предпочтения.** В постановке задачи многокритериального выбора имеется векторный критерий $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Каждая компонента $f_i$ векторного критерия, как правило, характеризует определенную цель ЛПР, а стремление достичь этой цели в математических терминах нередко выражается в условии максимизации (или минимизации) функции $f_i$ на множестве $X$.

Необходимо отметить, что в некоторых задачах могут встретиться критерии, которые не обязательно следует максимизировать или минимизировать. Например, иногда требуется получить некоторое среднее значение критерия или «удержать» его значения в определенных заданных пределах и т. п. В таких случаях более гибким инструментом являются не критерии $f_i$, а («частные») отношения предпочтения $\succ_i$ (см. [32, 33]). Однако, как установлено, например, в [32], во многих важных с практической точки зрения случаях (т. е. при некоторых «разумных» требованиях к $\succ_i$ и $X$) существует функция полезности $u_i$, адекватно описывающая данное «частное» отношение предпочтения: для всех $x', x'' \in X$ верна эквивалентность $x' \succ_i x'' \Leftrightarrow u_i(x') > u_i(x'')$. Эти результаты показывают, что многие задачи, в которых изначально не требуется максимизация (или минимизация) критериев, могут быть, по крайней мере теоретически, сведены к подобного рода экстремальным задачам [1]).

В соответствии со сказанным будем считать, что *ЛПР заинтересовано в получении по возможности бóльших значений каждой компоненты $f_i$ векторного критерия $f$.* В рамках многокритериальной задачи приходится ограничиваться уровнем строгости сформулированного допущения в том виде, в котором оно приведено выше. Однако внимательный анализ показывает его некоторую неопределенность, расплывчатость. Придадим обсуждаемому допущению строгую форму.

[1]) Следует заметить, что последующее изложение можно обобщить на случай «частных» отношений предпочтения.

Для этого перейдем к оценкам и напомним, каким образом определяется бинарное отношение $\succ_Y$, заданное на множестве возможных векторов $Y = f(X)$, $Y \subset R^m$:

$$f(x') \succ_Y f(x'') \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x'' \quad \text{для } x', x'' \in X.$$

Всюду далее будем считать выполненным следующее допущение, формулируемое в терминах векторов критериального пространства.

**Аксиома 2** (продолжение отношения предпочтения [1])). *Существует продолжение $\succ$ на все критериальное пространство $R^m$ отношения $\succ_Y$, причем это продолжение $\succ$ является иррефлексивным и транзитивным отношением.*

Суть этого требования (не считая обязательную иррефлексивность и транзитивность) заключается в постулировании «расширенных» возможностей ЛПР сравнивать оценки по предпочтительности. В соответствии с ним для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$ выполняется одно и только одно из следующих трех соотношений

– $y' \succ y''$;
– $y'' \succ y'$;
– не имеет места ни $y' \succ y''$, ни $y'' \succ y'$.

При этом отношение предпочтения $\succ$ на множестве возможных векторов $Y$ совпадает с отношением $\succ_Y$, которое самым непосредственным образом связано с отношением $\succ_X$.

Поскольку иррефлексивность и транзитивность отношения $\succ$ означает наличие аналогичных свойств у отношения $\succ_Y$, что, в свою очередь, влечет иррефлексивность и транзитивность отношения $\succ_X$, необходимость требования иррефлексивности и транзитивности отношения $\succ_X$ (см. п. 1 разд. 1.3) с данного момента отпадает. Это требование автоматически выполняется в условиях справедливости аксиомы 2.

**2. Согласование отношения предпочтения с критериями**. Совершенно очевидно, что в задаче многокритериального выбора отношение предпочтения, равно как и критерии оптимальности, выражают интересы одного и того же ЛПР. Поэтому они должны быть каким-то образом взаимосвязаны (сопряжены) друг с другом. Настало время обсудить эту взаимосвязь.

[1]) В этом требовании для обеспечения справедливости формулируемого ниже принципа Эджворта–Парето можно предполагать существование продолжения отношения $\succ$ не на все пространство $R^m$, а лишь на декартово произведение множеств, являющихся значениями имеющихся критериев (см. [20]).



Будем говорить, что $i$-й *критерий $f_i$ согласован с отношением предпочтения $\succ$*, если для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$, таких, что

$$y' = \left(y'_1, ..., y'_{i-1}, y'_i, y'_{i+1}, .., y'_m\right),$$

$$y'' = \left(y'_1, ..., y'_{i-1}, y''_i, y'_{i+1}, ..., y'_m\right), \quad y'_i > y''_i,$$

следует $y' \succ y''$.

Содержательно согласованность данного критерия с отношением предпочтения как раз и означает, что ЛПР при прочих равных условиях заинтересовано в получении по возможности больших значений этого критерия.

Взаимосвязь отношения предпочтения данного ЛПР с критериями оптимальности выразим в виде следующего требования.

**Аксиома 3** (согласование критериев с отношением предпочтения). *Каждый из критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ согласован с отношением предпочтения $\succ$.*

**3. Аксиома Парето**. Заинтересованность ЛПР в получении по возможности больших значений всех компонент векторного критерия $f$ можно также выразить в терминах так называемой аксиомы Парето [17, 26].

**Аксиома Парето** (в терминах решений). *Для всех пар решений $x', x'' \in X$, для которых имеет место неравенство $f(x') \geq f(x'')$, выполняется соотношение $x' \succ_X x''$.*

Напомним (см. разд. 1.3), что запись $f(x') \geq f(x'')$ означает выполнение покомпонентных неравенств $f_i(x') \geqq f_i(x'')$ для всех $i = 1, 2, ..., m$, причем $f(x') \neq f(x'')$.

**Лемма 1.3**. *Принятие аксиом 2 и 3 гарантирует выполнение аксиомы Парето.*

⮙ Пусть неравенство $f(x') \geq f(x'')$ справедливо для двух произвольных возможных решений $x', x'' \in X$. Не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что здесь строгие неравенства $f_k(x') > f_k(x'')$ имеют место для всех индексов $k = 1, ..., l$ при некотором $l \in \{1, 2, ..., m\}$. Для всех последующих индексов $k$, $k > l$ (при условии, что такие найдутся, т. е. при $l < m$), будем предполагать выполненными соответствующие равенства.

Используя согласованность первых $l$ критериев и указанные выше строгие неравенства, получаем

$$(f_1(x'), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')),$$

$$(f_1(x''), f_2(x'), \ldots, f_l(x'), \ldots, f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_l(x'), \ldots, f_m(x')),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_{l-1}(x''), f_l(x'), \ldots, f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_l(x''), f_{l+1}(x'), \ldots, f_m(x')).$$

Отсюда на основании транзитивности отношения $\succ$ следует

$$(f_1(x'), f_2(x'), \ldots, f_l(x'), \ldots, f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_l(x''), f_{l+1}(x'), \ldots, f_m(x')) \quad (1.3)$$

Благодаря сделанному в начале доказательства предположению имеют место равенства $f_k(x') = f_k(x'')$, $k = l+1, \ldots, m$. Поэтому соотношение (1.3) влечет

$$f(x') = (f_1(x'), f_2(x'), \ldots, f_l(x'), \ldots, f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_l(x''), \ldots, f_m(x'')) = f(x''),$$

откуда, в свою очередь, по определению отношения $\succ$ вытекает требуемое соотношение $x' \succ_X x''$. ⮟

**4. Множество Парето**. Если для некоторой пары возможных решений имеет место неравенство $f(x') \geq f(x'')$, то благодаря аксиоме Парето первое решение будет предпочтительнее второго, т. е. $x' \succ_X x''$. Тогда в соответствии с аксиомой 1 второе решение ни при каких обстоятельствах не может оказаться выбранным и его можно исключить из последующего учета в процессе принятия решений. Исключение всех подобного рода решений приводит к множеству Парето.

*Множество парето-оптимальных решений* обозначается $P_f(X)$ и определяется равенством

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{ что } f(x) \geq f(x^*)\}.$$

**Лемма 1.4**. *При выполнении аксиом* 2 *и* 3 *множество недоминируемых решений* Ndom $X$ *удовлетворяет включению*

$$\mathrm{Ndom}\, X \subset P_f(X). \quad (1.4)$$

⮝ Пусть, напротив, для некоторого недоминируемого решения $x \in \mathrm{Ndom}\, X$ выполнено соотношение $x \notin P_f(X)$. Тогда, по определению множества парето-оптимальных решений, существует такое возможное решение $x' \in X$, что $f(x') \geq f(x)$. На основании леммы 1.3 в условиях доказываемого утверждения справедлива аксиома Парето. Поэтому полученное неравенство, в силу аксиомы Парето, влечет соотношение $x' \succ_X x$, которое не совместимо с начальным предположением $x \in \mathrm{Ndom}\, X$. ⮟



Непосредственно из лемм 1.2 и 1.4 вытекает следующий принципиально важный для теории принятия решений результат.

**Теорема 1.2.** *В условиях выполнения аксиом* 1–3 *для любого непустого множества выбираемых решений* Sel $X$ *справедливо включение*

$$\mathrm{Sel}\, X \subset P_f(X). \quad (1.5)$$

Включение (1.5) выражает собой так называемый *принцип Эджворта–Парето* (*принцип Парето*), согласно которому

**если ЛПР ведет себя достаточно «разумно» (т. е. в соответствии с аксиомами 1–3), то выбираемые им решения обязательно являются парето-оптимальными**.

Этот принцип демонстрирует особую, исключительно важную роль множества парето-оптимальных решений в теории принятия решений.

Внимательный анализ доказательств приведенных утверждений, в совокупности приводящих к теореме 1.2, показывает, что если хотя бы одна из аксиом 1, 2 или 3 нарушается, то выбираемое решение не обязано быть парето-оптимальным [1]). Отсюда следует, что *принцип Эджворта–Парето не является универсальным*, т. е. применимым во всех без исключения задачах многокритериального выбора. Более того, на основе аксиом 1, 2 и 3 (точнее говоря, на основе отрицаний этих аксиом) при желании можно сделать определенный вывод и о том, в каких именно задачах этот принцип может «не работать».

Итак, применение этого принципа рискованно или же вообще недопустимо, если:

– отношение предпочтения, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, не является транзитивным;

– отношение предпочтения ЛПР не согласовано хотя бы с одним из критериев;

– не выбираемое из некоторой пары решение оказывается выбранным из всего множества возможных решений.

**5. Множество парето-оптимальных векторов.** Вектор $f(x^*)$ при парето-оптимальном решении $x^*$ называют *парето-оптимальным вектором* (*парето-оптимальной оценкой*) *решения* $x^*$ или просто *парето-оптимальным вектором*, а множество всех таких векторов — *множеством парето-оптимальных векторов* (*парето-оптимальных оценок*). Для этого множества используют обозначение $P(Y)$. Таким образом,

$$P(Y) = f(P_f(X)) = \{f(x^*) \in Y \mid \text{при некотором } x^* \in P_f(X)\},$$

[1]) Примеры подобного рода можно найти в [20].

где $Y$ так же, как и раньше, означает множество возможных векторов, т. е. $Y = f(X)$.

Равенство $P(Y) = f(P_f(X))$ естественным образом связывает множество парето-оптимальных решений и парето-оптимальных векторов. В соответствии с ним, зная множество парето-оптимальных решений, можно найти соответствующее множество парето-оптимальных векторов. Справедливо и, в определенном смысле обратное, утверждение. А именно, располагая множеством парето-оптимальных векторов $P(Y)$ по формуле $P_f = f^{-1}(P(Y))$, где в правой части равенства записан прообраз множества $P(Y)$, можно пытаться строить соответствующее множество парето-оптимальных решений. Таким образом, в идейном отношении эти два множества полностью определяют друг друга, хотя попытка построение одного из них на основе второго может натолкнуться на определенные вычислительные трудности (в большей степени это относится к построению множества парето-оптимальных решений).

Нетрудно понять, что множество парето-оптимальных векторов можно определить следующим эквивалентным образом:

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \geq y^*\}. \quad (1.6)$$

Сравнивая равенство (1.6) с аналогичным равенством из определения множества недоминируемых векторов, приведенным в разд. 1.3, нетрудно обнаружить их полное совпадение (не считая отношений $\succ_X$ и $\geq$). На основании этого совпадения множество парето-оптимальных векторов можно рассматривать как множество недоминируемых по отношению $\geq$ элементов множества $Y$.

Теорема 1.2 была сформулирована для решений. Ее можно переформулировать в терминах оценок. Тогда она примет следующий вид.

**Теорема 1.2** (в терминах векторов). *Пусть выполняются аксиомы* 1–3. *Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов* Sel $Y$ *имеет место включение*

$$\mathrm{Sel}\, Y \subset P(Y). \quad (1.7)$$

Ранее уже говорилось о том, что результаты, связанные с недоминируемыми решениями и векторами и рассмотренные в предыдущем разделе, могут быть переформулированы применительно к множествам Парето. В частности, теорема 1.1 после такой переформулировки принимает следующий вид.



**Теорема 1.3.** *В случае конечного множества возможных векторов $Y$ (в частности, если конечно множество возможных решений $X$) существует хотя бы одно парето-оптимальное решение и, соответственно, хотя бы один парето-оптимальный вектор, т. е. $P_f(X) \neq \varnothing$, $P(Y) \neq \varnothing$.*

Взаимосвязь между введенными выше различными подмножествами множества возможных решений при выполнении аксиом 1–3 в условиях справедливости лемм 1.2 и 1.4 имеет вид следующих включений

$$\mathrm{Sel}\, X \subset \mathrm{Ndom}\, X \subset P_f(X) \subset X. \quad (1.8)$$

Из четырех участвующих в соотношении (1.8) множеств самым широким является множество возможных решений, а самым узким — множество выбираемых решений. Наглядно эта взаимосвязь изображена на рис. 1.1.

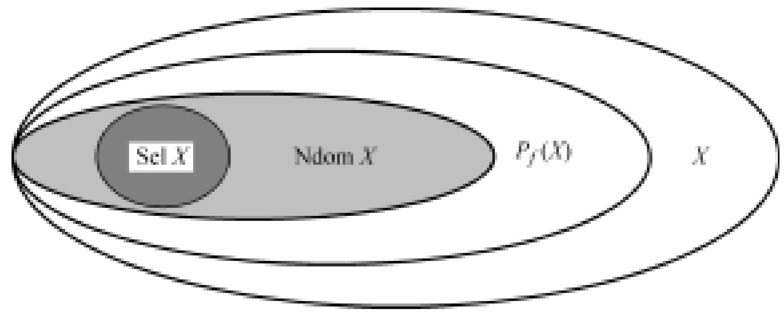


Рис. 1.1.

В терминах векторов включения (1.8) принимают вид

$$\mathrm{Sel}\, Y \subset \mathrm{Ndom}\, Y \subset P(Y) \subset Y. \quad (1.9)$$

**6. Алгоритм нахождения множества Парето**. Благодаря наличию указанной выше прямой связи между множествами недоминируемых и парето-оптимальных векторов все результаты, полученные ранее для первого множества, нетрудно переформулировать в терминах второго множества. В частности, для построения множества $P_f(X)$ (и $P(Y)$) в случае конечного множества возможных векторов $Y$ можно применять сформулированный в предыдущем разделе алгоритм нахождения множества недоминируемых решений, заменив в нем сравнение по отношению предпочтения $\succ_X$ сравнением по отношению $\geq$, которое является иррефлексивным и транзитивным.

Не станем заниматься изложением указанного алгоритма. Вместо этого приведем простой иллюстративный пример построения множества парето-оптимальных векторов в задаче с тремя критериями.

Таблица 1.1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $y^1$ | 4 | 0 | 3 | 2 |
| $y^2$ | 5 | 0 | 2 | 2 |
| $y^3$ | 2 | 1 | 1 | 3 |
| $y^4$ | 5 | 0 | 1 | 2 |
| $y^5$ | 3 | 1 | 2 | 3 |

**Пример 1.1**. Пусть $m = 4$ и $Y = \{y^1, y^2, \dots, y^5\}$, где возможные векторы, записанные в виде строк, представлены в табл. 1.1.

Сначала для отыскания множества парето-оптимальных векторов полагаем $P(Y) = Y$ и сравниваем первую оценку с остальными. При этом, как легко видеть, все пары

$$y^1, y^2; \quad y^1, y^3; \quad y^1, y^4; \quad y^1, y^5$$

оказываются несравнимыми по отношению $\geq$. Поэтому вектор $y^1$ запоминаем как парето-оптимальный и после этого удаляем его из множества $Y_1$.

Получаем множество $Y_2 = \{y^2, y^3, y^4, y^5\}$. На втором шаге сравниваем вектор $y^2$ с остальными элементами множества $Y_2$. Пара $y^2$, $y^3$ не сравнима по отношению $\geq$. Поскольку $y^2 \geq y^4$, вектор $y^4$ удаляем из множества $Y_2$. Оставшаяся пара векторов $y^2, y^5$ не сравнима по отношению $\geq$. Так как вектор $y^2$ оказался недоминируемым, то его следует запомнить как парето-оптимальный, а затем удалить из множества $Y_2$.

Приходим к множеству $Y_3 = \{y^3, y^5\}$. Поскольку $y^5 \geq y^3$, удаляется вектор $y^3$ и в результате остается один вектор $y^5$, который также является парето-оптимальным.

В итоге получено следующее множество парето-оптимальных векторов $P(Y) = \{y^1, y^2, y^5\}$.

Несколько иначе в удобном для программной реализации виде указанный алгоритм можно сформулировать следующим образом. Пусть множество возможных векторов $Y$ состоит из конечного числа $N$ элементов и имеет вид

$$Y = \{y^1, y^2, \dots, y^N\}.$$

*Алгоритм построения множества парето-оптимальных векторов* $P(Y)$ состоит из следующих семи шагов.

*Шаг* 1. Положить $P(Y) = Y$, $i = 1$, $j = 2$. Тем самым образуется так называемое *текущее множество парето-оптимальных векторов*, которое в начале работы алгоритма совпадает с множеством $Y$, а в конце — составит искомое множество парето-оптимальных векторов. Алгоритм устроен таким образом, что искомое множество парето-оптимальных векторов получается из $Y$ последовательным удалением заведомо неоптимальных векторов.



*Шаг* 2. Проверить выполнение неравенства $y^i \geq y^j$. Если оно оказалось истинным, то перейти к Шагу 3. В противном случае перейти к Шагу 5.

*Шаг* 3. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор $y^j$, так как он не является парето-оптимальным. Затем перейти к Шагу 4.

*Шаг* 4. Проверить выполнение неравенства $j < N$. Если оно имеет место, то положить $j = j + 1$ и вернуться к Шагу 2. В противном случае — перейти к Шагу 7.

*Шаг* 5. Проверить справедливость неравенства $y^j \geq y^i$. В том случае, когда оно является истинным, перейти к Шагу 6. В противном случае — вернуться к Шагу 4.

*Шаг* 6. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор $y^i$ и перейти к Шагу 6.

*Шаг* 7. Проверить выполнение неравенства $i < N - 1$. В случае истинности этого неравенства следует последовательно положить $i = i + 1$, а затем $j = i + 1$. После этого необходимо вернуться к Шагу 2. В противном случае (т. е. когда $i \geqq N - 1$) вычисления закончить. Множество парето-оптимальных векторов построено полностью.

**7. Геометрия множества Парето в случае двух критериев**. Рассмотрим простейший случай, когда число критериев равно двум, т. е. $m = 2$. В этом случае множество $Y$ представляет собой некоторое множество точек на плоскости.

Все точки $y$, для которых выполняется неравенство $y \geq y^*$, составляют угол с вершиной в точке $y^*$ и сторонами, параллельными координатным осям. При этом сама вершина $y^*$ этому углу не принадлежит, так как $y \neq y^*$ (см. рис. 1.2).

Рассмотрим пример, в котором множество возможных точек $Y$ имеет вид замкнутой ограниченной фигуры, изображенной на рис. 1.3.

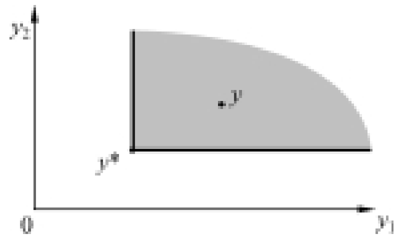


Рис. 1.2.

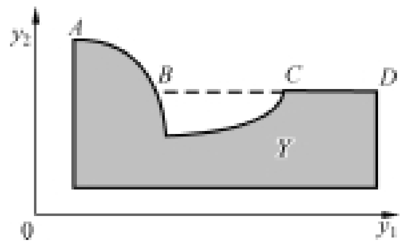


Рис. 1.3.

Для того чтобы построить множество парето-оптимальных точек $P(Y)$, можно воспользоваться геометрическим соображением, заимствованным из рис. 1.2. А именно, по определению парето-оптимального вектора $y^*$ для него не должно существовать такой точки $y$, что выполняется неравенство $y \geq y^*$. Геометрически все такие точки $y$ представляют собой угол с вершиной в $y^*$. Следовательно, точка $y^* \in Y$ парето-оптимальна тогда и только тогда, когда соответствующий угол, имеющий вершину в точке $y^*$ и стороны, параллельные координатным осям, не содержит ни одной точки множества возможных векторов $Y$. Отсюда ясно, что ни одна внутренняя точка множества $Y$ не может быть парето-оптимальной. А из граничных точек множества возможных точек $Y$ на роль парето-оптимальных могут претендовать лишь те, которые располагаются в ее «северо-восточной» части (т. е. линия $ABCD$). При этом та часть границы, которая находится в «провале» (имеется в виду дуга $BC$) также не может принадлежать множеству Парето. Наконец, из частей северо-восточной границы, которые параллельны координатным осям, парето-оптимальными могут быть лишь крайние точки — среди точек отрезка $CD$ таковой будет точка $D$. В итоге приходим к следующему множеству парето-оптимальных точек — это дуга $AB$ (без точки $B$) и отдельная точка $D$.

В случае, когда число критериев три и более, указанным геометрическим путем множество парето-оптимальных точек построить не удастся. Тем не менее, к настоящему времени разработаны современные *методы визуализации* (графического представления данных на экране компьютера), позволяющие для относительно небольших $m$ получить наглядное представление о множестве возможных и множестве парето-оптимальных векторов [12].

Глава 2

# ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВАЖНОСТЬ ДЛЯ ДВУХ КРИТЕРИЕВ

В этой главе закладываются основы теории относительной важности критериев. Прежде всего, дается определение понятия относительной важности для двух критериев и изучаются его простейшие свойства. Центральный результат главы — теорема 2.5, которая показывает, каким образом информацию о том, что один критерий важнее другого критерия с заданным коэффициентом относительной важности, можно использовать для сужения множества Парето.

Здесь также обсуждаются различные типы шкал и обосновывается применимость упомянутой теоремы 2.5 к любым задачам многокритериального выбора с критериями, значения которых измеряются в произвольных количественных шкалах.

## 2.1. Определение и свойства относительной важности

**1. Исходная задача многокритериального выбора**. Последующее рассмотрение будет посвящено задаче многокритериального выбора, включающей

– множество возможных решений $X$;

– векторный критерий $f = \left(f_1, f_2, ..., f_m\right)$;

– отношение предпочтения $\succ_X$.

Следует отметить, что многие вопросы приобретают более простой вид, если их формулировать и решать в терминах векторов. Как было отмечено в предыдущей главе, практически все результаты, полученные в терминах решений, можно легко переформулировать в терминах векторов и обратно. Поэтому в дальнейшем изложении часто будет рассматриваться *задача многокритериального выбора в терминах векторов*, содержащая

– множество возможных векторов $Y$, $Y \subset R^m$,

– отношение предпочтения $\succ$, заданное на пространстве $R^m$.

Напомним, что множество возможных векторов определяется равенством

$$Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\},$$

а отношение предпочтения $\succ$ представляет собой продолжение на все пространство $R^m$ отношения предпочтения $\succ_Y$, естественным образом

$$f(x') \succ_Y f(x'') \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x'' \quad \text{для } x',\ x'' \in X$$

связанного с отношением предпочтения $\succ_X$, заданном на множестве возможных решений $X$.

Всюду далее будем предполагать выполненными аксиомы 1–3, сформулированные в предыдущей главе. В этих условиях

– отношение $\succ$, заданное на всем критериальном пространстве $R^m$, иррефлексивно и транзитивно (а значит, асимметрично);

– выполняется аксиома Парето (в терминах векторов), согласно которой для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, таких что [1]) $y' \geq y''$, имеет место соотношение $y' \succ y''$, т. е.

$$y' \geq y'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''. \tag{2.1}$$

ЛПР имеет возможность сравнивать любые два вектора $y', y''$ критериального пространства $R^m$ с помощью иррефлексивного и транзитивного отношения $\succ$. При этом может реализоваться один и только один из следующих трех случаев

– $y' \succ y''$, т. е. $y'$ предпочтительнее $y''$;

– $y'' \succ y'$, т. е. $y''$ предпочтительнее $y'$;

– не выполняется ни соотношение $y' \succ y''$, ни соотношение $y'' \succ y'$.

Иначе говоря, ЛПР из произвольной пары векторов может выбрать первый вектор, либо второй. Реализация третьего случая (несравнимость по отношению $\succ$) означает либо отказ от выбора (когда из двух данных векторов ни один не выбирается), либо полный выбор (в этом случае оба вектора оказываются выбранными).

**2. Мотивация основного определения**. Введем множество номеров критериев

$$I = \{1, 2, \ldots, m\}$$

и рассмотрим наиболее простую задачу выбора из двух векторов $y', y'' \in R^m$ с минимальным числом различных компонент.

Если векторы $y'$ и $y''$ имеют лишь одну различную компоненту, например, $y'_i \neq y''_i$ и $y'_s = y''_s$ для всех $s \in I \setminus \{i\}$, то справедливо соотношение $y' \geq y''$, либо $y'' \geq y'$. Отсюда, на основании аксиомы 3, соответственно следует $y' \succ y''$ либо $y'' \succ y'$.

[1]) Напомним, что справедливость неравенства $y' \geq y''$ означает одновременное выполнение неравенств $y' \geqq y''$, $y' \neq y''$.



Таким образом, в данном простейшем случае выбор из двух векторов однозначно определяется аксиомой 3.

Теперь предположим, что векторы $y'$ и $y''$ имеют не одну, а две различные компоненты:

$$y'_i \neq y''_i,\ \ y'_j \neq y''_j;\ \ y'_s = y''_s \ \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$

причем одновременное выполнение равенств $y'_i = y'_j$, $y''_i = y''_j$ невозможно. Тогда реализуется один и только один из следующих четырех случаев:

1) $y'_i > y''_i,\ y'_j > y''_j$; 2) $y''_i > y'_i,\ y''_j > y'_j$;

3) $y'_i > y''_i,\ y''_j > y'_j$; 4) $y''_i > y'_i,\ y'_j > y''_j$.

Предположим, что ЛПР из двух данных векторов сделало свой выбор, т. е. имеет место одно и только одно их следующих двух соотношений: $y' \succ y''$ или $y'' \succ y'$. Без ограничения общности в силу симметричности можно считать, что верно первое соотношение $y' \succ y''$. Спрашивается, каким образом можно объяснить сделанный ЛПР выбор?

Если реализовался первый из указанных выше четырех случаев, то истинность соотношения $y' \succ y''$ вытекает из аксиомы Парето. Второй вариант невозможен, так как в этом случае благодаря аксиоме Парето выполнено соотношение $y'' \succ y'$, несовместимое в силу асимметричности $\succ$ с соотношением $y' \succ y''$.

Рассмотрим оставшиеся две возможности. В силу симметричности двух последних вариантов ограничимся рассмотрением третьего. Выполнение неравенства $y'_i > y''_i$ означает, что с точки зрения $i$-го критерия вектор $y'$ для ЛПР более предпочтителен, чем $y''$. С другой стороны, с точки зрения $j$-го критерия в силу $y''_j > y'_j$ вектор $y'$ предпочтительнее вектора $y''$. В итоге имеется два взаимопротиворечивых условия и возникает вопрос: почему в указанной ситуации наличия противоречащих друг другу высказываний все-таки был сделан выбор в пользу вектора $y'$ против $y''$? Что послужило причиной такого выбора?

По-видимому, одним из наиболее разумных объяснений этому факту может служить следующее: в рассматриваемом противоречивом случае $i$-й критерий для ЛПР был важнее $j$-го критерия и поэтому, несмотря на «проигрыш» по менее важному $j$-му критерию при выборе $y'$, этот вектор был признан более предпочтительным, чем $y''$, так как он приводит к «выигрышу» по более важному $i$-му критерию при условии равенства всех остальных компонент.

Рассуждая аналогичным образом, можно прийти к выводу, что при выборе первого из данной пары векторов (т. е. при выполнении $y' \succ y''$) в случае реализации четвертой из указанных выше ситуаций $y''_i > y'_i$, $y'_j > y''_j$ для ЛПР $j$-й критерий оказался важнее $i$-го критерия.

**3. Определение относительной важности**. Приведенные выше рассуждения, относящиеся к простейшей задаче выбора из произвольной пары векторов, логически обосновывают введение следующего определения, которое будет играть основополагающую роль в дальнейшем изложении.

**Определение 2.1.** Пусть $i, j \in I$, $i \neq j$. Будем говорить, что *$i$-й критерий важнее $j$-го критерия с заданными положительными параметрами* $w_i^*$, $w_j^*$, если для всех векторов $y', y'' \in R^m$, для которых выполняется

$$y'_i > y''_i,\ \ y''_j > y'_j,\ \ y'_s = y''_s \quad \text{для всех} \quad s \in I \setminus \{i, j\};$$
$$y'_i - y''_i = w_i^*,\ \ y''_j - y'_j = w_j^*,$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Иначе говоря, для ЛПР $i$-й критерий важнее $j$-го, если всякий раз при выборе из пары векторов ЛПР готово пожертвовать определенным количеством $w_j^*$ по менее важному $j$-му критерию ради получения дополнительного количества $w_i^*$ по более важному $i$-му критерию при условии сохранения всех остальных значений критериев.

При этом соотношение между числами $w_i^*$ и $w_j^*$ позволяет количественно оценить указанную степень важности. Введем соответствующее определение.

**Определение 2.2**. Пусть $i, j \in I$, $i \neq j$, и $i$-й критерий важнее $j$-го критерия с положительными параметрами $w_i^*$ и $w_j^*$. В этом случае положительное число

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*}$$

будем называть *коэффициентом относительной важности* для указанной пары критериев.

Очевидно, $0 < \theta_{ij} < 1$. Этот коэффициент показывает долю потери по менее важному критерию, на которую согласно пойти ЛПР, в сравнении с суммой потери и прибавки по более важному критерию. Если коэффициент $\theta_{ij}$ близок к единице, то это означает, что ЛПР за относительно небольшую прибавку по более важному $i$-му критерию готово платить довольно большой потерей по менее важному $j$-му критерию. Такое положение соответствует ситуации, когда $i$-й критерий имеет сравнительно высокую степень важности по сравнению с $j$-м критерием. В случае, когда этот коэффициент вблизи нуля, ЛПР согласно пойти на потери по менее важному критерию лишь при условии получения существенной прибавки по более важному критерию. Это означает, что степень важности $i$-го критерия сравнительно невысока; данное положение и находит свое выражение в малом значении коэффициента относительной важности. Если $\theta_{ij} = 1/2$, то ЛПР готово согласиться на определенную прибавку по более важному критерию за счет потери по менее важному критерию при условии, что величина потери в точности совпадает с величиной прибавки.

Необходимо добавить, что отмеченная выше степень относительной важности критериев, а значит и величина коэффициента относительной важности $\theta_{ij}$, находится в прямой зависимости от типа шкалы, в которой измеряется тот или иной критерий. Подробнее об этом пойдет речь в разд. 2.4.

**4. Свойства относительной важности**. Изучим свойства введенного выше определения относительной важности критериев.

**Теорема 2. 1.** *Пусть отношение предпочтения $\succ$ удовлетворяет аксиомам* 2 *и* 3. *Если $i$-й критерий важнее $j$-го критерия с положительными параметрами $w_i^*$, $w_j^*$, то $i$-й критерий будет важнее $j$-го критерия с любой парой положительных параметров $w'_i$, $w'_j$, удовлетворяющих неравенствам $w'_i > w_i^*$, $w'_j < w_j^*$. Иначе говоря, если $i$-й критерий важнее $j$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij}$, то $i$-й критерий будет важнее $j$-го критерия с любым меньшим, чем $\theta_{ij}$, коэффициентом относительной важности.*

⮙ Выберем произвольно два положительных числа $w'_i$, $w'_j$ и два вектора $y', y'' \in R^m$, для которых выполнены соотношения

$$y'_i - y''_i = w'_i > w_i^*, \quad y''_j - y'_j = w'_j < w_j^*,$$
$$y'_s = y''_s \quad \text{для всех} \quad s \in I \setminus \{i, j\}$$

и докажем, что $y' \succ y''$.

Введем положительные числа $z_i$ и $z_j$ следующим образом:

$$z_i - y''_i = w_i^*, \quad y''_j - z_j = w_j^*.$$

В силу $w_i' > w_i^*$, $w_j' < w_j^*$ имеем $y_i' > z_i$ и $y_j' > z_j$. Кроме того, очевидно, $y_j'' > z_j$.

Рассмотрим вектор $z' \in R^m$ вида

$$z_i' = z_i, \ z_j' = z_j, \ z_s' = y_s' \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Для этого вектора выполнено

$$y_i' > z_i', \ y_j' > z_j', \ y_s' = z_s' \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Отсюда согласно аксиоме Парето получаем $y' \succ z'$.

Далее, из соотношений

$$z_i' - y_i'' = w_i^*, \quad y_j'' - z_j' = w_j^*, \quad z_s' = y_s'' \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}$$

на основании того, что критерий $i$-й критерий важнее $j$-го критерия с параметрами $w_i^*$, $w_j^*$, приходим к соотношению $z' \succ y''$. Это соотношение вместе с полученным ранее $y' \succ z'$ благодаря транзитивности отношения $\succ$ ведет к требуемому результату $y' \succ y''$.

Вторая часть теоремы, выраженная в терминах коэффициентов относительной важности, непосредственно вытекает из доказанного выше.⮟

Содержание теоремы 2.1 вполне согласуется с интуитивными представлениями об относительной важности критериев. А именно, если ЛПР готово пойти на потерю в размере $w_j^*$ по менее важному $j$-му критерию ради получения выигрыша в размере $w_i^*$ по более важному $i$-му критерию, то это ЛПР, очевидно, должно согласиться как на меньшие потери $w_j'$ $(w_j' < w_j^*)$, так и на больший выигрыш $w_i'$ $(w_i' > w_i^*)$.

Опираясь на определение относительной важности критериев и теорему 2.1, проанализируем возникающие возможности соотношений важности для произвольной пары различных критериев $f_i$, $f_j$.

Может иметь место один и только один из следующих трех случаев:

1) хотя бы одно положительное число из интервала $(0, 1)$ является коэффициентом относительной важности $i$-го критерия по сравнению с $j$-м критерием и хотя бы одно — не является таковым;

2) ни одно положительное число из интервала $(0, 1)$ не является коэффициентом относительной важности $i$-го критерия по сравнению с $j$-м критерием. В этом случае будем говорить, что *$i$-й критерий ни в коей мере не является более важным, чем $j$-й критерий*;

3) любое положительное число из интервала $(0, 1)$ является коэффициентом относительной важности $i$-го критерия по сравнению с $j$-м критерием. В этом случае будем говорить, что *$i$-й критерий несравнимо важнее* (*несравнимо более важен*) *$j$-го критерия*.

Разберем первый случай более подробно. Если хотя бы одно число $\theta_{ij} \in (0, 1)$ является коэффициентом относительной важности $i$-го критерия по сравнению с $j$-м критерием, то в соответствии с теоремой 2.1 любое меньшее число в пределах указанного интервала также является коэффициентом относительной важности для рассматриваемой пары критериев. Образуем два непересекающихся множества $A$ и $B$. К первому множеству причислим все числа интервала $(0, 1)$, которые являются коэффициентами относительной важности для данной пары критериев. Очевидно, $A \neq \varnothing$. Второе множество $B$ составим из всех тех чисел указанного интервала, которые не являются коэффициентами относительной важности. При этом по условию $B \neq \varnothing$. Ясно, что $A \cup B = (0, 1)$, причем неравенство $a < b$ выполняется для всех $a \in A$, $b \in B$. Это означает, что множества $A$ и $B$ образуют сечение интервала $(0, 1)$. В таком случае в соответствии с принципом Дедекинда существует единственное число $\bar{\theta}_{ij} \in (0, 1)$, производящее указанное сечение. Это число можно назвать *предельным коэффициентом относительной важности* $i$-го критерия по сравнению с $j$-м критерием.

Следует отметить, что само число $\bar{\theta}_{ij}$ может как оказаться коэффициентом относительной важности, так и не быть таковым. Иначе говоря, может реализоваться любой из двух возможных случаев $\bar{\theta}_{ij} \in A$ или $\bar{\theta}_{ij} \notin A$.

**5. Связь с лексикографическим отношением**. Между отношением $\succ$ и лексикографическим [1]) отношением имеется определенная связь, которая в терминах упорядоченного набора несравнимо более важных критериев раскрывается в следующем утверждении.

**Теорема 2.2.** *Заданное на пространстве $R^m$ бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиомам 2 и 3, является лексикографическим тогда и только тогда, когда первый критерий несравнимо важнее второго,*

[1]) Напомним, что определение лексикографического отношения можно найти в разд. 1.2.

*второй — несравнимо важнее третьего, ..., $(m-1)$-й критерий несравнимо важнее $m$-го критерия.*

⮝ Необходимость. Пусть отношение $\succ$ является лексикографическим. В этом случае для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$ истинны высказывания

1) $y_1' > y_1'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

2) $y_1' = y_1'',\ y_2' > y_2'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

3) $y_1' = y_1'',\ y_2' = y_2'',\ y_3' > y_3'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

..........................................................

m) $y_i' = y_i'',\ i = 1, 2, ..., m-1;\ y_m' > y_m'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$.

Из первого высказывания следует, что для двух произвольных векторов $y', y'' \in R^m$, для которых выполнено $y_1' > y_1'',\ y_2' < y_2''$, $y_3' = y_3'', ..., y_m' = y_m''$, имеет место соотношение $y' \succ y''$. Это означает, что первый критерий несравнимо важнее второго критерия.

Аналогично из второго высказывания можно прийти к выводу, что второй критерий несравнимо важнее третьего критерия, ..., из предпоследнего высказывания вытекает несравнимо большая важность $(m-1)$-го критерия по сравнению с $m$-м критерием.

Достаточность. Чтобы избегнуть громоздких рассмотрений, эту часть доказательства проведем лишь для случая трех критериев, т. е. при $m = 3$.

Выберем два произвольных вектора $y', y'' \in R^3$, для которых верно неравенство $y_1' > y_1''$. Для доказательства справедливости высказывания 1) следует убедиться в том, что $y' \succ y''$.

Если дополнительно с неравенством $y_1' > y_1''$ выполнено $y_2' \geqq y_2''$ и $y_3' \geqq y_3''$, то благодаря аксиоме Парето имеем $y' \succ y''$.

Пусть вместе с неравенством $y_1' > y_1''$ имеют место неравенства $y_2' < y_2'',\ y_3' \geqq y_3''$. Рассмотрим вектор $y^1 = (y_1', y_2', y_3'')$. Для него в силу несравнимо большей важности первого критерия по сравнению со вторым получаем соотношение $y^1 \succ y''$. Но $y' \geqq y^1$, а значит либо $y' = y^1$ и тогда верно $y' \succ y''$, либо $y' \geq y^1$. Во втором случае благодаря аксиоме Парето имеем $y' \succ y^1$, что вместе с полученным ранее соотношением $y^1 \succ y''$ на основании транзитивности отношения $\succ$ влечет соотношение $y^1 \succ y''$.

Перейдем к рассмотрению случая $y_1' > y_1'',\ y_2' = y_2'',\ y_3' < y_3''$. Введем вектор $y^2 = (y_1', y_2'' - 1, y_3'')$. В силу несравнимо бо́льшей важности первого критерия по сравнению со вторым для него выполняется $y^2 \succ y''$. Но для вектора $y'$ благодаря несравнимо большей важности второго критерия по сравнению с третьим имеет место соотношение $y' \succ y^2$, которое вместе с соотношением $y^2 \succ y''$ приводит к требуемому соотношению $y^1 \succ y''$.



Если же $y_1' > y_1'',\ y_2' > y_2'',\ y_3' < y_3''$, то для вектора $y^3 = (y_1'', y_2', y_3')$ благодаря несравнимо большей важности второго критерия по сравнению с третьим выполнено соотношение $y^3 \succ y''$. С другой стороны, верно неравенство $y' \geq y^3$, а значит согласно аксиоме Парето и соотношение $y' \succ y^3$, что вместе с $y^3 \succ y''$ влечет соотношение $y' \succ y''$.

Рассмотрим последний возможный случай $y_1' > y_1'',\ y_2' < y''$, $y_3' < y_3''$. Для вектора $y^4 = (y_1', y_2' - 1, y_3'')$ из-за несравнимо большей важности первого критерия по сравнению со вторым верно соотношение $y^4 \succ y''$. Используя несравнимо большую важность второго критерия по сравнению с третьим и аксиому Парето, получим соотношение $y' \succ y^4$, которое вместе с $y^4 \succ y''$ вновь повлечет за собой выполнение соотношения $y' \succ y''$.

Тем самым, истинность высказывания 1) установлена. При помощи аналогичных рассуждений устанавливается справедливость высказывания 2). Последнее высказывание 3) имеет место в силу аксиомы 3.⮟

## 2.2. Требование инвариантности отношения предпочтения

**1. Отношения, инвариантные относительно линейного положительного преобразования**. Напомним определение инвариантного отношения, данное в разд. 1.2. Бинарное отношение $\Re$, заданное на пространстве $R^m$ называют *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$ из выполнения соотношения $y' \Re y''$ следует соотношение $(\alpha y' + c) \Re (\alpha y'' + c)$ для любого вектора $c \in R^m$ и всякого положительного числа $\alpha$. Иначе говоря, отношение $\Re$ является инвариантным относительно положительного линейного преобразования, если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) аддитивность: $y' \Re y'',\ c \in R^m \quad \Rightarrow \quad (y' + c) \Re (y'' + c)$;

2) однородность: $y' \Re y'',\ \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha y') \Re (\alpha y'')$.

Отношения неравенств $>, \geqq, >$, заданные на пространстве $R^m$, дают простейшие примеры инвариантных бинарных отношений. Нетрудно понять, что лексикографическое отношение (см. разд. 1.2) также относится к классу инвариантных бинарных отношений.

Во многих практически важных задачах многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$ можно считать инвариантным относительно линейного положительного преобразования. В соответствии с этим в дополнение к сформулированным выше аксиомам 1–3 добавим еще одну, которая далее понадобится для построения содержательной теории относительной важности критериев.

**Аксиома 4** (инвариантность отношения предпочтения). *Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.*

Признаком инвариантности отношения $\succ$ является наличие у него свойств аддитивности и однородности. Иными словами, для любой пары векторов $y', y''$ $R^m$, связанных соотношением $y' \succ y''$, должно выполняться как соотношение $(y' + c) \succ (y'' + c)$ для любого вектора $c \in R^m$, так и соотношение $\alpha y' \succ \alpha y''$ для любого положительного числа $\alpha$.

**2. Конусные отношения**. Важный с точки зрения последующего изложения пример инвариантных бинарных отношений дает класс конусных отношений. Однако прежде чем формулировать определение конусного отношения необходимо ввести некоторые вспомогательные понятия из выпуклого анализа.

Множество $A$, $A \subset R^m$, называют *выпуклым*, если оно вместе с каждой парой своих точек содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Иными словами, подмножество $A$ пространства $R^m$ выпукло, если для всех пар точек $y', y'' \in A$ и любого числа $\lambda \in [0, 1]$ выполнено соотношение $\lambda y' + (1 - \lambda) y'' \in A$. Множество $K$, $K \subset R^m$, называется *конусом*, если для каждой точки $y \in K$ и любого положительного числа $\alpha$ выполняется включение $\alpha y \in K$. Конус, являющийся выпуклым, именуют *выпуклым конусом*. Иначе говоря, выпуклое множество является *выпуклым конусом*, если оно вместе с каждой своей точкой содержит и весь луч, исходящий их начала координат (в общем случае без самого начала) и проходящий через данную точку. При этом начало координат (вершина конуса) может как принадлежать, так и не принадлежать данному конусу. Можно проверить, что сумма любых двух (и более) элементов выпуклого конуса всегда принадлежит данному конусу. Конус $K$ называют *острым*, если не существует такого ненулевого вектора $y \in K$, для которого выполняется включение $-y \in K$. Не являющийся острым конус обязательно содержит, по крайней мере, одну прямую, проходящую через начало координат (вместе с самим началом или же без него).

Множество $L$ всех решений (векторов $x \in R^m$) однородного линейного неравенства $\langle c, x \rangle = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m \geqq 0$, где $c$ — фиксированный ненулевой вектор пространства $R^m$, представляет собой некоторый выпуклый конус (его называют *замкнутым полупространством*).



⮝ Действительно, из $\langle c, x \rangle \geqq 0$ следует справедливость неравенства $\langle \alpha c, x \rangle = \langle c, \alpha x \rangle \geqq 0$ для любого положительного множителя $\alpha$. Значит, $L$ — конус. Убедимся, что это выпуклый конус. С этой целью возьмем две произвольные точки $x'$ и $x''$ конуса $L$. Для них выполнены неравенства $\langle c, x' \rangle \geqq 0$ и $\langle c, x'' \rangle \geqq 0$. Умножим первое неравенство на произвольное число $\lambda \in [0, 1]$, а второе — на $1 - \lambda$. Складывая почленно полученные неравенства, придем к неравенству $\lambda \langle c, x' \rangle + (1 - \lambda) \langle c, x'' \rangle = \langle c, \lambda x' + (1 - \lambda) x'' \rangle \geqq 0$, устанавливающему выпуклость конуса $L$.⮟

Следует отметить, что замкнутое полупространство не является острым конусом, поскольку вместе с ненулевым вектором $\bar{x}$, удовлетворяющим равенству $\langle c, \bar{x} \rangle = 0$, содержит и вектор $-\bar{x}$, так как умножение указанного равенства на $-1$ не нарушает его выполнение.

Если же вместо одного неравенства рассматривать некоторую систему, содержащую определенное конечное число подобного рода неравенств, то множеством решений этой системы однородных линейных неравенств также будет выпуклый конус, представляющий собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств. Его называют *многогранным* (*полиэдральным*) *конусом*. В общем случае этот конус не является острым.

Пусть задан некоторый набор векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p \in R^m$. Нетрудно проверить, что совокупность всех неотрицательных линейных комбинаций данных векторов (т. е. все векторы вида $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_p a^p$, где коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ неотрицательны), образует некоторый выпуклый (*конечнопорожденный*) конус $K$ в пространстве $R^m$. В этом случае говорят, что набор векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ *порождает* выпуклый конус $K$ и пишут $K = \operatorname{cone}\{a^1, a^2, \ldots, a^p\}$. На основании теории двойственности выпуклого анализа (см. [28], [31]) любой конечнопорожденный конус представляет собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств, т. е. является многогранным конусом. Последний результат принципиально важен для доказательств формулируемых далее теорем, посвященных учету информации об относительной важности критериев.

Одномерные грани (т. е. лучи, а также векторы, порождающие эти лучи) называют *ребрами* выпуклого конуса. Известно [28], что любой острый выпуклый замкнутый конус, не совпадающий с началом координат, порождается своими ребрами.

Если выпуклый конус задан в виде решений некоторой однородной системы линейных неравенств, то все его ребра в принципе можно найти, например, методом перебора, рассматривая все возможные подсистемы определенного числа линейных уравнений, получающиеся из исходной системы неравенств заменой всех знаков неравенств равенствами (по этому поводу см. [4]).

*Неотрицательный ортант* $R_+^m$ пространства $R^m$, определяемый равенствами

$$R_+^m = \left\{ y \in R^m \mid y \geq 0_m \right\} = \left\{ y \in R^m \mid y \geq 0_m \right\} \setminus \{0_m\},$$

представляет собой выпуклый острый конус (без вершины), который порождается единичными ортами этого пространства. На плоскости (т. е. при $m = 2$) этот ортант имеет вид прямого угла, совпадающего с первой четвертью (рис. 2.1). Он порождается единичными ортами $e^1 = (1, 0)$, $e^2 = (0, 1)$ и является результатом пересечения правой и верхней замкнутых полуплоскостей (без начала координат).

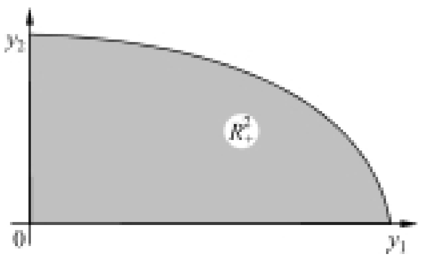


Рис. 2.1.

Еще некоторые два острых плоских конуса $K_1$ и $K_2$ изображены на рис 2.2.

Верхняя полуплоскость представляет собой замкнутое полупространство, т. е. выпуклый конус, не являющийся острым. Более подробно с выпуклыми множествами и конусами можно ознакомиться в [4, 28, 31].

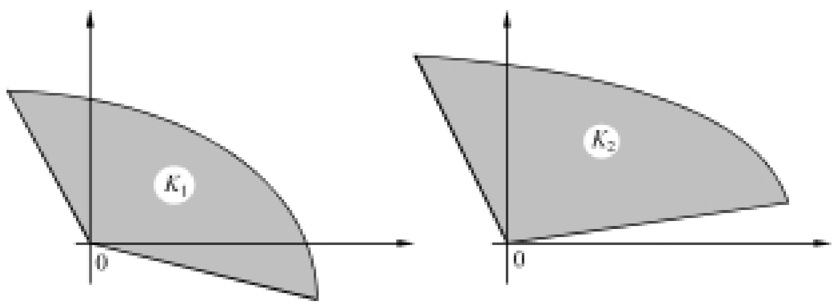


Рис. 2.2.



**Определение 2.3.** Бинарное отношение $\Re$, заданное на пространстве $R^m$ (т. е. $\Re \subset R^m \times R^m$), называют *конусным отношением*, если существует такой конус $K$, $K \subset R^m$, что для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$ справедлива эквивалентность

$$y' \Re y'' \quad \Leftrightarrow \quad y' - y'' \in K.$$

Нередко правую часть эквивалентности записывают в виде $y' \in y'' + K$ (см. рис. 2.3).

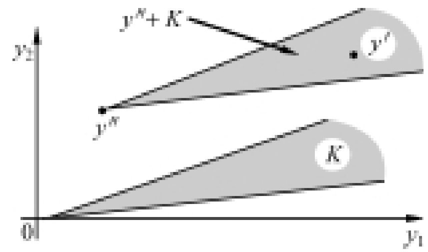


Рис. 2.3.

Отношения неравенств $>$ и $\geq$, рассматриваемые на пространстве $R^m$, представляют собой некоторые конусные отношения с конусами $R_>^m = \{y \in R^m \mid y > 0_m\}$ и $R_+^m$ соответственно.

Оказывается, всякое бинарное отношение, удовлетворяющее аксиомам 2 и 4, будет конусным отношением. Этот факт устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2.3.** *Любое иррефлексивное, транзитивное и инвариантное относительно линейного положительного преобразования бинарное отношение $\Re$, заданное на пространстве $R^m$, является конусным отношением с острым выпуклым конусом, не содержащим начало координат. Обратно, всякое конусное отношение с конусом указанного типа является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования отношением, заданным на $R^m$.*

⮙ Пусть $\Re$ является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования бинарным отношением, заданным на $R^m$. Докажем, что $\Re$ — конусное отношение. Для этого введем множество

$$K = \{y \in R^m \mid y \Re 0_m\}.$$

Благодаря свойству однородности отношения $\Re$ множество $K$ является конусом. Кроме того, для произвольной пары векторов $y', y'' \in R^m$ на основании свойства аддитивности имеем

$$y' \Re y'' \quad \Leftrightarrow \quad (y' - y'') \Re 0_m \quad \Leftrightarrow \quad (y' - y'') \in K.$$

Таким образом, отношение $\Re$ действительно является конусным с конусом $K$. Необходимо проверить, что конус $K$ — выпуклый, острый и не содержит начало координат.

Если $0_m \in K$, то по определению конуса $K$ выполнено $0_m \Re 0_m$, что не совместимо с требованием иррефлексивности отношения $\Re$. Значит, конус $K$ не содержит начало координат.

Для доказательства выпуклости конуса $K$ выберем произвольно два вектора $y', y'' \in K$ и число $\alpha \in (0, 1)$ (заметим, что значения $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ можно исключить из последующей проверки). Благодаря свойству однородности отношения $\Re$ из соотношений $y' \Re 0_m$ и $y'' \Re 0_m$ получаем $\alpha y' \Re 0_m$ и $(1 - \alpha) y'' \Re 0_m$ соответственно. Из первого соотношения в силу аддитивности имеем $(\alpha y' + (1 - \alpha) y'') \Re (1 - \alpha) y''$. Теперь на основании транзитивности $\Re$ из второго и последнего соотношений получаем $(\alpha y' + (1 - \alpha) y'') \Re 0_m$, или $(\alpha y' + (1 - \alpha) y'') \in K$, что устанавливает выпуклость конуса $K$.

Для того чтобы убедиться, что конус $K$ является острым, предположим противное: существует ненулевой вектор $y \in K$, для которого выполняется соотношение $-y \in K$. Для этого вектора имеем $y \Re 0_m$ и $-y \Re 0_m$. Отсюда в силу аддитивности $\Re$ следует $(y - y) \Re (-y) \Re 0_m$, что благодаря транзитивности отношения $\Re$ приводит к соотношению $0_m \Re 0_m$, несовместимому с иррефлексивностью $\Re$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\Re$ — произвольное конусное отношение с острым выпуклым конусом $K$, не содержащим начало координат. Убедимся в том, что оно является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования.

Это отношение действительно иррефлексивно, так как в противном случае конус $K$ содержал бы начало координат.

Проверим транзитивность отношения предпочтения. Для этой цели выберем произвольную тройку векторов $y', y'', y''' \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям $y' \Re y''$ и $y'' \Re y'''$. Последние два соотношения можно переписать в виде $y' - y'' \in K$ и $y' - y''' \in K$, откуда следует, что имеются два определенных элемента конуса $K$. Поскольку сумма любых двух элементов выпуклого конуса принадлежит данному конусу, из двух последних соотношений получаем $y' - y'' \in K$, или, что то же самое, $y' \Re y''$. Полученное доказывает транзитивность отношения $\Re$.

Инвариантность отношения $\Re$ вытекает из справедливости соотношений

$$y' \Re y'' \;\Leftrightarrow\; y' - y'' \in K \;\Leftrightarrow\; (y' + c) - (y'' + c) \in K \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; (y' + c) \Re (y'' + c),$$

$$y' \Re y'' \;\Leftrightarrow\; y' - y'' \in K \;\Leftrightarrow\; \alpha(y' - y'') \in K \;\Leftrightarrow\; \Leftrightarrow\; \alpha y' - \alpha y'' \in K \;\Leftrightarrow\; \alpha y' \Re \alpha y''$$

для всех векторов $c \in R^m$ и любых положительных чисел $\alpha$.⮟



**Следствие 2.1.** *Любое бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиомам* 2, 3 *и* 4, *является конусным с острым выпуклым конусом, содержащим неотрицательный ортант $R_+^m$ и не содержащим начало координат. Обратно, всякое конусное отношение с конусом указанного типа удовлетворяет аксиомам* 2, 3 *и* 4.

⮝ Бинарное отношение $\succ$, удовлетворяющее аксиомам 2–4, является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования.

Необходимость. На основании теоремы 2.3 остается убедиться, что конус $K$ данного бинарного отношения $\succ$ включает неотрицательный ортант. В силу леммы 1.3 предыдущей главы выполняется аксиома Парето (в терминах векторов)

$$y' \geq y'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y'',$$

которая может быть переписана в виде

$$y' - y'' \in R_+^m \quad \Rightarrow \quad y' - y'' \in K.$$

Поскольку разность $y' - y''$ может быть любым вектором неотрицательного ортанта $R_+^m$, то последняя импликация означает выполнение включения $R_+^m \subset K$.

Достаточность. Если конусное отношение порождается острым выпуклым конусом (без нуля), то в силу теоремы 2.3 соответствующее ему конусное отношение является иррефлексивным, транзитивным и инвариантным относительно линейного положительного преобразования (т. е. аксиомы 2 и 4 выполнены). А так как этот конус содержит неотрицательный ортант $R_+^m$, то соответствующее конусное отношение, кроме того, удовлетворяет аксиоме Парето. Нетрудно понять, что из справедливости аксиомы Парето вытекает выполнение аксиомы 3. Следовательно, рассматриваемое конусное отношение удовлетворяет всем аксиомам 2–4.⮟

В соответствии со следствием 2.1, бинарные отношения, удовлетворяющие аксиомам 2–4 (напоминаем, что эти аксиомы предполагаются выполненными), допускают простую геометрическую интерпретацию — они являются конусными отношениями с острыми, выпуклыми конусами без начала координат, причем эти конусы разве что шире неотрицательного ортанта $R_+^m$.

## 2.3. Использование информации об относительной важности критериев для сужения множества Парето

**1. Упрощение основного определения**. Определение 2.1, данное в разд. 2.1, придает точный смысл выражению «$i$-й критерий важнее $j$-го критерия». В этом определении присутствуют два числовых параметра, с помощью которых вводится коэффициент относительной важности критериев, измеряющий степень относительной важности.

Для того чтобы проверить, действительно ли $i$-й критерий важнее $j$-го, в соответствии с определением 2.1 необходимо предложить ЛПР для сравнения бесконечное число пар векторов $y', y'' \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям

$$y'_i > y''_i,\ \ y''_j > y'_j,\quad y'_s = y''_s \quad \text{для всех} \ \ s \in I \setminus \{i, j\};$$
$$y'_i - y''_i = w^*_i,\ \ y''_j - y'_j = w^*_j \tag{2.2}$$

при некоторых положительных параметрах $w^*_i$, $w^*_j$. Если для любой пары указанных векторов первый вектор $y'$ всякий раз оказывается предпочтительнее второго $y''$, то по определению 2.1 это будет означать, что $i$-й критерий важнее $j$-го с числовым коэффициентом относительной важности

$$\theta_{ij} = \frac{w^*_j}{w^*_i + w^*_j}, \tag{2.3}$$

принадлежащим интервалу (0, 1).

Совершенно очевидно, что на практике подобную проверку осуществить невозможно из-за бесконечного числа сравниваемых пар векторов. На самом деле такая проверка в условиях инвариантности отношения предпочтения и не требуется. Все может быть сведено к сравнению лишь одной пары векторов $y'$, $y''$, для которой выполнено (2.2). Об этом свидетельствует следующий результат.

**Теорема 2.4.** *Благодаря инвариантности отношения предпочтения $\succ$ можно считать, что в определении* 2.1 *векторы $y'$, $y''$ фиксированы. В частности, в этом определении можно положить*

$$y'_i = w^*_i,\ \ y'_j = -w^*_j \ \ \textit{и} \ \ y'_s = 0 \ \ \textit{для всех} \ s \in I \setminus \{i, j\}, \quad y'' = 0_m,$$

или

$$y'_i = \left(1 - \theta_{ij}\right),\ \ y'_j - \theta_{ij} \ \ \textit{и} \ \ y'_s = 0 \quad \textit{для всех} \ s \in I \setminus \{i, j\}, \quad y'' = 0_m,$$

*где $\theta_{ij}$ — коэффициент относительной важности критериев.*



⮝ Рассмотрим два произвольных вектора $y'$ и $y''$, для которых выполнены соотношения (2.2). Очевидно,

$$y'_i > y''_i \quad \Leftrightarrow \quad y'_i - y''_i > 0,$$
$$y''_j > y'_j \quad \Leftrightarrow \quad y''_j - y'_j > 0.$$

Обозначим $\bar{y}_i = y'_i - y''_i = w^*_i$, $\bar{y}_j = y'_j - y''_j = -w^*_j$. В силу аддитивности отношения предпочтения $\succ$, справедливо

$$y' \succ y'' \quad \Leftrightarrow \quad \left(y' - y''\right) \succ 0_m \quad \Leftrightarrow \quad \bar{y} \succ 0_m,$$

где вектор $\bar{y}$ имеет только две отличные от нуля компоненты — $i$-ю и $j$-ю, которые равны $\bar{y}_i$ и $\bar{y}_j$ соответственно. Полученное означает, что общее определение 2.1 эквивалентно «частному» определению 2.1, в котором $y' = \bar{y}$ и $y'' = 0_m$.

Из полученного сразу следует, что в определении 2.1 векторы $y'$, $y''$ можно считать не произвольными, а фиксированными.

Докажем оставшуюся часть теоремы. Соотношение $\bar{y} \succ 0_m$ для указанного выше вектора $\bar{y}$ благодаря свойству однородности отношения предпочтения $\succ$ эквивалентно соотношению $\alpha\bar{y} \succ 0_m$ для любого положительного числа $\alpha$. В частности, если взять $\alpha = -\dfrac{\theta_{ij}}{\bar{y}_j}$ и обозначить $\hat{y} = \alpha\bar{y}$, то получим

$$\hat{y}_i = \alpha\bar{y}_i = -\frac{\theta_{ij}\bar{y}_i}{\bar{y}_j} = \frac{\theta_{ij}w^*_i}{w^*_j} = \frac{w^*_i}{w^*_i + w^*_j} = 1 - \theta_{ij},$$

$$\hat{y}_j = \alpha\bar{y}_j = -\frac{\theta_{ij}\bar{y}_j}{\bar{y}_j} = -\theta_{ij},$$

$$\hat{y}_s = \alpha\bar{y}_s = \alpha 0 = 0 \ \ \text{для всех} \ s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Поэтому соотношение $\bar{y} \succ 0_m$ эквивалентно соотношению $\hat{y} \succ 0_m$, где

$$\hat{y}_i = 1 - \theta_{ij},\ \ \hat{y}_j = -\theta_{ij};\ \ \hat{y}_s = 0 \ \ \text{для всех} \ s \in I \setminus \{i, j\}. \ ⮟ \tag{2.4}$$

Как указано выше, отношение предпочтения $\succ$ предполагается инвариантным относительно линейного положительного преобразования. Опираясь на теорему 2.4, сформулируем новое, более простое определение относительной важности, которое эквивалентно определению 2.1.

**Определение 2.4.** Пусть $i, j \in I$, $i \neq j$. Говорят, что *i-й критерий важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности* $\theta_{ij} \in (0, 1)$, если для вектора $\hat{y} \in R^m$ вида (2.4) выполнено соотношение $\hat{y} \succ 0_m$.

В соответствии с определением 2.4 для того чтобы проверить, действительно ли $i$-й критерий является важнее $j$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij} \in (0, 1)$, достаточно убедиться, что вектор $\hat{y}$ вида (2.4) предпочтительнее нулевого вектора, т. е. достаточно проверить справедливость одного соотношения $\hat{y} \succ 0_m$. Например, если вектор (0.7, –0.3, 0) оказывается для ЛПР более предпочтительным, чем (0, 0, 0), то первый критерий для этого ЛПР важнее второго с коэффициентом относительной важности $\theta_{12} = 0.3$.

**2. Сужение множества Парето на основе информации о том, что один критерий важнее другого**. Следующая теорема показывает, каким образом информация об относительной важности одного критерия в сравнении с другим позволяет сузить область поиска выбираемых векторов.

**Теорема 2.5** (в терминах векторов). *Предположим, что отношение предпочтения* $\succ$ *удовлетворяет аксиомам* 1–4 *и i-й критерий важнее j-го с коэффициентом относительной важности* $\theta_{ij} \in (0, 1)$. *Тогда для любого непустого множества выбираемых оценок* Sel $Y$ *имеют место включения*

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\hat{Y}) \subset P(Y), \tag{2.5}$$

*где* $P(\hat{Y})$ *— множество парето-оптимальных оценок в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений* $X$ *и «новым» векторным критерием* $\hat{f} = \left(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m\right)$ *(т. е.* $\hat{Y} = \hat{f}(X)$*), компоненты которого вычисляются по формулам*

$$\hat{f}_j = \theta_{ij} f_i + \left(1 - \theta_{ij}\right) f_j, \quad \hat{f}_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\}. \tag{2.6}$$

⮙ Обозначим через $K$ острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения предпочтения $\succ$. По условию доказываемой теоремы и в соответствии с определением 2.4 для вектора $\hat{y}$, определяемого равенствами (2.4), выполнено соотношение $\hat{y} \succ 0_m$. Это соотношение равносильно включению $\hat{y} \in K$. Таком образом, вектор $\hat{y}$ принадлежит конусу $K$, определяющему конусное отношение предпочтения $\succ$.



Введем в рассмотрение набор единичных ортов $e^1, e^2, \ldots, e^m$ пространства $R^m$; $s$-я компонента вектора $e^s$ равна единице, а все остальные — нулю, $s = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через $M$ выпуклый конус (без нуля), порожденный набором линейно независимых [1]) векторов

$$e^1, \ldots, e^{i-1}, \hat{y}, e^{i+1}, \ldots, e^m. \tag{2.7}$$

Конус $M$ совпадает с множеством всех векторов, представимых в виде линейных комбинаций

$$\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_{i-1} e^{i-1} + \lambda_i \hat{y} + \lambda_{i+1} e^{i+1} + \ldots + \lambda_m e^m$$

векторов набора (2.7) с неотрицательными, одновременно не равными нулю числовыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Проверим, что конус $M$ — острый. Если это не так, то должен найтись ненулевой вектор $y \in M$, для которого $-y \in M$. В соответствии со сказанным выше имеем

$$y = \lambda_1' e^1 + \ldots + \lambda_{i-1}' e^{i-1} + \lambda_i' \hat{y} + \lambda_{i+1}' e^{i+1} + \ldots + \lambda_m' e^m,$$

$$-y = \lambda_1'' e^1 + \ldots + \lambda_{i-1}'' e^{i-1} + \lambda_i'' \hat{y} + \lambda_{i+1}'' e^{i+1} + \ldots + \lambda_m'' e^m,$$

причем все коэффициенты линейных комбинаций неотрицательны и каждый из наборов чисел $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_m'$ и $\lambda_1'', \lambda_2'', \ldots, \lambda_m''$ одновременно в нуль не обращается. Поскольку сумма двух элементов конуса принадлежит данному конусу, то, складывая два последних равенства, получим

$$0_m = \left(\lambda_1' + \lambda_1''\right) e^1 + \ldots + \left(\lambda_{i-1}' + \lambda_{i-1}''\right) e^{i-1} + \left(\lambda_i' + \lambda_i''\right) \hat{y} + \\ + \left(\lambda_{i+1}' + \lambda_{i+1}''\right) e^{i+1} + \ldots + \left(\lambda_m' + \lambda_m''\right) e^m,$$

где среди коэффициентов линейной комбинации, записанных в скобках, по крайней мере один обязательно отличен от нуля. Однако, благодаря линейной независимости векторов (2.7) из последнего равенства следует, что все коэффициенты указанной линейной комбинации равны нулю. Полученное противоречие свидетельствует о том, что конус $M$ — действительно острый.

Теперь докажем, что конус $M$ совпадает с множеством ненулевых решений следующей системы линейных неравенств

[1]) Набор векторов (2.7) действительно образует линейно независимую систему, так как ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен $m$.

$$
\begin{aligned}
&y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\}, \\
&\theta_{ij} y_i + (1 - \theta_{ij}) y_j \geqq 0.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

С этой целью найдем фундаментальную совокупность решений [1]) системы неравенств (2.8) и убедимся, что она совпадает с набором векторов (2.7).

Для отыскания фундаментальной совокупности решений системы неравенств (2.8) рассмотрим соответствующую систему линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
&y_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\}, \\
&\theta_{ij} y_i + (1 - \theta_{ij}) y_j = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

которая может быть переписана в виде [2])

$$
\begin{aligned}
&\langle e^s, y \rangle = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\}, \\
&\langle \tilde{y}, y \rangle = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

где $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_m)$, причем

$$
\tilde{y}_i = \theta_{ij}, \quad \tilde{y}_j = 1 - \theta_{ij}, \quad \tilde{y}_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.
$$

Число уравнений системы (2.10) равно $m$. Вследствие линейной независимости произвольного набора из $m - 1$ векторов, полученного из $e^1, \ldots, e^{j-1}, \tilde{y}, e^{j+1}, \ldots, e^m$ удалением какого-то одного вектора, для отыскания фундаментальной совокупности решений системы неравенств (2.8) достаточно просмотреть ненулевые решения каждой подсистемы из $m - 1$ уравнений системы (2.10). При этом среди них следует отобрать векторы, удовлетворяющие системе линейных неравенств (2.8).

Станем удалять из системы (2.10) по одному уравнению и искать ненулевые решения получающейся в результате такого удаления «укороченной» системы. Если из (2.10) удалить последнее уравнение, то, например, вектор $e^j$ будет ненулевым решением полученной «укороченной» системы. Удаляя уравнение $\langle e^s, y \rangle = 0$ (при $s \neq i$), в качестве ненулевого решения «укороченной» системы можно взять вектор $e^s$. Если же удалить уравнение $\langle e^i, y \rangle = 0$,

[1]) *Общее* (т. е. произвольное) *решение* системы линейных неравенств имеет вид линейной комбинации определенной конечной совокупности решений этой системы с неотрицательными коэффициентами (см. [4], с. 243). При этом *фундаментальная совокупность решений* системы линейных неравенств — это минимальная (по количеству) подобная совокупность решений.

[2]) Напомним, что символ $\langle a, b \rangle$ для $m$-мерных векторов $a$ и $b$ означает их *скалярное произведение*, т. е. $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$.



то, как нетрудно проверить, получающаяся «укороченная» система имеет ненулевое решение $\hat{y}$. В итоге приходим к фундаментальной совокупности решений $e^1, \ldots, e^{i-1}, \hat{y}, e^{i+1}, \ldots, e^m$ системы линейных неравенств (2.8). Эта фундаментальная совокупность совпадает с набором векторов (2.7), порождающих конус $M$ конусного отношения предпочтения $\succ$. Следовательно, конус $M$ совпадает с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (2.8).

Как было указано в начале доказательства теоремы, имеет место включение $\hat{y} \in K$. В силу следствия 2.1 справедливо соотношение $R_+^m \subset K$. Конус $R_+^m$ порождается набором единичных векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m$. Так как $K$ — выпуклый конус, то он вместе с векторами (2.7) заведомо содержит и все ненулевые неотрицательные линейные комбинации векторов (2.7), т. е. $M \subset K$. В итоге приходим к включениям

$$
R_+^m \subset M \subset K,
$$

из которых следует

$$
\operatorname{Ndom} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{2.11}
$$

где

$$
P(\widehat{Y}) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}
$$

— множество недоминируемых элементов множества $Y$ относительно конусного отношения с конусом $M$.

Пусть $x, x^* \in X$, $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$ и $f(x) \neq f(x^*)$. На основании доказанного выше совпадения конуса $M$ с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (2.8) включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда вектор $y = f(x) - f(x^*)$ является ненулевым решением системы (2.8), т. е.

$$
\begin{pmatrix}
f_1(x) - f_1(x^*) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
f_{j-1}(x) - f_{j-1}(x^*) \\
\theta_{ij}\big(f_i(x) - f_i(x^*)\big) + \big(1 - \theta_{ij}\big)\big(f_j(x) - f_j(x^*)\big) \\
f_{j+1}(x) - f_{j+1}(x^*) \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
f_m(x^*) - f_m(x^*)
\end{pmatrix} \geq 0_m\,.
$$

Последнее неравенство можно переписать в виде $\hat{f}(x) - \hat{f}(x^*) \in R_+^m$ или $\hat{f}(x) \geq \hat{f}(x^*)$. Следовательно, соотношение $y - y^* \in M$ для векторов $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$ равносильно неравенству $\hat{f}(x) \geq \hat{f}(x^*)$. Отсюда следует, что множество $P(\hat{Y})$, участвующее в (2.11), совпадает с множеством парето-оптимальных векторов многокритериальной задачи, в которой множество возможных решений есть $X$, а векторный критерий — $\hat{f}$ вида (2.6).

Для завершения доказательства остается заметить, что в условиях доказываемой теоремы на основании леммы 1.2 верно включение $\mathrm{Sel}\, Y \subset \mathrm{Ndom}\, Y$. С учетом этого из включений (2.11) вытекают включения (2.5), которые требовалось установить. ∀

В соответствии с принципом Эджворта–Парето (см. раздел 1.4) все выбираемые векторы должны содержаться во множестве Парето или, что то же самое, любой парето-оптимальный вектор может оказаться выбранным. Если в задаче многокритериального выбора имеется дополнительная информация о том, что какой-то один из критериев важнее другого, то, в соответствии с теоремой 2.5, на основе этой информации множество Парето может быть сужено без потери выбираемых векторов. Иначе говоря, некоторые векторы из множества Парето можно удалить, так как они заведомо не должны быть выбранными. Осуществленное таким образом *сужение множества Парето* на основе информации об относительной важности критериев в некоторых задачах может существенно облегчить последующий поиск выбираемых векторов.

Справедливости ради следует отметить, что в определенных случаях (в особенности, когда коэффициент относительной важности близок к нулю, а значит, критерии $f_j$ и $\hat{f}_j$ почти равны друг другу) указанного выше сужения может и не произойти из-за совпадения множеств Парето относительно «старого» и «нового» векторных критериев, т. е. $P(\hat{Y}) = P(Y)$. Можно сказать, что в таких случаях имеющаяся информация об относительной важности критериев не является содержательной.

В терминах решений доказанная теорема принимает следующий вид.

**Теорема 2.5** (в терминах решений). *Предположим, что отношение предпочтения* $\succ$ *удовлетворяет аксиомам* 1–4 *и $i$-й критерий важнее $j$-го с коэффициентом относительной важности* $\theta_{ij} \in (0, 1)$. *Тогда для любого непустого множества выбираемых решений* $\mathrm{Sel}\, X$ *имеют место включения*



$$\mathrm{Sel}\, X \subset P_{\hat{f}}(X) \subset P_f(X), \tag{2.12}$$

*где* $P_{\hat{f}}(X)$ *— множество парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с множеством возможных решений $X$ и «новым» векторным критерием* $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m)$, *компоненты которого вычисляются по формулам* (2.6).

Рис. 2.4 иллюстрирует доказанную теорему.

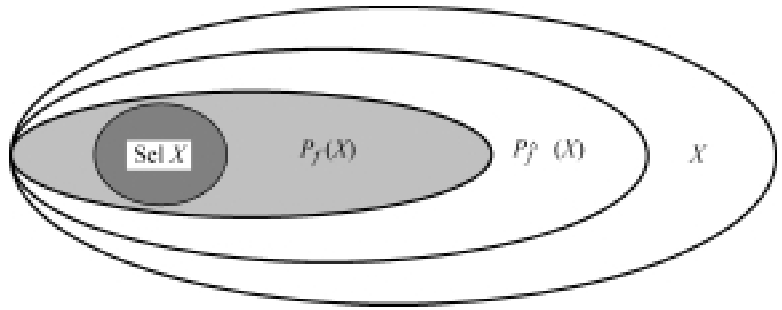


Рис. 2.4.

Комментируя последнюю теорему, прежде всего, следует обратить внимание на ее универсальность, проявляющуюся в том, что в ней отсутствуют какие бы то ни было требования к множеству возможных решений $X$ векторному критерию $f$. Это говорит о том, что она применима к любой задаче многокритериального выбора, в которой выполнены аксиомы 1–4. При этом множество возможных решений (и векторов) может состоять как из конечного, так и бесконечного числа элементов, а функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ могут быть какими угодно — нелинейными, невыпуклыми, невогнутыми и даже не обладать свойством непрерывности. Ограничения в условиях теоремы 2.5 накладываются лишь на поведение ЛПР — оно должно в процессе выбора вести себя «достаточно разумно» в том смысле, что его отношение предпочтения обязано удовлетворять аксиомам 1–4.

Далее, формула (2.6) для пересчета «нового» критерия $\hat{f}$ на основе «старого» $f$ чрезвычайно проста. В соответствии с ней «новый» векторный критерий из «старого» получается заменой менее важного критерия $f_j$ на выпуклую комбинацию критериев $f_i$ и $f_j$ с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij}$. Все остальные «старые» критерии сохраняются. Нетрудно видеть, что при подобном «пересчете» $j$-го критерия многие полезные с точки зрения оптимизации свойства критериев $f_i$ и $f_j$ сохраняются. Например, если указанные критерии являются непрерывными, вогнутыми, выпуклыми или линейными, то новый критерий $\hat{f}_j$ так же будет обладать соответствующими свойствами.

Наиболее простой вид формула (2.6) принимает в случае линейных критериев. Сформулируем соответствующий результат.

**Следствие 2.2.** *Если дополнительно к предположениям теоремы 2.5 добавить условие $X \subset R^n$ и требование линейности критериев $f_i$ и $f_j$, т. е.*

$$f_k(x) = \langle c^k, x\rangle = \sum_{l=1}^{n} c_l^k x_l, \quad k = i, j,$$

*где* $c^k = \left(c_1^k, c_2^k, ..., c_n^k\right)$, *то новый j-й критерий будет иметь вид* $\hat{f}_j(x) = \langle \hat{c}, x\rangle$, *где*

$$\hat{c} = \theta_{ij} c^i + (1 - \theta_{ij})c^j. \tag{2.13}$$

Этот результат немедленно вытекает из формулы (2.6) с учетом линейности скалярного произведения векторов пространства $R^m$.

Равенство (2.13) имеет наглядную интерпретацию в случае, когда множеством возможных решений является подмножество двумерного векторного пространства, т. е. когда $X \subset R^2$ (рис. 2.5).

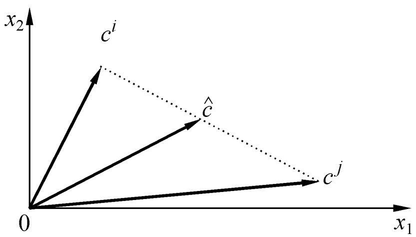

Рис. 2.5.

Чем ближе коэффициент относительной важности $\theta_{ij}$ к нулю, тем ближе конец вектора $\hat{c}$ к концу вектора $c^j$. При увеличении $\theta_{ij}$ в пределах интервала (0, 1) вектор $c^i$, соответствующий более важному критерию, как бы «притягивает» к себе вектор $\hat{c}$, соответствующий новому $j$-му критерию. В случае $\theta_{ij} = 0.5$ конец вектора $c$ будет располагаться в центре отрезка соединяющего концы двух векторов $c^i$ и $c^j$. Если же коэффициент относительной важности близок к единице, то вектор $\hat{c}$ будет мало отличаться от $c^i$, а значит векторный критерий $\hat{f}$ будет содержать два почти одинаковых критерия $f_i$. Тем самым, влияние менее важного критерия $f_j$, которому соответствует вектор $c^j$, на решение задачи многокритериального выбора практически исчезнет.

**3. Геометрические аспекты**. В задачах многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, как правило, полностью не известно. В настоящей книге считается, что оно лишь подчиняется аксиомам 1–4. В этих условиях согласно теореме 2.3 отношение предпочтения $\succ$ является конусным с (неизвестным) острым выпуклым конусом $K$, не содержащим начало координат. Более того, в силу следствия 2.1 конус $K$ содержит неотрицательный ортант, т. е. $R_+^m \subset K$. Отсюда вытекает включение Ndom $Y \subset P(Y)$, что вместе с (1.7) дает



$$\text{Sel}\, Y \subset P(Y). \tag{2.14}$$

Последнее включение выражает собой принцип Эджворта–Парето, согласно которому выбор следует производить в пределах множества Парето. Как было указано в первой главе, этот принцип применим в любой задаче многокритериального выбора, удовлетворяющей аксиомам 1–3. Иначе его можно сформулировать так: *множество Парето представляет собой определенную оценку сверху для множества выбираемых векторов.*

Теперь предположим, что помимо аксиом 1–4, которым удовлетворяет рассматриваемая задача многокритериального выбора, имеется дополнительная информация о том, что $i$-й критерий важнее $j$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij} \in (0, 1)$. Наличие такой информации на геометрическом языке означает, что указан вектор $\hat{y} \in R^m$ вида (2.4), для которого выполняется включение $\hat{y} \in K$. Таким образом, теперь известно, что конус $K$ кроме неотрицательного ортанта содержит еще и вектор $\hat{y}$, расположенный за пределами неотрицательного ортанта.

Рассмотрим конус $M$, совпадающий с множеством всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций векторов $e^1, ..., e^{i-1}, \hat{y}, e^{i+1}, ..., e^m$, который был введен при доказательстве теоремы 2.5. В ходе доказательства были установлены включения $R_+^m \subset M \subset K$, причем $M \neq R_+^m$. Из этих включений следует

$$\text{Sel}\, Y \subset \text{Ndom}\, Y \subset \text{Ndom}_M Y \subset P(Y),$$

где

$$\text{Ndom}\, Y = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in K\},$$

$$\text{Ndom}_M\, Y = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\},$$

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in R_+^m\}.$$

Отсюда получаем новую, более точную, чем (2.14), оценку сверху для неизвестного множества выбираемых векторов:

$$\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom}_M Y.$$

При этом чем более широким по сравнению с неотрицательным ортантом $R_+^m$ является конус $M$, тем более узким можно ожидать множество $\operatorname{Ndom}_M Y$ по сравнению с $P(Y)$.

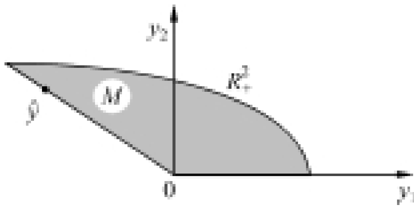

Рис. 2.6.

Итак, наличие указанной дополнительной информации об относительной важности критериев дает возможность выделить в неизвестном конусе $K$ более широкую часть, чем $R_+^m$ (рис. 2.6), и на основании этого построить более точную оценку сверху для множества выбираемых векторов по сравнению с той, которая гарантируется принципом Эджворта–Парето.

**Пример 2.1.** Пусть $m = 2$, $Y = \{y^1, y^2, y^3\}$, причем

$$y^1 = 4{,}1; \; y^2 = 3{,}2; \; y^3 = 1{,}3.$$

Здесь все три возможных вектора являются парето-оптимальными, т. е. принцип Эджворта–Парето не позволяет сузить область поиска выбираемых векторов.

Предположим, что имеется дополнительная информация о том, что первый критерий важнее второго с коэффициентом относительной важности 0.5. На геометрическом языке это означает, что $\hat{y} = (0.5; -0.5) \in K$.

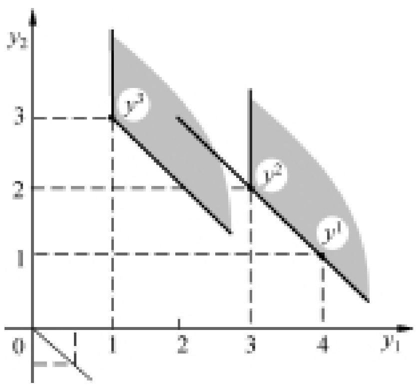

Рис. 2.7.

На рис. 2.7 изображены данные три возможных вектора и конус $M$, транслированный в точки, соответствующие второй и третьей возможным векторам. Видно, что ни первый, ни второй вектор не могут оказаться выбранными, так как для них существуют доминирующие их векторы:

$$y^2 \in y^3 + M, \quad y^1 \in y^2 + M.$$

Следовательно, единственным выбранным может оказаться первый вектор $y^1$. Иными словами, если множество выбираемых векторов в данной задаче не пусто, то оно состоит из единственного первого вектора.



К тому же самому выводу можно прийти, если воспользоваться результатом теоремы 2.5. В самом деле, согласно формуле (2.6) новый второй критерий принимает вид $0.5\,y_1 + 0.5\,y_2$ и, как легко найти,

$$\widehat{Y} = \{(4, 2.5), (3, 2.5), (1, 2)\}.$$

Парето-оптимальным в этом множестве является только один первый вектор. Значит, он (и только он) может оказаться выбранным при условии, что выбираемые векторы существуют.

## 2.4. Шкалы критериев и инвариантность измерений

**1. Количественные и качественные шкалы**. Как было указано ранее, все критерии $f_1, f_2, \ldots, f_m$, участвующие в постановке задачи многокритериального выбора, принимают числовые значения. Тем самым, включение $y_i = f_i(x) \in R$ выполняется для любого $x \in X$ и каждого $i = 1, 2, \ldots, m$. Для строгой постановки математической задачи многокритериального выбора этих сведений о критериях вполне достаточно.

Однако когда речь идет о той или иной прикладной задаче, числовые значения критериев представляют собой результаты измерения в некоторой шкале. Например, если рассматриваемый критерий выражает стоимость проекта, прибыль или затраты, то все эти величины могут быть выражены в рублях, миллионах рублей, долларах, евро или каких-то других денежных единицах. При измерении длин предметов результаты, как известно, получают в метрах, дюймах, футах, ярдах и т. п. Для указания временного промежутка используют часы, секунды, годы, миллионы лет и т. д. Таким образом, при решении конкретных прикладных задачи значения критериев измеряются в пределах той или иной шкалы и выражаются в определенных единицах измерения.

Существуют различные типы шкал измерения. Когда требуется подсчитать число предметов, людей, вещей и т. п., используется так называемая *абсолютная шкала*. В этой шкале жестко зафиксировано начало отсчета (нуль) и масштаб измерения (единица). Два разных (измеряющих) человека, независимо друг от друга выполнив измерения (подсчет) в этой шкале одних и тех же количеств, должны получить абсолютно идентичные результаты. Можно также сказать, что в этой шкале существует единственная для всех измеряющих единица измерения.

При измерении такой физической характеристики, как масса предмета, используют различные единицы измерения. Как известно, масса предмета может быть выражена в килограммах, фунтах, тоннах, пудах и т. д. Здесь фиксированным для всех измеряющих оказывается лишь начало отсчета — нуль, который соответствует отсутствию какой-либо массы, тогда как масштаб измерения может оказаться различным для разных измеряющих. Тем самым, результаты измерений $y_i'$ и $y_i''$ одного и того же предмета для двух различных измеряющих, пользующихся разными единица измерений, могут отличаться на некоторый фиксированный положительный множитель $\alpha_i$, т. е. $y_i' = \alpha_i\, y_i''$. В этом случае говорят, что результаты измерений определяются с точностью до преобразования вида $\phi_i(y_i) = \alpha_i y_i$, $\alpha_i > 0$. Шкала подобного типа называется *шкалой отношений*. Название этой шкалы связано с тем, что при измерении в этой шкале независимо от единицы измерения отношения измерений будут одинаковыми для различных измеряющих. Действительно, пусть один измеряющий для двух объектов получил два числа $y_i'$ и $y_i''$, а другой для тех же объектов — $\tilde{y}_i'$ и $\tilde{y}_i''$ соответственно. Поскольку $\tilde{y}_i' = \alpha_i\, y_i'$ и $\tilde{y}_i'' = \alpha_i\, y_i''$ при некотором $\alpha_i > 0$, то выполняются равенства

$$\frac{\tilde{y}'_i}{\tilde{y}''_i} = \frac{\alpha_i\, y_i'}{\alpha_i\, y_i''} = \frac{y_i'}{y_i''},$$

которые и означают сохранение отношений измерений для различных измеряющих в шкале отношений. Таким образом, если какой-то измеряющий пришел к выводу, что, например, масса одного предмета в два раза больше массы другого, то и другой измеряющий (использующий другие единицы измерения) должен прийти к тому же самому выводу. Это свидетельствует о том, что, при сравнении результатов измерения в шкале отношений, высказывание «во столько-то раз больше (меньше)» является осмысленным.

Нетрудно понять, что измерение таких величин, как прибыль, затраты и т. п., выраженных в единицах какой-либо валюты, также следует производить в шкале отношений.

Еще одна шкала измерений характеризуется заданием масштаба измерений и нефиксированным (для различных измеряющих) началом отсчета. Примером такой шкалы может служить шкала летоисчисления — переход от одного летоисчисления к другому осуществляется изменением начала отсчета. Говоря более точно, *шкалой разностей* называется такая шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до преобразования $\phi_i(y_i) = y_i + c_i$, где $c_i$ — фиксированное число. Измерения в этой шкале характеризуются сохранением разностей между двумя разными измерениями, выполненными различными измеряющими. Другими словами, для измерений, выполненных в шкале разностей, осмысленным является высказывание «на столько-то больше (меньше)». Например, продолжительность правления Николая II, вычисленная как в Григорианском, так и юлианском (или каком-то другом) календаре будет одна и та же.



*Шкалой интервалов* называется шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до (инвариантны относительно) линейного положительного преобразования $\phi_i(y_i) = \alpha_i y_i + c_i$, где $\alpha_i > 0$ и $c_i$ — фиксированные числа. Типичным примером такой шкалы может служить шкала температур. Как известно, для измерения температуры имеются, например, шкалы Цельсия, Фаренгейта и Кельвина. Переход от результатов измерений в одной шкале к результатам в другой происходит по формулам вида $\tilde{y}_i = \alpha_i\, y_i + c_i$.

Шкала интервалов характеризуется тем, что у каждого измеряющего может быть свое начало отсчета и свой масштаб измерения. При этом для измерений, выполненных в шкале интервалов различными измеряющими, будут сохраняться отношения разностей:

$$\frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}_i'}{\tilde{y}_i'' - \tilde{y}_i'''} = \frac{\alpha_i\, y_i + c_i - \left(\alpha_i\, y_i' + c_i\right)}{\alpha_i\, y_i'' + c_i - \left(\alpha_i\, y_i''' + c_i\right)} = \frac{y_i - y_i'}{y_i'' - y_i'''}.$$

Все перечисленные выше шкалы — абсолютную, отношений, разностей и интервалов относят к *количественным шкалам*. Понятно, что результаты измерения, инвариантные относительно линейного положительного преобразования $\tilde{y}_i = \alpha_i\, y_i + c_i$, будут инвариантны и относительно преобразований вида $\tilde{y}_i = a_i y_i$ и $\tilde{y}_i = y_i + c_i$. По этой причине среди количественных шкал наиболее «общей» оказывается шкала интервалов. Поэтому все утверждения, полученные для измерений, выполненных в шкале интервалов, будут иметь место и для измерений в шкалах отношений и разностей (тем более, для абсолютной шкалы).

Кроме количественных существуют *качественные шкалы*. Типичным представителем качественной шкалы является *порядковая шкала*, в которой результаты измерений определяются с точность до преобразований вида $\phi_i(y_i)$, где $\phi_i$ — произвольная строго возрастающая функция. Примерами такой шкалы могут служить шкала твердости минералов Мосса, шкала упорядочения по важности выполнения работ, различные балльные шкалы. В порядковых шкалах не фиксируется начало отсчета, может быть различным масштаб измерений, причем, образно говоря, даже величина деления при переходе от одной отметки к другой у различных измеряющих может оказаться разной. Для результатов измерений в порядковой шкале лишены смысла высказывания «во столько-то раз больше (меньше)», «на столько-то единиц больше (меньше)». Здесь имеет смысл только отношение «больше—меньше». Следует отметить, что существуют и другие качественные шкалы (см., например, [10, 27]).

Все утверждения, полученные для результатов измерений, выполненных в качественной шкале, имеют место и для количественных шкал, тогда как обратное не верно. Поэтому количественные шкалы по сравнению с качественными оказываются «богаче» в том смысле, что для них могут быть получены более богатые по содержанию утверждения, хотя и для менее широкого класса задач.

**2. Инвариантность множества Парето относительно строго возрастающего преобразования критериев**. Напомним определение множества Парето (в терминах векторов):

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \geq y^*\}.$$

Выполнение неравенства $y \geq y^*$, участвующего в определении множества Парето, означает справедливость покомпонентных неравенств $y_i \geqq y_i^*$ для всех $i = 1, 2, ..., m$, причем по крайней мере для одного номера $i$ последнее неравенство является строгим.

Пусть $\phi_i$ — строго возрастающая числовая функция одной переменной, заданная на всей числовой оси, т. е.

$$y_i > y' \quad \Leftrightarrow \quad \phi_i(y_i) > \phi_i(y_i')$$

для $y_i, y_i' \in R$. Очевидно, выполнение равенства $y_i = y_i'$ для строго возрастающей функции $\phi_i$ равносильно выполнению равенства $\phi_i(y_i) = \phi_i(y_i')$. Далее, для такой функции в соответствии с ее определением неравенство $y_i > y_i'$ имеет место тогда и только тогда, когда верно неравенство $\phi_i(y_i) > \phi_i(y_i')$.

Полученное означает, что определение множества Парето по существу не изменится, если к значениям критериев применить строго возрастающее преобразование. Иными словами, множество Парето оказывается инвариантным относительно указанного преобразования, а значит, *понятие множества Парето можно использовать во всех тех случаях, когда измерения критериев производятся, по крайней мере, в порядковой* (тем более, в любой количественной) *шкале*.



**3. Инвариантность результатов теоремы 2.5 относительно линейного положительного преобразования критериев.** Центральный результат второй главы — это теорема 2.5, которая показывает каким образом информацию об относительной важности критериев можно использовать для сужения множества Парето. Как было указано в предыдущем разделе, основой этого сужения являются включения

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{2.15}$$

где $P(\widehat{Y})$ — множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений $X$ и «новым» векторным критерием $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, ..., \widehat{f}_m)$ (т. е. $\widehat{Y} = \widehat{f}(X)$), компоненты которого вычисляются по формулам

$$\widehat{f}_j = \theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j, \ \widehat{f}_s = f_s \text{ для всех } s \in I \setminus \{j\}. \tag{2.16}$$

Поскольку рассматриваемый в книге количественный подход предполагает измерение значений критериев в количественных шкалах, то несомненный практический интерес представляет установление инвариантности включений (2.15) относительно линейного положительного преобразования критериев. Заметим, что если бы такой инвариантности на самом деле не было, то это означало бы невозможность применение предлагаемого подхода при решении практических многокритериальных задач с количественными критериями.

**Теорема 2.6.** *Включения* (2.15) (*а также* (2.12)) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования критериев.*

⮙ Прежде всего заметим, что множество выбираемых векторов Sel $Y$ определено таким образом, что оно подчиняется лишь аксиоме 1, не содержащей никаких упоминаний о критериях. Значит, оно не зависит от выбора шкал критериев и является инвариантным относительно любого преобразования критериев.

В предыдущем пункте была установлена инвариантность множества Парето относительно строго возрастающего преобразования. Линейное положительное преобразование является частным случаем строго возрастающего преобразования. Поэтому множество Парето $P(Y)$ из (2.15) инвариантно относительно линейного положительного преобразования критериев. Для доказательства инвариантности множества Парето $P(\widehat{Y})$ достаточно убедиться в инвариантности строгого неравенства $f_j = = \theta_{ij} y_i + (1-\theta_{ij}) y_j \geq \theta_{ij}\bar{y}_i + (1-\theta_{ij})\bar{y}_j = \bar{f}_j$, содержащего новый $j$-й критерий, поскольку проверка инвариантности соответствующих неравенств для произвольного критерия $f_i$, $i \neq j$, производится так же элементарно, как в предыдущем пункте.

Сначала напомним определение коэффициента относительной важности критериев:

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} = \frac{y_j'' - y_j'}{y_i' - y_i'' + y_j'' - y_j'}.$$

Здесь $y_k' = f_k(x')$, $y_k'' = f_k(x'')$ $(k = i, j)$, причем $w_i^*, w_j^*$ — фиксированные числа.

Теперь заменим $y_k$ на $\tilde{y}_k = \alpha_k y_k + c_k \, (\alpha_k > 0)$, $k = i, j$, в формуле $\widehat{f}_j = \theta_{ij} y_i + (1 - \theta_{ij})\, y_j$, задающей новый $j$-й критерий. В результате этой замены получим преобразованный новый критерий вида

$$\widehat{\widetilde{f}}_j = \frac{\alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j}{\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i + \alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j} \cdot (\alpha_i y_i + c_i) +$$

$$+ \left(1 - \frac{\alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j}{\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i + \alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j}\right) \cdot (\alpha_j y_j + c_j).$$

После упрощения приходим к следующему выражению

$$\widehat{\widetilde{f}}_j = \alpha_i \alpha_j \frac{w_j^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} y_i + \alpha_i \alpha_j \frac{w_i^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} y_j + C, \quad (2.17)$$

где константа

$$C = c_i \alpha_j \frac{w_j^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} + c_j \alpha_i \frac{w_i^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*}$$

не зависит от $y_i$, $y_j$.

Теперь предположим, что неравенство



$$\widehat{f}_j = \theta_{ij} y_i + (1-\theta_{ij}) y_j = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} y_i + \frac{w_i^*}{w_i^* + w_j^*} y_j >$$

$$> \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} \bar{y}_i + \frac{w_i^*}{w_i^* + w_j^*} \bar{y}_j = \theta_{ij} \bar{y}_i + (1-\theta_{ij}) \bar{y}_j = \bar{f}_j \quad (2.18)$$

выполняется для произвольных чисел $y_i$, $y_j$, $\bar{y}_i$, $\bar{y}_j$. Принимая во внимание (2.17), после умножения на положительное число

$$\alpha_i \alpha_j \frac{w_i^* + w_j^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*}$$

и прибавления константы $C$ к обеим частям (2.18), получим неравенство

$$\widehat{\widetilde{f}}_j > \widehat{\widetilde{\bar{f}}}_j = \alpha_i \alpha_j \frac{w_j^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} \bar{y}_i + \alpha_i \alpha_j \frac{w_i^*}{\alpha_i w_i^* + \alpha_j w_j^*} \bar{y}_j + C. \quad (2.19)$$

Следовательно, из выполнения неравенства (2.18) вытекает неравенство (2.19). Нетрудно понять, что из выполнения неравенства (2.19) аналогичным образом можно прийти к неравенству (2.18). Это означает, что рассматриваемые два неравенства эквивалентны. ⋎

Из доказательства последней теоремы видно, что коэффициент относительной важности $\theta_{ij}$ не является инвариантным относительно линейного положительного преобразования критериев. Более того, можно легко проверить, что он не является инвариантным и относительно преобразований вида $\tilde{y}_k = a_k y_k$ и $\tilde{y}_k = y_k + + c_k$, $k = i, j$. Это свидетельствует о том, что *для различных измеряющих (различных ЛПР) коэффициенты относительной важности критериев будут различными, даже если они решают одну и ту же задачу выбора, имеют одинаковые предпочтения и выполняют измерения в шкале одного и того же типа.* И в этом нет никакого противоречия, поскольку указанные ЛПР могут использовать различные единицы измерения для одних и тех же критериев.

В самом деле, пусть, например, два лица, принимающие решения, производят измерения значений первого критерия в единицах валюты и с точки зрения предпочтений ведут себя совершенно одинаковым образом, но одно из них производит расчет в долларах, а другое — в рублях. Предположим далее, что измерение значений второго критерия осуществляется обоими ЛПР в абсолютной шкале (например, число штук выпускаемых заводом изделий). Для ЛПР, работающего с долларами и готового за добавку в $ 1000 пожертвовать 10 изделиями, коэффициент относительной важности первого критерия в сравнении со вторым составит

$$\theta'_{12} = \frac{10}{1000 + 10} \approx 0.01.$$

Второе ЛПР, оперирующее с рублями (если оно ведет себя так же как первое ЛПР), должно быть готово за 30000 руб. добавки по первому критерию пожертвовать тем же самым количеством изделий (10 штук) по второму критерию, поскольку один доллар (на момент принятия решения) приблизительно равен тридцати рублям. Поэтому для второго ЛПР коэффициент относительной важности будет равен

$$\theta''_{12} = \frac{10}{30000 + 10} \approx 0.00033,$$

что значительно меньше, чем у первого. Но именно так и должно быть, поскольку для первого ЛПР единица валюты является существенно более «дорогой», чем для второго.

Глава 3

# ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ВАЖНОСТЬ ДЛЯ ДВУХ ГРУПП КРИТЕРИЕВ

Предложенное в предыдущей главе понятие относительной важности критериев здесь распространяется на общий случай двух групп критериев. Изучаются его простейшие свойства и показывается, каким образом производить учет информации о том, что одна группа критериев важнее другой группы с определенным набором коэффициентов относительной важности. Этот учет, как и в случае двух критериев, сводится к построению множества Парето относительно нового векторного критерия. Но при этом размерность последнего может быть существенно выше размерности исходного критерия.

Приведены геометрические иллюстрации для задачи выбора с тремя критериями.

## 3.1. Определение и важнейшие свойства относительной важности критериев

**1. Основные определения**. Введем общее определение относительной важности для двух групп критериев.

**Определение 3.1.** Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \bigcap B = \varnothing$. Будем говорить, что *группа критериев $A$ важнее группы критериев $B$ с двумя заданными наборами положительных параметров $w_i^*$ для всех $i \in A$ и $w_j^*$ для всех $j \in B$*, если для любой пары векторов $y', y'' \in R^m$, для которых верно

$$y_i' - y_i'' = w_i^* > 0 \quad \text{для всех } i \in A,$$

$$y_j'' - y_j' = w_j^* > 0 \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$y_s' = y_s'' \quad \text{для всех } s \in I \setminus (A \bigcup B), \tag{3.1}$$

имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Другими словами, для ЛПР группа критериев $A$ важнее другой группы $B$, если всякий раз при выборе из пары векторных оценок ЛПР готово пожертвовать определенным количеством $w_j^*$ по каждому менее важному $j$-му критерию $f_j$ ($j \in B$) ради получения дополнительного количества $w_i^*$ по каждому более важному $i$-му критерию $f_i$ ($i \in A$) при условии сохранения значений всех остальных критериев.

Нетрудно видеть, что в частном случае $A = \{i\}$ и $B = \{j\}$ определение 3.1 совпадает с определением 2.1 относительной важности для двух критериев. Иначе говоря, определение относительной важности для двух групп критериев является прямым обобщением определения относительной важности для двух критериев.

Соотношение между числами $w_i^*$ и $w_j^*$, как и в случае двух критериев, позволяет количественно оценить степень важности одной группы критериев по сравнению с другой группой.

**Определение 3.2**. Пусть группа критериев $A$ важнее группы критериев $B$ с двумя заданными наборами положительных параметров $w_i^*$ для всех $i \in A$ и $w_j^*$ для всех $j \in B$. Положительные числа

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} \quad \text{для } i \in A \text{ и } j \in B \tag{3.2}$$

будем называть *коэффициентами относительной важности* для указанной пары групп критериев.

Если через $|A|$ и $|B|$ обозначить число элементов множества $A$ и $B$ соответственно, то число всех коэффициентов относительной важности, вводимых определением 3.2, равно произведению $|A| \cdot |B|$. Например, если $A = \{i\}$, т. е. $|A| = 1$, то указанное число коэффициентов относительной важности будет равно $|B|$ — количеству элементов менее важных критериев.

**2. Свойства относительной важности**. Имеет место следующий результат, в соответствии с которым, в случае, когда одна группа критериев важнее другой, данное соотношение важности будет сохраняться, если более важную группу расширять, добавляя к ней другие критерии, а менее важную сужать, удаляя из нее какие-то критерии.

**Теорема 3.1**. *Пусть отношение предпочтения $\succ$ удовлетворяет аксиомам* 2, 3 *и группа критериев $A$ важнее группы критериев $B$ с двумя заданными наборами положительных параметров $w_i^*$ для всех $i \in A$ и $w_j^*$ для всех $j \in B$. Тогда*

*– группа критериев $A \cup \{k\}$ при $k \in I \setminus (A \cup B)$ будет важнее группы $B$ с положительными параметрами $w_i^*$ для всех $i \in A$, $w_j^*$ для всех $j \in B$ и произвольным положительным параметром $w_k^*$;*



*– группа критериев $A \cup \{k\}$ при $k \in B$ будет важнее группы критериев $B \setminus \{k\}$ с положительными параметрами $w_i^*$ для всех $i \in A$, $w_j^*$ для всех $j \in B \setminus \{k\}$ и произвольным положительным параметром $w_k^*$;*

*– группа критериев $A$ будет важнее группы критериев $B \setminus \{k\}$ с положительными параметрами $w_i^*$ для всех $i \in A$ и $w_j^*$ для всех $j \in B \setminus \{k\}$.*

⮝ Пусть в соответствии с определением 3.1 для векторов $y'$, $y''$, удовлетворяющих (3.1), выполнено соотношение $y' \succ y''$.

Рассмотрим при $k \in I \setminus (a \cup B)$ произвольный вектор $y \in R^m$, для которого выполнено

$$y_k > y'_k; \;\; y_s = y'_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\}.$$

Очевидно, $y \geq y'$. Отсюда согласно аксиоме 3 следует соотношение $y \succ y'$, которое вместе с $y' \succ y''$ в силу транзитивности отношения предпочтения влечет соотношение $y \succ y''$. Поскольку

$$y_i - y''_i = w_i^* > 0 \quad \text{для всех } i \in A,$$

$$y_k > y'_k = y''_k, \;\; y''_j - y_j = w_j^* > 0 \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$y_s = y''_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \big(A \cup B \cup \{k\}\big)$$

и разность $w_k^* = y_k - y''_k$ может быть любым положительным числом, то доказательство первого утверждения завершено.

Для проверки истинности второго утверждения при $k \in B$ введем вектор $y$ с компонентами

$$y_k > y''_k; \;\; y_s = y'_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\}.$$

Для этого вектора аналогично рассмотренному выше получим соотношение $y \succ y''$, которое устанавливает справедливость требуемого второго утверждения.

Доказательство третьего утверждения проводится по той же самой схеме и не составляет труда.⮟

Из общих соображений ясно, что в случае, когда ЛПР готово за определенный прирост по первой группе критериев пожертвовать некоторым количеством по критериям менее важной группы, то это ЛПР должно согласиться как на больший прирост по тем же самым критериям, так и на меньшую потерю по менее важным критериям. Действительно, справедлива следующая

**Теорема 3.2.** *Пусть отношение предпочтения* $\succ$ *удовлетворяет аксиомам* 2 *и* 3. *Предположим, что группа критериев* $A$ *важнее группы критериев* $B$ *с двумя заданными наборами положительных параметров* $w_i^*$ *для всех* $i \in A$ *и* $w_j^*$ *для всех* $j \in B$. *Тогда группа критериев* $A$ *будет важнее группы критериев* $B$ *с любой парой наборов положительных параметров* $w_i'$ *для всех* $i \in A$ *и всех* $w_j'$ *для всех* $j \in B$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$w_i' > w_i^* \quad \text{для всех } i \in A, \; w_j' < w_j^* \quad \text{для всех } j \in B.$$

*Иначе говоря, если первая группа критериев* $A$ *важнее второй группы критериев* $B$ *с коэффициентами относительной важности* $\theta_{ij}$ *для всех* $i \in A$ *и всех* $j \in B$, *то первая группа будет важнее второй и с любыми коэффициентами относительной важности* $\theta_{ij}'$, *меньшими, чем* $\theta_{ij}$, *т. е.* $\theta_{ij}' < \theta_{ij}$ *для всех* $i \in A$ *и всех* $j \in B$.

Доказательство теоремы 3.1 проводится аналогично доказательству теоремы 2.1; поэтому воспроизводить его здесь не будем.

По аналогии с рассмотрениями предыдущей главы можно ввести *предельные коэффициенты относительной важности для двух групп критериев.*

Кроме того, можно определить и отношение несравнимой важности одной группы критериев по сравнению с другой группой. А именно, если любое положительной число $\theta_{ij} \in (0, 1)$ (при всех $i \in A$ и $j \in B$) является коэффициентом относительной важности для группы критериев $A$ по сравнению с группой критериев $B$, то в таком случае будем говорить, что *первая группа критериев несравнимо важнее второй группы.*

Во второй главе уже была получена характеризация лексикографического [1]) отношения в терминах последовательного набора несравнимо боле важных критериев (см. теорему 2.2). Ниже формулируется аналогичное утверждение в терминах групп критериев, которое эквивалентно теореме 2.2.

**Теорема 3.3.** *Заданное на пространстве* $R^m$ *бинарное отношение* $\succ$, *удовлетворяющее аксиомам* 2 *и* 3, *является лексикографическим тогда и только тогда, когда первый критерий несравнимо важнее группы* $\{2, 3, ..., m\}$ *всех остальных критериев, второй критерий несравнимо важнее группы* $\{3, ..., m\}$ *всех последующих критериев и т. д.* $(m-1)$*-й критерий несравнимо важнее* $m$*-го критерия.*

⮙ Необходимость. Пусть отношение $\succ$ является лексикографическим. По определению лексикографического отношения для произвольных двух векторов $y', y'' \in R^m$ выполнены следующие $m$ высказываний

1) $y_1' > y_1'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

2) $y_1' = y_1'',\ \ y_2' > y_2'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

3) $y_1' = y_1'',\ \ y_2' = y_2'',\ \ y_3' > y_3'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$;

..........................................................

m) $y_i' = y_i'',\ \ i = 1, 2, ..., m-1;\ \ y_m' > y_m'' \quad \Rightarrow \quad y' \succ y''$.

Из высказывания 1) следует, что первый критерий несравнимо важнее группы всех остальных критериев. Действительно, согласно высказыванию 1), для произвольных векторов $y', y'' \in R^m$, у которых разности $y_2'' - y_2', ..., y_m'' - y_m'$ положительны, все числа

$$\theta_{12} = \frac{y_2'' - y_2'}{y_1' - y_1'' + y_2'' - y_2'},$$

$$\theta_{13} = \frac{y_3'' - y_3'}{y_1' - y_1'' + y_3'' - y_3'},$$

..............................

$$\theta_{1m} = \frac{y_m'' - y_m'}{y_1' - y_1'' + y_m'' - y_m'}$$

являются коэффициентами относительной важности, причем поскольку указанные выше разности вместе с разностью $y_1' - y_1''$ могут принимать все возможные значения в пределах от 0 до $+\infty$, выписанные коэффициенты относительной важности являются произвольными числами, сплошь заполняющими интервал $(0, 1)$. Это означает, что первый критерий несравнимо важнее группы всех остальных критериев.

Аналогично, из высказывания 2) можно прийти к выводу, что второй критерий несравнимо важнее группы всех последующих критериев $(3, ..., m)$, ..., из $(m-1)$-го высказывания следует несравнимая важность $(m-1)$-го критерия по сравнению с $m$-м критерием.

Достаточность. Пусть первый критерий несравнимо важнее группы $(2, 3, ..., m)$ всех остальных критериев, второй — несравнимо важнее группы $(3, ..., m)$ всех последующих критериев и т. д. Выберем два произвольных вектора $y', y'' \in R^m$, для которых верно

[1]) Определение лексикографического отношения можно найти в разд. 1.2.

неравенство $y_1' > y_1''$. Для доказательства высказывания 1) следует убедиться в том, что имеет место соотношение $y' \succ y''$.

Если дополнительно к неравенству $y_1' > y_1''$ выполнено $y_i' \geq y_i''$, $i = 2, ..., m$, то благодаря аксиоме Парето получаем соотношение $y' \succ y''$.

Рассмотрим случай, когда в дополнение к неравенству $y_1' > y_1''$ имеет место обратное неравенство $y_s' < y_s''$ для некоторого (или некоторых) $s \in \{2, ..., m\}$. Введем в рассмотрение вектор $y$, у которого $y_1 = y_1'$, для всех указанных номеров $s$ выполнено равенство $y_s = y_s' - 1$, а все остальные компоненты имеют вид $y_k = y_k'' - 1$. Очевидно, справедливо неравенство $y' \geq y$. Следовательно, согласно аксиоме Парето верно соотношение $y' \succ y$. У вектора $y$ только первая компонента больше первой компоненты вектора $y''$, а все остальные — меньше соответствующих компонент $y''$. Поэтому благодаря тому, что первый критерий несравнимо важнее набора всех остальных критериев, получаем $y \succ y''$. В силу транзитивности отношения $\succ$ из соотношений $y' \succ y$ и $y \succ y''$ приходим к требуемому результату $y' \succ y''$.

Точно так же, используя аксиому Парето и тот факт, что второй критерий несравнимо важнее группы $(3, ..., m)$ всех последующих критериев, проверяется истинность высказывания 2) и т. д.

Действуя подобным образом, в конце концов, получим справедливость высказывания m – 1). Высказывание m) вытекает из аксиомы 3.$\curlyvee$

### 3.2. Использование информации об относительной важности критериев для двух групп критериев

**1. Эквивалентное более простое определение относительной важности для двух групп критериев**. Для того чтобы в соответствии с определением 3.1 проверить, действительно ли одна группа критериев важнее другой группы, необходимо предложить ЛПР для сравнения бесконечное число пар векторов $y', y'' \in R^m$, удовлетворяющих соотношениям (3.1) при некоторых положительных параметрах $w_i^*$, $w_j^*$. Очевидно, что на практике подобную проверку осуществить невозможно из-за бесконечного числа сравниваемых пар векторов. На самом деле, как и в случае двух критериев (см. теорему 2.4), такая проверка в условиях инвариантности отношения предпочтения и не требуется. Достаточно убедиться в выполнении соотношений (3.1) лишь для некоторой одной фиксированной пары векторов $y'$, $y''$. Об этом свидетельствует следующий результат, который доказывается по той же схеме, что и теорема 2.4.



**Теорема 3.4.** *В силу инвариантности отношения предпочтения $\succ$ можно считать, что в определении* 3. 1 *векторы $y'$, $y''$ фиксированы. В частности, в нем можно положить*

$$y_i' = w_i^* \quad \text{для всех } i \in A,$$

$$y_j' = -w_j^* \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$y_s' = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{a \cup B\} \qquad (3.3)$$

*и* $y'' = 0_m$.

Поскольку отношение предпочтения $\succ$ предполагается инвариантным относительно линейного положительного преобразования, на основании сформулированной теоремы 3.4 приведем более простое определение относительной важности, которое эквивалентно определению 3.1.

**Определение 3.3.** Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \bigcap B = \varnothing$. *Группа критериев $A$ важнее группы критериев $B$ с двумя заданными наборами положительных параметров $w_i^*$ для всех $i \in A$ и $w_j^*$ для всех $j \in B$, если для вектора $y'$ вида* (3.3) *верно соотношение $y' \succ 0_m$.*

В соответствии с данным определением, если, например, вектор (0.7, –0.3, 1) оказывается для ЛПР предпочтительнее нулевого вектора (0, 0, 0), то группа из первого и третьего критериев будет важнее группы, состоящей из одного второго критерия, причем соответствующие коэффициенты относительной важности равны

$$\theta_{12} = \frac{0.3}{0.7 + 0.3} = 0.7, \quad \theta_{32} = \frac{0.3}{1 + 0.3} \approx 0.23.$$

**2. Сужение множества Парето на основе информации о том, что одна группа критериев важнее другой группы**. На основе следующей теоремы в процессе принятия решений из множества всех парето-оптимальных векторов можно удалять те, которые заведомо не могут оказаться выбранными.

**Теорема 3.5** (в терминах векторов). *Предположим, что $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \bigcap B = \varnothing$ и группа критериев $A$ важнее группы критериев $B$ с двумя заданными наборами положительных параметров $w_i^*$ для всех $i \in A$ и $w_j^*$ для всех $j \in B$. Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов имеют место включения*

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{3.4}$$

*где $P(Y)$ есть множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с множеством возможных решений $X$ и векторным критерием $f$, а $P(\widehat{Y})$ — множество парето-оптимальных векторов в задаче с исходным множеством решений $X$ и новым $p$-мерным $(p = m - |B| + |A| \cdot |B|)$ векторным критерием $g$, составленном из тех компонент $f_i$ векторного критерия $f$, для которых $i \in I \setminus B$, а также компонент вида*

$$g_{ij} = \theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j \quad \textit{для всех } i \in A \textit{ и всех } j \in B. \tag{3.5}$$

⮙ Вновь через $K$ обозначим острый выпуклый конус конусного отношения $\succ$. По условию для вектора $y'$ вида (3.3) выполняется соотношение $y' \succ 0_m$, а значит $y' \in K$. В соответствии со следствием 2.1 справедливо включение $R_+^m \subset K$.

Введем в рассмотрение множество $M$ — совокупность всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций конечного набора векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m, y'$, где $e^1, e^2, \ldots, e^m$ — единичные орты пространства $R^m$. Множество $M$ является выпуклым конусом, не содержащим начало координат (так как коэффициенты линейных комбинаций одновременно в нуль не обращаются). В силу включений $e^1, e^2, \ldots, e^m \in R_+^m \subset K$ и $y' \in K$ введенное множество $M$ представляет собой подмножество конуса $K$. Более того, $M$ — острый конус, так как он — подмножество острого выпуклого конуса $K$.

Введем так называемый *двойственный*[1]) *конус* (без нуля) по отношению к конусу $M$, т. е.

$$C = \{y \in R^m \mid \langle z, y \rangle \geqq 0 \text{ для всех } z \in M\} \setminus \{0_m\}.$$

На основании теории двойственности выпуклого анализа ([28], с. 175) образующими конуса $C$ являются внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса $M$, и обратно: образующими конуса $M$ служат внутренние нормали к $(m-1)$-мерным граням конуса $C$.

Возможны два случая: $|A| > 1$ и $|A| = 1$. В первом случае образующими конуса $M$ являются все векторы $e^1, e^2, \ldots, e^m, y'$, поскольку ни один из этих векторов нельзя представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов этого набора. Во втором случае (т. е. тогда, когда $A = \{i\}$) вектор $e^i$ можно представить в виде положительной линейной комбинации вектора $y'$ и всех

[1]) О двойственном конусе см. также п. 3.3.



векторов $e^s$ при $s \in B$. Значит, во втором случае образующими конуса $M$ являются векторы $e^1, e^2, \ldots, e^m, y'$ без вектора $e^i$. Далее сначала рассматривается первый случай, а затем — второй.

Так как образующими конуса $M$ являются векторы $e^1, e^2, \ldots, e^m, y'$, то множество ненулевых решений системы линейных неравенств

$$\begin{aligned} \langle e^i, y \rangle &\geqq 0 \text{ для всех } i \in I, \\ \langle y', y \rangle &\geqq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

совпадает с двойственным конусом $C$.

Найдем фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (3.6). Это должна быть такая система векторов, множество неотрицательных линейных комбинаций которой в точности совпадает с множеством решений системы (3.6). При этом ни один вектор фундаментальной совокупности невозможно представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов этой совокупности.

Сначала укажем некоторый набор решений системы линейных неравенств (3.6). Прежде всего, заметим, что каждый единичный орт $e^i$ пространства $R^m$ при $i \in I \setminus B$ является решением (3.6). Далее, введем векторы

$$e^{ij} = \theta_{ij} e^i + (1 - \theta_{ij}) e^j$$

для всех $i \in A$ и всех $j \in B$. Компоненты этих векторов неотрицательны, и потому все они удовлетворяют неравенствам $\langle e^i, y \rangle \geqq 0$ для каждого $i \in I$. Более того, они удовлетворяют и последнему неравенству $\langle y', y \rangle \geqq 0$ системы (3.6), так как

$$\langle y', e^{ij} \rangle = y_i' \theta_{ij} + y_j' (1 - \theta_{ij}) = w_i^* \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} - w_j^* \frac{w_i^*}{w_i^* + w_j^*} = 0$$

для всех $i \in A$ и $j \in B$.

Таким образом, набор, состоящий из векторов $e^i$ для всех $i \in I \setminus B$ и векторов $e^{ij}$ для всех $i \in A$ и $j \in B$, принадлежит двойственному конусу $C$. При этом, как нетрудно убедиться, ни один из векторов этой совокупности невозможно представить в виде неотрицательной линейной комбинации остальных векторов. Общее число $p$ всех векторов указанного набора равно

$$p = m - |B| + |A| \cdot |B|.$$

Для того чтобы проверить, что указанный набор векторов образует фундаментальную совокупность решений системы (3.6), остается убедиться в том, что система линейных неравенств (3.6) не имеет никаких других (с точностью до положительного множителя) решений, кроме всевозможных неотрицательных линейных комбинаций векторов указанного выше набора. С этой целью наряду с системой (3.6) рассмотрим соответствующую ей систему из $m+1$ линейных уравнений:

$$\langle e^i, y\rangle = 0 \text{ для всех } i \in I,$$
$$\langle y', y\rangle = 0. \tag{3.7}$$

Любая подсистема из $m-1$ векторов системы $e^1, e^2, \ldots, e^m, y'$ является линейно независимой. Следовательно, искомая фундаментальная совокупность решений системы линейных неравенств (3.6) содержится среди (одномерных) ненулевых решений подсистем из $m-1$ уравнений системы линейных уравнений (3.7).

Начнем удалять из системы (3.7) по два уравнения и выписывать решения получающихся в результате такого удаления подсистем, удовлетворяющие, кроме того, системе неравенств (3.6). Найденные таким образом векторы и составят требуемую фундаментальную совокупность решений системы неравенств (3.6).

Если в число удаляемых входит последнее уравнение системы (3.7), то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут служить (с точностью до положительного множителя), например, единичные орты $e^1, e^2, \ldots, e^m$. Однако, как легко видеть, из этого набора лишь те векторы, для которых $i \in I \setminus B$, удовлетворяют системе неравенств (3.6).

Если последнее уравнение системы линейных уравнений (3.7) не удаляется, то ненулевыми решениями получающихся подсистем будут являться (с точностью до положительного множителя) векторы $e^{ij}$ для всех $i \in A$ и всех $j \in B$. Все эти векторы, как было установлено ранее, удовлетворяют системе неравенств (3.6).

Поскольку все возможные варианты удаления пар уравнений из системы линейных уравнений (3.7) рассмотрены, то никаких других (с точностью до положительного множителя) решений подсистем из $m-1$ уравнений системы (3.7), удовлетворяющих (3.6), не существует. Это означает, что система векторов, составленная из $e^i$ для всех $i \in I \setminus B$ и $e^{ij}$ для всех $i \in A$ и всех $j \in B$, образует фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (3.6). Следовательно, любое решение системы неравенств (3.6) может быть представлено в виде неотрицательной линейной комбинации этой совокупности векторов. Будем далее для удобства обозначать эту совокупность $a^1, a^2, \ldots, a^p$. Рассмотрение первого случая завершено.



Несколько слов о втором случае. Когда $A = \{i\}$, рассуждения аналогичны, но несколько проще приведенных выше. В этом случае следует рассмотреть систему из $m$ уравнений, которая отличается от (3.7) отсутствием уравнения $\langle e^i, y\rangle = 0$, соответствующего единичному орту $e^i$. Здесь удалять следует лишь одно уравнение, чтобы получить ту же самую фундаментальную совокупность решений системы линейных неравенств (3.6).

Итак, в силу доказанного выше, множество решений системы линейных неравенств (3.6), т. е. конус $C$ (вместе с нулем), совпадает с множеством всех неотрицательных линейных комбинаций векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$. Поэтому включение $z \in C$ для вектора $z$ имеет место тогда и только тогда, когда этот вектор можно представить в виде некоторой ненулевой неотрицательной линейной комбинации векторов указанного набора.

Благодаря последнему обстоятельству неравенство

$$\langle z, y\rangle \geqq 0 \text{ для всех } z \in C \tag{3.8}$$

для произвольного фиксированного вектора $y \neq 0_m$ оказывается эквивалентным неравенству

$$\langle a^i, y\rangle \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, p, \tag{3.9}$$

где знак $\geq$ указывает, что хотя бы для одного $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ неравенство строгое. В самом деле, если вектор $y$ удовлетворяет неравенствам (3.9), то поскольку всякий вектор $z \in C$ можно представить в виде некоторой ненулевой неотрицательной линейной комбинации векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$, например, $z = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_p a^p$, то, умножая неравенства (3.9) на соответствующие одновременно не равные нулю неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ и почленно складывая полученные таким образом неравенства, придем к неравенству

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a^i, y \right\rangle = \langle z, y\rangle \geqq 0$$

из (3.8). Обратно, из (3.8) вытекает (3.9), так как $a^i \in C$ для всех $i = 1, 2, \ldots, p$. При этом одновременно все неравенства (3.9) как равенства выполняться не могут. В самом деле, если для ненулевого вектора $y$ неравенства (3.9) выполняются как равенства, то эти же неравенства будут иметь место и для противоположного вектора $-y$. Отсюда следует, что конус, двойственный по отношению к $C$, не является острым. Но этот двойственный конус есть

$$M = \{y \in R^m \mid \langle z, y\rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } z \in C\} \setminus \{0_m\},$$

так как $C$ является двойственным по отношению к конусу $M$[1]). Тем самым, приходим к противоречию — конус $M$ не является острым. Полученное противоречие означает, что для ненулевого вектора $y$ одновременно все неравенства (3.9) выполняться как равенства не могут.

На основании установленной эквивалентности неравенств (3.6) и (3.9) заключаем, что включение $y \in M$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливы неравенства (3.9), и поэтому

$$y \in M \quad \Leftrightarrow \quad \langle a^i, y\rangle \geq 0, \; i = 1, 2, \dots, p. \tag{3.10}$$

Переходим к завершающему этапу доказательства теоремы. Из включений

$$R_+^m \subset M \subset K$$

следует

$$\mathrm{Ndom}\, Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{3.11}$$

где

$$P(\widehat{Y}) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

представляет собой множество недоминируемых элементов множества $Y$, упорядоченного конусным отношением с острым выпуклым конусом $M$.

Пусть $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$, $f(x) \neq f(x^*)$ при некоторых $x, x^* \in X$. Благодаря эквивалентности (3.10) включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\langle a^i, f(x^*) - f(x^*)\rangle \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

или, что то же самое,

$$\langle a^i, f(x)\rangle \geq \langle a^i, f(x^*)\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Если вспомнить конкретный вид векторов $a^1, a^2, \dots, a^p$, то последние неравенства можно переписать в виде

$$g(x) \geq g(x^*),$$

[1]) В случае многогранного конуса $M$ двойственным по отношению к двойственному конусу $C$ является исходный конус $M$ [28].



где $g$ — $p$-мерная векторная функция, участвующая в формулировке доказываемой теоремы. Следовательно, $P(\widehat{Y})$ — это множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений $X$ и векторным критерием $g$.

Для завершения доказательства теоремы остается в (3.11) воспользоваться включением $\mathrm{Sel}\, Y \subset \mathrm{Ndom}\, Y$, которое имеет место в силу леммы 1.2.

Полученный результат можно легко переформулировать в терминах решений. А именно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.4** (в терминах решений). *Предположим, что выполнены аксиомы* 1–4 , $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \bigcap B = \varnothing$ *и группа критериев $A$ важнее группы критериев $B$ с двумя заданными наборами положительных параметров $w_i^*$ для всех $i \in A$ и $w_j^*$ для всех $j \in B$. Тогда для любого непустого множества выбираемых решений имеют место включения*

$$\mathrm{Sel}\, X \subset P_g(X) \subset P_f(X), \tag{3.12}$$

*где $P_f(X)$ есть множество парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с множеством возможных решений $X$ и векторным критерием $f$, а $P_g(X)$ — множество парето-оптимальных решений в задаче с исходным множеством решений $X$ и новым $p$-мерным векторным критерием $g$, который определяется в формулировке предыдущей теоремы.*

Согласно полученному результату новый векторный критерий $g$ состоит из $p = m - |B| + |A| \cdot |B| \geqq m$ компонент. Значит, число новых критериев может совпадать с числом «старых» критериев, но может и превосходить его.

**Следствие 3. 1**. *В условиях теоремы* 3.4 *равенство $p = m$ выполняется тогда и только тогда, когда $|A| = 1$.*

Пусть $p = m - |B| + |A| \cdot |B| = m$. Тогда $|A| \cdot |B| = |B|$, а значит $|A| = 1$.

Обратно, если $|A| = 1$, то $p = m - |B| + 1 \cdot |B| = m$.

**Пример 3.1.** Пусть в многокритериальной задаче имеется десять критериев, т. е. $m = 10$ и некоторая половина критериев важнее оставшейся половины, т. е. $|A| = |B| = 5$. В этом случае согласно теореме 3.5 имеем $p = 10 - 5 + 5 \cdot 5 = 30$. Следовательно, новый векторный критерий $g$ в данном случае будет содержать пять старых критериев и двадцать пять новых, которые можно вычислить на основе старых, используя формулу (3.5).

Следующий результат показывает, при каких условиях число компонент нового векторного критерия оказывается наибольшим возможным.

**Следствие 3.2.** *В условиях теоремы* 3.4 *максимальное значение* $p$ *достигается в случае*

$$|A| = \left[\frac{m+1}{2}\right], \quad |B| = m - |A|,$$

*где квадратные скобки обозначают целую часть числа.*

⮝ Обозначим $x = |A|$, $y = |B|$ и рассмотрим задачу максимизации

$$p = m - y + xy \to \max$$

при условии $x + y \leqq m$. Нетрудно понять, что максимум в сформулированной задаче может достигаться лишь при выполнении равенства $x + y = m$. Выразив из этого равенства $y$ через $x$ и подставив его в выражение для $p$, получим $p = m - (m - x) + x(m - x) = x(m + 1 - x)$. Эта квадратичная функция одной переменной $x$ принимает наибольшее значение в точке $x = |A| = \frac{m+1}{2}$. Если $m$ является нечетным числом, полученный результат представляет целое число. Когда число критериев $m$ — четное, максимум в целочисленной точке будет достигаться на ближайшем целом $x = |A| = \left[\frac{m+1}{2}\right]$ $\left(\text{равно как и при } x = \left[\frac{m+2}{2}\right]\right)$. ⮟

Следствие 3.2 показывает, что в приведенном выше примере 3.1 (где $m = 10$) максимальное возможное число компонент нового векторного критерия равно 30 и может достигаться в случае, когда одна половина критериев важнее другой половины (либо когда некоторая группа из шести критериев важнее оставшейся группы из четырех критериев).

В теореме 2.7 была установлена инвариантность включений (2.12) и (2.15) относительно линейного положительного преобразования критериев в случае относительной важности для двух критериев. Поскольку формулы для определения коэффициентов относительной важности и пересчета новых критериев абсолютно идентичны как в случае двух критериев, так и в случае двух групп критериев, то рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 2.7, можно применить в данном случае двух групп критериев. В итоге придем к следующему результату, имеющему несомненное практическое значение.



**Следствие 3.3.** *Включения* (3.4) *и* (3.12) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования критериев* $f_1, f_2, \ldots, f_m$, *а значит, результаты теоремы* 3.4 *могут быть использованы для задач многокритериального выбора, в которых значения указанных критериев вычисляются в количественных шкалах* (*интервалов, отношений и разностей*).

## 3.3. Геометрические иллюстрации к задаче с тремя критериями

**1. Трехкритериальная задача общего вида**. В двухкритериальной задаче информация об относительной важности может иметь только такую форму, когда группа из одного критерия важнее группы из другого критерия. В этом случае число новых критериев (число $p$) будет совпадать с числом «старых» критериев, т. е. $p = 2$. Таким образом, в двухкритериальной задаче учет информации об относительной важности критериев не приводит к увеличению критериев (собственно говоря, этот же вывод можно получить и из результатов предыдущей главы).

Рассмотрим многокритериальную задачу с тремя критериями, т. е. будем считать $m = 3$. Предположим, что имеется информация о том, что группа из первых двух критериев $f_1, f_2$ важнее третьего критерия $f_3$. Согласно определению 3.3 это означает, что включение $y' \succ 0_3$ имеет место для некоторого вектора $y' = (w_1^*, w_2^*, -w_3^*) = OD$ при определенных положительных параметрах $w_1^*, w_2^*, w_3^*$ (рис. 3.1). Конкретные значения данных параметров в дальнейшем изложении существенной роли не играют. Неотрицательный ортант (октант) $R_+^3$ — это острый выпуклый конус (без нуля) $OABC$, порожденный единичными ортами $e^1 = OA$, $e^2 = OB$ и $e^3 = OC$. Этот конус имеет три двумерные грани, представляющие собой соответствующие части координатных плоскостей: $OBC$, $OAC$ и $OAB$. Выпуклый конус $M$, порожденный единичными ортами пространства $R^3$ и вектором $y'$ — это острый выпуклый конус (без нуля), имеющий уже четыре двумерные грани: $OBC$, $OAC$,

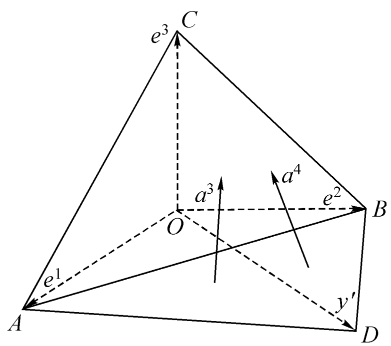


Рис. 3.1.

*OAD* и *OBD*. Нормальные векторы этих граней (направленные внутрь конуса $M$), а именно векторы $a^1$, $a^2$, $a^3$, $a^4$, являются образующими двойственного (по отношению к $M$) конуса $C$. Здесь

$$a^1 = e^1 \perp OBC,\ a^2 = e^2 \perp OAC,\ a^3 \perp OAD,\ a^4 \perp OBD.$$

Поскольку трехмерный конус $M$ имеет четыре двумерные грани, то двойственный конус $C$ порождается четырьмя векторами $e^1$, $e^2$, $a^3$, $a^4$, а значит, новый векторный критерий $g$ в данном случае будет содержать четыре компоненты. Действительно, как утверждает теорема 3.5, выполняется равенство $p = 3 - 1 + 2 \cdot 1 = 4$.

В рассмотренном примере число критериев $m = 3$ при учете информации об относительной важности критериев увеличилось на одну единицу.

Рассмотрим теперь другой случай. Пусть один из критериев будет важнее группы из двух оставшихся. Как легко вычислить, $p = 3 - 2 + 1 \cdot 2 = 3$, т. е. число новых критериев будет совпадать с числом «старых» критериев. То же самое произойдет и в случае, когда один из критериев важнее другого.

Никаких других возможностей группировки критериев по важности не существует, поэтому можно сделать следующий вывод: *в трехкритериальной задаче учет информации об относительной важности критериев для двух произвольных групп критериев может привести к увеличению критериев лишь одну единицу и только в том случае, когда два критерия важнее оставшегося третьего критерия*.

**2. Случай линейных критериев**. Здесь снова рассмотрим трехкритериальную задачу, в которой, кроме того, множеством возможных решений служит подмножество векторного пространства $R^3$, т. е. $X \subset R^3$, а все критерии являются линейными:

$$f_1(x) = \langle c^1, x\rangle, \quad f_2(x) = \langle c^2, x\rangle,$$
$$f_3(x) = \langle c^3, x\rangle,$$

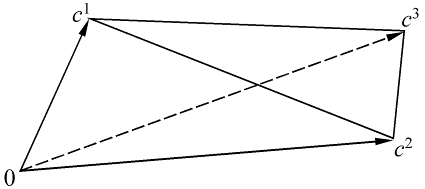


Рис. 3.2.

где $c^1, c^2, c^3, x \in R^3$. Конус, порожденный векторами $c^1, c^2, c^3$ (градиентами линейных целевых функций $f_1, f_2, f_3$), называют *конусом целей*. Пусть эти векторы не компланарны и имеют вид, изображенный на рис. 3.2. Они порождают определенный трехмерный трехгранный конус.



Допустим, что первый критерий важнее группы, состоящей из второго и третьего критерия с коэффициентами относительной важности $\theta_{12} = \theta_{13} = 0.5$. В этом случае, согласно теореме 3.4 при учете подобного рода информации об относительной важности критериев следует рассмотреть новую многокритериальную задачу, в которой первый критерий остается прежним, а вместо двух менее важных второго и третьего критериев будут участвовать два новых критерия вида $g_{12}(x) = \langle c_н^2, x\rangle$ и $g_{13}(x) = \langle c_н^3, x\rangle$ (см. рис. 3.3). Тем самым, конус целей, который образуется градиентами целевых функций в новой многокритериальной задаче, так же как и в исходной, имеет три ребра и три грани, но он существенно у́же исходного конуса, образованного векторами $c^1$, $c^2$ и $c^3$.

А теперь предположим, что группа, состоящая из второго и третьего критерия, важнее первого критерия, причем $\theta_{21} = \theta_{31} = 0.5$. Тогда в соответствии с теоремой 3.4 при учете этой информации об относительной важности критериев следует рассматривать новую многокритериальную задачу, в которой остаются прежними второй и третий критерий, а вместо первого образуются два новых: $g_{21} = \langle c^{11}, x\rangle$ и $g_{31} = \langle c^{12}, x\rangle$ (см. рис. 3.4).

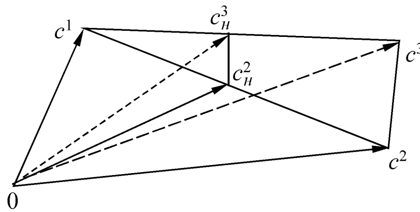


Рис. 3.3.

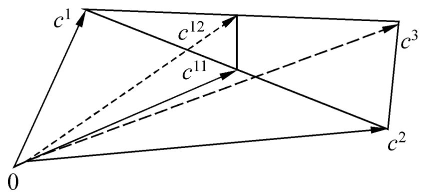


Рис. 3.4.

При этом, как нетрудно видеть, конус целей, образуемый градиентами $c^{11}$, $c^{12}$, $c^3$, $c^4$ компонент нового векторного критерия, имеет четыре образующие и является четырехгранным.

# Глава 4

## СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО НА ОСНОВЕ НАБОРА ИНФОРМАЦИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

Вопросам учета набора различного рода сообщений об относительной важности критериев посвящена эта глава. Подробно рассматриваются наиболее простые варианты набора такой информации, когда каждый из двух данных критериев важнее другого, когда один критерий важнее двух других в отдельности, когда каждый из двух критериев по отдельности важнее третьего. Для всех этих вариантов получены формулы пересчета векторного критерия, на основе которого производится сужение множества Парето.

Здесь также решается практически важный вопрос непротиворечивости набора информации об относительной важности критериев. Получены критерии непротиворечивости в различных формах.

Кроме того, в данной главе предлагается принципиально отличный от использовавшегося ранее алгоритмический подход к учету произвольного конечного набора информации об относительной важности критериев.

### 4.1. Учет двух сообщений об относительной важности

**1. Случай двух независимых сообщений**. Пусть даны четыре непустых набора номеров критериев $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, таких что $A_1 \cap B_1 = \varnothing$, $A_2 \cap B_2 = \varnothing$. Предположим, что группа критериев $A_1$ важнее группы $B_1$ с набором коэффициентов относительной важности $\theta'_{ij}$ и одновременно группа критериев $A_2$ важнее группы $B_2$ с набором коэффициентов относительной важности $\theta''_{ij}$. Тем самым, имеются два сообщения об относительной важности критериев. Будем говорить, что эти два сообщения *взаимно независимы*, если

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing,\ B_1 \cap B_2 = \varnothing,\ A_1 \cap B_2 = \varnothing,\ A_2 \cap B_1 = \varnothing.$$

Для того чтобы использовать информацию об относительной важности критериев для сужения множества Парето, состоящую из двух независимых сообщений, следует просто дважды воспользоваться теоремой 3.3, в которой приводятся формулы для пере-



счета векторного критерия. Сначала эту теорему можно применить, например, для учета первого сообщения, т. е. к группам критериев $A_1$ и $B_1$. В результате вместо критериев менее важной группы $B_1$ в соответствии с формулой (3.5) необходимо вычислить новые критерии. Затем эта же теорема применяется ко второй группе критериев $A_2$ и $B_2$, что ведет к пересчету критериев группы $B_2$ по той же самой формуле (3.5). В итоге будет получен новый векторный критерий, множество парето-оптимальных решений (парето-оптимальных векторов) относительно которого будет оценкой сверху для неизвестного множества выбираемых решений $\operatorname{Sel} X$ (выбираемых векторов $\operatorname{Sel} Y$).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда $i$-й критерий важнее $j$-го, а он, в свою очередь, важнее некоторого $k$-го критерия, $i \neq j$, $j \neq k$, $i \neq k$. Здесь также имеются два сообщения об относительной важности критериев, но они не являются взаимно независимыми. Тем не менее, для учета этого набора информации и формирования нового векторного критерия также можно дважды применить теорему 2.5, в которой идет речь об учете информации об относительной важности одного критерия в сравнении с другим. Сначала следует пересчитать $k$-й критерий для того, чтобы воспользоваться информацией о том, что $j$-й критерий важнее $k$-го. Затем необходимо пересчитать $j$-й критерий для учета информации о том, что $i$-й критерий важнее $j$-го. В результате будет образован новый векторный критерий, у которого все компоненты за исключением $j$-й и $k$-й остались прежними. Множество парето-оптимальных решений (парето-оптимальных векторов) относительно нового векторного критерия будет представлять собой оценку сверху для неизвестного множества выбираемых решений (выбираемых векторов).

**2. Случай, когда каждый из двух критериев важнее другого**. Сначала сформулируем и докажем один вспомогательный результат.

**Лемма 4.1**. *Благодаря транзитивности и инвариантности отношения предпочтения $\succ$ соотношения $y \succ y'$ и $z \succ z'$ для произвольных векторов $y, y', z, z' \in R^m$ можно почленно складывать, т. е.*

$$y \succ y',\ z \succ z' \quad \Rightarrow \quad y + z \succ y' + z'.$$

⮝ Прибавим к обеим частям соотношения $y \succ y'$ вектор $z$. Благодаря аддитивности отношения $\succ$ получим $y + z \succ y' + x$. Аналогично, из соотношения $z \succ z'$ следует $z + y' \succ z' + y'$. Теперь, используя транзитивность отношения $\succ$, из полученных соотношений $y + z \succ y' + z$ и $z + y' \succ z' + y'$ приходим к требуемому результату $y + z \succ y' + z'$. ⮟

Рассмотрим два сообщения об относительной важности критериев, состоящие в том, что $i$-й критерий важнее $j$-го, а он, в свою очередь, важнее $i$-го. На первый взгляд эти два сообщения кажутся взаимно противоречивыми — каждый из двух критериев важнее другого. Однако, как будет показано ниже, эта ситуация противоречива не всегда. А именно, имеет место следующий результат.

**Теорема 4.1.** *Для того чтобы $i$-й критерий был важнее $j$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij}$ и одновременно $j$-й критерий был важнее $i$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ji}$, необходимо выполнение неравенства* $\theta_{ij} + \theta_{ji} < 1$.

▲ На основании упрощенного определения 2.4 относительной важности для вектора $y \in R^m$ с компонентами

$$y_i = 1 - \theta_{ij},\ y_j = -\theta_{ij},\ y_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$

по условию, имеет место соотношение $y \succ 0_m$ и одновременно для вектора $y' \in R^m$ с компонентами

$$y'_j = (1 - \theta_{ji}),\ \ y'_i = -\theta_{ji},\ \ y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}$$

выполняется соотношение $y' \succ 0_m$.

Складывая почленно $y \succ 0_m$ и $y' \succ 0_m$, получим соотношение $\hat{y} = y + y' \succ 0_m$, где вектор $\hat{y}$ имеет компоненты

$$\hat{y}_i = \hat{y}_j = 1 - \theta_{ij} - \theta_{ji}, \quad \hat{y}_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Как видим, этот вектор имеет одинаковые $i$-ю и $j$-ю компоненты. Они не могут быть отрицательными, поскольку в этом случае будет выполнено неравенство $\hat{y} \leq 0_m$, из которого в силу аксиомы Парето следует соотношение $0_m \succ \hat{y}$, не совместимое с полученным ранее $\hat{y} \succ 0_m$. Кроме того, эти компоненты не могут быть нулевыми, так как тогда соотношение $\hat{y} \succ 0_m$ примет вид $0_m \succ 0_m$. Следовательно, указанные компоненты должны быть положительными, т. е. $1 - \theta_{ij} - \theta_{ji} > 0$.▼

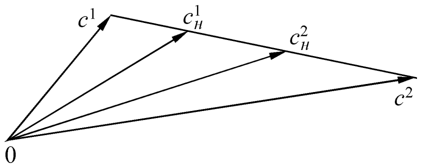

Рис. 4.1.

Геометрический смысл теоремы 4.1 лучше всего раскрывается в случае, когда критерии линейные. Пусть $m = 2$, $n = 2$, $f_1(x) = \langle c^1, x\rangle$, $f_2(x) = \langle c^2, x\rangle$, где $c^1, c^2, x \in R^2$ (рис. 4.1).



Поскольку первый критерий важнее второго (допустим, что $\theta_{12} \approx 0.4$), то вместо второго критерия в новой многокритериальной задаче, множество Парето которой является оценкой сверху для искомого множества выбираемых решений (векторов), будет участвовать новый второй критерий, градиент которого обозначен $c^2_н$. Конец этого вектора представляет собой результат перемещения конца вектора $c^2$ по прямой, соединяющей концы векторов $c^1$ и $c^2$, в направлении конца вектора $c^1$ на 40 % длины отрезка, соединяющего концы двух данных векторов. С другой стороны, поскольку второй критерий важнее первого (пусть $\theta_{21} \approx 0.25$), то новый первый критерий будет иметь градиент $c^1_н$, конец которого будет располагаться на расстоянии 25% длины указанного выше отрезка от конца вектора $c^1$ в направлении конца вектора $c^2$. Новый векторный критерий будет иметь вид $(\langle c^1_н, x\rangle,\ \langle c^2_н, x\rangle)$. Таким образом, при учете набора указанной информации происходит взаимное изменение направлений градиентов обоих критериев, которое можно трактовать как «сближение целей».

Если аналогичным образом интерпретировать равенство $\theta_{12} + \theta_{21} = 1$, то в этом случае концы градиентов новых векторов $c^1_н$ и $c^2_н$ должны совместиться и двухкритериальная задача превратится в однокритериальную. Как утверждает теорема 4.1, этого быть не должно. Тем более, концы векторов $c^1_н$ и $c^2_н$ не могут перемещаться в указанных направлениях еще дальше (что соответствует случаю $\theta_{12} + \theta_{21} > 1$).

Невозможность равенства $\theta_{12} + \theta_{21} = 1$ в общем случае легко установить непосредственно.

▲ В самом деле, если указанное равенство имеет место, то для векторов $y$ и $y'$ вида

$$y_i > 0,\ y_j < 0,\ y_s = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, j\}; \quad y' = -y$$

выполняются соотношения $y \succ 0_m$ и $y' \succ 0_m$. Сложив почленно последние два соотношения (это допускается леммой 4.1), получим $y + y' = 0_m \succ 0_m$, что противоречит асимметричности отношения $\succ$.▼

Теперь перейдем к вопросу учета информации об относительной важности в случае, когда $i$-й критерий важнее $j$-го с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij}$ и одновременно $j$-й критерий важнее $i$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ji}$. Напоминаем, что в контексте данной книги учесть информацию об относительной важности критериев — означает построить новую многокритериальную задачу, множество Парето которой является оценкой сверху для множества выбираемых решений (векторов) в исходной задаче.

Для учета указанной информации можно дважды воспользоваться теоремой 2.5. В соответствии с этой теоремой в новой многокритериальной задаче критерий $f_i$ следует заменить на $(1-\theta_{ij})f_i + \theta_{ji}f_j$, а $f_i$ — на критерий $\theta_{ij}f_i + (1-\theta_{ij})f_j$. Все остальные критерии (если они имеются) остаются прежними.

**3. Случай, когда один критерий важнее двух других**. Если для сужения множества Парето используется сразу несколько сообщений об относительной важности критериев, то следует учитывать следующее обстоятельство. Пусть $i$-й критерий важнее $j$-го с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij}$ и, кроме того, $i$-й критерий важнее $k$-го ($k \neq j$) с коэффициентом относительной важности $\theta_{ik}$. Тем самым, имеется набор из двух указанных сообщений об относительной важности критериев, причем эта ситуация внешне напоминает ту, в которой $i$-й критерий важнее группы критериев $\{j, k\}$ с коэффициентами относительной важности $\theta_{ij}$ и $\theta_{ik}$.

Оказывается, *если $i$-й критерий важнее группы критериев $\{j, k\}$ с коэффициентами относительной важности $\theta_{ij}$ и $\theta_{ik}$, то $i$-й критерий будет важнее каждого из критериев $j$ и $k$ в отдельности с теми же самыми коэффициентами относительной важности.*

⮙ Действительно, когда соотношение $y' \succ 0_m$ выполняется для всех векторов $y' \in R^m$ вида

$$y'_i = w_i^*,\ \ y'_j = -w_j^*,\ \ y'_k = -w_k^*,\ \ y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j, k\},$$

то аналогичное соотношение $y'' \succ 0_m$ будет иметь место и для всех векторов $y'' \in R_m$ вида

$$y''_i = w_i^*,\ \ y''_j = -w_j^*,\ \ y''_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$

так как неравенство $y'' \geq y'$ благодаря аксиоме Парето влечет соотношение $y'' \succ y'$, что вместе с соотношением $y' \succ 0_m$ приводит к соотношению $y'' \succ 0_m$. Это означает, что $i$-й критерий важнее $j$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij}$.

Точно так же можно проверить, что бóльшая важность $i$-го критерия по сравнению с группой критериев $\{j, k\}$ с коэффициентами относительной важности $\theta_{ij}$ и $\theta_{ik}$ влечет бóльшую важность $k$-го критерия по сравнению с $k$-м критерием с коэффициентом относительной важности $\theta_{ik}$.⮛

Теперь пусть $i$-й критерий важнее $j$-го и $k$-го в отдельности с коэффициентами относительной важности $\theta_{ij}$ и $\theta_{ik}$. В этом слу-



чае ЛПР за прирост по $i$-му критерию в размере $w_i^*$ единиц готово пожертвовать отдельно $w_j^*$ единиц по $j$-му критерию, либо $w_k^*$ единиц по $k$-му критерию. Нетрудно понять, что отсюда, вообще говоря, не следует, что ЛПР согласится в качестве компенсации за прирост $w_i^*$ единиц по $i$-му критерию потерять одновременно и по $j$-му и по $k$-му критерию $w_j^*$ единиц и $w_k^*$ единиц соответственно. Это свидетельствует о том, что *если $i$-й критерий важнее $j$-го и $k$-го в отдельности с коэффициентами относительной важности $\theta_{ij}$ и $\theta_{ik}$, то отсюда в общем случае не следует большая важность $i$-го критерия по сравнению с группой критериев $\{j, k\}$ с теми же самыми коэффициентами относительной важности.*

Следует, однако, обратить внимание на то, что *из бóльшей важности $i$-го критерия по сравнению с $j$-м и $k$-м критериями в отдельности с коэффициентами относительной важности $\theta_{ij}$ и $\theta_{ik}$ соответственно, вытекает большая важность $i$-го критерия по сравнению с группой критериев $\{j, k\}$, но с меньшими коэффициентами относительной важности.*

⮙ В самом деле, складывая почленно соотношения $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$, где векторы $y'$ и $y''$ имеют вид

$$y'_i = w_i^*,\ \ y'_j = -w_j^*,\ \ y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$

$$y''_i = \bar{w}_i,\ \ y''_k = -\bar{w}_k,\ \ y''_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\}$$

получим соотношение $y = y' + y'' \succ 0_m$, где вектор $y$ имеет компоненты

$$y_i = w_i^* + \bar{w}_i,\ \ y_j = -w_j^*,\ \ y_k = -\bar{w}_k,\ \ y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\}.$$

Полученное означает, что $i$-й критерий важнее группы критериев $\{j, k\}$ с коэффициентами относительной важности

$$\theta'_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + \bar{w}_i + w_j^*} < \theta_{ij}, \qquad \theta'_{ik} = \frac{\bar{w}_k}{w_i^* + \bar{w}_i + \bar{w}_k} < \theta_{ik}.$$⮛

Следующий результат показывает, каким образом следует производить пересчет векторного критерия для того, чтобы учесть набор информации, состоящей из двух сообщений о том, что $i$-й критерий важнее как $j$-го, так и $k$-го критериев в отдельности.

**Теорема 4.2** (в терминах векторов). *Пусть выполнены аксиомы 1–4 и имеются два сообщения о том, что $i$-й критерий важнее $j$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij}$, а также* *что $i$-й критерий важнее $k$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ik}$. Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов справедливы включения*

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{4.1}$$

*где $P(\widehat{Y})$ — множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с множеством возможных решений $X$ и новым $(m+1)$-мерным векторным критерием $g$ с компонентами*

$$g_j = \theta_{ij} f_i + (1-\theta_{ij}) f_j, \quad g_k = \theta_{ik} f_i + (1-\theta_{ik}) f_k,$$
$$g_{m+1} = \theta_{ij}\theta_{ik} f_i + (1-\theta_{ij})\theta_{ik} f_j + \theta_{ij}(1-\theta_{ik}) f_k,$$
$$g_s = f_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\}. \tag{4.2}$$

⮙ Вновь символом $K$ обозначим острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения $\succ$.

Согласно определению 2.4 наличие информации об относительной важности критериев в данном случае означает справедливость соотношений $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$, что равносильно выполнению включений $y' \in K$ и $y'' \in K$ для векторов $y'$ и $y''$ с компонентами

$$y'_i = 1-\theta_{ij}, \quad y'_j = -\theta_{ij}, \quad y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$
$$y''_i = 1-\theta_{ik}, \quad y''_k = -\theta_{ik}, \quad y''_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\}.$$

Обозначим через $M$ выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, \dots, e^m, y', y''$. Этот конус порождается тем же самым набором, но без вектора $e^i$, так как последний можно представить, например, в виде линейной комбинации векторов $e^j$, $y'$ с положительными коэффициентами. Таким образом, конус $M$ совпадает с множеством всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций вида

$$\lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_{i-1} e^{i-1} + \lambda'_i y' + \lambda''_i y'' + \lambda_{i+1} e^{i+1} + \dots + \lambda_m e^m.$$

Поскольку все указанные выше векторы, порождающие конус $M$, принадлежат острому конусу $K$, то и конус $M$ — острый.

Установим совпадение конуса $M$ с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств

$$y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$



$$\theta_{ij} y_i + (1-\theta_{ij}) y_j \geqq 0,$$
$$\theta_{ik} y_i + (1-\theta_{ik}) y_k \geqq 0,$$
$$\theta_{ij}\theta_{ik} y_i + (1-\theta_{ij})\theta_{ik} y_j + \theta_{ij}(1-\theta_{ik}) y_k \geqq 0. \tag{4.3}$$

С этой целью найдем общее решение этой системы неравенств, введя в рассмотрение соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\langle e^s, y \rangle = 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$
$$\langle \bar{y}', y \rangle = 0,$$
$$\langle \bar{y}'', y \rangle = 0,$$
$$\langle \bar{y}, y \rangle = 0, \tag{4.4}$$

где компоненты векторов $\bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}$ определяются равенствами

$$\bar{y}'_i = \theta_{ij}, \quad \bar{y}'_j = 1-\theta_{ij}, \quad \bar{y}'_s = y'_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j\},$$
$$\bar{y}''_i = \theta_{ik}, \quad \bar{y}''_k = 1-\theta_{ik}, \quad \bar{y}''_s = y''_s \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$
$$\bar{y}_i = \theta_{ij}\theta_{ik}, \quad \bar{y}_j = (1-\theta_{ij})\theta_{ik}, \quad \bar{y}_k = \theta_{ij}(1-\theta_{ik}),$$
$$\bar{y}_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, j, k\}.$$

Система (4.4) содержит $m+1$ линейное уравнение, причем любая подсистема из $m-1$ векторов набора $e^s$, $s \in I \setminus \{i, k\}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$, $\bar{y}$, участвующих в образовании этой системы, является линейно независимой. Поэтому для отыскания общего решения системы линейных неравенств (4.3) достаточно просмотреть (одномерные) ненулевые решения всех возможных подсистем системы (4.4), получающихся из (4.4) удалением каких либо двух ее уравнений. При этом найденные таким способом решения должны удовлетворять системе неравенств (4.3).

Начнем удалять из системы (4.4) по два уравнения. Сначала рассмотрим случай, когда в каждую такую удаляемую пару уравнений входит последнее уравнение. При удалении двух последних уравнений получаем систему с ненулевым решением $e^k$. Если вместе с последним удалить $(m-1)$-е уравнение, то придем к системе с решением $e^j$. Исключение из (4.4) последнего уравнения вместе с одним из уравнений вида $\langle e^s, y \rangle = 0$ для всех $s \neq i$ приводит к системе, обладающей решением $e^s$. Если же к последнему удаляемому уравнению добавить $\langle e^i, y\rangle = 0$, то полученная таким образом система уравнений не будет иметь ни одного ненулевого решения, удовлетворяющего системе неравенств (4.3).

Перейдем к разбору случая, когда из системы линейных уравнений (4.4) удаляется пара уравнений, одним из которых является предпоследнее уравнение. Если вместе с предпоследним удалить предшествующее ему уравнение, то получим систему, среди ненулевых решений которых нет ни одного, удовлетворяющего системе неравенств (4.3). Исключая предпоследнее уравнение вместе с одним из уравнений вида $\langle e^s, y\rangle = 0$ при $s \neq i$, получим систему с решением $e^s$. Если же вместе с предпоследним удалить уравнение $\langle e^i, y\rangle = 0$, то придем к системе с решением $y'$.

Аналогично разбирается случай удаления $(m - 1)$-го уравнения вместе с одним из уравнений вида $\langle e^s, y\rangle = 0$. При этом будет найдено еще одно ненулевое решение $y''$ при $s = i$, удовлетворяющее системе линейных неравенств (4.3).

Исключение из системы уравнений (4.4) пары уравнений вида $\langle e^s, y\rangle = 0$ не приведет к новым решениям.

В итоге получаем совокупность векторов $e^1, \ldots, e^{i-1}, y', y''$, $e^{i+1}, \ldots, e^m$, порождающих конус решений системы линейных неравенств (4.3). Полученная совокупность совпадает с системой векторов, порождающих конус $M$. Тем самым, установлено, что множество ненулевых решений системы линейных неравенств (4.3) совпадает с конусом $M$.

Из включений $R^m_+ \subset M \subset K$ вытекают включения

$$\operatorname{Ndom} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y), \tag{4.5}$$

где

$$P(\widehat{Y}) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

представляет собой множество недоминируемых элементов множества $Y$, упорядоченного конусным отношением с конусом $M$.

Пусть $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$, $f(x) \neq f(x^*)$ при $x, x^* \in X$. Благодаря доказанному выше совпадению множества решений системы линейных неравенств (4.3) и конуса $M$, включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$f_s(x) - f_s(x^*) \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j, k\},$$



$$\theta_{ij}\big(f_i(x) - f_i(x^*)\big) + (1 - \theta_{ij})\big(f_j(x) - f_j(x^*)\big) \geqq 0,$$

$$\theta_{ik}\big(f_i(x) - f_i(x^*)\big) + (1 - \theta_{ik})\big(f_k(x) - f_k(x^*)\big) \geqq 0,$$

$$\theta_{ij}\theta_{ik}\big(f_i(x) - f_i(x^*)\big) + (1 - \theta_{ij})\theta_{ik}\big(f_j(x) - f_j(x^*)\big) + \\ + \theta_{ij}(1 - \theta_{ik})\big(f_k(x) - f_k(x^*)\big) \geqq 0,$$

причем здесь хотя бы одно неравенство — строгое. Нетрудно понять, что эти неравенства в терминах векторной функции $g$, определяемой в условиях теоремы формулами (4.2), можно переписать в виде $g(x) \geq g(x^*)$. Отсюда следует, что $P(\widehat{Y})$ — это множество парето-оптимальных векторов в многокритериальной задаче с исходным множеством возможных решений $X$ и новым векторным критерием $g$.

Для завершения доказательства и получения включений (4.1) остается к соотношениям (4.5) применить включение $\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom} Y$.⋎

Теорему 4.2 легко переформулировать в терминах решений. В результате она примет следующий вид.

**Теорема 4.2** (в терминах решений). *Пусть выполнены аксиомы 1–4 и имеются два сообщения о том, что $i$-й критерий важнее $j$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij}$, а также что $i$-й критерий важнее $k$-го критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{ik}$. Тогда для любого непустого множества выбираемых решений справедливы включения*

$$\operatorname{Sel} X \subset P_g(X) \subset P_f(X), \tag{4.6}$$

*где $P_g(X)$ — множество парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с множеством возможных решений $X$ и $(m+1)$-мерным векторным критерием $g$, определяемым равенствами* (4.2).

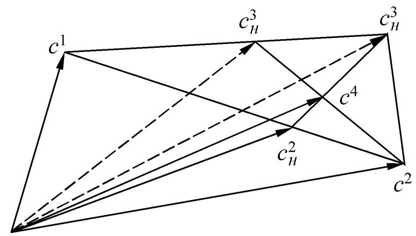

Рис. 4.2.

Приведем геометрическую иллюстрацию теоремы 4.2 для случая линейных критериев. Пусть $m = n = 3$, $f_i(x) = \langle c^i, x\rangle$, $i = 1, 2, 3$, где $c^1, c^2, c^3, x \in R^3$ (см. рис. 4.2).

Предположим, что первый критерий важнее второго с коэффициентом относительной важности $\theta_{12} \approx 0.25$, а также важнее третьего критерия с коэффициентом относительной важности $\theta_{13} \approx 0.4$. Учет бо́льшей важности первого критерия в сравнении со вторым приводит к трехкритериальной задаче с векторами $c^1, c^2_н, c^3$, являющимися градиентами трех линейных критериев. Аналогично, учет большей важности первого критерия в сравнении с третьим ведет к трехкритериальной задаче с тремя векторами $c^1, c^2, c^3_н$. Тем самым, получаем два конуса целей, соответствующих двум имеющимся сообщениям об относительной важности критериев. Для одновременного учета обоих сообщений об относительной важности необходимо рассмотреть пересечение указанных конусов. В итоге приходим к конусу, порожденному четырьмя векторами $c^1, c^2_н, c^3_н, c^4$. Это и есть конус целей новой задачи, множество Парето которой дает оценку сверху для множества выбираемых решений.

Следующий результат показывает, что теорему 4.2 можно применять к любым критериям, значения которых вычисляются в количественных шкалах.

**Теорема 4.3.** *Включения* (4.1) *и* (4.6) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования компонент векторного критерия* $g$, *определяемого равенствами* (4.2).

⮝ Учитывая доказательство теоремы 2.7, достаточно проверить инвариантность множеств $P(\widehat{Y})$ и $P_g(X)$ из (4.1) и (4.6) относительно линейного положительного преобразования только последнего критерия $g_{m+1}$.

Поскольку множество Парето не изменяется, если критерии умножать на положительные числа, то доказательство можно проводить для критерия

$$\hat{g}_{m+1} = \frac{g_{m+1}}{\theta_{ij}\theta_{ik}} = y_i + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) y_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_k = \\ = y_i + \frac{y_i' - y_i''}{y_j'' - y_j'} y_j + \frac{\bar{y}_i' - \bar{y}_i''}{\bar{y}_k'' - \bar{y}_k'} y_k,$$

где фиксированные векторы $y'$, $y''$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ задают информацию об относительной важности критериев, т. е. имеют место соотношения $y' \succ y''$, $\bar{y}' \succ \bar{y}''$, причем

$$\theta_{ij} = \frac{y_j'' - y_j'}{y_i' - y_i'' + y_j'' - y_j'}, \quad \theta_{ik} = \frac{\bar{y}_j'' - \bar{y}_j'}{\bar{y}_i' - \bar{y}_i'' + \bar{y}_j'' - \bar{y}_j'}.$$



Заменим $y_s$ на $\tilde{y}_s = \alpha_s y_s + c_s$ $(\alpha_s > 0)$, $s = i, j, k$, в формуле, задающей критерий $\hat{g}_{m+1}$:

$$\hat{\hat{g}}_{m+1} = \alpha_i y_i + c_i + \frac{\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i}{\alpha_j y_j'' + c_j - \alpha_j y_j' - c_j}\left(\alpha_j y_j + c_j\right) + \\ + \frac{\alpha_i \bar{y}_i' + c_i - \alpha_i \bar{y}_i'' - c_i}{\alpha_k \bar{y}_k'' + c_k - \alpha_k \bar{y}_k' - c_k}\left(\alpha_k y_k + c_k\right) = \\ = \alpha_i y_i + \alpha_i \frac{y_i' - y_i''}{y_j'' - y_j'} y_j + \alpha_i \frac{\bar{y}_i' - \bar{y}_i''}{\bar{y}_k'' - \bar{y}_k'} y_k + C,$$

где константа $C$ не зависит от $y_i$, $y_j$, $y_k$.

Нетрудно видеть, что преобразованный критерий $\hat{\hat{g}}_{m+1}$ можно получить из $\hat{g}_{m+1}$ умножением его на положительное число $\alpha_i$ и прибавлением константы $C$. Обратно, вычитая из $\hat{\hat{g}}_{m+1}$ константу $C$ и деля полученный результат на число $\alpha_i$, получим $\hat{g}_{m+1}$. Отсюда вытекает, что строгие неравенства

$$\hat{g}_{m+1} = y_i + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) y_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_k > \\ > y_i^* + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) y_j^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_k^* = \hat{g}^*$$

и

$$\hat{\hat{g}}_{m+1} = \tilde{y}_i + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) \tilde{y}_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) \tilde{y}_k > \\ > \tilde{y}_i^* + \left(\frac{1}{\theta_{ij}} - 1\right) \tilde{y}_i^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) \tilde{y}_k^* = \hat{\hat{g}}^*$$

для критерия $\hat{g}_{m+1}$ и преобразованного критерия $\hat{\hat{g}}_{m+1}$ являются эквивалентными друг другу. Следовательно, включения (4.1) и (4.6) инвариантны относительно линейного положительного преобразования критерия $g_{m+1}$, а значит и всех компонент векторной функции $g$.⮟

**4. Учет информации о том, что два критерия по отдельности важнее третьего**. Здесь будет рассмотрен случай, когда имеются два сообщения об относительной важности, состоящие в том, что $i$-й критерий важнее $k$-го с коэффициентом относительной важности $\theta_{ik}$, а также что $j$-й критерий важнее $k$-го с коэффициентом относительной важности $\theta_{jk}$.

Предварительно сравним этот случай с ситуацией, когда имеется одно сообщение о том, что группа критериев $\{i, j\}$ важнее $k$-го критерия; при этом коэффициенты относительной важности в обоих случаях считаются одинаковыми. Используя лемму 4.1, легко убедиться в том, что *если каждый из критериев $i$ и $j$ в отдельности важнее $k$-го критерия, то группа $\{i, j\}$ важнее критерия $k$ с теми же самыми коэффициентами относительной важности, но не наоборот*. Следовательно, набор из двух указанных сообщений является более содержательным, чем одно сообщение о том, что группа из двух критериев важнее третьего критерия.

Учет указанных двух сообщений об относительной важности критериев следует осуществлять при помощи следующей теоремы.

**Теорема 4.4** (в терминах векторов). *Предположим, что выполнены аксиомы* 1–4 *и имеется набор из двух сообщений о том, что $i$-й критерий важнее $k$-го с коэффициентом относительной важности $\theta_{ik}$, а также что $j$-й критерий важнее $k$-го с коэффициентом относительной важности $\theta_{jk}$. Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов* $\operatorname{Sel} Y$ *справедливы включения* (4.1), *где $P(\widehat{Y})$ — множество парето-оптимальных векторов в задаче с множеством возможных решений $X$ и векторным критерием $g$ вида*

$$g_s = f_s \quad \textit{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$g_k = \theta_{ik}\left(1-\theta_{jk}\right)f_i + \left(1-\theta_{ik}\right)\theta_{jk} f_j + \left(1-\theta_{ik}\right)\left(1-\theta_{jk}\right)f_k \,. \quad (4.7)$$

⮝ Пусть $K$ — выпуклый острый конус (без нуля) конусного отношения предпочтения $\succ$.

В силу определения 2.4 наличие информации о том, что $i$-й критерий важнее $k$-го с коэффициентом относительной важности $\theta_{ik}$ и $j$-й критерий важнее $k$-го с коэффициентом относительной важности $\theta_{jk}$ означает выполнение соотношений $y' \succ 0_m$ и $y'' \succ 0_m$ для векторов $y'$ и $y''$ вида

$$y'_i = 1-\theta_{ik}, \quad y'_k = -\theta_{ik}, \quad y'_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{i, k\},$$

$$y''_j = 1-\theta_{jk}, \quad y''_k = -\theta_{jk}, \quad y''_s = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{j, k\}.$$

Пусть $M$ — выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, e^2, \ldots, e^m, y', y''$. Вектор $e^i$ можно представить в виде линейной положительной комбинации векторов $e^k$ и $y'$, а вектор



$e^j$ — в виде подобной комбинации векторов $e^k$ и $y''$. Следовательно, конус $M$ порождается набором векторов

$$e^1, \ldots, e^{i-1}, y', e^{i+1}, \ldots, e^{j-1}, y'', e^{j+1}, \ldots, e^m\,, \quad (4.8)$$

а значит, этот конус совпадает с множеством всех ненулевых линейных неотрицательных комбинаций вида

$$\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_{i-1}e^{i-1} + \lambda_i y' + \lambda_{i+1}e^{i+1} + \ldots + \lambda_{j-1}e^{j-1} + \lambda_j y'' + \\ + \lambda_{j+1}e^{j+1} + \ldots + \lambda_m e^m.$$

Конус острый, так как является подмножеством острого конуса $K$.

Докажем совпадение конуса $M$ с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств

$$y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$\theta_{ik}(1-\theta_{jk})y_i + (1-\theta_{ik})\theta_{jk}y_j + (1-\theta_{ik})(1-\theta_{jk})y_k \geqq 0. \quad (4.9)$$

Для этого найдем общее решение системы (4.9), рассматривая соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\langle e^s, y\rangle = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$\langle \bar{y}, y\rangle = 0\,, \quad (4.10)$$

где $\bar{y}_i = \theta_{ik}(1-\theta_{jk})$, $\bar{y}_j = (1-\theta_{ik})\theta_{jk}$, $\bar{y}_k = (1-\theta_{ik})(1-\theta_{jk})$, $\bar{y}_s = 0$ для всех $s \in I \setminus \{i, j, k\}$.

В системе (4.10) $m$ уравнений. Любая подсистема из $m-1$ вектора системы векторов $e^1, \ldots, e^{k-1}, \bar{y}, e^{k+1}, \ldots, e^m$ является линейно независимой. Поэтому для отыскания фундаментальной совокупности решений системы линейных неравенств (4.9) достаточно найти по одному ненулевому решению каждой из подсистем системы (4.10), получающейся из (4.10) удалением какого-то одного из ее уравнений (при этом найденное решение должно удовлетворять системе неравенств (4.9)).

Если из системы уравнений (4.10) удалить последнее уравнение, то полученная система будет иметь решение $e^k$. Если из системы (4.10) удалить уравнение $\langle e^s, y\rangle = 0$ при $s = i$ (или $s = j$), то соответствующая система уравнений будет обладать решением $y'$ (или $y''$). Удаление уравнения $\langle e^s, y\rangle = 0$ при $s \in I \setminus \{i, j, k\}$ приводит к подсистеме, имеющей решение $e^s$.

Таким образом, одна из фундаментальных совокупностей решений системы линейных неравенств (4.9) имеет вид (4.8). Следовательно, конус $M$ совпадает с множеством ненулевых неотрицательных решений системы линейных неравенств (4.9).

Из включений

$$R_+^m \subset M \subset K$$

вытекают включения

$$\operatorname{Ndom} Y \subset P\big(\widehat{Y}\big) \subset P(Y), \tag{4.11}$$

где

$$P\big(\widehat{Y}\big) = \{y^* \in Y \mid \text{ не существует такого } y \in Y, \text{ что } y - y^* \in M\}$$

представляет собой множество недоминируемых элементов множества $Y$ относительно конусного отношения с конусом $M$.

Пусть $x, x^* \in X$, $y = f(x)$, $y^* = f(x^*)$, $f(x) \neq f(x^*)$. На основании установленного выше совпадения конуса $M$ с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (4.9) включение $f(x) - f(x^*) \in M$ имеет место тогда и только тогда, когда вектор $f(x) - f(x^*)$ удовлетворяет системе неравенств

$$f_s(x) - f_s(x^*) \geqq 0 \text{ для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$\theta_{ik}(1-\theta_{jk})\Big(f_i(x) - f_i(x^*)\Big) + (1-\theta_{ik})\theta_{jk}\Big(f_j(x) - f_j(x^*)\Big) +$$
$$+ (1-\theta_{ik})\big(1-\theta_{jk}\big)\Big(f_k(x) - f_k(x^*)\Big) \geqq 0,$$

причем хотя бы одно из неравенств этой системы должно быть строгим (чтобы исключить случай $f(x) = f(x^*)$). Эту систему неравенств можно переписать в виде $g(x) \geq g(x^*)$ с векторной функцией $g$, определяемой равенствами (4.7). Для завершения доказательства включений (4.1) остается в (4.11) воспользоваться включением $\operatorname{Sel} Y \subset \operatorname{Ndom} Y$.

В терминах решений установленный результат принимает следующий вид.

**Теорема 4.4** (в терминах решений). *Пусть выполнены аксиомы* 1–4 *и имеется набор из двух сообщений о том, что i-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности* $\theta_{ik}$, *а также что j-й критерий важнее k-го с коэффициентом относительной важности* $\theta_{jk}$. *Тогда для любого непустого множества выбираемых решений выполняются включения* (4.6), *где* $P_g(X)$ — *множество парето-оптимальных решений в задаче с множеством возможных решений* $X$ *и векторным критерием* $g$ *вида* (4.7).



Для геометрической иллюстрации теоремы 4.4 обратимся к многокритериальной задаче выбора с линейными критериями, в которой $m = n = 3$, $f_s(x) = \langle c^s, x\rangle$, $s = 1, 2, 3$, причем первый и второй критерии важнее третьего критерия по отдельности с коэффициентами относительной важности $\theta_{13} \approx 0.2$, $\theta_{23} \approx 0.6$ (см. рис. 4.3).

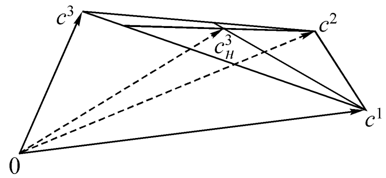


Рис. 4.3.

Конус целей, соответствующий новой многокритериальной задаче, является трехгранным и порождается векторами $c^1, c^2, c_н^3$. Этот конус представляет собой пересечение двух трехгранных конусов, один из которых соответствует многокритериальной задаче, в которой учитывается информация о том, что первый критерий важнее третьего, а второй — многокритериальной задаче, где учтена информация о бóльшей важности второго критерия по сравнению с третьим.

Теорема 4.5 применима к любой многокритериальной задаче, значения критериев в которой измеряются в количественной шкале. Об этом свидетельствует следующий результат.

**Теорема 4.5.** *Включения* (4.1) *и* (4.6) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования всех компонент векторного критерия* $g$ *вида* (4.7).

⮝ Здесь так же, как и при доказательстве теоремы 4.4, достаточно проверить инвариантность множеств $P(\overline{Y})$ и $P_g(X)$ из (4.1) и (4.6) относительно линейного положительного преобразования только критерия $g_k$.

Поскольку множество Парето не изменяется, если критерии умножать на положительные числа, то для доказательства введем

$$\hat{g}_k = \frac{g_k}{\theta_{ik}\theta_{ik}} = \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_i + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_k =$$
$$= \frac{\overline{y}'_j - \overline{y}''_j}{\overline{y}''_k - \overline{y}'_k}\, y_i + \frac{y'_i - y''_i}{y''_k - y'_k}\, y_j + \frac{y'_i - y''_i}{y''_k - y'_k} \cdot \frac{\overline{y}'_j - \overline{y}''_j}{\overline{y}''_k - \overline{y}'_k}\, y_k,$$

где фиксированные векторы $y'$, $y''$, $\overline{y}'$, $\overline{y}''$ задают информацию об относительной важности критериев, т. е. имеют место соотношения $y' \succ y''$, $\overline{y}' \succ \overline{y}''$, причем

$$\theta_{ik} = \frac{y_k'' - y_k'}{y_i' - y_i'' + y_k'' - y_k'}, \quad \theta_{jk} = \frac{\overline{y}_k'' - \overline{y}_k'}{\overline{y}_j' - \overline{y}_j'' + \overline{y}_k'' - \overline{y}_k'}.$$

Заменим $y_s$ на $\tilde{y}_s = \alpha_s y_s + c_s$ ($\alpha_s > 0$), $s = i, j, k$, в формуле, определяющей критерий $\hat{g}_k$:

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{g}}_k &= \frac{\alpha_j \overline{y}_j'' + c_j - \alpha_j \overline{y}_j' - c_j}{\alpha_k \overline{y}_k'' + c_k - \alpha_k \overline{y}_k' - c_k}(\alpha_i y_i + c_i) + \\ &+ \frac{\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i}{\alpha_k y_k'' + c_k - \alpha_k y_k' - c_k}(\alpha_j y_j + c_j) + \\ &+ \frac{\alpha_i y_i' + c_i - \alpha_i y_i'' - c_i}{\alpha_k y_k'' + c_k - \alpha_k y_k' - c_k} \cdot \frac{\alpha_j \overline{y}_j' + c_j - \alpha_j \overline{y}_j'' - c_j}{\alpha_k \overline{y}_k'' + c_k - \alpha_k \overline{y}_k' - c_k}(\alpha_k y_k + c_k) = \\ &= \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k} \cdot \frac{\overline{y}_j'' - \overline{y}_j'}{\overline{y}_k'' - \overline{y}_k'} y_i + \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k} \frac{y_i' - y_i''}{y_k'' - y_k'} y_j + \\ &+ \frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k} \cdot \frac{y_i' - y_i''}{y_k'' - y_k'} \cdot \frac{\overline{y}_j' - \overline{y}_y''}{\overline{y}_k'' - \overline{y}_k'} y_k + C,\end{aligned}$$

где константа $C$ не зависит от $y_i$, $y_j$, $y_k$.

Из последнего представления видно, что преобразованный критерий $\hat{\tilde{g}}_k$ можно получить из $\hat{g}_k$ умножением его на положительное число $\frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k}$ и прибавлением константы $C$. Обратно, вычитая из $\hat{\tilde{g}}_k$ константу $C$ и деля полученный результат на число $\frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_k}$, придем к $\hat{g}_k$. Отсюда вытекает, что строгие неравенства

$$\begin{aligned}\hat{g}_k &= \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_i + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_k > \\ &> \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_i^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) y_j^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) y_k^* = \hat{g}_k^*\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{g}}_k &= \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) \tilde{y}_i + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) \tilde{y}_j + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) \tilde{y}_k > \\ &> \left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) \tilde{y}_i^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right) \tilde{y}_j^* + \left(\frac{1}{\theta_{ik}} - 1\right)\left(\frac{1}{\theta_{jk}} - 1\right) \tilde{y}_k^* = \hat{\tilde{g}}_k^*\end{aligned}$$



для критерия $\hat{g}_k$ и преобразованного критерия $\hat{\tilde{g}}_k$ являются эквивалентными друг другу. Следовательно, включения (4.1) и (4.6) инвариантны относительно линейного положительного преобразования критерия $g_k$.⋎

## 4.2. Непротиворечивость набора информации об относительной важности критериев

**1. Предварительное рассмотрение**. Пусть $A, B \subset I$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \bigcap B = \varnothing$. В соответствии с определением 3.3 задание вектора $y' \in R^m$ с компонентами

$$y_i' = w_i^* \quad \text{для всех } i \in A,$$

$$y_j' = -w_j^* \quad \text{для всех } j \in B,$$

$$y_s' = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus (A \cup B),$$

для которого верно соотношение $y' \succ 0_m$, означает, что группа критериев $A$ важнее группы критериев $B$ с двумя наборами положительных параметров $w_i^*$ для всех $i \in A$ и $w_j^*$ для всех $j \in B$. Поскольку $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, указанный вектор $y'$ имеет по крайней мере одну положительную и по крайней мере одну отрицательную компоненты. Введем множество всех подобного рода векторов:

$$N^m = R^m / \left[R_+^m \cup \left(-R_+^m\right) \cup \{0_m\}\right].$$

Предположим, что в результате прямого опроса ЛПР или же на основе анализа действий, ранее предпринимавшихся данным ЛПР, была выявлена такая пара различных векторов $u, v \in R^m$, что вектор $u$ предпочтительнее вектора $v$, т. е. $u \succ_Y v$. Согласно аксиоме 2 последнее соотношение эквивалентно $u \succ v$. Пусть $u - v \in N^m$. Обозначим множество номеров положительных компонент вектора $u - v$ через $A$, а множество номеров отрицательных компонент — через $B$. Очевидно, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \bigcap B = \varnothing$. Поэтому задание произвольной пары векторов $u, v \in R^m$, для которых выполнены соотношения $u \succ v$ и $u - v \in N^m$, можно рассматривать как наличие информации о том, что группа критериев $A$ важнее группы критериев $B$ (с соответствующими двумя наборами положительных параметров). Тем самым, любая пара векторов $u, v \in R^m$, для которой справедливо соотношение $u - v \in N^m$, может при определенном условии (т. е. при выполнении соотношения $u \succ v$) задавать информацию об относительной важности критериев.

Теперь допустим, что имеется набор пар векторов

$$u^i, v^i \in R^m, \quad u^i - v^i \in N^m, \quad i = 1, 2, ..., k. \qquad (4.12)$$

Возникает вопрос: могут ли все эти пары векторов участвовать в задании определенного набора информации об относительной важности критериев? Простые примеры показывают, что в общем случае ответ на этот вопрос является отрицательным.

**Пример 4.1.** Пусть $m = 2, k = 2$ и

$$u^1 = (1, -3), \quad u^2 = (-2, 1), \ v^1 = v^2 = 0_2.$$

Допустим, что данный набор из двух пар векторов задает информацию об относительной важности критериев, так что имеют место соотношения $u^1 \succ v^1$ и $u^2 \succ v^2$. Складывая эти соотношения почленно, на основе леммы 4.1 получим $u^1 + u^2 \succ v^1 + v^2$ или, что то же самое, $(-1, -2) \succ 0_2$. С другой стороны, справедливо соотношение $0_2 \succ (-1, -2)$, так как $0_2 \geq (-1, -2)$. Полученные два соотношения $(-1, -2) \succ 0_2$ и $0_2 \succ (-1, -2)$ противоречат асимметричности отношения $\succ$. Следовательно, одновременное выполнение обоих соотношений $u^1 \succ v^1$ и $u^2 \succ v^2$ для указанных выше пар векторов невозможно ни для какого бинарного отношения, удовлетворяющего аксиомам 2–4.

**2. Определение непротиворечивого набора векторов.**

**Определение 4.1**. Пусть имеется набор пар векторов (4.12). Будем называть этот набор *непротиворечивым* (*совместным*), если существует хотя бы одно бинарное отношение $\succ'$, подчиненное аксиомам 2–4 и такое, что выполняются соотношения $u^s \succ' v^s$, $s = 1, 2, ..., k$ [1]).

Непротиворечивость набора векторов является необходимым условием того, чтобы он задавал набор информации об относительной важности критериев хотя бы в какой-то одной многокритериальной задаче выбора. Таким образом, непротиворечивый набор векторов (4.12) является своеобразной «заготовкой» для набора информации об относительной важности критериев, которым может располагать некоторое ЛПР.

[1]) На основе аддитивности отношения $\succ'$ в этом определении и во всем последующем рассмотрении, связанном с непротиворечивостью информации об относительной важности критериев, можно было бы положить $v^s = 0_m$, $s = 1, 2, ..., k$. Однако, здесь, по мнению автора, удобнее использовать принятую начиная с данного определения несколько более громоздкую форму с ненулевыми в общем случае векторами $v^s$, поскольку именно эта форма больше соответствует практике получения дополнительной информации об относительной важности критериев.



При решении реальных задач принятия решений, когда в наличии имеется целое семейство различного рода сообщений об относительной важности критериев, может оказаться так, что векторы, участвующие в задании набора информации, образуют противоречивый набор. Это связано с тем, что информация об относительной важности, как правило, не точна и чаще всего отражает лишь желательную, а не действительную картину предпочтений ЛПР. Кроме того, ЛПР, само того не желая, иногда может несколько отклоняться от класса задач многокритериального выбора, ограниченных аксиомами 2–4, и в таком случае его поведение следует подкорректировать, объявив о противоречивости его предпочтений, выраженных в форме набора информации об относительной важности критериев.

Так или иначе, если в процессе принятия решений на основе количественной информации об относительной важности критериев присутствует набор такого рода информации, то его обязательно следует проверять на непротиворечивость (совместность). А для осуществления такой проверки необходимо располагать соответствующим инструментарием, поскольку использовать для этой цели лишь определение 4.1 не представляется возможным.

**3. Критерии непротиворечивости**. Здесь будут даны три критерия непротиворечивости конечного набора векторов. Один из них имеет геометрическую форму, второй представляет собой алгебраический вариант, а третий — алгоритмический, удобный для реализации в среде программирования.

**Теорема 4.6** (геометрический критерий непротиворечивости). *Для того чтобы набор пар векторов* (4.12) *был непротиворечивым, необходимо и достаточно, чтобы конус, порожденный векторами*

$$e^1, e^2, ..., e^m, u^1 - v^1, u^2 - v^2, ..., u^k - v^k, \qquad (4.13)$$

*являлся острым.*

⮙ На основе определения 4.1 и следствия 2.1 можно заключить, что набор векторов (4.12) будет непротиворечивым тогда и только тогда, когда существует конусное отношение с острым выпуклым конусом $M$ (без нуля), для которого выполняются соотношения

$$R^m_+ \subset M, \ u^s - v^s \in M, \ s = 1, 2, ..., k. \qquad (4.14)$$

Необходимость. Пусть набор векторов (4.12) является непротиворечивым. Тогда в силу сказанного в начале доказательства существует острый выпуклый конус $M$ (без нуля), для которого верно (4.14). Векторы (4.13) принадлежат конусу $M$ и порождают в общем случае некоторый выпуклый подконус конуса $M$. Поскольку подконус острого конуса сам является острым, то набор векторов (4.13) порождает острый выпуклый конус.

Достаточность. Рассмотрим выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами (4.13). Обозначим его $M$. По условию он — острый. Поскольку все единичные векторы $e^1, e^2, \ldots, e^m$ входят в набор векторов, порождающих $M$, то $R_+^m \subset M$. Следовательно, для этого конуса справедливы соотношения (4.14).⮟

**Теорема 4.7** (алгебраический критерий непротиворечивости). *Для того чтобы набор пар векторов* (4.12) *был непротиворечивым, необходимо и достаточно, чтобы однородная система линейных уравнений*

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s) = 0_m \tag{4.15}$$

*не имела ни одного ненулевого неотрицательного решения относительно* [1]) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

⮝ Теорема является следствием предыдущей теоремы и одного утверждения из теории систем линейных неравенств (см. [34], с. 269).⮟

Рассмотрим самую простую ситуацию, когда информация об относительной важности критериев состоит из одного сообщения (т. е. $k = 1$). Соответствующая этому случаю система линейных уравнений (4.15) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i = -\mu_1(u^1 - v^1). \tag{4.16}$$

Допустим, что эта система имеет ненулевое неотрицательное решение $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1$. Если $\mu_1 = 0$, то (4.16) превращается в равенство $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i = 0_m$, где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ строго положителен. Но тогда это равенство является ложным.

[1]) Отсутствие ненулевых неотрицательных решений означает, что данная система если и имеет некоторое решение $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, то либо все эти числа равны нулю, либо по крайней мере одно из них — отрицательное.



Пусть $\mu_1 \neq 0$. Вектор $u^1 - v^1$ имеет хотя бы одну положительную компоненту и поэтому вектор $-\mu_1(u^1 - v^1)$, записанный в правой части равенства (4.16) и имеющий по крайней мере одну отрицательную компоненту, невозможно представить в виде неотрицательной линейной комбинации единичных векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m$. Следовательно, равенство (4.16) вновь невозможно, а значит система (4.15) не имеет ни одного ненулевого неотрицательного решения.

В итоге приходим к следующему результату.

**Следствие 4.1.** *Если имеется в точности одно сообщение об относительной важности критериев, то вектор, порождающий эту информацию, образует непротиворечивый набор. Набор пар векторов* (4.12) *может оказаться противоречивым лишь в том случае, когда число пар векторов данного набора более одной.*

Тот факт, что уже при $k = 2$ противоречивая ситуация возможна, демонстрирует рассмотренный ранее пример 4.1, для которого система уравнений (4.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \mu_1 \phantom{(-3)} + \mu_2(-2) &= 0, \\ \lambda_2 + \mu_1(-3) + \mu_2 \phantom{(-2)} &= 0 \end{aligned}$$

и, как нетрудно в том убедиться, имеет, например, следующее ненулевое неотрицательное решение $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$.

**Следствие 4.2.** *Пусть имеются две группы номеров критериев* $i_s \in I, j_s \in I, s = 1, 2, \ldots, k, \{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_k\} = \varnothing$, *причем среди номеров первой группы* (*так же, как среди номеров второй группы*) *могут быть* (*и даже все*) *одинаковые. Непротиворечивым является набор пар таких векторов* (4.12), *что у каждого вектора* $u^s - v^s$ *компонента с номером* $i_s$ *— положительна, с номером* $j_s$ *— отрицательна, а все остальные компоненты — равны нулю,* $s = 1, 2, \ldots, k$.

⮝ Предположим противное: система линейных уравнений (4.15) обладает ненулевым неотрицательным решением $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. Сначала рассмотрим случай, когда среди чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ имеется, по крайней мере, одно положительное. В этом случае у вектора $\sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s)$ существует хотя бы одна положительная компонента среди тех, которые принадлежат номерам первой группы. Отсюда получаем противоречие начальному предположению о том, что сумма $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s)$ равна нулевому вектору.

Если же все коэффициенты $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ равны нулю, то система (4.15) превращается в $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i = 0_m$, где хотя бы один из коэффициентов $\lambda_i$ отличен от нуля. Но такая система ненулевых решений не имеет, что вновь противоречит начальному предположению.⮟

При помощи рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы при доказательстве последнего следствия, можно получить следующий более общий результат.

**Следствие 4.3.** *Набор пар векторов* (4.12) *является непротиворечивым, если он удовлетворяет следующим условиям: у каждого вектора $u^s - v^s$ все компоненты, номера которых принадлежат множеству $A_s$, $A_s \subset I$, положительны, все компоненты, номера которых принадлежат множеству $B_s$, $B_s \subset I$, отрицательны, а все остальные компоненты равны нулю, $s = 1, 2, ..., k$, причем для любой пары различных номеров $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$ выполняется равенство $A_i \cap B_j = \varnothing$.*

Теперь сформулируем еще один критерий для проверки непротиворечивости (точнее говоря, противоречивости) набора векторов.

**Теорема 4.8** (алгоритмический критерий противоречивости). *Для того чтобы набор векторов* (4.12) *был противоречивым, необходимо и достаточно, чтобы в задаче линейного программирования*

$$\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_m \to \min,$$

$$\lambda_1 + \sum_{s=1}^{k} \mu_s (u_1^s - v_1^s) + \xi_1 = 0\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_m + \sum_{s=1}^{k} \mu_s (u_m^s - v_m^s) + \xi_m = 0\,,$$

$$\lambda_1 + ... + \lambda_m + \mu_1 + ... + \mu_k = 1,$$

$$\lambda_i \geqq 0,\ \xi_i \geqq 0,\ i = 1, 2, ..., m;\ \mu_s \geqq 0,\ s = 1, 2, ..., k, \quad (4.17)$$

*оптимальное значение целевой функции было равно нулю.*

⮝ Нетрудно видеть, что система ограничений в форме равенств в задаче линейного программирования (4.17) без учета искусственных переменных $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ и равенства $\lambda_1 + ... + \lambda_m + \mu_1 + ... + \mu_k = 1$ полностью совпадает с системой линейных уравнений (4.15). В силу теоремы 4.8 набор пар векторов (4.12) является противоречивым тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений (4.15) имеет по крайней мере одно ненулевое неотрицательное решение. Это, в свою очередь, справедливо тогда и только тогда, когда в задаче линейного программирования (4.17) существует допустимое решение, в котором все искусственные переменные равны нулю: $\xi_i = 0$ для $i = 1, 2, ..., m$. Последнее равносильно тому, что оптимальное значение целевой функции в задаче линейного программирования (4.17) равно нулю.⮟



**Замечание**. Следует отметить, что задача линейного программирования (4.17) всегда имеет оптимальное решение, так как значения ее целевой функции ограничены снизу нулем. Поэтому оптимальное значение целевой функции в этой задаче всегда существует и либо равно нулю, либо строго больше нуля.

**4. Существенность информации об относительной важности критериев**. Выше уже отмечалось, что на практике процесс получения информации об относительной важности критериев часто носит последовательный характер, т. е. сначала получают одно сообщение, затем — второе и т. д. В этом случае важно уметь распознавать сообщения о важности, противоречащие полученным ранее. Кроме того, крайне полезно уметь отличать существенную информацию от несущественной. Например, если уже было известно, что $i$-й критерий важнее $j$-го с коэффициентом относительной важности 0.5, то аналогичное сообщение с меньшим коэффициентом не вносит ничего нового, существенного по сравнению с первым сообщением и поэтому его можно просто проигнорировать.

Пусть имеется непротиворечивый набор пар векторов (4.12). Добавим к нему еще одну такую пару векторов $u^{k+1}$, $v^{k+1}$, что $u^{k+1} - v^{k+1} \in N^m$. В результате получим «расширенный» набор пар векторов

$$u^i, v^i \in R^m,\ u^i - v^i \in N^m, \quad i = 1, 2, ..., k+1. \qquad (4.18)$$

**Определение 4.2.** Для непротиворечивого набора пар векторов (4.12) пару $u^{k+1}$, $v^{k+1}$ будем называть *существенной*, если выпуклый конус, порожденный единичными векторами $e^1, e^2, ..., e^m$ вместе с векторами $u^i - v^i$, $i = 1, 2, ..., k+1$, не совпадает с выпуклым конусом, порожденным теми же самыми единичными векторами и векторами $u^i - v^i$, $i = 1, 2, ..., k+1$.

Смысл введенного определения состоит в том, что существенная дополнительная информация об относительной важности критериев должна изменять имеющееся конусное отношение предпочтения. Нетрудно понять, что несовпадение конусов, в которых участвуют наборы (4.12) и (4.18), может произойти лишь за счет того, что конус, порожденный расширенным набором векторов, будет шире конуса, образованного исходным набором $k$ векторов.

**Теорема 4.9** (критерий непротиворечивости и существенности). *Пусть набор пар векторов* (4.12) *является непротиворечивым. Для того чтобы расширенный набор* (4.18) *одновременно был непротиворечивым, а пара векторов* $u^{k+1}$, $v^{k+1}$ *являлась существенной, необходимо и достаточно, чтобы обе системы однородных линейных уравнений*

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s) = \pm\left(u^{k+1} - v^{k+1}\right) \tag{4.19}$$

*не имели ни одного неотрицательного решения* $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$, $\mu_1$, $\mu_2, \ldots, \mu_k$.

⮙ Сначала решим вопрос с непротиворечивостью. Согласно алгебраическому критерию непротиворечивости расширенный набор векторов (4.18) будет совместным тогда и только тогда, когда однородная система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i e^i + \sum_{s=1}^{k}\mu_s(u^s - v^s) + \mu_{k+1}\left(u^{k+1} - v^{k+1}\right) = 0_m \tag{4.20}$$

не имеет ни одного ненулевого неотрицательного решения. Проверим, что это равносильно тому, что система уравнений (4.19−), т. е. система (4.19), в правой части которой взят знак минус, не имеет неотрицательного решения. Действительно, если система уравнений (4.20) не имеет ненулевых неотрицательных решений, то система (4.19−) не может иметь неотрицательного решения. Обратно, если вторая из указанных систем (т. е. (4.19−)) не имеет неотрицательного решения, а первая обладает ненулевым неотрицательным решением $\lambda_1$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$, $\mu_1$, $\mu_2, \ldots, \mu_k$, то нетрудно прийти к противоречию. В самом деле, случай $\mu_{k+1} = 0$ невозможен из-за того, что набор векторов (4.12) является непротиворечивым. Значит, $\mu_{k+1} > 0$. В таком случае, разделив обе части равенства (4.20) на $\mu_{k+1}$, придем к тому, что система линейных уравнений (4.19−) имеет неотрицательное решение. Это противоречит начальному предположению. Тем самым, первая часть теоремы, связанная с непротиворечивостью доказана.



Перейдем к доказательству второй части, посвященной существенности пары векторов $u^{k+1}$, $v^{k+1}$. Согласно определению 4.2 эта пара векторов является существенной тогда и только тогда, когда вектор $u^{k+1} - v^{k+1}$ не принадлежит выпуклому конусу, порожденному векторами $e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1 - v^1, u^2 - v^2, \ldots, u^k - v^k$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда неоднородная система линейных уравнений (4.19+) не имеет ни одного неотрицательного решения.⮛

**Замечание**. В доказанной теореме есть две части — одна посвящена непротиворечивости, а вторая — существенности пары векторов $u^{k+1}$, $v^{k+1}$. Из доказательства видно, что первая часть теоремы связана с существованием неотрицательного решения системы уравнений (4.19−), тогда как вопрос существенности решается в терминах системы уравнений (4.19+).

## 4.3. Использование набора информации об относительной важности критериев

**1. Случай, когда несколько критериев по отдельности важнее одного критерия**. В п. 4 разд. 4.2 была рассмотрена ситуация, когда два критерия по отдельности важнее третьего. Ниже изучается общий случай, где число критериев, которые являются более важными, чем некоторый один данный критерий, может быть больше двух.

**Теорема 4.10.** *Пусть* $k, i_1, i_2, \ldots, i_l \in I$, $l \leqq m - 1$. *Предположим, что выполнены аксиомы* 1–4 *и имеется набор информации об относительной важности, состоящей из* $l$ *сообщений о том, что* $i_1$*-й критерий важнее* $k$*-го с коэффициентом относительной важности* $\theta_{i_1k}$, $i_2$*-й критерий важнее* $k$*-го с коэффициентом относительной важности* $\theta_{i_2k}, \ldots$, $i_l$*-й критерий важнее* $k$*-го с коэффициентом относительной важности* $\theta_{i_lk}$. *Тогда для любых непустых множеств выбираемых векторов и решений выполняются включения*

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\widehat{Y}) \subset P(Y) \tag{4.1}$$

и

$$\operatorname{Sel} X \subset P_g(X) \subset P_f(X), \tag{4.6}$$

*где* $P(\widehat{Y})$ $(P_g(Y))$ — *множество парето-оптимальных векторов* (*парето-оптимальных решений*) *в многокритериальной задаче с множеством возможных решений* $X$ *и векторным критерием* $g$, *имеющим компоненты*

$$g_s = f_s, \text{ для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$g_k = f_k + \sum_{p=1}^{l} \frac{\theta_{i_p k}}{1-\theta_{i_p k}} f_{i_p}. \tag{4.21}$$

▲ Как обычно, пусть $K$ означает острый выпуклый конус (без нуля) конусного отношения предпочтения $\succ$. Наличие имеющейся в условиях теоремы информации об относительной важности критериев означает выполнение включения $y^{i_p} \in K$ для каждого $p = 1, 2, ..., l$, где у $m$-мерного вектора $y^{i_p}$ все компоненты равны нулю, кроме $i_p$-й и $k$-й, которые определяются равенствами $y^{i_p}_{i_p} = 1 - \theta_{i_p k}$ и $y^{i_p}_k = -\theta_{i_p k}$.

Через $M$ обозначим выпуклый конус (без нуля), порожденный векторами $e^1, e^2, ..., e^m, y^{i_1}, y^{i_2}, ..., y^{i_l}$. Вектор $e^{i_p}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $e^k$ и $y^{i_p}$ с положительными коэффициентами. Следовательно, конус $M$ порождается набором векторов вида

$$e^i, \ i = 1, 2, ..., m \quad (i \neq i_p \text{ для всех } p = 1, 2, ..., l);$$

$$y^{i_1}, y^{i_2}, ..., y^{i_l}, \tag{4.22}$$

а значит, этот конус совпадает с множеством всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций векторов (4.22).

Установим совпадение конуса $M$ с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств

$$y_s \geqq 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$y_k + \sum_{p=1}^{l} \frac{\theta_{i_p k}}{1-\theta_{i_p k}} y_{i_p} \geqq 0. \tag{4.23}$$

С этой целью найдем общее решение системы линейных неравенств (4.23), рассмотрев соответствующую ей систему линейных уравнений

$$\langle e^s, y \rangle = 0 \quad \text{для всех } s \in I \setminus \{k\},$$

$$\langle \bar{y}, y \rangle = 0, \tag{4.24}$$

где

$$\bar{y}_k = 1, \quad \bar{y}_{i_p} = \frac{\theta_{i_p k}}{1-\theta_{i_p k}}, \ p = 1, 2, ..., l,$$

а все остальные компоненты вектора $\bar{y}$ равны нулю.



В системе (4.24) имеется $m$ уравнений. Любая подсистема из $m-1$ векторов системы $e^1, ..., e^{k-1}, \bar{y}, e^{k+1}, ..., e^m$ линейно независима. Поэтому для отыскания фундаментальной совокупности решений системы неравенств (4.23) достаточно найти по одному ненулевому решению каждой из подсистем системы уравнений (4.24), получающейся из (4.24) удалением какого-то одного уравнения (при этом все найденные решения должны удовлетворять системе неравенств (4.23)).

При удалении последнего уравнения из (4.24) получим подсистему с решением $e^k$. Если из (4.24) удалить уравнение $\langle e^s, y \rangle = 0$ при $s = i_p$ ($p \in \{1, 2, ..., l\}$), то соответствующая подсистема будет обладать решением $y^{i_p}$. Удаление уравнения $\langle e^s, y \rangle = 0$ при $s \in I \setminus \{k, i_1, i_2, ..., i_l\}$ приводит к подсистеме, имеющей решение $e^s$.

Итак, фундаментальная совокупность решений системы линейных неравенств (4.23) имеет вид (4.22). Поэтому конус $M$ действительно совпадает с множеством ненулевых решений системы линейных неравенств (4.23).

Остальная часть доказательства почти дословно повторяет соответствующую часть доказательств теорем 4.4 и 4.5 с очевидными изменениями в формулах, и поэтому здесь не приводится. ▼

**2. Использование набора взаимно независимой информации об относительной важности критериев**. Как было указано в п. 1 предыдущего раздела, учет набора взаимно независимой информации, состоящей из двух сообщений, происходит последовательно. Идея последовательного учета набора взаимно независимой информации может быть применена и в случае более двух сообщений. Например, имеет место следующий результат.

**Теорема 4.11.** *Пусть выполнены аксиомы* 1–4 *и имеется набор взаимно независимой информации об относительной важности критериев, состоящий из $k$ сообщений о том, что группа критериев $A_s$ важнее группы критериев $B_s$ с коэффициентами относительной важности $\theta^s_{ij}$ для всех $i \in A_s, j \in B_s, s = 1, 2, ..., k$ $\left(1 < k \leqq \frac{m}{2}\right)$. Обозначим*

$$A = \bigcup_{s=1}^{k} A_s, \quad B = \bigcup_{s=1}^{k} B_s.$$

*Тогда для любого непустого множества выбираемых векторов и непустого множества выбираемых решений выполняются включения*

$$\operatorname{Sel} Y \subset P(\hat{Y}) \subset P(Y), \quad \operatorname{Sel} X \subset P_g(X) \subset P_f(X),$$

*где* $\widehat{Y}$ *— множество значений векторной функции* $g$ (т. е. $\widehat{Y} = g(X)$), *а* $g$ *—* $p$*-мерная векторная функция,* $p = m - |B| + \sum_{s=1}^{k} |A_s| \cdot |B_s|$, *с компонентами, составленными из тех компонент* $f_i$ *векторного критерия* $f$*, для которых* $i \in I \setminus B$*, а также компонент*

$$g_{is}^s = \theta_{ij}^s f_i + \left(1 - \theta_{ij}^s\right) f_j \quad \text{для всех } i \in A_s,\ j \in B_s,\ s = 1, 2, \ldots, k.$$

**3. Задача выпуклого анализа**. Легко понять, что рассмотренные выше случаи использования набора информации об относительной важности критериев далеко не исчерпывают всех возможных вариантов. Разумеется, это относится к наборам информации, которые не являются взаимно независимыми. Например, выше не приводились формулы для пересчета нового критерия для случая, когда одна группа критериев важнее другой группы критериев, а вторая, в свою очередь, является более важной, чем первая. Ждет своего разрешения ситуация, в которой один критерий важнее каждого из некоторого набора более чем двух критериев в отдельности. И этот список можно легко продолжить.

Из приведенных доказательств теорем, посвященных учету различного рода информации об относительной важности критериев, можно усмотреть вполне определенную схему, на основе которой получаются соответствующие формулы для пересчета нового критерия. Кратко эту схему можно описать следующим образом. С самого начала, когда еще нет никакой информации об относительной важности критериев, справедливо лишь включение $R_+^m \subset K$, где символом $K$ обозначен острый выпуклый конус (неизвестного) конусного отношения $\succ$. Указанное включение выполняется благодаря аксиоме Парето. Наличие в общем случае некоторого набора информации, состоящего из $k$ сообщений об относительной важности критериев, на геометрическом языке означает задание $k$ векторов $y^i \in R^m$, для которых выполнено $y^i \succ 0_m$, или, что то же самое, $y^i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Далее вводится острый выпуклый конус $M$, порожденный векторами $e^1, e^2, \ldots, e^m, y^1, y^2, \ldots, y^k$. Этот конус определяет конусное отношение того же самого класса, что и неизвестное отношение предпочтения $\succ$, но более широкое, так как $M \subset K$. Конус $M$ является конечнопорожденным, а значит многогранным. Число компонент нового векторного критерия в точности совпадает с числом $(m-1)$-мерных граней конуса $M$, а нормальные (направленные



внутрь конуса) векторы этих граней дают возможность получить формулы для пересчета нового векторного критерия.

Например, в самом простом случае, когда $i$-й критерий важнее $j$-го с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij}$, конус $M$ (см. теорему 2.5) имел следующие нормальные векторы, направленные внутрь конуса — $e^1, \ldots, e^{j-1}, \theta_{ij} e^i + \left(1 - \theta_{ij}\right) e^j, e^{j+1}, \ldots, e^m$. Поэтому в данном случае формула для пересчета нового $j$-го критерия принимает вид $g_j = \theta_{ij} f_i + \left(1 - \theta_{ij}\right) f_j$.

В соответствии со сказанным, сформулируем общую задачу (она формулируется в терминах выпуклого анализа), решение которой позволило бы получать формулы для пересчета новых критериев в любых ситуациях с произвольными наборами информации об относительной важности критериев.

Сначала, однако, напомним определение двойственного конуса. Пусть $a^1, a^2, \ldots, a^k$ — конечный набор векторов $m$-мерного евклидова пространства. Выпуклый конус, порожденный указанными векторами, обозначим

$$M = \operatorname{cone}\{a^1, a^2, \ldots, a^m\}.$$

Он представляет собой множество всех неотрицательных линейных комбинаций указанных векторов. Будем считать, что этот конус острый и его размерность [1]) равна $m$.

*Двойственный конус* [4] по отношению к конусу $M$ обозначим символом $C$. Он определяется равенством

$$C = \{x \in R^m \mid \langle x, y \rangle \geqq 0 \quad \text{для всех } y \in M\}.$$

Например, двойственным конусом для неотрицательного ортанта будет сам неотрицательный ортант.

Двойственный конус для многогранного (или конечнопорожденного) конуса так же является многогранным конусом, а значит, порождается некоторым конечным набором векторов. Известно также [28], что двойственный для острого $m$-мерного конуса сам является острым и $m$-мерным.

**Задача.** *Найти алгоритм, который для произвольного заданного конечного набора векторов* $a^1, a^2, \ldots, a^k$*, порождающих выпуклый острый* $m$*-мерный конус* $M$*, дает возможность за обозримое время построить минимальный набор векторов* $b^1, b^2, \ldots, b^n$*, порождающих двойственный конус* $C$*, т. е. таких, что*

$$C = \operatorname{cone}\{b^1, b^2, \ldots, b^n\}.$$

[1]) *Размерность конуса* совпадает с размерностью минимального подпространства, содержащего данный конус.

На геометрическом языке сформулированная задача заключается в построении на основе ребер конуса $M$, набора нормальных векторов всех гиперплоскостей, являющихся $(m-1)$-мерными гранями $M$.

В частном случае, когда конусом $M$ является неотрицательный ортант пространства $R^m$, сформулированная задача тривиальна и ее решением будет, например, набор единичных ортов этого пространства (тех самых, которые порождают данный неотрицательный ортант).

Имея в распоряжении алгоритм, о котором идет речь в сформулированной выше задаче, можно для любого конечного непротиворечивого набора информации об относительной важности критериев за обозримое время получать формулы для пересчета старого векторного критерия и образования нового, на основе которого строится оценка сверху для множества выбираемых решений (векторов).

## 4.4. Алгоритмический подход к использованию произвольного набора информации об относительной важности критериев

**1. Идея алгоритмического подхода**. Рассмотрим ситуацию, когда информация об относительной важности критериев содержит произвольный конечный набор $k$ сообщений, каждое из которых состоит в том, что некоторая группа критериев важнее какой-то другой группы критериев с определенными коэффициентами относительной важности. При этом предполагается, что участвующие в данном наборе пары сообщений в общем случае не являются взаимно независимыми.

Как указывалось выше, задание подобной информации равносильно указанию набора из $k$ пар векторов

$$u^i, v^i \in R^m, \; u^i - v^i \in N^m, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

для которых выполнены соотношения $u^i \succ v^i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Напомним, что множество $N^m$ составляют все $m$-мерные векторы, имеющие по крайней мере одну положительную и хотя бы одну отрицательные компоненты.

Введем выпуклый конус $M$ (без нуля), порожденный векторами

$$e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1 - v^1, \ldots, u^k - v^k. \tag{4.25}$$



Все указанные векторы принадлежит острому выпуклому конусу $K$, который задает конусное отношение предпочтения $\succ$. Поэтому справедливо включение $M \subset K$, а значит конус $M$ — острый. Кроме того, благодаря аксиоме Парето он содержит неотрицательный ортант $R_+^m$, т. е. $R_+^m \subset M$.

Обозначим через $\succ_M$ конусное отношение с конусом $M$. В силу следствия 2.1 это конусное отношение удовлетворяет аксиомам 2–4, т. е. относится к отношениям того же класса, что и исходное отношение $\succ$. Следует, правда, заметить, что отношение $\succ$ удовлетворяет еще и аксиоме 1, а для отношения $\succ_M$ оно может оказаться не выполненным. Но его выполнение для дальнейшего и не понадобится.

Таким образом, имеются два конусных отношения $\succ$ и $\succ_M$, которые в силу включения $M \subset K$ связаны друг с другом импликацией

$$y' \succ_M y'' \;\Rightarrow\; y' \succ y''$$

для $y', y'' \in R^m$.

Наличие этой связи приводит к тому, что множество недоминируемых векторов $\operatorname{Ndom} Y$, построенное на основе отношения $\succ$, является подмножеством множества недоминируемых векторов, определяемого с помощью отношения $\succ_M$, т. е.

$$\operatorname{Ndom} Y \subset \operatorname{N\,dom}_M Y, \tag{4.26}$$

где

$$\operatorname{Ndom}_M Y = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y, \text{ что } y \succ_M y^*\}.$$

Включение (4.26) означает, что множество $\operatorname{Ndom}_M Y$ является некоторой оценкой сверху для множества недоминируемых векторов $\operatorname{Ndom} Y$, а значит и для множества выбираемых векторов $\operatorname{Sel} Y$. Построив множество $\operatorname{Ndom}_M Y$, получим в общем случае более узкое множество, чем множество Парето, и, тем самым, за счет удаления некоторых парето-оптимальных векторов произойдет сужение множества Парето. В этом и заключается существо подхода, предлагаемого ниже.

**2. Мажорантное отношение**. Конусное отношение $\succ_M$ с острым выпуклым конусом $M$ (без нуля), порожденным векторами (4.25), будем называть *мажорантным отношением*. Это наименование обуславливается тем, что на его основе далее будет построена оценка сверху (т. е. мажоранта) для множества выбираемых векторов (решений).

Предлагаемый алгоритмический подход основан на применении следующего утверждения.

**Теорема 4.12.** *Пусть* $y', y'' \in R^m$, $y' \neq y''$. *Соотношение* $y' \succ_M y''$ *имеет место тогда и только тогда, когда равно нулю оптимальное значение целевой функции в следующей канонической задаче линейного программирования*

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_s^i \operatorname{sign}(y_s' - y_s'') + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u_s^i - v_s^i) \operatorname{sign}(y_s' - y_s'') + \xi_s = \\ = |y_s' - y_s''|, \quad s = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \geqq 0. \qquad (4.27)$$

Здесь символ sign $(a)$ определяется равенством

$$\operatorname{sign}(a) = \begin{cases} 1, \text{ если } a > 0 \text{ или } a = 0, \\ -1, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

⮝ Прежде всего, заметим, что соотношение $y' \succ_M y''$ выполняется тогда и только тогда, когда верно включение $y' - y'' \in M$, что равносильно выполнению равенства

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u^i - v^i) = y' - y'' \qquad (4.28)$$

при некоторых одновременно не равных нулю неотрицательных коэффициентах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. В свою очередь, равенство (4.28) при указанных коэффициентах имеет место тогда и только тогда, когда выполнено

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_s^i \operatorname{sign}(y_s' - y_s'') + \sum_{i=1}^{k} \mu_i (u_s^i - v_s^i) \operatorname{sign}(y_s' - y_s'') = \\ = |y_s' - y_s''|, \quad s = 1, 2, \ldots, m. \qquad (4.29)$$

Далее, для того чтобы выполнялись равенства (4.29) при некоторых одновременно не равных нулю неотрицательных числах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ необходимо и достаточно, чтобы каноническая задача линейного программирования (4.27) имела оптимальное решение, в котором $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = 0$. Последнее эквивалентно равенству нулю оптимального значения целевой функции в задаче линейного программирования (4.27).⮟



В соответствии с теоремой 4.12 проверка справедливости соотношения $y' \succ_M y''$ сводится к решению канонической задачи линейного программирования (4.27). Это решение может быть осуществлено с помощью известного алгоритма симплекс-метода. Такой способ проверки соотношения $y' \succ_M y''$ удобен при создании общего алгоритма построения оценки сверху в случае конечного множества возможных векторов $Y$. Если же требуется решить задачу невысокой размерности «вручную», то более удобным оказывается использование следующего результата, который представляет собой частный случай теоремы 4.12, установленный в ходе доказательства этой теоремы.

**Следствие 4.4.** *Пусть* $y', y'' \in R^m$, $y' \neq y''$. *Соотношение* $y' \succ_M y''$ *имеет место тогда и только тогда, когда неоднородная система линейных уравнений* (4.28) *имеет ненулевое неотрицательное решение относительно* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$.

**3. Пример**. Пусть $m = 3$, $k = 2$, $Y = \{y^1, y^2, y^3, y^4\}$, где

$$y^1 = (1, 4.5, 2),\ y^2 = (2, 3, 1),\ y^3 = (3, 2, 1.5),\ y^4 = (5, 1.5, 2),$$
$$u^1 = (0, 5, 1),\ v^1 = (2, 2, 0),\ u^2 = (5, 0, 2),\ v^2 = (1, 1, 1).$$

Поскольку

$$u^1 - v^1 = (-2, 3, 1),\ u^2 - v^2 = (4, -1, 1),$$

то данные две пары векторов $u^1, v^1, u^2, v^2$ могут задавать (если они непротиворечивы) информацию об относительной важности критериев, состоящую их двух сообщений. Первое из этих сообщений о том, что группа из второго и третьего критериев, важнее первого критерия. Второе сообщение — о бóльшей важности группы, состоящей из первого и третьего критериев по сравнению со вторым критерием. Обращаем внимание на то, что имеющаяся информация не является взаимно независимой и для учета этой информации ни одна из полученных ранее формул непригодна.

Сначала убедимся в совместности имеющихся пар векторов $u^1, v^1, u^2, v^2$. Для этого воспользуемся теоремой 4.6 и запишем для данного случая однородную систему линейных уравнений (4.15):

$$\lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 = 0,$$
$$\lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 = 0,$$
$$\lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 = 0.$$

Из последнего уравнения благодаря неотрицательности чисел $\lambda_3$, $\mu_1$, $\mu_2$ следует их равенство нулю: $\lambda_3 = \mu_1 = \mu_2 = 0$. В таком случае из первого и второго уравнений получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Следовательно, рассматриваемая система линейных уравнений не имеет ненулевых неотрицательных решений. Согласно теореме 4.6 это означает совместность двух пар векторов $u^1$, $v^1$, $u^2$, $v^2$.

Теперь построим оценку сверху для множества недоминируемых векторов Ndom $Y$ (а значит и для множества выбираемых векторов Sel $Y$). С этой целью сначала запишем систему линейных уравнений (4.28) для векторов $y' = y^1$ и $y'' = y^2$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 &= -1, \\ \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 &= 1.5, \\ \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 &= 1. \end{aligned}$$

Она имеет ненулевое неотрицатательное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu_2 = 0$, $\lambda_3 = \mu_1 = 0.5$. Следовательно, выполняется соотношение $y^1 \succ_M y^2$, а значит, вектор $y^2$ не может входить в множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$.

Для векторов $y' = y^4$ и $y'' = y^3$ система линейных уравнений (4.28) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 &= 2, \\ \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 &= -0.5, \\ \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 &= 0.5. \end{aligned}$$

У этой системы имеются ненулевые неотрицательные решения, например, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0.5$. Поэтому вектор $y^3$ так же не входит в множество недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$.

Выпишем пару систем линейных уравнений (4.28) для векторов $y' = y^1$, $y'' = y^4$ и $y' = y^4$, $y'' = y^1$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 &= -4, \qquad & \lambda_1 - 2\mu_1 + 4\mu_2 &= 4, \\ \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 &= 3, \qquad & \lambda_2 + 3\mu_1 - \mu_2 &= -3, \\ \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 &= 0; \qquad & \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 &= 0.5. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что ни одна из этих двух систем не имеет ненулевых неотрицательных решений, а, значит, ни одно из соотношений $y^1 \succ_M y^4$, $y^4 \succ_M y^1$ не выполняется.

В итоге получено следующее двухэлементное множество недоминируемых векторов



$$\mathrm{Ndom}_M\, Y = \{y^1, y^4\}.$$

Это множество представляет собой оценку сверху для множества выбираемых векторов Sel $Y$, т. е. Sel $Y \subset \{y^1, y^4\}$. Как видим, ни один из возможных векторов $y^2$, $y^3$ не вошел в это множество, а, значит, ни один из них заведомо не должен быть выбранным.

**4. Алгоритм построения оценки сверху в случае конечного множества $Y$.** Здесь будем считать, что множество возможных векторов $Y$ состоит из конечного числа элементов:

$$Y = \{y^1, y^2, ..., y^N\}.$$

*Алгоритм построения множества недоминируемых векторов* $\mathrm{Ndom}_M\, Y$ состоит из следующих восьми шагов.

*Шаг* 1. Прежде всего, рекомендуется проверить совместность (непротиворечивость) набора пар векторов $u^i, v^i \in R^m$, для которых выполняется $u^i - v^i \in N^m$, $i = 1, 2, ..., k$. Такая проверка сводится к решению канонической задачи линейного программирования (4.15). Если в результате решения этой задачи оптимальное значение целевой функции оказалось равным нулю, то вычисления следует закончить, так как данный набор пар векторов противоречив. Если же это значение положительно, то необходимо перейти к следующему шагу.

*Шаг* 2. Положить $\mathrm{Ndom}_M\, Y = y$, $i = 1$, $j = 2$. Тем самым образуется так называемое текущее множество недоминируемых векторов, которое в начале работы алгоритма совпадает с множеством $Y$, а в конце — составит искомую оценку сверху. Алгоритм устроен таким образом, что эта оценка получается из $Y$ последовательным удалением заведомо доминируемых векторов.

*Шаг* 3. Проверить выполнение соотношения $y^i \succ_M y^j$. Для этого нужно решить каноническую задачу линейного программирования (4.27) при $y' = y^i$, $y'' = y^j$. Если оптимальное значение целевой функции в этой задаче оказалось равным нулю, то перейти к Шагу 4. В противном случае (т. е. когда это значение положительно) перейти к Шагу 6.

*Шаг* 4. Удалить из текущего множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M\, Y$ вектор $y^j$, так как он не может входить в это множество.

*Шаг* 5. Проверить выполнение неравенства $i < N$. Если оно имеет место, то положить $j = j + 1$ и вернуться к Шагу 3. В противном случае — перейти к Шагу 8.

*Шаг* 6. Проверить справедливость соотношения $y^j \succ_M y^i$. Для этого необходимо решить каноническую задачу линейного программирования (4.27) при $y' = y^i$, $y'' = y^i$. В том случае, когда оптимальное значение целевой функции этой задачи окажется равным нулю, перейти к Шагу 7. В противном случае (т. е. когда это оптимальное значение положительно) — вернуться к Шагу 5.

*Шаг* 7. Удалить из текущего множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}_M Y$ вектор $y^i$.

*Шаг* 8. Проверить выполнение неравенства $i < N - 1$. В случае истинности этого неравенства следует последовательно положить $i = i + 1$, а затем $j = i + 1$. После этого необходимо вернуться к Шагу 3. В противном случае (т. е. когда $i \geqq N - 1$) вычисления закончить. Множество недоминируемых векторов построено полностью.

Глава 5

# ПОЛНОТА ИНФОРМАЦИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

Здесь дается теоретическое обоснование предлагаемого далее метода последовательного сужения множества компромиссов на основе конечного набора информации об относительной важности критериев. Изложение данной главы является наиболее сложным в математическом отношении, поэтому она без ущерба для понимания дальнейшего материала может быть пропущена читателями, не имеющими соответствующей подготовки.

Существо полученных здесь результатов можно выразить следующим образом: информация об относительной важности критериев полна в том смысле, что только на ее основе для любой задачи определенного достаточно широкого класса можно с любой степенью точности определить неизвестное множество недоминируемых векторов (недоминируемых решений). Если же число возможных векторов конечно, то множество недоминируемых векторов может быть построено точно и полностью. Таким образом, научившись выявлять информацию об относительной важности из ЛПР, можно успешно находить множество недоминируемых решений и векторов, не привлекая информации никакого другого типа.

При изложении результатов этой главы были использованы некоторые идеи из книги [3].

## 5.1. Предварительное рассмотрение

**1. Постановка задачи**. Наличие информации об относительной важности критериев, состоящей в том, что некоторая группа критериев важнее другой группы, позволяет удалить определенные парето-оптимальные векторы как заведомо неприемлемые и, тем самым, получить более точную оценку сверху (аппроксимацию) для множества выбираемых векторов, чем множество Парето. Если же такой информации имеется некоторый конечный набор, то можно надеяться, что с его помощью удастся построить еще более точную (более узкую) оценку сверху. Из общих соображений ясно, что, располагая все большим набором подобного рода информации, можно строить все более точную оценку сверху. В связи с этим, возникает следующий вопрос: каковы границы использования конечного набора различной информации об относительной важности критериев?

Прежде чем продолжить рассмотрение, отметим следующее. Благодаря лемме 1.2 множество выбираемых векторов должно содержаться в множестве недоминируемых векторов. Более того, имея дело с классом задач многокритериального выбора, ограниченных рамками аксиом 1–4, ясно, что выбранным может оказаться любое подмножество множества недоминируемых векторов. Иными словами, информация об отношении предпочтения ЛПР и наличие набора критериев, удовлетворяющих аксиомам 1–4, не позволяют исключить как заведомо неприемлемый ни один из недоминируемых векторов. Поэтому самой узкой оценкой сверху для множества выбираемых векторов в рассматриваемой модели будет множество недоминируемых векторов. По этой причине мы будем далее говорить об аппроксимации (приближении) не множества выбираемых, а множества недоминируемых векторов.

Более точно поставленный выше вопрос можно сформулировать следующим образом: *возможно ли, используя лишь конечный набор информации об относительной важности критериев, получить сколь угодно точное представление о неизвестном множестве недоминируемых векторов*? Оказывается, на этот вопрос в принципе можно ответить положительно. В принципе — так как придется несколько сузить класс рассматриваемых задач многокритериального выбора, уже ограниченных рамками аксиом 1–4.

Ниже будет показано, что для определенного класса задач многокритериального выбора нужно лишь научиться успешно извлекать и грамотно использовать информацию об относительной важности критериев. Этого вполне достаточно для того, чтобы, по крайней мере, теоретически получить сколь угодно точное представление о неизвестном множестве недоминируемых векторов (и недоминируемых решений). Такое положение свидетельствует о важной роли информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений.

**2. Геометрические аспекты**. Сформулируем поставленный выше вопрос в геометрических терминах.

В соответствии с определением 3.3 наличие информации об относительной важности одной группы критериев по сравнению с другой группой означает, что указан вектор $u \in N^m$, имеющий



по крайней мере одну положительную и хотя бы одну отрицательную компоненты, для которого выполняется соотношение $u \succ 0_m$. В том случае, когда имеется конечный набор подобного типа информации, соответственно получаем набор таких векторов $u^i \in N^m$, что верно $u^i \succ 0_m$, $i = 1, 2, ..., k$. Если набор векторов непротиворечив (точнее говоря, непротиворечивым является набор пар векторов $u^i$, $0_m$, $i = 1, 2, ..., k$), то выпуклый конус $M$, порожденный векторами $e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^k$, представляет собой совокупность всех ненулевых неотрицательных линейных комбинаций этих векторов и является острым выпуклым конусом (без нуля). Он задает конусное отношение, обозначаемое далее $\succ_M$.

Поставленный в предыдущем пункте вопрос о полноте информации об относительной важности критериев теперь в геометрических терминах примет следующую форму: насколько близким к неизвестному отношению предпочтения $\succ$ можно получить отношение $\succ_M$, используя лишь различного рода конечные непротиворечивые наборы векторов $u^1, u^2, ..., u^k$. Другими словами, *имеется ли принципиальная возможность за счет выбора указанного набора векторов сколь угодно точно приблизить отношение $\succ_M$ к неизвестному отношению предпочтения $\succ$*?

Для упрощения последующего решения поставленный вопрос переведем в плоскость конусов отношений и сформулируем его так: *возможно ли за счет выбора набора векторов $u^1, u^2, ..., u^k$ получить конус $M$ сколь угодно близким к неизвестному конусу $K$*[1])? При этом число векторов $k$ не фиксировано и может быть любым конечным числом.

Конус $K$ является произвольным острым выпуклым конусом и не содержит нуля. Что касается конуса $M$, то он принадлежит тому же классу, что и $K$, т. е. так же является острым, выпуклым и не содержит нуля. Однако в отличие от $K$ конус $M$ порожден конечным числом векторов, а, значит, он — конечнопорожденный, т. е. многогранный (см. [4, 28]). В такой постановке вопрос о полноте информации об относительной важности критериев имеет много общего с известной в выпуклом анализе задачей аппроксимации произвольного выпуклого компактного множества многогранником. Как известно, эта задача имеет положительное решение — произвольное выпуклое замкнутое ограниченное множество можно сколь угодно точно аппроксимировать (приблизить) многогранником. Поэтому есть все основания

[1]) Напоминаем, что $K$ — острый выпуклый конус отношения $\succ$.

надеяться, что аналогичный вопрос, сформулированный для конусов (когда произвольный выпуклый конус нужно аппроксимировать многогранным конусом) найдет свое положительное решение. Но для того чтобы получить это решение, прежде всего необходимо договориться об измерении расстояния между выпуклыми конусами.

**3. Расстояние между конусами**. Пусть $A$ и $B$ — произвольные непустые выпуклые подмножества пространства $R^m$. Как известно, *хаусдорфово расстояние* (см. [11]) между данными множествами обозначается dist $(A, B)$ и определяется формулой

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\left\{r \in R_+ \mid A \subset (B)_r,\ B \subset (A)_r\right\},$$

где $R_+$ означает множество положительных вещественных чисел и

$$(A)_r = \bigcup_{y \in A} U_r(y), \qquad (B)_r = \bigcup_{y \in B} U_r(y),$$

а $U_r(y)$ $(r > 0)$ — замкнутый шар в пространстве $R^m$ с центром в $y$ и радиусом $r$:

$$U_r(y) = \{z \in R^m \mid \|z - y\| \leqq r\},$$

Символом $\|a\|$ здесь обозначена евклидова норма (длина) вектора $a \in R^m$, т. е.

$$\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2}\ .$$

В частном случае, когда $A$ и $B$ — одноэлементные множества $(a)$ и $(b)$ соответственно, хаусдорфово расстояние между ними совпадает с евклидовым и равно норме разности этих векторов, т. е. $\|a - b\|$.

Следующий результат показывает, что непосредственное применение хаусдорфова расстояния для измерения расстояния между выпуклыми конусами наталкивается на определенные трудности, которые, впрочем, далее будут преодолены.

**Лемма 5.1**. *Пусть $K_1$ и $K_2$ — произвольные два выпуклые конуса в пространстве $R^m$, не содержащие начало координат, причем $\bar{K}_1 \neq \bar{K}_2$, где черта сверху означает замыкание множества* [1]). *Тогда имеет место равенство*

$$\operatorname{dist}(K_1, K_2) = +\infty.$$

[1]) Операция *замыкания множества* состоит в присоединении к нему всех его граничных точек.



⮝ Из неравенства $\bar{K}_1 \neq \bar{K}_2$ следует, что найдется точка $y \in R^m$, такая что $y \in \bar{K}_1$, $y \notin \bar{K}_2$, либо найдется такая точка $y \in R^m$, для которой $y \in \bar{K}_2$, $y \notin \bar{K}_1$. Для определенности продолжим рассмотрение первого случая, так как второй разбирается аналогично.

Из соотношений $y \in \bar{K}_1$, $y \notin \bar{K}_2$ вытекает существование такой точки $y'$, что $y' \neq 0_m$ и $y' \in K_1$, $y' \notin \bar{K}_2$. Рассмотрим луч (частный случай конуса), исходящий из начала координат и проходящий через $y'$. Обозначим этот луч $l$. Для него выполнены соотношения $l \subset K_1$, $l \not\subset \bar{K}_2$.

Норма $\|y' - y\|$, как функция переменных $y_1, y_2, \ldots, y_m$, непрерывна и ограничена снизу на конусе $K_2$. Поэтому найдется предельная для множества $K_2$ точка $\hat{y} \in R^m$, для которой выполняется равенство

$$\inf_{y \in K_2} \|y' - y\| = \|y' - \hat{y}\|,$$

причем $\hat{y} \neq y'$. Выберем на луче $l$ последовательность точек $\left\{y^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ вида

$$y^k = ky', \ k = 1, 2, \ldots$$

Для точек этой последовательности имеем

$$\inf_{y \in K_2} \|y^k - y\| = \inf_{y \in K_2} \|ky' - y\| = k \inf_{y \in K_2} \left\|y' - \frac{y}{k}\right\| =$$
$$= k \inf_{ky \in K_2} \|y' - y\| = k\,\|y' - \hat{y}\| \underset{k \to \infty}{\rightarrow} +\infty,$$

откуда немедленно следует требуемое равенство $\operatorname{dist}(K_1, K_2) = +\infty$. ⮟

В соответствии с доказанной леммой хаусдорфово расстояние между двумя «существенно несовпадающими» конусами (замыкания которых не совпадают) всегда равно $+\infty$. Поэтому измерять близость конусов бинарных отношений с помощью хаусдорфова расстояния не представляется возможным.

Пусть $K$ означает выпуклый конус в пространстве $R^m$, а $Y$ — подмножество того же пространства. Введем множество

$$Y_z = \{y \in \mid y - z \in K\}$$

для каждого $z \in Y$. Если существует такая положительная константа $r$, что для любого $z \in Y$ выполняется неравенство

$$\sup_{y \in Y_z} \| y - z \| \leq r,$$

то множество $Y$ называют *K-ограниченным*. Нетрудно проверить, что всякое ограниченное множество является $K$-ограниченным, тогда как обратное утверждение в общем случае места не имеет.

Теперь пусть $Y$ есть множество возможных векторов, а $K$ — выпуклый конус конусного отношения предпочтения $\succ$. Предположим, что имеет место соотношение $y' \succ y''$ для векторов $y', y'' \in R^m$. Это равносильно выполнению включения $y' - y'' \in K$. Если допустить, что множество $Y$ является $K$-ограниченным, то справедливо неравенство $\| y' - y'' \| \leqq r$ или, что то же самое, верно включение

$$y' - y'' \in R \cap U_r(0_m).$$

Таким образом, для $K$-ограниченного множества возможных векторов $Y$ истинна эквивалентность

$$y' - y'' \in K \;\Leftrightarrow\; y' - y'' \in K \cap U_r(0_m).$$

Это означает, что для $K$-ограниченного множества $Y$ вопрос близости конусов равнозначен вопросу близости лишь тех частей конусов, которые расположены в шаре $U_r(0_m)$.

Приведенные рассуждения обосновывают введение следующего определения. *Расстояние между конусами $K_1$ и $K_2$* будем обозначать $d_r(K_1, K_2)$; оно определяется формулой

$$d_r(K_1, K_2) = \operatorname{dist}(K_1 \cap U_r(0_m), K_2 \cap U_r(0_m)), \qquad (5.1)$$

где $r$ — некоторое (достаточно большое) положительное число. Введенное расстояние обладает стандартными свойствами метрики (см. [11]):

1) $d_r(K_1, K_2) \geqq 0$,
2) $d_r(K_1, K_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \bar{K}_1 = \bar{K}_2$,
3) $d_r(K_1, K_2) = d_r(K_2, K_1)$,
4) $d_r(K_1, K_3) \leqq d_r(K_1, K_2) + d_r(K_2, K_3)$

для любых выпуклых конусов $K_1$, $K_2$, $K_3$.



## 5.2. Первая теорема о полноте

**1. Постановка математической задачи**. Бинарное отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется в процессе принятия решений, благодаря аксиомам 2–4 является конусным с острым выпуклым конусом $K$ без начала координат. Поэтому пусть имеется произвольный острый выпуклый конус $K$, $K \subset R^m$, который не содержит начало координат и в силу аксиомы Парето включает неотрицательный ортант $R^m_+$. Следует заметить, что в общем случае конус $K$ не является многогранным.

Как указано в предыдущем разделе, наличие конечного набора информации об относительной важности критериев равносильно заданию некоторого непротиворечивого конечного набора векторов $u^1, u^2, \ldots, u^k \in N^m$, которые вместе с единичными ортами $e^1, e^2, \ldots, e^m$ порождают многогранный конус $M$, содержащийся в конусе $K$.

Математическая постановка рассматриваемого вопроса выглядит следующим образом: *возможно ли за счет выбора набора указанных выше векторов $u^1, u^2, \ldots, u^k$ (при этом число $k$ векторов конечно, но не фиксировано) добиться того, чтобы расстояние $d_r(K, M)$ между конусами $K$ и $M$ было сколь угодно малым*?

Ответ на поставленный вопрос дается в следующей теореме.

**2. Первая теорема о полноте**.

**Теорема 5.1** (в терминах аппроксимации конусов). *Пусть $K$ — произвольный острый выпуклый конус, не содержащий начала координат, и такой, что $K \subset R^m$, $K \supset R^m_+$, $K \neq R^m_+$. Выберем и зафиксируем произвольное положительное $r$. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такой конечный набор векторов*

$$\left\{u^i\right\}_{i=1}^k \subset R^m, \; u^i \in N^m \cap K \cap U_r(0_m), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

что

$$d_r\left(K, \operatorname{cone}\left\{e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^k\right\}\right) < \varepsilon, \qquad (5.2)$$

*где* $\operatorname{cone}\{e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^k\}$ *— выпуклый конус, порожденный конечным набором векторов $e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^k$.*

*Более того, при этом можно считать, что компоненты всех векторов $u^i$ являются рациональными числами.*

⮙ Примем обозначения

$$\widehat{K} = K \cap U_r(0_m), \; \operatorname{int}\widehat{K} = \operatorname{int} K \cap \operatorname{int} U_r(0_m).$$

Зафиксируем произвольное положительное ε. Введем $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{m}}$ — сеть пространства $R^m$. Через $\Pi(y)$ будем обозначать замкнутый $m$-мерный куб этой сети с центром в точке $y \in R^m$.

Выделим все кубы данной сети, пересекающиеся с множеством $\operatorname{int}\widehat{K}$. Благодаря ограниченности этого множества, число выделенных кубов конечно. Обозначим их через $\Pi(y^1)$, $\Pi(y^2)$, ..., $\Pi(y^i)$ и пусть

$$\Pi = \bigcup_{j=1}^{l} \Pi(y^j)\,.$$

По построению $\operatorname{int}\widehat{K} \subset \Pi$. На самом деле имеет место включение $\widehat{K} \subset \Pi$. Действительно, если это не так, то в силу замкнутости множества $\Pi$ найдется такая точка $\hat{y} \in \widehat{K}$, что она не принадлежит $\Pi$ вместе с некоторой своей окрестностью $\operatorname{int} U(\hat{y})$. Если соединить отрезком точку $\hat{y}$ с какой-нибудь точкой из $\operatorname{int}\widehat{K}$, то на основании теоремы 6.1 из [28] получим, что все внутренние точки указанного отрезка принадлежат $\operatorname{int}\widehat{K}$. Из этих внутренних точек множества $\widehat{K}$ выберем какую-нибудь в пределах окрестности $\operatorname{int} U(\hat{y})$ и обозначим ее через $y'$. Для нее получаем $y' \in \operatorname{int}\widehat{K}$, $y' \notin \Pi$, что противоречит включению $\operatorname{int}\widehat{K} \subset \Pi$. Таким образом, $\Pi$ — покрытие множества $\widehat{K}$.

В каждом пересечении $\Pi(y^j) \cap \operatorname{int}\widehat{K}$ можно выбрать точку $u^j$ с рациональными компонентами, $j = 1, 2, ..., l$. Введем выпуклую оболочку [1]) всех таких точек $u^j$ и обозначим ее $P$. Это множество представляет собой некоторый многогранник.

Так как $\widehat{K}$ — выпуклое множество и $u^j \in \widehat{K}$, $j = 1, 2, ..., l$, то $P \subset \widehat{K}$, а значит и

$$P \subset (\widehat{K})_\varepsilon. \tag{5.3}$$

С другой стороны, найдутся точки, одновременно принадлежащие $\widehat{K}$ и не принадлежащие $\Pi$. Поскольку $\Pi$ — покрытие $\widehat{K}$, то каждая из этих точек удалена от $P$ не более чем на длину диагонали куба введенной сети, т. е. на $\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому заведомо

[1]) *Выпуклой оболочкой* данного множества называют наименьшее выпуклое множество, содержащее это множество.



выполняется включение $\widehat{K} \subset (P)_\varepsilon$, которое вместе с (5.3) влечет неравенство

$$\operatorname{dist}\left(\widehat{K}, P\right) < \varepsilon. \tag{5.4}$$

Нетрудно понять, что

$$P \subset \left(\operatorname{cone}\{P\}\right) \cap U_r(0_m) \subset \widehat{K}.$$

Поэтому из (5.4) следует

$$\operatorname{dist}\left(\widehat{K}, \operatorname{cone}\left\{u^1, u^2, ..., u^l\right\} \cap U_r(0_m)\right) < \varepsilon. \tag{5.5}$$

В свою очередь, из (5.5) в силу $R^m_+ \subset K$ получаем неравенство

$$\operatorname{dist}\left(\widehat{K}, \operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^l\} \cap U_r(0_m)\right) < \varepsilon.$$

Оно совпадет с доказываемым неравенством (5.2), если из векторов $u^1, u^2, ..., u^l$ удалить все «лишние», т. е. те, которые принадлежат неотрицательному ортанту $R^m_+$, и оставшийся набор векторов обозначить $u^1, u^2, ..., u^k$.▼

Как известно, компьютер может оперировать только с рациональными числами, поскольку для задания иррационального числа в десятичной форме требуется бесконечное число разрядов. Поэтому информацию об относительной важности критериев будем называть *машинно реализуемой*, если все компоненты набора векторов, задающих эту информацию, являются рациональными числами. Поскольку всякий вектор из множества $N^m$ задает определенную количественную информацию об относительной важности критериев, то полученный результат в терминах теории относительной важности критериев может быть переформулирован следующим образом.

**Теорема 5.1** (в терминах информации об относительной важности критериев). *С помощью конечного набора машинно реализуемой информации об относительной важности критериев можно получить сколь угодно точное представление* (*точность оценивается формулой* (1)) *о конусе любого бинарного отношения предпочтения, удовлетворяющего аксиомам* 2–4.

### 5.3. Вторая теорема о полноте

**1. Пример**. В предыдущем разделе было установлено, что при определенных условиях конус неизвестного отношения предпочтения можно сколь угодно точно аппроксимировать «изнутри» многогранным конусом, соответствующим некоторому конечному набору информации об относительной важности критериев. Следует отметить, что близость конусов двух данных отношений (измеряемая расстоянием по формуле (5.1)) в общем случае не влечет близость самих бинарных отношений, а, значит, и множеств недоминируемых векторов, построенных на основе этих отношений. Подтверждение тому — следующий простой пример.

**Пример 5.1.** Пусть $m = 2$, плоское множество возможных векторов (точек) имеет вид отрезка

$$Y = \{(y_1, y_2) \in R^2 \mid y_1, y_2 \geqq 0, \quad y_1 + y_2 = 1\},$$

а острый выпуклый конус $K$ задается равенством

$$K = \text{cone}\,\{(1, 0),\ (-1, 1)\}.$$

Здесь точка $(0, 1) \in Y$ доминирует (имеется в виду доминирование относительно конусного отношения с конусом $K$) над всеми остальными точками выделенного на рис. 5.1 отрезка, соединяющего эту точку с точкой $(0, 1)$. В частности, выполнено соотношение $(0, 1) \succ (1, 0)$, так как $(0, 1) - (1, 0) = (-1, 1) \in K$.

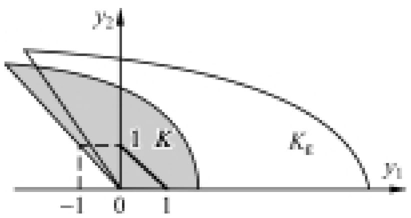

Рис. 5.1.

Теперь немного изменим $K$. Вместо него рассмотрим конус

$$K_\varepsilon = \text{cone}\,\{(1, 0), (-1, 1 + \varepsilon)\},$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ (см. рис. 5.1). Выбирая положительное число $\varepsilon$ достаточно малым, конус $K_\varepsilon$ можно сделать сколь угодно близким к конусу $K$ (измеряя близость при помощи расстояния по формуле (5.1)). С другой стороны, каким бы малым положительное $\varepsilon$ не выбрать, конусное отношение с конусом $K_\varepsilon$ не будет близким к отношению с конусом $K$, поскольку для последнего множество недоминируемых точек будет состоять из одной точки $(0, 1)$ отрезка, соединяющего $(0, 1)$ и $(1, 0)$, а для отношения с конусом $K_\varepsilon$ (при любом $\varepsilon \in (0, 1)$) множество недоминируемых точек будет составлять весь указанный отрезок.



**2. Вторая теорема о полноте**. Анализ примера 5.1 показывают, что если конус $K$ не является открытым множеством, то при «небольшом» изменении этого конуса соответствующее ему множество недоминируемых точек может изменяться значительно. Однако если ограничиться отношениями предпочтения с открытыми конусами, то множество недоминируемых точек относительно произвольного отношения, удовлетворяющего всем указанным в теореме 5.1 свойствам, может быть получено как предел последовательности множеств недоминируемых точек относительно некоторых конусных отношений, построенных на основе набора машинно реализуемой информации об относительной важности критериев. Точнее говоря, имеет место следующий результат.

**Теорема 5.2.** *Пусть $K$ — открытый острый выпуклый конус, не содержащий начала координат и $K \supset R^m_+$, $K \neq R^m_+$. Допустим, что множество $Y$ является $K$-ограниченным. Тогда существует такая последовательность векторов*

$$\left\{u^s\right\}_{s=1}^{\infty}, \ u^s \in N^m \ \cap \ K, \quad s = 1, 2, \ldots$$

*с рациональными компонентами, что имеет место сходимость*

$$\text{Ndom}_{\succ_s} Y \to \text{Ndom}\, Y \ \text{ при } s \to \infty, \qquad (5.6)$$

*где $\succ_s$ — конусное отношение, порожденное острым выпуклым конусом* $\text{cone}\,\{e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^s\}$ *без начала координат, $s = 1, 2, \ldots$*

**Замечание**. Сходимость в формуле (5.6) последовательности множеств недоминируемых векторов означает так называемую «поточечную» сходимость множеств, определяемую следующим образом: точка (вектор) $y^* \in Y$ принадлежит предельному множеству (т. е. $y^* \in \text{Ndom}\, Y$) тогда и только тогда, когда существует такое натуральное $s_0$, что включение $y^* \in \text{Ndom}_{\succ_s} Y$ имеет место для всех натуральных $s > s_0$.

⮝ Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Применяя доказательство теоремы 5.1, при $n = 1$ получим существование набора векторов $u^1, u^2, \ldots, u^k$, для которых

$$d_r\left(K, \text{cone}\left\{e^1, e^2, \ldots, e^m, u^1, u^2, \ldots, u^k\right\}\right) < 1.$$

При $n = 2$ аналогично найдется, вообще говоря, другой набор векторов $u^{k+1}, \ldots, u^{k+p}$, для которых

$$d_r\left(K, \operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^{k+1}, u^{k+2}, ..., u^{k+p}\}\right) < \frac{1}{2}.$$

Поскольку при «расширении» конуса $\operatorname{cone}\{u^{k+1},...,u^{k+p}\}$ за счет добавления полученных ранее образующих $u^1, u^2, ..., u^k \in K$ расстояние между $K$ и указанным способом «расширенным» конусом $\operatorname{cone}\{u^1, ..., u^k, u^{k+1}, ..., u^{k+p}\}$ становится разве что меньше, то

$$d_r\left(K, \operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^k, u^{k+1}, u^{k+2}, ..., u^{k+p}\}\right) < \frac{1}{2}.$$

Рассуждая подобным образом, придем к существованию такой последовательности векторов $\left\{u^s\right\}_{s=1}^{\infty}$, что для каждого натурального $n$ найдется номер $s_n$, при котором верно неравенство

$$d_r\left(K, \operatorname{cone}\{e^1,e^2,...,e^m,u^1,u^2,...,u^s\}\right) < \frac{1}{n}, \quad s = s_n, s_n+1, ... \tag{5.7}$$

Введем конусы

$$C_s = \operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^s\}, \quad s = 1, 2, ...$$

Очевидно, $C_s \subset C_{s+1} \subset K$, $s = 1, 2, ...$ Кроме того, в соответствии с неравенством (5.7) для любого $n$ существует номер $s_n$, при котором справедливы неравенства

$$d_r\left(K, C_s\right) < \frac{1}{n}, \quad s = s_n, s_n+1, ...$$

Отсюда сразу следует, что для любой точки $z \in \operatorname{int}\widehat{K}$, где $\widehat{K} = K \cap U_r(0_m)$, найдется такой номер $s_0$, что включение $z \in C_s$ будет выполнено для всех $s = s_0, s_0+1, ...$

Перейдем к доказательству сходимости (5.6) недоминируемых множеств. Если $y^* \in Y$ и $y^* \in \operatorname{Ndom} Y$, то по определению множества недоминируемых точек найдется точка $y \in Y$, для которой $y - y^* \in K$. Отсюда, используя условие теоремы о $K$-ограниченности множества $Y$, получаем $y - y^* \in \widehat{K}$. Так как $K$ — открытый конус, то можно считать, что $z = y - y^* \in \operatorname{int}\widehat{K}$ (в противном случае, в качестве такой внутренней точки $z$ можно взять, например, $0.5(y - y^*) \in \operatorname{int}\widehat{K}$). Тогда, как указано выше, существует



такой номер $s_0$, что включение $z = y - y^* \in C_s$ будет выполнено для всех номеров $s = s_0, s_0+1, ...$ Это влечет $y^* \notin \operatorname{Ndom}_{\succ_s} Y$ для всех указанных $s$. Поэтому всякая точка множества $Y$, не принадлежащая множеству $\operatorname{Ndom} Y$, не может являться предельной точкой последовательности множеств $\operatorname{Ndom}_{\succ_s} Y$, $s = 1, 2, ...$

С другой стороны, любая точка из $\operatorname{N dom} Y$ заведомо принадлежит указанному пределу последовательности множеств, так как включения $C_s \subset C_{s+1} \subset K$ влекут $\operatorname{Ndom} Y \subset \operatorname{Ndom}_{\succ_s} Y$ при всех $s = 1, 2, ...$

Тем самым, соотношение (5.6), а вместе с ним и теорема 5.2 доказаны.⮛

**3. Случай конечного множества возможных оценок**. Когда множество возможных векторов состоит из конечного числа элементов, для точного определения множества недоминируемых векторов (с конусным отношением, у которого конус $K$ — открытый) достаточно располагать лишь определенным конечным набором информации об относительной важности критериев. Об этом свидетельствует следующая ниже теорема. Она имеет важное значение в рамках подхода, развиваемого в данной книге, поскольку теоретически обосновывает исключительную значимость теории относительной важности критериев в вопросах построения множества недоминируемых векторов (недоминируемых решений). В соответствии с этой теоремой, для задач многокритериального выбора определенного класса, используя лишь информацию об относительной важности критериев, можно точно найти множество недоминируемых векторов (и недоминируемых решений).

**Теорема 5.3.** *Если дополнительно к предположениям теоремы* 5.2 *добавить, что множество возможных векторов $Y$ — конечное*[1]), *то существует такой конечный набор $p$ векторов $\left\{u^i\right\}_{i=1}^{p} \subset N^m$ с рациональными компонентами, что*

$$\operatorname{Ndom} Y = \operatorname{Ndom}_{\succ_p} Y,$$

*где $\succ_p$ конусное отношение с выпуклым конусом* $\operatorname{cone}\{e^1, e^2, ..., e^m, u^1, u^2, ..., u^p\}$.

[1]) При этом $K$-ограниченность множества возможных векторов можно не предполагать, так как конечное множество ограничено, а значит и $K$-ограничено.

⮙ Пусть множество допустимых векторов $Y$ — конечно и имеет вид $Y = \{y^1, y^2, ..., y^N\}$. Для каждого $y^i \in Y$ введем конечное множество

$$Z_i = \{z \in Y \mid \text{существует такой } y \in Y, \text{ что } z = y - y^i \in K\}, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Благодаря тому, что $K$ — открытое множество, найдется номер $s_i$, для которого $Z_i \subset C_s$ при всех $s = s_i, s_i + 1, ...,$ где $C_s$ — конусы, введенные в ходе доказательства теоремы 5.2. Положим $p = \max\{s_1, s_2, ..., s_N\}$. Для этого номера в силу вложенности конусов $C_s \subset C_{s+1}$, $s = 1, 2, ...,$ имеем

$$Z_i \subset C_p \text{ для всех } i = 1, 2, ..., N.$$

Выберем два произвольных вектора $y^i, y^j \in Y$. Если имеет место включение $y^j - y^i \in K$, то выполняется $y^j - y^i \in Z_i \subset C_p$, а значит и $y^j - y^i \in C_p$. Обратно, если верно включение $y^j - y^i \in C_p$, то в силу вложенности $C_p \subset K$ выполнено включение $y^j - y^i \in K$. Таким образом, истинна эквивалентность

$$y^j - y^i \in K \ \Leftrightarrow \ y^j - y^i \in C_p,$$

которая устанавливает равенство конусных отношений с конусами $K$ и $C_p$. ⮛

# Глава 6

# МЕТОДОЛОГИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

В этой главе после краткого предварительного рассмотрения вопросов, связанных с процессом принятия решения человеком, излагается метод последовательного сужения множества Парето (области компромиссов) на основе количественной информации об относительной важности критериев. Теоретические предпосылки применения этого метода были разработаны в предыдущих главах, а здесь дается его описание без математических подробностей и приводятся некоторые рекомендации по применению. Кроме того, изучается возможность комбинирования этого метода с методом целевого программирования и методом достижимых целей.

## 6.1. Как принимает решение человек?

**1. Психические составляющие процесса принятия решений**. В процессе решения выделяют стадии *поиска*, *принятия* и *реализации* решения.

*Принятие решений* — волевой акт формирования последовательности действий, ведущих к достижению цели на основе преобразования исходной информации в ситуации неопределенности. Основные этапы процесса принятия решений включают *информационную подготовку решений* и собственно *процедуру принятия решений* — формирование и сопоставление вариантов, выбор, построение программы действий.

Принятие решений с одной стороны может выступать как особая форма мыслительной деятельности (например, управленческое решение), с другой — как один из этапов мыслительного действия при решении любых задач. Область применения этого понятия чрезвычайно широка. В этой книге под *принятием решений* обычно понимается особый процесс человеческой деятельности, направленный на выбор наилучшего варианта действий.

Процесс принятия решений обеспечивается деятельностью *интеллекта*, который складывается в основном из совместной работы *памяти*, *внимания* и *мышления*.

Память связывает прошлое субъекта с его настоящим и будущим и представляет собой особого рода процессы организации и сохранения прошлого опыта, позволяющие повторно использовать этот опыт в деятельности человека или же дающие возможность возврата в сферу сознания. Память лежит в основе любого психического явления. Собственно благодаря памяти существует как таковая личность, ее отношения, навыки, привычки, надежды, желания и притязания.

В зависимости от времени сохранения различают несколько видов памяти — *мгновенную* или *сенсорную* (обеспечивает удержание информации в течение срока менее одной секунды), *кратковременную* (время сохранения — до 30 сек.), *оперативную* (время сохранения информации до нескольких минут) и *долговременную*, которая способна удерживать информацию от нескольких часов до десятилетий. По мнению психологов, именно с оперативной памятью человека прежде всего связаны процессы принятия решений, поскольку наиболее типичным для оперативной памяти является удержание материала для использования его именно в процессе принятия решений. Оперативная память тесно связана с долговременной и опирается на способы запоминания и различные приемы, выработанные в других видах деятельности. В свою очередь, долговременная память использует приемы и способы запоминания, сложившиеся внутри оперативной памяти. Между этими видами памяти существует самая тесная связь и в отношении циркуляции информации — оперативная память использует часть информации, хранящейся в долговременной памяти и, с другой стороны, она сама постоянно передает в долговременную память какую-то часть новой информации.

Любопытно, что в оперативной памяти может храниться лишь очень ограниченное количество информации — не более $7 \pm 2$ единиц материала, которых называют чанками (от английского слова chunk). Этот факт составляет содержание так называемого *закона Дж. Миллера* по имени психолога, который в 1956 году на основе экспериментальных данных опубликовал свою знаменитую статью «о магическом числе $7 \pm 2$» (см. [14]).

Заметное влияние на постановку проблемы памяти оказала аналогия между этапами переработки информации человеком и структурными блоками компьютера. Следует, однако, заметить, что при таком сравнении функциональная структура памяти человека обнаруживает значительно большую гибкость по сравнению с компьютером.

Следующий компонент интеллекта — *внимание*, которое понимают как сосредоточенность деятельности субъекта в данный



момент времени на каком-то идеальном или реальном объекте, т. е. предмете, событии, образе, рассуждении и т. п. Внимание — это динамическая сторона сознания, характеризующая степень его направленности на объект и сосредоточения на нем с целью обеспечения адекватного отражения в течение времени, необходимого для выполнения определенного акта деятельности (например, принятия решения). Внимание обеспечивает индивиду возможность сосредоточенности и направленности сознания на объекты, которые он воспринимает в ходе той или иной деятельности. Концентрация внимания позволяет человеку быстрее и качественнее выполнять ту или иную работу. С другой стороны, отсутствие должного внимания затрудняет восприятие нового, усложняет процесс обучения человека. Как известно, отсутствие внимания пагубным образом сказывается, например, на выполнении различного рода вычислительных операций: достаточно лишь одной ошибки для того, чтобы в итоге получить неверный результат.

*Мышление* в понимании психологов — это процесс познавательной деятельности человека, обеспечивающий организацию и переработку информации; это — анализ, синтез, а также обобщение условий и требований решаемой задачи и способов ее решения. Только с помощью развитого мышления человек получает возможность преодолевать пространственную ограниченность восприятия и может устремляться мыслью в необозримые дали макро- и микромира. При этом снимается и временная ограниченность восприятия — возникает свободное мысленное перемещение вдоль временной оси от седой древности к неопределенному будущему.

Мышление активизируется при решении любой задачи, возникающей перед человеком, коль скоро она актуальна, не имеет готового решения, и мощный мотив побуждает человека искать выход из создавшегося положения. Непосредственным толчком к развертыванию мыслительного процесса служит возникновение, осознание задачи. Следующий этап обычно связан с задержкой импульсивно возникающих реакций. Такая задержка создает паузу, необходимую для ориентировки в ее условиях, анализа компонентов, выделения наиболее существенных и соотнесения их друг с другом. Ключевой этап мышления связан с выбором одного из вариантов и формирования общей схемы решения.

Мышление включает произвольные и непроизвольные составляющие. В качестве непроизвольных могут выступать ассоциации, приводящие к образованию неуправляемых связей, которые с одной стороны определяют некоторую стереотипность, с другой —

могут способствовать появлению оригинальных и плодотворных в свете решаемой задачи идей и гипотез. Мышление характерно единством осознанного и неосознанного. Следует отметить, что большую роль в мыслительной деятельности играют эмоции, обеспечивающие управление поиском решения задачи.

Различают следующие виды мышления: наглядно-образное, словесно-образное, словесно-логическое, и др. Считается установленным, что мышление словесно-логическое является наиболее поздним продуктом развития мышления индивида и что переход от наглядного к абстрактному мышлению составляет одну из линий этого развития. Кроме того, психологи выделяют следующие в определенном плане противоположные пары типов мышления — теоретическое и практическое (эмпирическое), логическое (аналитическое) и интуитивное, реалистическое и аутистическое, связанной с уходом от действительности во внутренние переживания и др.

**2. Стратегии принятия решений человеком в многокритериальной среде**. Во многих ситуациях, связанных с выбором, результат выбора невозможно оценить только в одной шкале, например, в деньгах или времени. Правда, по этому поводу, как известно, существует расхожая поговорка «время — деньги», которая подразумевает, по крайней мере, теоретическую возможность выражения единиц времени в денежных единицах и, тем самым, принципиальную сводимость одной шкалы к другой. Но в противовес указанной имеется и такая поговорка — «не хлебом единым». Последняя, на взгляд автора, утверждает факт многокритериальности той среды, в которой живет человек, принципиальную несводимость духовного к материальному, а значит невозможность выражения в единой шкале многого из того, что связано с человеком.

Процитированные поговорки можно рассматривать как концентрированное выражение двух принципиально различных позиций, отражающих в определенном плане противоположные точки зрения на данный предмет. В соответствии с первой точкой зрения существует некий единый показатель или критерий, в терминах которого могут быть измерены все другие качества. Согласно второй — подобного показателя не существует в принципе. При этом чисто логическим путем, умозрительно ни одна из этих позиций, по-видимому, не может быть доказана или опровергнута, поэтому они обе имеют право на существование. Но вторая («не хлебом единым») более реалистична и жизнеспособна, поскольку знание лишь того отвлеченного факта, что все можно выразить в единой шкале, в практике принятия решений мало что



дает — ведь нужно уметь реализовать эту точку зрения. Другими словами, необходимо научиться выполнять указанное сведение к единой шкале (на языке многокритериальной оптимизации это означает — уметь производить *скаляризацию* многокритериальной задачи), а его выполнение есть не что иное, как определенный этап решения исходной по существу многокритериальной задачи.

Многокритериальные задачи принятия решений представляют собой исключительно сложный класс задач интеллектуальной деятельности человека. Наличие нескольких критериев усиливает нагрузку на ограниченную естественными пределами оперативную память человека, делает задачу, стоящую перед человеком, более неопределенной, требует высокой концентрации внимания и нередко — нестандартного мышления.

К настоящему времени еще нет полной картины того, каким образом и при помощи каких механизмов человек осуществляет выбор в многокритериальной среде. Существуют лишь определенные подходы и варианты предложений решения этих сложных вопросов. При этом они нередко в чем-то противоречат друг другу и в совокупности явно не исчерпывают все возможные способы выбора. Считается, что одной из наиболее типичных черт поведения индивида в ходе решения задачи выбора является расчленение (декомпозиция) исходной проблемы на множество более простых промежуточных задач.

Когда имеются всего два возможных варианта (решения), стратегии поведения человека в условиях многокритериальной среды в этом простейшем случае, можно разделить на два класса:

– стратегия компенсации,
– стратегия исключения.

*Стратегия компенсации* соответствует такой линии поведения человека, при которой низкие показатели по одному критерию (или сразу по нескольким критериям) искупаются (компенсируются) высоким показателем по другому критерию (или одновременно по некоторым другим критериям). Типичный пример выбора при использовании стратегии компенсации — покупка автомобиля, когда невысокая экономичность (т. е. большой расход горючего) может окупаться стильным видом или престижной маркой автомобиля. Другой пример подобного рода — приобретение дома с не совсем удачной планировкой комнат и несколько завышенной ценой, но в замечательном районе парковой зоны, расположенном не слишком далеко от места работы.

*Стратегия исключения* (или *некомпенсирующая стратегия*) состоит в удалении (исключении) из списка имеющихся возможных вариантов тех, которые заведомо не удовлетворяют по какому-то одному или же сразу по нескольким критериям одновременно. Например, при покупке автомобиля или дома покупатель, пользуясь некомпенсирующей стратегией, сразу исключает такие варианты, которые выходят за пределы его финансовых возможностей. Еще один характерный пример некомпенсирующей стратегии, связанный с покупкой автомобиля, — это такая ситуация, когда внимание покупателя сосредотачивается только на моделях с автоматической коробкой передач, а все машины с ручной передачей сразу исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Результаты экспериментальных исследований показывают, что при решении многокритериальных задач с более чем двумя возможными решениями, человек обычно не придерживается лишь одной линии поведения. Он, как правило, определенным образом комбинирует указанные стратегии. Такого рода фактический материал позволил некоторым авторам выдвинуть теории человеческого поведения в процессе принятия решений [9]. Например, в соответствии с *теорией поиска доминантной структуры* человек при выборе лучшего варианта из нескольких сначала как бы окидывает взглядом все имеющиеся возможные решения и старается найти лучшее, основываясь лишь на первом впечатлении. После этого он попарно сравнивает выделенное решение со всеми остальными. Если в результате такого сравнения выбранное решение оказалось предпочтительнее остальных, то процесс выбора закончен. В противном случае то решение, которое при сравнении оказалось лучше выбранного первоначально, становится претендентом на наилучшее решение и именно оно далее сравнивается со всеми остальными возможными решениям, и т. д.

С точки зрения наличия или отсутствия гарантии полученного результата механизмы принятия решений можно разделить на два класса — *точные* (или *аналитические, логические*) и *эвристические* (или *приближенные, интуитивные*) механизмы. Механизмы первого класса характеризуются четким описанием того типа или класса задач принятия решений, в которых их применение гарантированно приводит к положительным результатам (или, по крайней мере, дает возможность избежать принятия заведомо неприемлемых решений). Что касается эвристических механизмов, то они в задачах разного типа могут давать различные с точки зрения удовлетворительности результаты. При этом точное разделение всех возможных задач на две группы, в одной из которых данный эвристический механизм работает хорошо, а в другой — его применять не стоит, осуществить не удается.



Нередко к точным механизмам и методам принятия решений причисляют все те, которые предполагают использование математического аппарата. С этим нельзя согласиться, поскольку применение языка математики для записи некоторого высказывания еще не означает точности самого высказывания! Более того, у людей, не разбирающихся в математических тонкостях, при знакомстве с такими методами или механизмами может возникнуть иллюзия их высокой точности и надежности.

Психологи продолжают заниматься изучением поведения человека при выборе различного рода решений (см. [21]). К настоящему времени сформулирован и изучен целый ряд психологических эффектов, которые человек должен учитывать для осуществления действительно наилучшего выбора. На основе этого материала специалистами предложены (см. [21]) определенные рекомендации, например:

– не позволяйте детализированным сценариям вводить вас в заблуждение,

– по возможности обращайте внимание на так называемую базовую частоту (т. е. на относительную частоту, с которой происходит то или иное событие),

– помните, что шанс не саморегулируется (т. е. после длинной череды неудач совсем необязательно наступит ряд удачных событий, или наоборот),

– не забывайте о регрессе к среднему (когда после сильных отклонений в ту или иную сторону обычно следуют более обычные, средние события).

## 6.2. Метод последовательного сужения множества Парето

**1. Формирование математической модели**. В упрощенной форме процесс принятия решений можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 6.1.

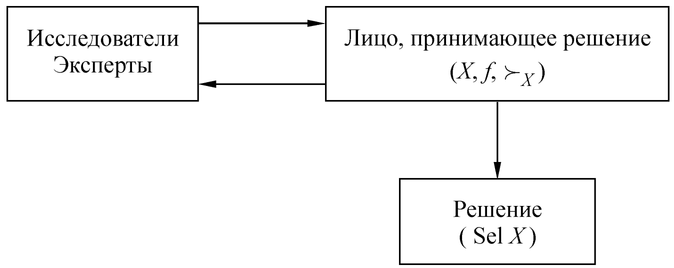


Рис. 6.1.

Собственно выбор решения (решений) осуществляет *лицо, принимающее решение* (ЛПР). Оно же несет всю ответственность за принятое решение. Результат решения задачи многокритериального выбора именуют *множеством выбираемых решений* и обозначают $\mathrm{Sel}\,X$. Нередко в реальных задачах это множество содержит лишь одно решение. Однако можно указать немало ситуаций, когда оно должно включать несколько (а иногда и бесконечное число) элементов. Например, при выборе кандидатов на вакантные места, число выбранных претендентов должно в точности совпадать с числом вакантных мест, которых может быть несколько.

Основными компонентами задачи многокритериального выбора являются*: множество возможных решений X*, *векторный критерий* $f = \left(f_1, f_2, ..., f_m\right)$ и *отношение предпочтения* $\succ_X$, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора.

Для того чтобы решить конкретную задачу выбора, прежде всего, необходимо сформировать математическую модель этой задачи. Другими словами, следует образовать множество возможных решений, векторный критерий и отношение предпочтения, которые наиболее полно и точно отражали бы имеющуюся в наличии реальную ситуацию. Чем более адекватной реальной задаче будет построена математическая модель, тем больше будет шансов получить действительно наилучшее решение.

В построении математической модели вместе с ЛПР активно участвуют как *исследователи* (специалисты в области принятия решений), так и *эксперты* (специалисты в той области, которой принадлежит решаемая задача). Как правило, именно благодаря совместным напряженным усилиям указанных лиц удается построить приемлемую математическую модель, которая, с одной стороны, адекватно отражает конкретную ситуацию и с другой — допускает наилучшее решение за обозримое время. Этот первый этап, на котором происходит формирование математической модели (*этап формализации*), невозможно запрограммировать заранее. Здесь многое зависит от опыта и интуиции всех участвующих сторон (не зря существует такое словосочетание как *искусство формализации*, отражающее исключительную сложность этого этапа).

Множество возможных решений может состоять из конечного числа элементов, но оно может оказаться и бесконечным. Конечное множество обычно задается перечислением всех его элементов. Что касается бесконечного множества возможных решений, то его можно задавать различными способами (например, в виде множества решений некоторой системы уравнений или неравенств). Дальнейшее решение задачи выбора в сильной степени зависит от способа задания множества возможных решений. Некоторые из способов задания могут оказаться не слишком удобными для последующего оперирования с множествами. В этом вопросе свое слово должен сказать специалист по принятию решений.



Перейдем к критериям. Все участвующие в задаче функции $f_1, f_2, ..., f_m$, во-первых, должны быть числовыми и, во-вторых, ЛПР должно быть заинтересовано в максимизации каждой из них (см. аксиому 3 в разд. 1.4). Когда значения одного или сразу нескольких критериев измеряются не в количественной, а лишь в качественной шкале, опыт показывает, что в таких случаях все-таки удается тем или иным способом перейти к числовым значениям, вводя, например, балльную шкалу. Так, например, всем хорошо известна четырех балльная шкала (2, 3, 4, 5) для оценки знаний учащихся в России. Подобного рода шкалы существуют для оценки выступления спортсменов — гимнастов и фигуристов. Немало примеров введения и дальнейшего использования количественных шкал для измерения качественных характеристик можно встретить в психологии. С вопросами введения специальной девяти балльной шкалы и ее обоснованием можно ознакомиться в работах Т. Саати [27, 37].

Если какой-то из критериев для ЛПР желательно не максимизировать, а минимизировать, то его в математическую модель следует включить со знаком минус; такой распространенный прием сводит операцию минимизации к операции максимизации. Следует заметить, что критерии, как функции, также можно задавать различными способами. В некоторых случаях важно иметь критерии, которые обладали бы определенными полезными с математической точки зрения свойствами (например, непрерывностью, дифференцируемостью, вогнутостью или выпуклостью). Здесь вновь требуется консультация со специалистом по принятию решений.

Третья компонента задачи многокритериального выбора — отношение предпочтения — наиболее трудно формализуемая. Как правило, полностью построить отношение предпочтения, которым ЛПР пользуется в процессе выбора, невозможно. Об этом отношении удается получить лишь некоторые фрагментарные сведения. Среди этих сведений обязательно должна быть информация о том, что оно принадлежит определенному классу, который ограничен специальными требованиями. Напомним, что предлагаемый в данной книге подход к решению задач многокритериального выбора предполагает, что используемое ЛПР отношение предпочтения должно удовлетворять четырем аксиомам 1–4 (см. главы 1–2), которые описывают в определенном смысле последовательное (рациональное) поведение субъекта в процессе принятия решений.

Согласно *аксиоме* 1, если какое-то решение не выбирается из пары, то оно не может быть выбрано и из всего множества возможных решений. Это требование выглядит вполне разумным и не слишком обременительным, однако, в некоторых практически значимых случаях оно не может быть выполнено. Подтверждение тому — следующий простой пример. Предположим, что на два вакантных места претендуют три кандидата, причем при попарном сравнении оказалось, что первый кандидат лучше второго и третьего, а второй лучше третьего. Поскольку необходимо заполнить оба вакантных места, то ЛПР вынуждено будет остановить свой выбор на первом и втором кандидатах. Тем самым, второй кандидат войдет в множество выбираемых решений, не смотря на то, что для него существует лучшее решение — первый кандидат.

Следующая *аксиома* 2 устанавливает принципиальную возможность сравнения лицом, принимающим решение, любых векторов критериального пространства: для произвольных двух векторов $y', y'' \in R^m$ может реализоваться одна (и только одна) из следующих трех возможностей:

– $y'$ предпочтительнее $y''$; при этом пишут $y' \succ y''$ (в этом случае из двух данных векторов ЛПР выбирает первый и не выбирает второй),

– $y''$ предпочтительнее $y'$; в таком случае пишут $y'' \succ y'$ (ЛПР из двух данных выбирает второй вектор),

– не выполняется ни соотношение $y' \succ y''$, ни соотношение $y'' \succ y'$ (т. е. из данных двух векторов ЛПР не в состоянии отдать предпочтение ни одному из этих векторов).

При этом согласно аксиоме 2 результаты попарного сравнения должны подчиняться так называемому *свойству транзитивности*, согласно которому для любой тройки векторов $y$, $y'$, $y''$, удовлетворяющих соотношениям $y \succ y'$ и $y' \succ y''$, всегда имеет место соотношение $y \succ y''$. Это свойство выражает «последовательность» (логичность или рациональность) поведения ЛПР в процессе выбора. Несмотря на естественность этого требования, как утверждают психологи, человек в своем поведении не всегда следует свойству транзитивности и при сравнении трех решений, когда первое решение лучше второго, а второе — лучше третьего, из первого и третьего вполне может выбрать третье.



Смысл следующей *аксиомы* 3 заключается в том, что ЛПР заинтересовано в максимизации значений каждого из критериев $f_i$, $i = 1, 2, ..., m$, при условии сохранения значений всех остальных критериев. Здесь, видимо, нет особой нужды подробно объяснять, что и это требование в каких-то ситуациях может не выполняться (если, например, ЛПР заинтересовано в удержании значения какого-то критерия в определенных промежуточных пределах).

Последняя *аксиома* 4 состоит в инвариантности (сохранении) для любых двух векторов $y'$, $y''$ критериального пространства $R^m$ соотношения $y' \succ y''$ при одновременном увеличении (или уменьшении) всех компонент данных двух векторов в одно и то же число раз (свойство однородности), а также при добавлении к этим векторам одного и того же произвольного вектора критериального пространства (свойство аддитивности). Например, пусть справедливо соотношение $y' = (y_1', y_2', ..., y_m') \succ (y_1'', y_2'', ..., y_m'') = y''$. Тогда в соответствии с аксиомой 4 для произвольного положительного числа $\alpha$ должно выполняться соотношение $\alpha y' = (\alpha y_1', \alpha y_2', ..., \alpha y_m') \succ (\alpha y_1'', \alpha y_2'', ..., \alpha y_m'') = \alpha y''$, а для любого вектора $c = (c_1, c_2, ..., c_m)$ — соотношение $y' + c = (y_1' + c_1, y_2' + c_2, ..., y_m' + c_m) \succ (y_1'' + c_1, y_2'' + c_2, ..., y_m'' + c_m) = y'' + c$. В тех случаях, когда отношение предпочтения, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, не удовлетворяет хотя бы одной из упомянутых четырех аксиом, применение излагаемого ниже подхода не гарантирует получение наилучшего результата.

Если же проверить выполнение всех указанных аксиом в какой-то конкретной ситуации не удается, то остается лишь надеяться, что применение данного подхода не приведет к заведомо неудовлетворительному решению.

**2. Выявление информации об относительной важности критериев**. Основная идея предлагаемого подхода состоит в использовании информации об относительной важности критериев для исключения неприемлемых парето-оптимальных решений. Существуют по меньшей мере два способа получения такого рода информации:

– на основе анализа решений, ранее принимавшихся данным ЛПР,

– в результате прямого пороса ЛПР.

Для того чтобы воспользоваться первым способом, нужно располагать сведениями о поведении данного ЛПР в прошлом при решении аналогичных задач выбора с имеющимся набором критериев $f_1, f_2, ..., f_m$. Если же до этого момента ЛПР не сталкивалось с необходимостью решения таких задач, то остается только второй способ — непосредственный опрос ЛПР.

Перед осуществлением опроса следует ознакомить ЛПР с определением 2.1, в котором идет речь о самой простой ситуации, когда $i$-й критерий (т. е. $f_i$) важнее $j$-го критерия (т. е. $f_j$) с положительными параметрами $w_i^*$ и $w_j^*$. В основе этого определения лежит идея компенсации, упоминавшаяся в предыдущем пункте, а его смысл заключается в том, что всякий раз ради увеличения значения более важного $i$-го критерия на $w_i^*$ единиц ЛПР готово пожертвовать $w_j^*$ единицами по менее важному $j$-му критерию (иначе говоря, потеря в $w_j^*$ единиц по $j$-му критерию всегда может быть компенсирована увеличением на $w_i^*$ единиц значения $i$-го критерия) при условии сохранения значений по всем остальным критериям. При этом положительное число

$$\theta_{ij} = \frac{w_j^*}{w_i^* + w_j^*} \qquad (0 < \theta_{ij} < 1), \tag{6.1}$$

выражающее долю потери относительно суммы потери и прибавки, носит названия *коэффициента относительной важности* $i$-го критерия по сравнению с $j$-м критерием.

Значение этого коэффициента, близкое к единице, свидетельствует о большой степени важности $i$-го критерия по сравнению с $j$-м, поскольку за относительно небольшую добавку по более важному критерию ЛПР готово платить довольно существенной потерей по менее важному критерию. В случае, когда данный коэффициент близок к нулю, указанная степень относительной важности мала, так как здесь ЛПР согласно пойти на потери по менее важному критерию лишь при условии относительно большой прибавки по более важному критерию.

Следует, однако, заметить, что сказанное не носит абсолютного характера, так как величина коэффициента относительной важности в сильной степени зависит от единиц, в которых измеряются значения сравниваемых по важности критериев (см. разд. 2.4). Вполне возможна ситуация, когда два абсолютно одинаковых (с точки зрения принятия решений) ЛПР при решении одной и той же задачи пользуются разными коэффициентами относительной важности по той простой причине, что они применяют различные единицы при измерении значений сравниваемых по важности критериев.



Сказанное выше свидетельствует о том, что конкретная величина коэффициента относительной важности зависит от единиц, в которых измеряются значения критериев. При переходе к другим единицам (в пределах той же самой шкалы!) — коэффициенты относительной важности, как правило, меняются. Например, если речь идет о прибыли, и она выражается в денежных единицах, то коэффициенты относительной важности, соответствующие двум идентичным ЛПР, но пользующихся при расчете различной валютой (рублями и долларами), будут различными.

Если в результате опроса ЛПР выясняется, что оно готово за некоторую добавку по $i$-у критерию пожертвовать определенным количеством по $j$-у критерию, то такое положение на основании определения 2.4 свидетельствует о большей важности $i$-го критерия по сравнению с $j$-м. Остается определить степень этой важности, т. е. найти конкретное значение коэффициента относительной важности. При определении этого коэффициента следует иметь в виду, что чем больше он окажется, тем более содержательной будет информация об относительной важности критериев и, тем самым, на большую степень сужения множества Парето (области компромиссов) можно рассчитывать. Поэтому у ЛПР необходимо стремиться выяснить, каким максимальным возможным количеством $w_j^*$ по $j$-му критерию оно готово пожертвовать ради получения некоторой фиксированной прибавки (например, в одну единицу: $w_i^* = 1$). На основе полученных чисел $w_i^*$ и $w_j^*$ по формуле (6.1) вычисляется коэффициент относительной важности $\theta_{ij}$. Этот коэффициент будет далее использоваться для пересчета менее важного критерия.

**3. Метод последовательного сужения множества Парето**. Опишем общую схему *метода последовательно сужения множества Парето* на основе количественной информации об относительной важности критериев. В его основу положена стратегия исключения, которая упоминалась в разд. 6.1.

*Первый этап* этого метода состоит в выявлении информации об относительной важности критериев. Наиболее распространенный путь выявления этой информации — прямой опрос ЛПР. В результате выявления должен быть получен коэффициент относительной важности критериев $\theta_{ij}$.

*Второй этап* осуществляется без привлечения ЛПР. В соответствии с теоремой 2.5 необходимо менее важный $j$-й критерий в общем списке критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$ заменить новым, вычисленным по простой формуле $\theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j$. Затем следует найти множество Парето относительно нового векторного критерия.

На этом этапе могут возникнуть определенные вычислительные трудности, если множество возможных решений не является конечным. Если же число возможных решений конечно, то для нахождения множества Парето можно использовать алгоритм, о котором упоминается в п. 6 разд. 1.4.

Построенное с использованием нового векторного критерия множество Парето представляет собой оценку сверху для искомого множества выбираемых решений. Проще говоря, это означает, что дальнейший выбор следует производить в пределах найденного множества Парето. Поэтому после его отыскания на *третьем этапе* оно предъявляется для анализа ЛПР. В случае если ЛПР сочтет его приемлемым (по размерам) для окончательного выбора, то процесс принятия решений заканчивается. В противном случае (т. е. когда указанное множество «слишком широкое») необходимо попытаться получить дополнительную информацию об относительной важности критериев и затем аналогичным образом использовать ее для дальнейшего сужения области поиска множества выбираемых решений. В этом случае при формировании нового векторного критерия придется использовать набор информации об относительной важности критериев, состоящий из двух сообщений и прежде чем сделать это, необходимо убедиться в непротиворечивости данного набора из двух сообщений (по этому поводу см. разд. 4.2). Заметим, что в общем случае такая проверка сводится к решению определенной задачи линейного программирования.

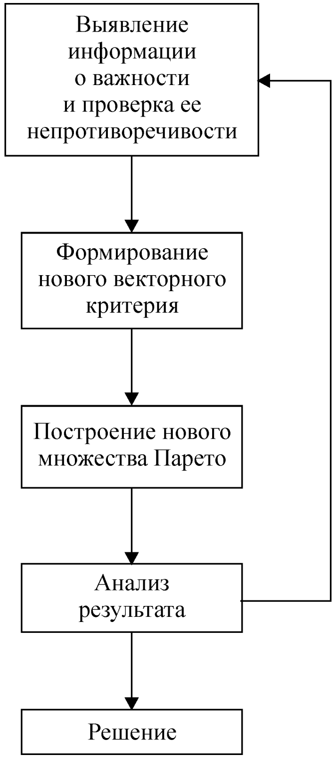

Рис. 6.2.

В результате последовательного выполнения указанных действий образуется циклический процесс, схема которого изображена на рис. 6.2. Циклы в нем повторяются до тех пор, пока не будет получен результат, приемлемый для ЛПР. Этим результатом является очередное множество Парето, размеры которого, по мнению ЛПР, соответствуют размерам множества выбираемых решений Sel $X$.



Теоретическое обоснование описанного метода последовательного сужения множества Парето на основе количественной информации об относительной важности критериев приведено в пятой главе. Доказанная в ней теорема 5.3 утверждает, что во многих случаях, когда множество возможных векторов состоит из конечного числа элементов (это условие заведомо выполняется, если конечным является множество возможных решений), на основе конечного набора информации об относительной важности критериев, можно точно построить неизвестное множество недоминируемых векторов (а значит, и множество недоминируемых решений). К сожалению, этот результат не является конструктивным в том смысле, что в нем не указывается, какой именно набор информации следует при этом использовать. Неизвестно также, какое количество сообщений об относительной важности при этом нужно иметь. Решение этих вопросов в сильной степени зависит от конкретного вида множества возможных решений и участвующих в задаче выбора критериев. Тем не менее, эта теорема имеет важное теоретическое значение, поскольку она обосновывает описанный метод последовательного сужения множества Парето. По сути дела она утверждает, что *при решении задач многокритериального выбора следует лишь научиться выявлять информацию об относительной важности критериев и умело ее использовать*; *на основе только такой информации можно полностью и точно построить множество недоминируемых решений для произвольной задачи многокритериального выбора из достаточно широкого класса*, в которой множество возможных решений конечно. Если же указанное множество не является конечным, то с помощью одной информации об относительной важности можно получить сколь угодно точное приближение к искомому множеству недоминируемых решений (см. теорему 5.2). Аналогичное утверждение справедливо не только для решений, но и для векторов.

Иногда за прибавку по какому-то одному очень важному критерию ЛПР согласно пойти на потери сразу по нескольким критериям. В других случаях потеря по некоторому менее важному критерию не может быть компенсирована прибавкой лишь по одному более важному критерию, а только одновременно по нескольким критериям. В общем случае могут существовать две группы критериев, номера которых принадлежат непересекающимся множествам $A$ и $B$, и такие, что за прибавки в размере $w_i^*$ единиц по всем более важным критериям $f_i$ (для которых $i \in A$), ЛПР согласно потерять $w_j^*$ единиц по всем менее важным критериям $f_j$

(для которых $j \in B$). В соответствии с определением 3.3 это означает, что *группа критериев $A$ важнее группы критериев $B$* с двумя наборами положительных параметров $w_i^*$ и $w_j^*$ для всех $i \in A$ и всех $j \in B$. При этом степень важности одной группы по сравнению с другой оценивается набором коэффициентов относительной важности $\theta_{ij}$ для всех указанных $i$ и $j$, определяемых той же формулой (6.1), что и в случае двух критериев.

При выявлении информации об относительной важности для двух групп критериев следует учитывать следующее обстоятельство. В теореме 3.1 утверждается, что из бóльшей важности группы критериев $A$ по сравнению с группой $B$ вытекает бóльшая важность более широкой, чем $A$, группы по сравнению с более узкой группой, чем $B$. Грубо говоря, более важную группу всегда можно расширить, а менее важную — сузить. В силу сказанного, при выявлении информации об относительной важности одной группы по сравнению с другой всегда следует стремиться к тому, чтобы более важная группа была как можно уже, а менее важная — как можно шире. Тогда информация об относительной важности одной группы критериев по сравнению с другой будет наиболее содержательной, и последующее использование этой информации может привести к существенному сужению области компромиссов. В этом смысле самым лучшим является вариант, когда какой-то один критерий оказывается важнее группы всех остальных критериев.

Пересчет векторного критерия на основе информации об относительной важности для двух групп критериев производится с помощью теоремы 3.3. Согласно этой теореме из исходного набора критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$ прежде всего удаляются все менее важные критерии, т. е. те, номера которых принадлежат множеству $B$. Затем к оставшимся необходимо добавить новые критерии вида $\theta_{ij} f_i + (1 - \theta_{ij}) f_j$, число которых совпадает с числом коэффициентов относительной важности (оно равно произведению чисел элементов множества $A$ и множества $B$).

Нетрудно понять, что общее число новых критериев при этом может оказаться значительно больше числа первоначального набора критериев. Например, если множество $A$ состоит из двух элементов, а $B$ — из трех, то число коэффициентов относительной важности равно 6. Три менее важных критерия должны быть удалены, но при этом шесть новых следует добавить. В итоге общее число критериев увеличится на 3.

В случае, когда множество более важных критериев состоит в точности из одного элемента, увеличения количества критериев при учете информации об относительной важности не произойдет (см. следствие 3.1), т. е. число новых критериев будет равно числу старых критериев.



**4. Использование набора информации об относительной важности критериев**. Описанный выше метод последовательного сужения на основе информации об относительной важности критериев предполагает одновременный учет сразу нескольких сообщений об относительной важности. В тех случаях, когда приходится учитывать сравнительно простой набор информации, используют процедуру пересчета менее важных критериев и формирование нового критерия с помощью заранее выведенных формул. К подобным «простым» случаям относятся следующие:

– когда имеются два критерия, причем каждый из них оказывается важнее другого (как указано в п. 2 разд. 4.1 для учета этой информации следует дважды воспользоваться результатом теоремы 2.5),

– когда один критерий важнее каждого из двух других в отдельности (в соответствии с теоремой 4.2 в этом случае новый критерий, размерность которого будет на единицу больше исходного, следует формировать по формуле (4.2)),

– когда два критерия по отдельности важнее третьего (тогда для формирования нового векторного критерия следует использовать формулу (4.7)),

– когда один критерий важнее второго, а он, в свою очередь, важнее третьего (здесь можно дважды применить теорему 2.5 — сначала пересчитывается третий критерий, а затем второй; см. п. 1 разд. 4.1),

– когда имеются два произвольных взаимно независимых сообщения (в этом случае дважды применяется теорема 3.3).

К тому же классу «простых» ситуаций относятся следующие:

– когда имеется более двух сообщений, состоящих в том, что каждый из определенного набора критериев важнее одного и того же критерия, не входящего в указанный набор (здесь рекомендуется применить теорему 4.10 с формулами пересчета (4.21)),

– когда имеется произвольное конечное число попарно взаимно независимых сообщений об относительной важности критериев (в таком случае применяется теорема 4.11).

Напомним (см. п. 1 разд. 4.1), что два сообщения об относительной важности критериев, состоящие в том, что группа критериев $A_1$ важнее группы $B_1$ и группа критериев $A_2$ важнее группы $B_2$, являются *взаимно независимыми*, если ни одна пара из указанных четырех множеств номеров не имеет ни одного общего элемента.

Вышеперечисленными ограничиваются все возможные варианты, для которых в главах 2 и 3 были выведены простые формулы пересчета векторного критерия.

Если при реализации метода последовательного сужения множества Парето необходимо учесть набор информации, который не относится ни к одному из перечисленных выше «простых» случаев, то можно воспользоваться так называемым *алгоритмическим подходом*, изложенным в разд. 4.4. Его реализация в случае бесконечного множества возможных векторов $Y$ может натолкнуться на определенные вычислительные трудности, тогда как для конечного $Y$ проблем подобного рода не возникает. В п. 4 указанного раздела описана соответствующая вычислительная процедура, которая при желании может быть легко запрограммирована и использована в той или иной компьютерной среде.

## 6.3. Комбинированные методы

**1. Модифицированный метод целевого программирования.** В основе круга методов, получивших название *целевого программирования* лежит довольно простое эвристическое соображение — стараться в качестве наилучшего выбрать такой возможный вектор, который в критериальном пространстве расположен ближе всех остальных допустимых векторов к некоторому идеальному или же к целому множеству идеальных векторов. При этом в качестве идеального нередко берется вектор, составленный из максимальных значений компонент векторного критерия, а варьирование метрики для измерения расстояния в критериальном пространстве приводит к целому семейству однотипных методов, которые, однако, могут приводить к различным конечным результатам. Для обоснованного выбора той или иной метрики никаких четких рекомендаций не выработано; здесь чаще всего исходят из соображений простоты, а именно, — применяют такую метрику, чтобы получающаяся в итоге экстремальная задача приближения была наиболее простой в вычислительном отношении.

Принято считать, что родоначальниками целевого программирования являются А. Чарнс и В. Купер, которые в 1953 году [36] использовали указанное выше эвристическое соображение для решения многокритериальной задачи линейного программирования. В 1961 году свой метод они изложили в книге [37]. Позже на эту тему были написаны десятки (если не сотни) статей и выпущено несколько книг. Несмотря на отсутствие логического фундамента (его заменяет указанное эвристическое соображение)



методы целевого программирования широко используются при решении различных прикладных задач, в которых присутствует несколько критериев.

Опишем в общем виде метод целевого программирования. Пусть имеется набор критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$, каждый из которых желательно максимизировать на множестве возможных решений $X$. В соответствии с методологией целевого программирования будем считать, что в критериальном пространстве $R^m$ задано непустое множество $U$, которое обычно называют *множеством идеальных* (*наилучших* или *утопических*) *векторов*. При этом обычно считается, что это множество не достижимо, т. е. имеет место равенство $U \cap Y = \varnothing$, где $Y$ означает множество возможных векторов. Кроме того, на критериальном пространстве должна быть задана *метрика*, т. е. такая числовая функция $\rho = \rho(y, z)$, которая каждой паре векторов $y$, $z$ критериального пространства $R^m$ сопоставляет неотрицательное число, называемое *расстоянием* между векторами $y$ и $z$. Метрика для всех векторов $w$, $y$, $z$ должна удовлетворять следующим аксиомам:

– $\rho(y, z) \geqq 0$; $\rho(y, z) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = z$,
– $\rho(y, z) = \rho(z, y)$,
– $\rho(w, z) \leqq \rho(w, y) + \rho(y, z)$.

Оптимальным (наилучшим или наиболее удовлетворительным) объявляется такое решение $x^* \in X$, для которого выполнено равенство

$$\inf_{y\in U} \rho\Big(f(x^*),\, y\Big) = \min_{x\in X} \inf_{y\in U} \rho\Big(f(x),\, y\Big),$$

означающее, что оценка $f(x^*)$, соответствующая наилучшему решению $x^*$, должна быть расположена как можно ближе к множеству идеальных оценок.

Множество идеальных оценок $U$ может состоять и из одного элемента. Нередко таким единственным элементом является вектор, составленный из максимальных значений критериев:

$$U = \{u\},\;\; u = \Big(\max_{x\in X} f_1(x), \ldots, \max_{x\in X} f_m(x)\Big).$$

Один из наиболее простых способов образования идеального множества восходит к Чарнсу и Куперу и состоит в задании его при помощи линейных неравенств и уравнений:

$$y_i = f_i(x) \geqq \alpha_i \quad \text{для всех } i \in I_1,$$

$$y_i = f_i(x) \ = \beta_i \quad \text{для всех } i \in I_2,$$

где множества $I_1$ и $I_2$ образуют разбиение множества номеров критериев $I$, а числа $\alpha_i$ и $\beta_i$ определяют некоторые «пороговые» (предельно низкие) значения критериев.

Необходимо сказать, что в общем случае формирование целевого множества многокритериальной задачи, если оно естественным образом не диктуется условиями конкретной задачи, может составить непростую задачу.

Кроме того, есть еще одна проблема целевого программирования — выбор метрики. Чаще всего при решении прикладных задач используют какую-либо метрику из следующего параметрического семейства

$$\rho_a^s(y, z) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^a |y_i - z_i|^s\right)^{1/s},$$

где $s \geqq 1$ и

$$a^s \in \left\{ a^s = (a_1^s, \ldots, a_m^s) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} a_i^s = 1,\ a_i^s > 0 \ \text{ для всех } \ i = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

Здесь может быть и $s = +\infty$; в этом случае получаем так называемую *чебышевскую* (*равномерную*) *метрику*

$$\rho_a^{+\infty}(y, z) = \max_{i=1,2,\ldots,m} a_i^s |y_i - z_i|.$$

Чарнс и Купер использовали указанную метрику в частном случае $s = 1$; а в работе [30] эта метрика применяется при $s = 2$.

Варьируя вектор параметров $a^s$, стремятся учесть «неравноценность» критериев, придавая большее значение той компоненте вектора параметров, которая соответствует критерию большей ценности. Разумеется, никаких строгих определений и рассуждений на этот счет не приводится, поэтому все сказанное можно смело относить к типичным эвристическим приемам.

Необходимо отметить, что использование метрики указанного выше параметрического семейства не всегда приводит к парето-оптимальным векторам. На этот счет в литературе имеется достаточное количество примеров. Поэтому в рамках целевого программирования значительное место уделяется нахождению условий, при которых использование той или иной метрики заведомо приводит к парето-оптимальным решениям.



Например (см. [26]), если $u^i \geq \sup_{y \in Y} y_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m$, то точка максимума числовой функции

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^s |u_i - y_i|^s\right)^{1/s} \qquad \text{при} \quad s \in [1, +\infty)$$

на множестве возможных векторов $Y$ всегда является парето-оптимальной.

Перейдем к обсуждению возможности комбинирования целевого программирования с описанным ранее методом последовательного сужения области компромиссов. Эта комбинация автором данной монографии использовалась еще в начале 1990-х годов для решения прикладных экономических задач и была названа *модифицированным целевым программированием*. В соответствии с последним вначале следует выявить всю возможную информацию об относительной важности критериев. В общем случае это может быть целый набор сведений. Далее на основе этого набора необходимо удалить все те возможные векторы, которые не совместимы с имеющейся информацией (т. е. необходимо применить метод последовательного сужения области компромиссов). В результате такого удаления будет получено некоторое подмножество исходного множества Парето, являющееся определенной оценкой сверху для искомого множества выбираемых векторов. Если последнее множество (оценка сверху) оказывается сравнительно широким и больше никакой дополнительной информации об относительной важности критериев для дальнейшего его сужения получить не удается, то в таком случае для завершения процесса поиска наилучшего решения можно применить метод целевого программирования. Разумеется, когда исходное множество возможных решений бесконечно, отыскание указанного подмножества может составить непростую вычислительную задачу. Однако для конечного множества возможных решений описанная процедура легко программируется и может быть реализована с помощью компьютера.

Модифицированный метод целевого программирования в 1991 году был применен автором для решения задачи оптимизации годовой производственной программы энергетического объединения [2]. Множество возможных решений в ней конечно и определялось параметрами имитационной модели, в рамках которой она использовалась. В этой задаче было выделено восемь критериев

– величина издержек,

– величины выбросов первого, второго, третьего и четвертого ингредиентов,

– величина расхода газа,

– величина расхода кислорода,

– величина расхода мазута.

Все они принимают строго положительные значения, и каждый из них необходимо минимизировать. В соответствии с этим начало координат естественно рассматривать как идеальный недостижимый вектор. Из параметрического семейства метрик была выбрана квадратичная, причем минимизировался квадрат расстояния, т. е. функция

$$\rho\left(y, 0_8\right) = \sum_{i=1}^{8} y_i^2.$$

Как видим, все коэффициенты $a_i^s$ были выбраны равными единице, так как информация об относительной важности критериев учитывалась на этапе применения метода последовательного сужения области компромиссов. Информация об относительной важности состояла в том, что первый критерий являлся более важным, чем каждый из всех остальных с одним и тем же коэффициентом относительной важности.

Решение задачи состояло из следующих четырех этапов:

– удаление из множества возможных векторов всех тех, которые не являются парето-оптимальными,

– учет информации об относительной важности критериев (пересчет менее важных критериев и построение с его помощью нового множества парето-оптимальных векторов),

– нормализация оставшихся векторов (т. е. деление всех компонент векторов на максимальные возможные компоненты),

– нахождение наилучшего вектора (того, который следует выбрать) в результате минимизации функции $\rho\,(y, 0_8)$ на оставшемся множестве нормализованных векторов.

**2. Метод достижимых целей при наличии информации об относительной важности критериев**. Метод достижимых целей (МДЦ) был разработан группой сотрудников вычислительного центра РАН [12]. Основой метода является *визуализация* множества возможных (достижимых — по терминологии авторов метода) векторов при сравнительно небольшом числе критериев, т. е. наглядное представление его на дисплее компьютера посредством



двумерных сечений. При этом использование метода предназначено в основном для сложных в вычислительном отношении случаев бесконечного числа возможных решений и векторов.

Один из недостатков метода целевого программирования, изложенного выше, состоит в том, что идеальный вектор (или идеальное множество) задается «вслепую», без учета реальных возможностей. Поэтому достижимые значения показателей, даже наиболее близкие к заданному идеалу, зачастую оказываются далекими от него. Метод достижимых целей направлен на преодоление отмеченного недостатка. В соответствии с этим методом исследователям, экспертам и ЛПР, — всем участвующим в решении задачи принятия решений, — в наглядной, доступной для восприятия форме представляется множество возможных (достижимых) векторов. Среди них они могут выбрать ту или иную компромиссную цель. После этого компьютер находит решение, приводящее к поставленной цели.

Таким образом, применение МДЦ содержит следующие этапы:

– построение множества возможных (достижимых) векторов,
– визуальный анализ полученного множества,
– выбор компромиссного вектора,
– определение решения, соответствующего выбранному вектору.

Остановимся подробнее на втором этапе. Как уже было сказано, множество возможных векторов визуально представляется своими двумерными сечениями (авторы метода называют их *диалоговыми картами решений*). Для того чтобы задать некоторое двумерное сечение многомерного множества, необходимо выбрать те два критерия, значения которых будут демонстрироваться на дисплей компьютера (так называемые *координатные критерии*). Затем следует зафиксировать некоторый набор значений остальных (некоординатных) критериев. Фиксируя различные наборы некоординатных критериев, будем получать соответствующие им двумерные сечения. Аналогичную процедуру можно осуществить для другой пары координатных критериев и т. д. По построенным таким способом двумерным сечениям в случае небольшого числа критериев (в основном, до пяти) можно получить наглядное представление обо всем многомерном множестве возможных оценок для того, чтобы осуществить в нем наилучший выбор.

Рассмотрим подробно случай трех критериев. Здесь имеется один некоординатный критерий. Задавая набор фиксированных значений этого критерия (обычно эти значения распределяют равномерно), получим соответствующую совокупность двумерных сечений, которую данный метод позволяет представить двумя способами — рядом и наложением друг на друга. Наложение сечений дает возможность легко сравнивать их между собой. Расположение этих сечений в ряд оказывается удобным при изучении структуры множества возможных оценок, когда границы двумерных сечений пересекаются.

Если имеется четыре критерия, то к некоординатным следует отнести два из них. В этом случае получится двумерная совокупность значений некоординатных критериев (двумерная сетка, число узлов которой совпадает с произведением числа выбранных значений каждого из некоординатных критериев). Как и в случае трех критериев, двумерные сечения при желании можно наложить друг на друга или представить их в виде двумерной матрицы, соответствующей узлам сетки значений некоординатных критериев. Для более подробного знакомства с представлением многомерных множеств на основе двумерных сечений рекомендуем обратиться к [12].

Теперь обсудим, каким образом МДЦ можно использовать при наличии дополнительной информации об относительной важности критериев в случае, когда множество возможных решений состоит из бесконечного числа элементов (например, задано в виде множества решений некоторой системы линейных неравенств). Для иллюстрации сначала рассмотрим самую простую ситуацию, — когда имеется всего три критерия и первый критерий важнее второго с некоторым коэффициентом относительной важности. Будем считать, что другой информации нет, причем получающееся в результате учета этой информации множество парето-оптимальных векторов бесконечно. Спрашивается, каким образом произвести дальнейшее сужение области поиска или же более того — остановить выбор на каком-то одном из возможных векторов? С этой целью можно по известной формуле $\theta_{12} f_1 + (1 - \theta_{12}) f_2$ пересчитать менее важный второй критерий и, тем самым, образовать новый векторный критерий, в котором первый и третий остались прежними. Именно второй, измененный критерий следует взять в качестве некоординатного и задать определенный ряд его значений для получения соответствующих двумерных сечений. Сравнивая представленные на дисплее сечения, можно получить наглядное представление о структуре множества Парето, соответствующем новому векторному критерию, и попытаться выбрать из этого множества какой-то один определенный (компромиссный) вектор $(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$. Этот



вектор будет соответствовать значению второго (некоординатного) критерия, равному $y_2^*$. Для того чтобы оценить полученный результат с точки зрения исходного второго критерия $f_2$, можно рассмотреть два двумерных сечения, одно их которых отвечает первому некоординатному вектору, когда его значение фиксировано и равно $y_1^*$, а второе — соответствует случаю, когда некоординатным является третий вектор и его значение равно $y_3^*$. Анализируя два последних двумерных сечения, в случае необходимости можно произвести коррекцию выбранного ранее вектора $(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$.

Подобным образом можно пытаться использовать МДЦ при наличии сведений об относительной важности критериев в случае четырех и пяти критериев. При этом ясно, что некоторые трудности применения МДЦ могут состоять в том, что после учета имеющейся информации об относительной важности критериев и пересчета менее важных критериев образуются новые критерии, с которыми работа ЛПР может быть затруднена. Эти измененные критерии уже не имеют прежнего «физического» смысла и с ними следует обращаться особо. Однако, как показывает приведенное выше рассмотрение для случая трех критериев, с такими затруднениями иногда можно успешно справиться.

# Ф. ЭДЖВОРТ И В. ПАРЕТО

## (краткая справка)

Английский экономист Френсис Эджворт, F. Edgeworth, (8.02.1845–13.02.1926) родился в Ирландии и получил образование в области античных и современных языков. В возрасте 17 лет он поступил в Тринити Колледж в Дублине, где изучал французский, немецкий, испанский и итальянский языки. Математику, скорее всего, освоил самостоятельно и всегда считал, что современные методы математики может постичь каждый. Его работы были насыщены математическими понятиями и формулами, уровень которых был выше понимания тех, кто занимался в то время этическими проблемами. Первая публикация — «Новые и старые методы этики» относится к 1877 г., а в 1881 г. он опубликовал работу «Математическая физика: приложения математики в этике». Эта работа, экономическая по своей сути, изобиловала математическими формулами и выглядела как «исчисление экономики». В ней, например, формулировались такие понятия, как «способность к счастью» и «способность к работе». В этой же работе были представлены его оригинальные идеи, основанные на понятии обобщенной функции полезности. К 1885 г. относится его работа «Методы статистики», где были представлены приложения и интерпретация тестов для сравнения средних величин. В 1888 г. Ф. Эджворт получил место профессора политической экономии в Королевском Колледже в Лондоне, а в 1891 г. он переехал в Оксфорд и работал там до ухода на пенсию в 1922 г. С 1891 по 1926 г. являлся первым редактором «Экономического журнала».

Ф. Эджворту принадлежат такие понятия как «кривая безразличия», «контрактная кривая» и «ядро экономики». Специалистам в области математической экономики хорошо известен так называемый «ящик Эджворта», с помощью которого можно моделировать процесс «чистого» обмена товарами между двумя участниками. По сути дела, этот анализ опирается на понятие парето-оптимального решения, которое Ф. Эджвортом в случае двух критериев использовалось до того, как его в общем виде ввел В. Парето.



Итальянский экономист и социолог Вильфредо Парето, V. Pareto, (15.7.1848–20.8.1923) родился в Париже. В 1855 г. его семья вместе с ним вернулась в Италию, где он, окончив Туринский политехнический институт в 1869 г., получил специальность гражданского инженера. Первые два года его обучения были посвящены, в основном, математике и физике, а его выпускная работа называлась «Фундаментальные принципы равновесия твердых тел». Впоследствии интерес к математике не ослабнет, что сыграет важную роль в становлении В. Парето как крупнейшего специалиста в области математической экономики. Кроме того, он интересовался биологией, экономикой, знакомился с трудами социальных мыслителей. После окончания института он двадцать лет проработал в индустриальной сфере — сначала в Римской железнодорожной компании, став ее первым директором, а с 1874 г. — управляющим директором акционерного общества, которому принадлежали металлургические заводы во Флоренции.

В начале 90-х годов В. Парето резко изменил свою жизнь, переехал в Швейцарию и с 1893 г. начал работать в Лозаннском университете (Швейцария), замещая Л. Вальраса. С 1894 г. — он профессор кафедры политической экономии этого университета.

Первая крупная работа В. Парето — это двухтомный «Курс политической экономии» (1896–1897 гг.), основанный на читаемых им университетских лекциях.

В своей наиболее влиятельной книге «Руководство по политической экономии» он продолжил развитие теории чистой экономики, заложил основы современной экономики благосостояния и ввел понятие «оптимума Парето», как состояния, которое не может быть улучшено ни одним из участников экономики без ухудшения положения по крайней мере какого-то одного из остальных участников. В настоящее время оптимум Парето играет важную роль в экономических исследованиях, принятии решений и теории игр.

С середины 90-х годов В. Парето стала привлекать социология. После длительных исследований в этой области он выпустил в свет в 1916 г. четырехтомный «Трактат по общей социологии». Умер он в 1923 г. близ Женевы.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ЛИТЕРАТУРА


1. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов. Основы теории. — М.: Наука, 1990. — 236 с.

2. *Барыкин Е.Е., Воропаева Ю.А., Косматов Э.М., Ногин В.Д., Харитонова Н.Е.* Оптимизация годовой производственной программы энергетического объединения // Электрические станции. — 1991. — **4**. — С. 9–13.

3. *Березовский Б.А., Барышников Ю.М., Борзенко В.И., Кемпнер Л.М.* Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты. — М.: Наука, 1989. — 128 с.

4. *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983. — 336 с.

5. *Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. — М.: Наука, 1986. — 296 с.

6. *Карманов В.Г., Федоров В.В.* Моделирование в исследовании операций. — М.: Твема, 1996. — 102 с.

7. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. — М.: Радио и связь, 1981.

8. *Ларичев О.И.* Наука и искусство принятия решений. — М.: Наука, 1979.

9. *Ларичев О.И.* Объективные модели и субъективные решения. — М.: Наука, 1987.

10. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений. — М.: Логос, 2000. — 296 с.

11. *Лейхтвейс К.* Выпуклые множества. — М.: Наука, 1985. — 336 с.

12. *Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л.* Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. — М.: Наука, 1997. — 240 с.

13. *Меньшикова О.Р., Подиновский В.В.* Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями// ЖВМиМФ. — 1988. — **28** (**5**). — С. 647–659.

14. Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании / Под ред. *Е.Г. Гольштейна*. — М.: Наука, 1991. — 446 с.

15. *Миллер Дж.* Магическое число семь плюс минус два. О некоторых пределах нашей способности перерабатывать информацию // Инженерная психология. — М.: Прогресс, 1964.

16. *Ногин В.Д.* Новый способ сужения области компромиссов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1976. — **5**.

17. *Ногин В.Д. и др.* Основы теории оптимизации. — М.: Высшая школа, 1986. — 384 с.

18. *Ногин В.Д.* Определение и общие свойства относительной важности критериев // Процессы управления и устойчивость. — СПб.: Изд-во СпбГУ, 1998. — С. 373–381.

19. *Ногин В.Д.* Использование количественной информации об относительной важности критериев в принятии решений // Научно-технические ведомости СПбГТУ. — 2000. — **1**. — С. 89–94.





20. *Ногин В.Д.* Теоремы о полноте в теории относительной важности критериев// Вестник СпбГУ, сер.: мат., мех., астр. — 2000. — **40** (**25**). — С. 13–18.

21. *Ногин В.Д., Толстых И.В.* Использование набора количественной информации об относительной важности критериев в процессе принятия решений // ЖВМиМФ. — 2000. — **40** (**11**). — С. 1593–1601.

22. *Ногин В.Д.* Логическое обоснование принципа Эджворта–Парето // ЖВМиМФ. — 2002. — **7**.

23. *Плаус С.* Психология оценки и принятия решений. — М.: Филинъ, 1998. — 368 с.

24. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с однородными и равноценными критериями // ЖВМиМФ. — 1975. — **15** (**2**). — С. 330–334.

25. *Подиновский В.В.* Многокритериальные задачи с упорядоченными по важности критериями // Автоматика и телемеханика. — 1976. — **2**. — С. 118–127.

26. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

27. Психологические измерения: Пер. с англ. яз. — М.: Мир, 1967. — 196 с.

28. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 368 с.

29. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем. — М.: Радио и связь, 1991.

30. *Салуквадзе М.Е.* О задаче линейного программирования с векторным критерием качества // Автоматика и телемеханика. — 1972. — **5**. — С. 99–105.

31. *Схрейвер Ф.* Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. — М.: Мир, 1991. — 368 с.

32. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 352 с.

33. *Фишберн П.* Теория полезности // Исследование операций. Методологические основы и математические методы. Т. 1. — М.: Мир, 1981. — С. 448–480.

34. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968. — 352 с.

35. *Штоейер Р.* Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления и приложения. — М.: Радио и связь, 1992.

36. *Charns A., Cooper W.W., Ferguson R.O.* Optimal estimation of execute compensation by linear programming // Management Science. — 1955. — **1** (**2**).

37. *Charns A., Cooper W.W.* Management models and industrial applications of linear programming (Appendix B) / N.Y.: John Wiley and Sons, 1961. — **1**.

38. *Noghin V.D.* Estimation of the set of nondominated solutions // Numerical Functional Analysis and Applications. — 1991. — **12** (**5, 6**). — P. 507–515.

39. *Noghin V.D.* Upper estimate for a fuzzy set of nondominated solutions // Fuzzy Sets and Systems. — 1994. — **67**. — P. 303–315.

40. *Noghin V.D.* Relative importance of criteria: a quantitative approach // J. Multi-Criteria Decision Analysis. — 1997. — **6**. — P. 355–363.

41. *Noghin V.D.* What is the relative importance of criteria and how to use it in MCDM // «Multiple Criteria Decision Making in the New Millenium», Proceedings of the XV International Conference on MCDM (ed. by M Köksalan, S. Zionts) in Ankara, Turkey (July, 2000). — Springer, 2001. — P. 59–68.

42. *Saaty T.L.* Multicriteria decision making. The analytic hierarchy process. — Pittsburgh: RWS Publications, 1990. — 287 p.

43. *Yu P.L.* Multiple-criteria decision making: concepts, techniques, and extensions. — N.Y.—L.: Plenum Press, 1985. — 388 p.

**Владимир Дмитриевич Ногин**

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ
В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ СРЕДЕ:
КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД

Редактор *И.Л. Легостаева*

Оригинал-макет *Л.В. Тарасюк, Ю.В. Горбунов*

Обложка *А.Ю. Алехина*

ЛР № 071930 от 06.07.99

Подписано в печать 00.00.2002. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,0.
Уч. изд. л. 11,0. Тираж 00 экз. Заказ № .