

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ-
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ФИЛИАЛ

В.Д. Ногин

**МЕТОДЫ
ОПТИМАЛЬНЫХ
РЕШЕНИЙ**

Учебное пособие



*Санкт-Петербург
2006*

УДК 330.4
ББК 65.01

Ногин В. Д.
Методы оптимальных решений. Учебное пособие. — Издательство «Ютас», 2006. — 108 с.

ISBN 5-91185-003-6

Учебное пособие содержит четыре главы. В первой главе закладывается теоретический фундамент теории оптимизации в виде необходимых и достаточных условий оптимальности для экстремальных задач различного рода. Вторая глава посвящена симплекс-методу решения задач линейного программирования. Распространенные численные методы решения задач безусловной и условной оптимизации составляют содержание третьей главы. Последняя глава вводит читателя в существо динамического программирования.

Для студентов и слушателей программ высшего профессионального образования.

Рекомендовано к печати Учебно-методическим советом СПб филиала ГУ-ВШЭ.

ISBN 5-91185-003-6

© В.Д.Ногин, 2006
© СПб филиал ГУ-ВШЭ

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Основы оптимизации	6
1.1. Важнейшие математические понятия	6
1.1.1. Векторное пространство	6
1.1.2. Множества векторного пространства	8
1.1.3. Функции нескольких переменных	11
1.1.4. Дифференцируемые функции нескольких переменных ..	12
1.2. Теоретические основы оптимизации	17
1.2.1. Постановка задачи оптимизации	17
1.2.2. Выпуклые и вогнутые функции	18
1.2.3. Разновидности задач оптимизации	20
1.3. Условия экстремума	23
1.3.1. Общие сведения	23
1.3.2. Условия безусловного экстремума первого порядка	24
1.3.3. Условия безусловного экстремума второго порядка	26
1.3.4. Необходимые и достаточные условия экстремума в задаче с ограничениями в форме равенств	30
1.3.5. Необходимые и достаточные условия экстремума в задаче с ограничениями в форме неравенств	36
1.3.6. Условия экстремума в седловой форме	37
Вопросы и упражнения к главе 1	40
Глава 2. Линейное программирование	44
2.1. Задачи линейного программирования и их свойства	44
2.1.1. Общая задача линейного программирования	44
2.1.2. Геометрия задачи линейного программирования	45
2.1.3. Каноническая задача линейного программирования	48
2.2. Симплекс-метод	50
2.2.1. Идея симплекс-метода	50
2.2.2. Алгоритм симплекс-метода	52
2.2.3. Пример применения алгоритма симплекс-метода	57
2.3. Двухфазный симплекс-метод	59
2.3.1. Метод искусственных переменных	59
2.3.2. Пример	61
2.4. Прикладные задачи линейного программирования	63
2.4.1. Задача о производстве продукции при ограниченных запасах сырья	63

2.4.2. Задача о загрузке оборудования	64
2.4.3. Транспортная задача	65
Вопросы и упражнения к главе 2	68
Глава 3. Численные методы оптимизации	70
3.1. Методы оптимизации функций одной переменной.	70
3.1.1. Унимодальные функции	70
3.1.2. Метод локализации экстремума	71
3.1.3. Метод золотого сечения	72
3.1.4. Метод Фибоначчи	77
3.1.5. Метод равномерного перебора.	80
3.2. Методы безусловной оптимизации	81
3.2.1. Общая схема методов подъема	82
3.2.2. Метод покоординатного подъема	84
3.2.3. Метод многогранника	86
3.2.4. Градиентные методы	88
3.2.5. Метод Ньютона.	90
Вопросы и упражнения к главе 3	92
Глава 4. Элементы динамического программирования	94
4.1. Дискретные управляемые системы	94
4.1.1. Общие сведения об управляемых системах	94
4.1.2. Математическое представление дискретной управляемой системы.	96
4.2. Задача оптимального управления. Принцип оптимальности.	97
4.2.1. Постановка задачи оптимального управления	97
4.2.2. Принцип оптимальности Беллмана	98
4.2.3. Схема применения принципа оптимальности	100
4.2.4. Пример применения принципа оптимальности.	101
Вопросы и упражнения к главе 4	103
Литература	104

Предисловие

Человек в своей деятельности издавна стремился к лучшему, поскольку поиск наилучших решений лежит в основе рационального поведения всякого индивида. По-видимому, в наибольшей степени это стремление проявляется и реализуется в экономике. И не только потому, что при воплощении того или иного экономического решения чаще всего стремятся получить максимальную прибыль. Наилучшее решение зачастую не сводится к наиболее прибыльному; первое существенно шире второго и может включать, например, экологические, этические и многие другие важные аспекты.

Математическая дисциплина, зародившаяся много веков назад и способствующая человеку в выборе наилучших решений, называется теорией экстремальных задач. Прилагательные *наилучший* и *оптимальный* по существу выражают одно и то же. По этой причине в настоящее время вместо теории экстремальных задач используют словосочетание *теория оптимизации*, а также *теория оптимальных решений*, одновременно подчеркивая ярко выраженную прикладную направленность этой дисциплины.

Предлагаемое учебное пособие написано на основе курса лекций, который автор читает студентам второго курса в СПб филиале университета ВШЭ.

Содержание пособия разделено на четыре главы. Первая из них содержит важнейшие термины и результаты, относящиеся к теории оптимизации, и посвящена различного рода необходимым и достаточным условиям оптимальности. Во второй главе изложены основы линейного программирования, находящего многочисленные и плодотворные приложения в различных сферах экономики. Наиболее распространенные численные методы поиска оптимальных решений в нелинейных задачах оптимизации описаны в третьей главе. В последней главе представлены начальные элементы динамического программирования.

В пособии для лемм, теорем, формул и рисунков принята двойная нумерация. Первый номер указывает номер главы, второй – порядковый номер утверждения, формулы или рисунка. Знак ▲ служит для отметки окончания доказательства.

Глава 1. ОСНОВЫ ОПТИМИЗАЦИИ

1.1. Важнейшие математические понятия

1.1.1. Векторное пространство

Пусть n – натуральное число. Множество всех упорядоченных наборов, состоящих из n вещественных чисел x_1, \dots, x_n , записанных в виде строки (или столбца) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, для которых введены операции сложения и умножения на вещественные числа по правилам

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),$$

где α – произвольное вещественное число, называется n -мерным векторным пространством и обозначается \mathbf{R}^n . Элементы пространства \mathbf{R}^n называют точками или векторами n -мерного пространства.

Отметим, что одномерное пространство \mathbf{R}^1 представляет собой множество всех вещественных чисел с обычными операциями сложения и умножения; обычно множество вещественных чисел обозначается \mathbf{R} .

Вектор $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ называют нулевым вектором, а вектор $(-1)\mathbf{x}$ обозначают $-\mathbf{x}$ и называют противоположным вектору \mathbf{x} .

Разностью векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} называют вектор $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$, который обозначают $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений между произвольными элементами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ пространства \mathbf{R}^n (ниже λ, μ – произвольные вещественные числа):

- 1) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
- 2) $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;
- 3) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;
- 4) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
- 5) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
- 6) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;
- 7) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$;
- 8) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$.

На множестве элементов пространства \mathbf{R}^n вводится операция умножения, сопоставляющая любому двум элементам этого пространства вещественное число по определенному правилу. А именно, скалярным произведением двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ пространства \mathbf{R}^n называется число, обозначаемое $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ и определяемое равенством

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Иногда для обозначения скалярного произведения используют символику, заимствованную из курса линейной алгебры. Очевидно, векторы $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ представляют собой матрицы размера $1 \times n$, т.е. векторы-строки, а транспонированная матрица для вектор-строки будет матрицей размера $n \times 1$, т.е. вектор-столбец. В таком случае по определению операции умножения матриц имеем

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle,$$

т.е. скалярное произведение векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} может быть записано в виде $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T$.

Непосредственно из определения скалярного произведения вытекают следующие его свойства:

- 1) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$; $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- 2) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$;
- 3) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$; $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$;
- 4) $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y} \rangle$

для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ и любого вещественного числа λ .

Нормой произвольного вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ называют неотрицательное число $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, которое обозначают $\|\mathbf{x}\|$. Таким образом, по определению

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Норму вектора называют также *длиной* этого вектора, так как в частном случае пространства \mathbf{R}^2 (и \mathbf{R}^3) норма приводит к понятию длины геометрического вектора в традиционном смысле, т.е. если, например, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, то $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\mathbf{x}|$.

Отметим следующие свойства нормы вектора:

- 1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$; $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- 2) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$;
- 3) Неравенство треугольника: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$;

4) Неравенство Коши-Буняковского: $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ и для любого вещественного числа λ .

Неравенство треугольника в случае пространства \mathbf{R}^2 (или \mathbf{R}^3) выражает известный геометрический факт: длина любой стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон (рис. 1.1).

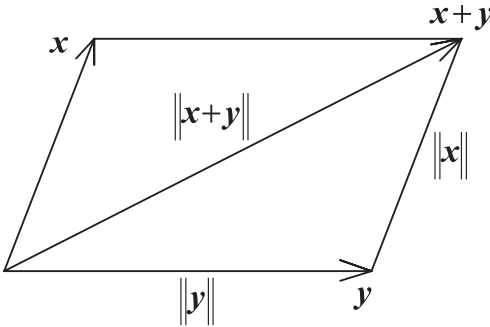


Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация неравенства треугольника.

Если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ — две точки пространства \mathbf{R}^n , то норма разности этих векторов $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ представляет собой расстояние между точками \mathbf{x} и \mathbf{y} .

1.1.2. Множества векторного пространства

В этом пункте, почти сплошь состоящем из определений, рассматриваются важные для дальнейшего изложения различные подмножества пространства \mathbf{R}^n и напоминает общепринятая в математическом анализе терминология.

Пусть ε — некоторое положительное число и \mathbf{x}^0 — точка пространства \mathbf{R}^n . Множество

$$U_\varepsilon(\mathbf{x}^0) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon \}$$

называют *открытым шаром с центром в точке \mathbf{x}^0 и радиусом ε* . Часто это множество называют ε -окрестностью точки \mathbf{x}^0 . Нередко, когда конкретное значение величины радиуса окрестности не имеет особого значения, окрестность обозначают $U(\mathbf{x}^0)$.

В \mathbf{R}^3 множество $U_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ — это обычный шар с центром в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ и радиусом ε , причем точки сферы, его ограничивающей, этому множеству не принадлежат. Для пространства \mathbf{R}^2 множество $U_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ составляют все точки, лежащие внутри круга с центром в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ и радиусом ε (точки, лежащие на окружности, определяющей этот круг, множеству $U_\varepsilon(\mathbf{x}^0)$ не принадлежат) (см. рис. 1.2).

Рассмотрим произвольное непустое подмножество X векторного пространства, т.е. $X \subset \mathbf{R}^n$. Все точки этого множества разделим на две категории — внутренние и граничные.

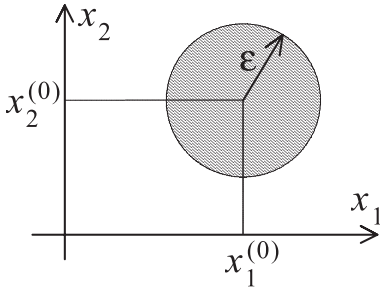


Рис. 1.2. ϵ -окрестность в пространстве \mathbf{R}^2 .

Пусть $x \in X$. Точка x называется *внутренней точкой* множества X , если она принадлежит X вместе с некоторой своей окрестностью; более точно: если существует окрестность $U(x^0)$ точки x^0 такая, что $U(x^0) \subset X$. Иными словами, x^0 является внутренней точкой множества X в том случае, если множеству X принадлежит не только она сама, но и все ее «ближайшее окружение».

Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$. Точка $x \in \mathbf{R}^n$ (не обязательно принадлежащая X) называется *граничной точкой* множества X ,

если в любой окрестности этой точки найдется точка принадлежащая множеству X , а также существует точка, не принадлежащая этому множеству.

Таким образом, если точка $x \in X$ не является внутренней, то она граничная, т.е. все точки множества X относятся либо к категории внутренних, либо к категории граничных. В то же время точка может являться граничной для данного множества X , но ему не принадлежать.

Непустое множество $X \subset \mathbf{R}^n$ называют

- *открытым*, если каждая его точка внутренняя
- *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки.

Существует договоренность, согласно которой пустое множество, равно как и все пространство \mathbf{R}^n , относят одновременно к категории открытых и к категории замкнутых множеств.

Точку $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ называют *пределом* последовательности $x^{(m)} \in \mathbf{R}^n$, $m = 1, 2, \dots$, и пишут $x^{(m)} \rightarrow x^{(0)}$, если $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x^{(0)}\| = 0$. Оказывается (см. [4, т.1]), множество $X \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки, т.е. такие точки, которые могут быть получены как предел последовательности точек, принадлежащих данному множеству. Пересечение любого конечного числа открытых (замкнутых) множеств является открытым (замкнутым) множеством.

Можно проверить, что открытый шар дает пример открытого множества.

В качестве примера замкнутого неограниченного множества пространства \mathbf{R}^n приведем множество

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle c, x \rangle = \alpha\},$$

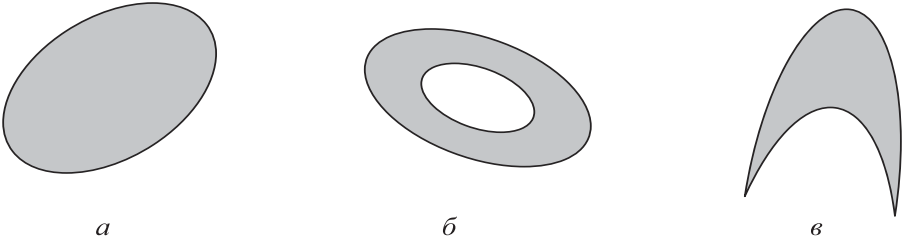


Рис. 1.3. Выпуклое (а) и невыпуклые (б, в) множества на плоскости.

где α – фиксированное число, которое именуют *гиперплоскостью*. Нетрудно понять, что в пространстве \mathbf{R}^2 гиперплоскость совпадает с прямой линией, имеющей в качестве нормального вектора вектор \mathbf{c} .

Отрезком, соединяющим точки \mathbf{x} и \mathbf{x}' пространства \mathbf{R}^n , называют множество $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{x}' \text{ при некотором } \lambda \in [0, 1]\}$.

В случае $n = 2$ отрезок – это геометрический отрезок с концами в точках \mathbf{x} и \mathbf{x}' . Отрезок представляет собой замкнутое множество.

Множество $X \subset \mathbf{R}^n$ называют *выпуклым*, если оно вместе с любой парой своих точек содержит и весь отрезок, соединяющий эту пару точек. Иными словами, множество $X \subset \mathbf{R}^n$ выпукло, если для любых точек $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$ и произвольного числа $\lambda \in [0, 1]$ выполняется включение $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{x}' \in X$. Как одноэлементное, так и пустое множества также причисляют к выпуклым множествам.

Выпуклое и два невыпуклых плоских множества изображены на рис. 1.3. Можно проверить, что гиперплоскость, окрестность точки, а также два замкнутых *полупространства*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \alpha\}, \quad \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geq \alpha\}, \quad \text{где } \mathbf{c} \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R},$$

представляют собой выпуклые множества.

Утверждение. *Пересечение произвольного числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.*

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Множество $X \subset \mathbf{R}^n$ именуют *ограниченным*, если существует такое число $M > 0$, что неравенство $\|\mathbf{x}\| \leq M$ выполняется для любой точки $\mathbf{x} \in X$. Иными словами, множество ограничено, если оно содержится в некоторой окрестности начала координат.

Всякое замкнутое и ограниченное множество именуют *компактным множеством* или просто *компактом*. Отрезок дает пример выпуклого компактного множества.

1.1.3. Функции нескольких переменных

Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$. Если задано правило f , сопоставляющее каждой точке $\mathbf{x} \in X$ некоторое единственное число y , то говорят, что на множестве X задана числовая *функция n переменных* и пишут $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ или $y = f(\mathbf{x})$.

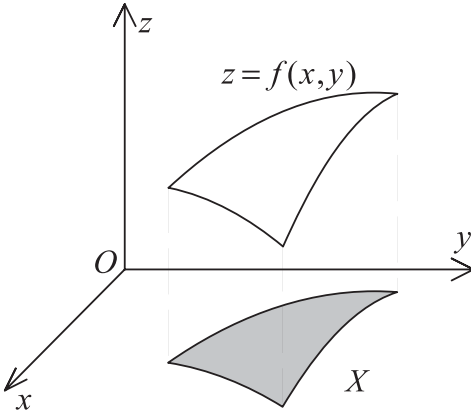


Рис. 1.4. Геометрическая интерпретация функции двух переменных.

Множество

$$\{\mathbf{x} \in X \mid f(\mathbf{x}) = C\}$$

называют *множеством уровня* $C \in \mathbf{R}$. При $n = 2$ это множество именуют *линией уровня*.

Для функции двух переменных ее аргументы часто обозначают буквами x и y , а зависимую переменную буквой z , так что $z = f(x, y)$. Для таких функций возможна следующая геометрическая интерпретация. Если (x, y) – точка из области определения такой функции, а $z = f(x, y)$ – ее значение в данной точке, то в пространстве $Oxyz$ отмечается точка

(x, y, z) . Перебрав таким образом все точки из области определения X , получим, вообще говоря, некоторую поверхность, соответствующую области определения, лежащей в координатной плоскости Oxy (рис. 1.4). Эту поверхность называют *графиком* функции $z = f(x, y)$.

Рассмотрим некоторые примеры функций нескольких переменных.

1) *Аффинная (линейная) функция n переменных* имеет вид

$$\begin{aligned} y = f_1(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \alpha = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + \alpha = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i x_i + \alpha, \end{aligned}$$

где \mathbf{c} – фиксированный n -мерный вектор, а α – некоторое число.

2) *Квадратичная функция n переменных* задается равенством

$$y = f_k(x) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x} Q, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \alpha,$$

где Q – некоторая симметричная числовая матрица размера $n \times n$, \mathbf{c} – фиксированный n -мерный вектор, а α – некоторое число.

В случае $n = 2$ имеем

$$\mathbf{x}Q = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = x_1 q_{11} + x_2 q_{12} + x_1 q_{21} + x_2 q_{22}$$

и с учетом симметричности, т.е. $q_{12} = q_{21}$, получаем следующий общий вид квадратичной функции двух переменных:

$$y = \frac{1}{2} q_{11} x_1^2 + q_{21} x_2 x_1 + \frac{1}{2} q_{22} x_2^2 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \alpha.$$

Нетрудно понять, что для линейной функции $y = c_1 x_1 + c_2 x_2$ линии уровня суть семейство параллельных прямых с вектором нормали $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, а для квадратичной функции вида $y = x_1^2 + x_2^2$ линии уровня представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат.

Пусть f – функция n переменных, заданная на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, и \mathbf{x}^* – внутренняя точка множества X . Говорят, что функция f непрерывна в точке \mathbf{x}^* , если $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*)$.

Примерами непрерывных функций в каждой точке (на всем векторном пространстве) служат линейная и квадратичная функции (убедиться в этом самостоятельно).

1.1.4. Дифференцируемые функции нескольких переменных

Пусть f – функция n переменных, заданная на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, и \mathbf{x}^* – внутренняя точка множества X . Функцию f называют дифференцируемой в точке \mathbf{x}^* , если существует такой вектор $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ и такая бесконечно малая функция $\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$, что равенство

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \cdot \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

имеет место для всех \mathbf{x} , достаточно близких к \mathbf{x}^* . При этом вектор \mathbf{p} , участвующий в определении дифференцируемой функции, называют градиентом функции f , вычисленным в точке \mathbf{x}^* . Противоположный вектор $-\mathbf{p}$ именуют антиградиентом.

Градиент часто обозначают $\nabla f(\mathbf{x}^*)$; он представляет собой вектор, составленный из частных производных, т.е.

$$\mathbf{p} = \nabla f(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right).$$

Вычислим градиенты простейших функций нескольких переменных. Пусть $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ – фиксированный вектор из \mathbf{R}^n , α – вещественное число и

$$f_l(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \alpha = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + \alpha$$

– аффинная функция n переменных. Поскольку для такой функции частные производные имеют вид

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_i} = c_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

для градиента аффинной функции получаем представление

$$\nabla f_i(\mathbf{x}) = (c_1, \dots, c_n) = \mathbf{c}.$$

Таким образом, градиент аффинной функции совпадает с вектором \mathbf{c} независимо от того, в какой точке он вычисляется.

Пусть $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ – вещественная симметричная матрица ($q_{21} = q_{12}$) размера 2×2 , $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ – фиксированный вектор из пространства \mathbf{R}^2 , и α

– вещественное число. Рассмотрим квадратичную функцию двух переменных $f_k(x_1, x_2)$, определяемую равенством

$$\begin{aligned} f_k(\mathbf{x}) &= f_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}Q, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \alpha = \\ &= \frac{1}{2} q_{11} x_1^2 + q_{21} x_2 x_1 + \frac{1}{2} q_{22} x_2^2 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \alpha. \end{aligned}$$

Ее частные производные суть

$$\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1} = q_{11} x_1 + q_{21} x_2 + c_1, \quad \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} = q_{12} x_1 + q_{22} x_2 + c_2.$$

Поэтому для градиента квадратичной функции двух переменных получаем представление

$$\begin{aligned} \nabla f_k(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f_k(\mathbf{x})}{\partial x_2} \right) = \\ &= (q_{11} x_1 + q_{21} x_2 + c_1, q_{12} x_1 + q_{22} x_2 + c_2) = \\ &= (q_{11} x_1 + q_{21} x_2, q_{12} x_1 + q_{22} x_2) + (c_1, c_2) = \mathbf{x}Q + \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Для квадратичной функции n переменных $f_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}Q, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle + \alpha$ градиент вычисляется аналогично:

$$\nabla f_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x}Q + \mathbf{c}.$$

Здесь Q – вещественная симметричная матрица размера $n \times n$, а \mathbf{c} – фиксированный вектор из \mathbf{R}^n .

В заключение установим одно полезное геометрическое свойство линий уровня функции двух переменных. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, точку $M_0(x_0, y_0)$ из области ее определения и линию уровня Γ функции f , проходящую через точку $f(M_0)$, т.е.

$$\Gamma = \{(x, y) \mid f(x, y) = f(x_0, y_0)\}.$$

Предположим, что линия уровня Γ представляет собой кривую, допускающую параметрическое задание при помощи уравнений

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Пусть $t_0 \in [\alpha, \beta]$ – такое значение параметра t , при котором $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Определение кривой Γ позволяет записать равенство

$$f(x(t), y(t)) = f(x(t_0), y(t_0)),$$

справедливое для всех $t \in [\alpha, \beta]$. Дифференцируя это равенство по t и подставляя в полученный результат $t = t_0$, находим

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot y'(t_0) = 0. \quad (1.1)$$

Если интерпретировать переменную t как время, а уравнения кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ как уравнения движения материальной точки в зависимости от времени t , то вектор $\mathbf{v}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$, составленный из производных, представляет собой вектор скорости материальной точки в момент времени $t = t_0$. В этом случае равенство (1.1) можно переписать в виде

$$\langle \nabla f(x_0, y_0), \mathbf{v}(t_0) \rangle = 0, \quad (1.2)$$

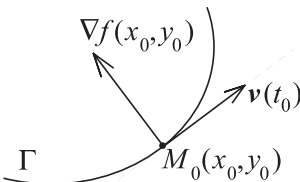


Рис. 1.5. Перпендикулярность линии уровня функции $f(x, y)$ и ее градиента $\nabla f(x_0, y_0)$.

что геометрически выражает перпендикулярность векторов $\nabla f(x_0, y_0)$ и $\mathbf{v}(t_0)$. Как известно из курса физики, если $\mathbf{v}(t_0) \neq \mathbf{0}$, то вектор скорости $\mathbf{v}(t_0)$ направлен по касательной, проведенной в точке $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ к кривой Γ . Учитывая это обстоятельство, равенство (1.2) геометрически означает, что *градиент $\nabla f(x_0, y_0)$ функции $f(x, y)$, вычисленный в точке (x_0, y_0) , перпендикулярен касательной, проведенной в этой точке к линии уровня Γ (на рис. 1.5 начало вектора $\nabla f(x_0, y_0)$ совмещено с точкой $M_0(x_0, y_0)$).*

Теорема 1.1 (основное свойство градиента). Пусть функция f дифференцируема в точке \mathbf{x}^* и $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$. Для любого вектора $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, удовлетворяющего неравенству

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} \rangle > (<) 0,$$

найдется такое положительное число τ , что

$$f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{y}) > (<) f(\mathbf{x}^*)$$

верно для всех $t \in (0, \tau)$.

Доказательство. Пусть для определенности $\langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} \rangle > 0$. Рассмотрим точку $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + t\mathbf{y}$ при достаточно малых $t > 0$. Благодаря дифференцируемости функции f в \mathbf{x}^* можно записать равенство

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle \nabla f(\mathbf{x}^*), t\mathbf{y} \rangle + \|t\mathbf{y}\| \cdot \alpha(t\mathbf{y})$$

или

$$f(\mathbf{x}^* + t\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^*) = t[\langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\| \cdot \alpha(t\mathbf{y})].$$

В силу $\alpha(t\mathbf{y}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ и $\langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} \rangle > 0$, найдется такое достаточно малое положительное число τ , что выражение в квадратных скобках, а значит и вся правая часть последнего выписанного равенства будет положительной при всех $t \in (0, \tau)$. Положительность левой части указанного равенства означает справедливость теоремы в рассматриваемом случае.

Для случая $\langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} \rangle < 0$ доказательство проводится аналогично ▲

Геометрически установленное свойство градиента кратко можно охарактеризовать следующим образом: *градиент функции указывает направление возрастания данной функции; антиградиент — направление убывания.*

Более точно это свойство для функций двух переменных можно выразить следующим образом: любое достаточно малое перемещение из точки \mathbf{x}^* в каждом направлении \mathbf{y} полуплоскости, задаваемой градиентом $\nabla f(\mathbf{x}^*)$, приводит к увеличению значения данной функции по сравнению с ее значением в точке \mathbf{x}^* . Аналогично, полуплоскость, определяемая антиградиентом, задает направления, приводящие к уменьшению значения функции по сравнению с $f(\mathbf{x}^*)$ (рис. 1.6).

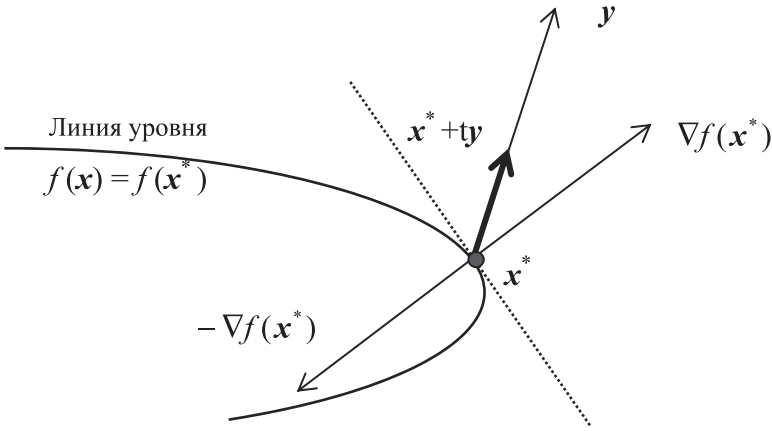


Рис. 1.6. Геометрическая иллюстрация основного свойства градиента.

В заключение напомним *формулу Тейлора* с остаточным членом в форме Пеано до членов второго порядка:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot H(\mathbf{x}^*), \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \rangle + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^2 \cdot \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$$

для всех \mathbf{x} , достаточно близких к \mathbf{x}^* , где

$$H(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

симметричная матрица размера $n \times n$, называемая *матрицей Гессе* и $\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ — некоторая бесконечно малая функция при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$.

1.2. Теоретические основы оптимизации

1.2.1. Постановка задачи оптимизации

Всякая задача оптимизации включает два объекта:

- 1) f – числовую функцию n переменных
- 2) $X \subset \mathbf{R}^n$ – непустое множество, на котором эта функция определена.

Множество X нередко называют *допустимым множеством*, а функцию f – *целевой функцией* или *критерием оптимальности*.

Напомним основные определения теории оптимизации. Элемент $\mathbf{x}^* \in X$ называют *точкой минимума (максимума)* функции f на множестве X , если неравенство

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \text{ (соответственно } f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x})) \quad (1.3)$$

выполняется для всех $\mathbf{x} \in X$. При этом пишут

$$f(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) \text{ (соответственно } f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})).$$

Когда не играет роли, идет речь о точке минимума или о точке максимума, используют термины *точка экстремума* или *оптимальная точка*.

Значение $f(\mathbf{x}^*)$ функции f , вычисленное в точке \mathbf{x}^* минимума (максимума), называют *минимумом (максимумом)*, *наименьшим (наибольшим) значением*, а также *экстремумом* или *оптимумом*.

Все перечисленные выше понятия имеют свой локальный аналог. Так например, элемент $\mathbf{x}^* \in X$ называют *точкой локального минимума (локального максимума)*, если существует такая окрестность $U(\mathbf{x}^*)$ точки \mathbf{x}^* , что неравенство (1.3) имеет место для всех $\mathbf{x} \in X \cap U(\mathbf{x}^*)$.

Всякая точка локального минимума, а также точка локального максимума именуется *точками локального экстремума* или *точками локального оптимума*, а значения функции f в этих точках – *локальными экстремумами* или *локальными оптимумами*.

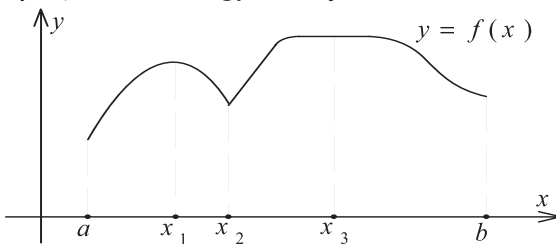


Рис. 1.7. Экстремальные точки функции одной переменной.

Нередко, желая оттенить понятия, связанные с минимумом и максимумом от локального минимума и локального максимума, используют дополнительное прилагательное «глобальный».

Рис. 1.7 иллюстрирует перечисленные понятия.

На нем изображен график функции $y = f(x)$ одной переменной, заданной на отрезке $[a, b]$. Для этой функции $x = a$ — точка глобального минимума, $x = x_1$ — точка локального максимума, $x = x_2$ — точка локального минимума, $x = x_3$ — одна из точек глобального максимума и $x = b$ — точка локального минимума.

Задача оптимизации функции f на множестве X заключается в отыскании точки x^* локального (или глобального) минимума (или максимума) функции f на множестве X , а также соответствующего оптимального значения $f(x^*)$. Иногда требуется найти лишь оптимальное значение функции, не определяя самой оптимальной точки.

1.2.2. Выпуклые и вогнутые функции

Непосредственно из приведенных выше определений следует, что каждая точка глобального экстремума является также точкой соответствующего локального экстремума, так как из выполнения неравенств (1.3) для всех $x \in X$ следует выполнение этих же неравенств для всех $x \in X \cap U(x^*)$ при произвольной окрестности $U(x^*)$ точки x^* . Обратное утверждение в общем случае места не имеет, однако для выпуклых и вогнутых функций положение меняется. Эти функции играют важную роль в теории оптимизации.

Пусть функция f задана на выпуклом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$. Говорят, что функция f *выпукла* (*вогнута*) на множестве X , если неравенство

$$f(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \leq (\geq) \lambda f(x') + (1-\lambda)f(x'') \quad (1.4)$$

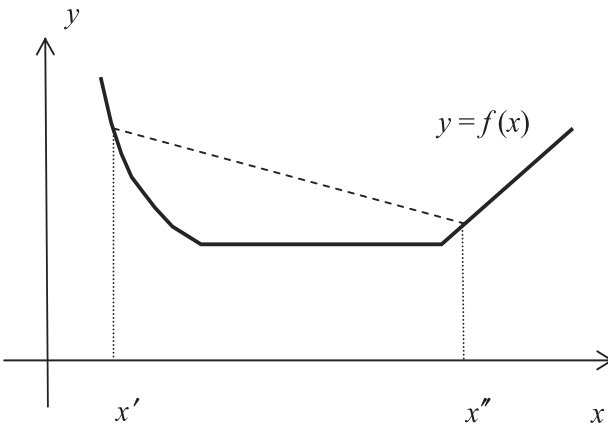


Рис. 1.8. График выпуклой функции одной переменной.

выполняется для всех $x', x'' \in X$ и любого $\lambda \in [0, 1]$.

Нетрудно понять, что при умножении выпуклой функции на -1 она становится вогнутой, а изменение знака вогнутой функции превращает ее в выпуклую функцию.

В случае функции одной переменной неравенство (1.4) гео-

метрически означает, что прямая линия, соединяющая произвольные две точки графика выпуклой функции располагается не ниже линии графика, заключенной между этими двумя точками (см. рис. 1.8).

В левой части неравенства (1.4) записано значение функции, вычисленное в точке $\lambda x' + (1-\lambda)x''$ для всех $x', x'' \in X$ и любого $\lambda \in [0, 1]$. Таким образом, функция f должна быть определена в каждой точке отрезка, соединяющего произвольную пару точек множества X . Отсюда следует, что область определения выпуклой, а также вогнутой функции, обязательно должна быть выпуклым множеством, иначе левая часть неравенства (1.4) при некоторых $x', x'' \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$ может не иметь смысла.

Следует отметить, что при $\lambda = 0$, а также при $\lambda = 1$ неравенство (1.4) выполняется как равенство при всех $x', x'' \in X$. Поэтому указанные значения λ можно из приведенного выше определения исключить и потребовать выполнения неравенства (1.4) лишь для всех $\lambda \in (0, 1)$.

Очевидно, если функция f выпукла (вогнута) на некотором множестве X , то она является выпуклой (вогнутой) и на любом выпуклом подмножестве множества X .

На рис. 1.9 и 1.10 даны геометрические иллюстрации для некоторых двух функций двух переменных, выпуклых на всей плоскости.

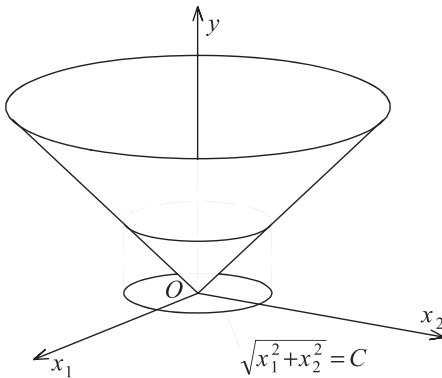


Рис. 1.9. График выпуклой функции $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и ее линия уровня C .

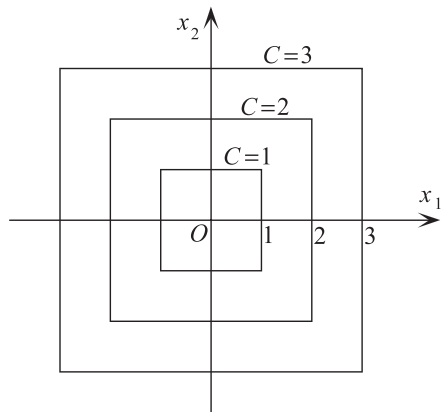


Рис. 1.10. Линии уровня выпуклой функции $y = \max\{|x_1|; |x_2|\}$.

Графиками этих функций являются конические поверхности с вершиной, расположенной в начале координат. Для первой из них – это круговой конус, тогда как для второй – этот конус четырехгранный. Из приведенных

рисунков можно усмотреть, что по характеру линий уровня функции, расположенных на плоскости, можно получить определенное представление о поверхности ее графика в пространстве.

Теорема 1.1. Пусть непустое множество $X \subset \mathbf{R}^n$ выпукло. Если функция f , заданная на множестве X , является выпуклой (вогнутой), то всякая ее точка локального минимума (локального максимума) будет точкой глобального минимума (соответственно — точкой глобального максимума).

Доказательство проведем для случая выпуклой целевой функции; случай вогнутой функции рассматривается аналогично.

Пусть $\mathbf{x}^* \in X$ — точка локального минимума выпуклой функции f на выпуклом множестве X . Это означает, что найдется такая окрестность $U(\mathbf{x}^*)$, что

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \in X \cap U(\mathbf{x}^*). \quad (*)$$

Выберем произвольную точку $\bar{\mathbf{x}} \in X$. В силу выпуклости множества X имеем $\mathbf{x} = \lambda \bar{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^* \in X$ для всех $\lambda \in (0, 1)$. Более того, так как расстояние $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| = \lambda \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^*\| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +0} 0$, включение $\mathbf{x} = \lambda \bar{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^* \in X \cap U(\mathbf{x}^*)$ будет выполнено при достаточно малом $\lambda \in (0, 1)$. Выписывая для такой точки \mathbf{x} неравенство (*), с использованием выпуклости f получим

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\lambda \bar{\mathbf{x}} + (1 - \lambda)\mathbf{x}^*) \leq \lambda f(\bar{\mathbf{x}}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}^*) .$$

Отсюда после несложных преобразований следует неравенство $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\bar{\mathbf{x}})$, где $\bar{\mathbf{x}}$ — произвольная точка множества X . Таким образом, \mathbf{x}^* — точка глобального минимума функции f на множестве X ▲

1.2.3. Разновидности задач оптимизации

Из неравенства

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \in X$$

следует

$$-f(\mathbf{x}^*) \leq -f(\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \in X .$$

Это означает, что всякая оптимальная точка в задаче максимизации $f(\mathbf{x}) \rightarrow \max_{\mathbf{x} \in X}$ является оптимальной точкой в задаче минимизации $-f(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in X}$, а оптимальные значения обеих задач связаны равенством

$$\max_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = -\min_{\mathbf{x} \in X} (-f(\mathbf{x})) .$$

Благодаря этому любая задача максимизации может быть сведена к эквивалентной ей задаче минимизации на том же самом допустимом множестве, если целевую функцию умножить на -1 . Более того, нетрудно понять, что отмеченная эквивалентность сохраняет свою силу и в тех случаях, когда речь идет о локально оптимальном решении.

В свою очередь, всякая оптимальная точка в задаче минимизации $f(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in X}$ является оптимальной точкой в задаче максимизации $-f(\mathbf{x}) \rightarrow \max_{\mathbf{x} \in X}$, причем

$$\min_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x}) = -\max_{\mathbf{x} \in X} (-f(\mathbf{x})).$$

На основании сказанного рассмотрение задач оптимизации можно проводить для одной из задач — максимизации или минимизации; при этом полученные результаты могут быть легко переформулированы применительно к другой задаче.

Рассмотрим задачу минимизации

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in X}.$$

Если здесь $X = \mathbf{R}^n$, то говорят о задаче безусловной минимизации, или о задаче минимизации без ограничений. Если же допустимое множество не совпадает со всем пространством, т.е. $X \neq \mathbf{R}^n$, то используют термин задача условной минимизации, или задача с ограничениями. При этом ко всем введенным ранее понятиям экстремальных точек и экстремумов добавляют прилагательное «безусловный» или «условный». Например, тот факт, что $\mathbf{x}^* \in X$ является точкой локального условного минимума функции f на множестве X , означает существование такой окрестности $U(\mathbf{x}^*)$ точки \mathbf{x}^* , что неравенство $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ выполнено для всех $\mathbf{x} \in X \cap U(\mathbf{x}^*)$, причем $X \neq \mathbf{R}^n$.

Нередко в задаче условной оптимизации допустимое множество представляет собой множество решений некоторой системы уравнений

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \right\},$$

системы неравенств

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \right\},$$

или — в общем случае — системы, содержащей как равенства, так и неравенства. Здесь $g_j : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$, — некоторые числовые функции. В этом случае говорят о задаче математического программирования.

Среди задач математического программирования наиболее проста и хорошо изучена задача линейного программирования, в которой все участвующие

щие в ее постановке функции являются линейными (точнее говоря, аффинными), т.е.

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle, \quad g_j(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}^j, \mathbf{x} \rangle - b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $\mathbf{c}, \mathbf{a}^j \in \mathbf{R}^n$, $b_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

1.2.4. Теорема Вейерштрасса

Сформулированная выше задача оптимизации имеет решение не при любых целевых функциях и допустимых множествах. Это относится как к локальному, так и к глобальному вариантам постановки задачи оптимизации. Рассмотрим условия, при которых экстремальная задача имеет оптимальное решение в глобальном смысле.

Если допустимое множество в данной задаче не содержит ни одного элемента, то, очевидно, оптимальных точек не существует. Поэтому при рассмотрении экстремальных задач обычно считают, что допустимое множество не пусто и, более того, содержит по крайней мере два элемента.

В случае конечного допустимого множества имеется конечный набор значений целевой функции, вычисленных в допустимых точках. В этом конечном наборе всегда имеется минимальное, а также максимальное число. Первое из них является глобальным минимумом, второе — глобальным максимумом. Таким образом, *если допустимое множество не пусто и конечно, то любая экстремальная задача (с любой целевой функцией) имеет оптимальное решение на этом множестве.*

Для бесконечного (но ограниченного) допустимого множества справедлив следующий результат, который представляет собой теорему Вейерштрасса из курса математического анализа.

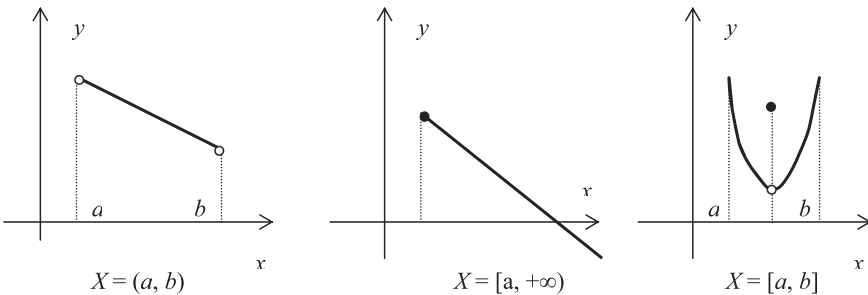


Рис. 1.11. Графики функций, у которых не существует точек минимума.

Теорема 1.2. *Предположим, что функция f определена на непустом компактном множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ и непрерывна на нем. Тогда функция f достигает на множестве X как глобального максимума, так и глобального минимума.*

Следует заметить, что все условия теоремы 1.2 являются существенными, т.е. без них утверждение теоремы может нарушаться. Об этом свидетельствуют простые примеры задач минимизации функций одной переменной, графики которых изображены на рис. 1.11.

В первом случае минимум не достигается из-за нарушения условия замкнутости допустимого множества, во втором — вследствие его неограниченности, тогда как в третьем случае минимум отсутствует по причине нарушения условия непрерывности целевой функции в точке, которая как раз могла бы претендовать на роль точки минимума.

1.3. Условия экстремума

1.3.1. Общие сведения

Условия экстремума можно разделить на две группы:

- *необходимые условия*
- *достаточные условия.*

Всякое необходимое условие экстремума имеет следующий общий вид

$$\mathbf{x}^* \text{ — точка глобального (локального) минимума (максимума)} \\ \Rightarrow \text{имеет место } A.$$

Необходимое условие экстремума дает возможность найти точки, «подозрительные» на экстремальные, или же установить, что заданная точка \mathbf{x}^* не является точкой экстремума (если не выполняется условие A).

Любое достаточное условие обладает следующей структурой

$$\text{имеет место } B \Rightarrow \mathbf{x}^* \text{ — точка глобального (локального) минимума (максимума).}$$

Достаточное условие предоставляет возможность убедиться в том, что точки, «подозрительные» на экстремальные (обычно найденные с помощью необходимого условия), действительно являются экстремальными.

Следует отметить, что нередко $A \neq B$.

С другой стороны, условия экстремума подразделяются на

- 1) условия нулевого, первого, второго и т.д. порядка в зависимости от того, какого порядка частные производные участвуют в A или B^1 ;
- 2) условия локального или глобального экстремума;
- 3) условия условного или же безусловного экстремума.

Замечание. Поскольку всякая точка глобального экстремума является точкой локального экстремума, то любое необходимое условие локального экстремума будет и необходимым условием глобального экстремума, а любое достаточное условие глобального экстремума одновременно является и достаточным условием локального экстремума.

1.3.2. Условия безусловного экстремума первого порядка

Рассмотрим задачу безусловной оптимизации функции f на всем пространстве \mathbf{R}^n .

Следующая теорема представляет собой распространение на случай функций нескольких переменных известной теоремы Ферма о том, что в точке локального экстремума производная целевой функции равна нулю.

Теорема 1.3 (необходимое условие локального безусловного экстремума). Пусть \mathbf{x}^* — точка локального безусловного экстремума функции f и в этой точке данная функция дифференцируема. Тогда

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

Доказательство. Для определенности примем, что \mathbf{x}^* — точка локального безусловного максимума. Допустим противное, т.е. $\nabla f(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{0}$. Введем вектор $\mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x}^*)$. Имеем

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} \rangle = \langle \nabla f(\mathbf{x}^*), \nabla f(\mathbf{x}^*) \rangle = \|\nabla f(\mathbf{x}^*)\|^2 > 0.$$

Отсюда в соответствии с основным свойством градиента (см. теорему 1.1) следует, что для любого достаточно малого перемещения из точки \mathbf{x}^* в направлении вектора $\mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x}^*)$ значение целевой функции будет больше, чем $f(\mathbf{x}^*)$. Это несовместимо с тем, что \mathbf{x}^* — точка локального безусловного максимума ▲

Градиент $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ — это n -мерный вектор, составленный из частных производных функции f , вычисленных в точке \mathbf{x}^* . В координатной форме выполнение векторного равенства (1.5) означает, что все частные производные функции f , вычисленные в точке \mathbf{x}^* равны нулю. В этой связи введем следующее определение.

¹ Здесь подразумевается, что производная нулевого порядка совпадает с исходной функцией.

Всякое решение системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} = 0 \end{array} \right. \quad (1.6)$$

называют *стационарной точкой* функции f .

Теперь утверждение теоремы 1.3 можно перефразировать следующим образом: *для того, чтобы данная точка была точкой локального безусловного экстремума функции f , необходимо, чтобы она являлась стационарной точкой этой функции.*

Существует класс функций, для которых необходимое условие экстремума (1.5) является и достаточным; об этом свидетельствует следующая теорема, доказательство которой опускается.

Теорема 1.4 (достаточное условие глобального безусловного экстремума). *Предположим, что функция f дифференцируема и вогнута (выпукла) на всем пространстве \mathbf{R}^n . Если в точке $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$ выполнено необходимое условие экстремума (1.5), т.е. если \mathbf{x}^* – стационарная точка функции f , то эта точка является точкой безусловного глобального максимума (соответственно минимума) функции f .*

На основе теоремы 1.3 можно предложить следующий путь решения экстремальной задачи на безусловный экстремум. В предположении, что точки экстремума существуют, следует найти все стационарные точки целевой функции. Для этого необходимо решить систему уравнений (1.6). Найденные точки будут «подозрительными» на оптимальные. Если полученное множество точек окажется «обозримым», то, сравнив значения целевой функции в найденных точках, нужно выделить среди них те, в которых целевая функция принимает наименьшее (наибольшее) значение. Если же дополнительно известно, что целевая функция вогнута (выпукла) на всем пространстве \mathbf{R}^n , то в соответствии с теоремой 1.4 найденные «подозрительные» на оптимальные точки будут точками безусловного глобального максимума (соответственно минимума).

Здесь, однако, необходимо сделать следующие замечания. Во-первых, для реализации описанного способа решения экстремальной задачи условие существования экстремальных точек является существенным (в этом убеждает простой пример функции одной переменной $y = x^3$). Во-вторых, может

статья, что процесс решения системы уравнений (1.6) окажется слишком сложным с вычислительной точки зрения. Наконец, множество стационарных точек не всегда является «обозримым»; в таких случаях процесс выделения оптимальных точек среди стационарных точек может сопровождаться значительными трудностями.

1.3.3. Условия безусловного экстремума второго порядка

Условия экстремума второго порядка содержат частные производные второго порядка целевой функции, образующие матрицу Гессе (см. п. 1.1.4).

Теорема 1.5 (необходимое условие локального безусловного экстремума).

Предположим, что функция f имеет непрерывные частные производные второго порядка в каждой точке некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^ \in \mathbf{R}^n$. Если \mathbf{x}^* — точка локального безусловного максимума (минимума) функции f , то имеет место равенство (1.5) и, кроме того, матрица Гессе $H(\mathbf{x}^*)$, вычисленная в точке \mathbf{x}^* , неположительно (неотрицательно) определена, т.е.*

$$\mathbf{y} \cdot H(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{y}^T \leq (\geq) 0 \text{ для всех } \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n.$$

Прежде чем формулировать достаточное условие безусловного экстремума, введем еще один тип экстремальных точек.

Пусть функция f определена на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$. Точку $\mathbf{x}^* \in X$ называют *точкой строгого максимума (строгого локального максимума)* функции f , если неравенство $f(\mathbf{x}^*) > f(\mathbf{x})$ выполняется для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ (соответственно для всех $\mathbf{x} \in X \cap U(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, где $U(\mathbf{x}^*)$ — некоторая окрестность точки \mathbf{x}^*).

Аналогичным образом определяются точки строгого минимума и строгого локального минимума. Все эти точки называют *точками строгого (локального) экстремума*.

Нетрудно понять, что точка строгого максимума (и строгого минимума) единственна.

Точка обычного экстремума не всегда бывает четко выраженной в том смысле, что иногда неясно, является ли она точкой максимума или точкой минимума. Например, каждая точка постоянной функции $f(\mathbf{x}) = \text{const}$ одновременно служит как точкой максимума, так и точкой минимума этой функции. Что касается точек строгого экстремума, то для них подобное положение невозможно. Точка строгого (локального) минимума не может быть одновременно и точкой строгого (локального) максимума; это следует прямо из определений этих точек.

Теорема 1.6 (достаточные условия строгого локального экстремума).
 Предположим, что функция f имеет непрерывные частные производные второго порядка в каждой точке некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$. Кроме того, допустим, что точка \mathbf{x}^* является стационарной точкой функции f . Тогда

1) если матрица Гессе

$$H(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

отрицательно определена, т.е. выполнено неравенство

$$\mathbf{y} \cdot H(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{y}^T < 0 \text{ для всех } \mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

то \mathbf{x}^* — точка строгого локального максимума функции f ;

2) если матрица Гессе $H(\mathbf{x}^*)$ положительно определена, т.е. выполнено неравенство

$$\mathbf{y} \cdot H(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{y}^T > 0 \text{ для всех } \mathbf{y} \neq \mathbf{0},$$

то \mathbf{x}^* — точка строгого локального минимума функции f ;

3) если же матрица Гессе $H(\mathbf{x}^*)$ такова, что при некоторых векторах $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n$ имеют место оба неравенства

$$\mathbf{y} \cdot H(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{y}^T < 0, \quad \mathbf{z} \cdot H(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{z}^T > 0,$$

то \mathbf{x}^* не является ни точкой локального максимума, ни точкой локального минимума функции f .

На практике проверку условий положительной или отрицательной определенности матрицы Гессе осуществляют с помощью критерия Сильвестра, известного из курса линейной алгебры. Он представляет собой необходимое и достаточное условие положительной (отрицательной) определенности квадратичной формы $\varphi = \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T$, где \mathbf{Q} — симметричная квадратная матрица размера $n \times n$, а \mathbf{x} — n -мерный вектор, записанный в виде строки.

Напомним, что указанная квадратичная форма φ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если неравенство $\mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T > (<) 0$ выполнено для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Нетрудно видеть, что квадратичная форма $\varphi = \mathbf{x} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^T$ положительно (отрицательно) определена в том и только в том случае, когда ее матрица \mathbf{Q} является положительно (отрицательно) определенной. Поэтому критерий Сильвестра применительно к матрице Гессе $H(\mathbf{x}^*)$ функции f может быть сформулирован следующим образом:

Для того чтобы матрица $H(\mathbf{x}^)$ была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры этой матрицы были положительны, т.е.*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_k^2} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Для того чтобы матрица $H(\mathbf{x}^)$ была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров этой матрицы чередовались следующим образом: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \cdot \Delta_n > 0$.*

Если f — функция двух переменных x_1 и x_2 , то

$$H(\mathbf{x}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix},$$

причем $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1}$. В этом случае

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Обозначим $A = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1^2}$, $B = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2 \partial x_1}$, $C = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2^2}$. Тогда

$$\Delta_1 = A, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

и с учетом критерия Сильвестра из теоремы 1.6 получаем следующий результат.

Следствие. Пусть функция f двух переменных имеет непрерывные частные производные второго порядка в каждой точке некоторой окрестности стационарной точки $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^2$. Тогда

- 1) если $A < 0$, $AC - B^2 > 0$, то \mathbf{x}^* – точка строгого локального максимума функции f ;
- 2) если $A > 0$, $AC - B^2 > 0$, то \mathbf{x}^* – точка строгого локального минимума функции f ;
- 3) если же $AC - B^2 < 0$, то \mathbf{x}^* не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума функции f .

Пример 1.1. Рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Сначала вычисляем частные производные этой функции и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Полученная система из двух уравнений имеет два решения – (1, 1) и (0, 0). Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 6y.$$

Для стационарной точки (1, 1) имеем $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$, так что $A > 0$, $AC - B^2 = 27 > 0$. Поэтому (1, 1) – точка строгого локального минимума.

Для второй стационарной точки (0, 0) получаем $A = C = 0$, $B = -3$. И поскольку $AC - B^2 = -9 < 0$, эта точка не является ни точкой локального максимума, ни точкой локального минимума.

Глобальные экстремумы здесь не существуют, так как

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x^3 \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow +\infty; \\ f(x, 0) &= x^3 \rightarrow -\infty \text{ при } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Замечание. В приведенном выше следствии разобраны все возможности как при $\Delta_2 = AC - B^2 < 0$, так и при $\Delta_2 > 0$. Однако в нем ничего не говорится о том случае, когда $\Delta_2 = 0$. Оказывается (простые примеры убеждают в этом), что при $\Delta_2 = 0$ ничего определенного о точке \mathbf{x}^* сказать нельзя, так как для одних целевых функций она может оказаться точкой экстремума, тогда как для других – она таковой не будет.

1.3.4. Необходимые и достаточные условия экстремума в задаче с ограничениями в форме равенств

Предметом изучения данного раздела является задача на экстремум функции f при ограничениях-равенствах $g_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, где $g_j : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$. Иначе говоря, рассматриваемая задача заключается в максимизации (минимизации) целевой функции f на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, которое задается следующим образом

$$X = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \}. \quad (1.7)$$

Тот факт, что экстремум ищется не на всем пространстве \mathbf{R}^n , а лишь на некотором его подмножестве X , не позволяет прямо использовать необходимые и достаточные условия экстремума, сформулированные ранее для задачи безусловной оптимизации. Тем не менее, для задачи на условный экстремум удастся получить условия экстремума, сходные с условиями безусловного экстремума, но для некоторой специальной функции, в которой участвует как целевая функция f , так и функции g_1, g_2, \dots, g_m , задающие множество X . Эта функция носит название *функции Лагранжа* и определяется равенством

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}),$$

где числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ образуют вектор $\boldsymbol{\lambda}$ и именуются *множителями Лагранжа*. Нетрудно видеть, что функция Лагранжа зависит от $n + m$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Теорема 1.7 (необходимое условие условного экстремума первого порядка). *Допустим, что функции f, g_1, g_2, \dots, g_m непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в каждой точке некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$, которая является точкой локального условного экстремума функции f на множестве X вида (1.7). Кроме того, предположим выполненным условие *регулярности*, состоящее в требовании линейной независимости векторов $\nabla g_1(\mathbf{x}^*), \nabla g_2(\mathbf{x}^*), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}^*)$. Тогда существует такой набор множителей Лагранжа $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$, что*

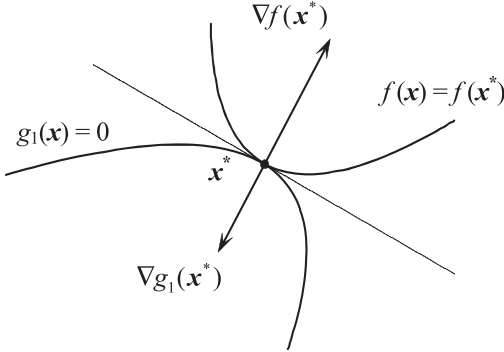


Рис. 1.12. Геометрическая интерпретация необходимого условия условного экстремума.

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

Опустив доказательство, приведем геометрическую интерпретацию необходимого условия (1.8) для простейшего случая, когда целевая функция f и единственная функция g_1 , входящая в ограничение, имеют лишь две переменные. В этом случае равенство (1.8) принимает вид

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \lambda_1^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

или

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = -\lambda_1^* \nabla g_1(\mathbf{x}^*) \quad (1.9)$$

Изобразим на плоскости (см. рис. 1.12) точку экстремума \mathbf{x}^* , две линии уровня функций f и g_1 , проходящие через эту точку, и векторы-градиенты $\nabla f(\mathbf{x}^*)$, $\nabla g_1(\mathbf{x}^*)$, приложенные к точке \mathbf{x}^* .

Линия уровня функции g_1 , проходящая через точку \mathbf{x}^* , задается уравнением $g_1(\mathbf{x}) = 0$, так как точка \mathbf{x}^* удовлетворяет равенству $g_1(\mathbf{x}^*) = 0$. Таким образом, задача на экстремум функции f при ограничении $g_1(\mathbf{x}) = 0$ геометрически состоит в отыскании среди всех точек кривой, задаваемой уравнением $g_1(\mathbf{x}) = 0$, таких точек, в которых целевая функция принимает минимальное или максимальное значение. Необходимое условие (1.9) геометрически означает коллинеарность векторов $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ и $\nabla g_1(\mathbf{x}^*)$. Таким образом, если точка \mathbf{x}^* является точкой (локального) условного экстремума, то градиенты целевой функции $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ и функции-ограничения $\nabla g_1(\mathbf{x}^*)$, вычисленные в этой точке экстремума, должны быть коллинеарными.

На рис. 1.12 указанные два вектора имеют противоположное направление, хотя коллинеарность допускает и их сонаправленность.

Как известно (см. п. 1.1.4), градиент функции перпендикулярен линии уровня данной функции, проходящей через точку, в которой вычисляется этот градиент. Точнее говоря, он перпендикулярен касательной к линии уровня, проходящей через указанную точку. С учетом этого можно дать еще одну геометрическую интерпретацию необходимого условия (1.9): линии уровня целевой функции и функции, задающей ограничение в форме равенства, которые

проходят через точку (локального) экстремума, имеют одну и ту же касательную в этой точке экстремума.

Пример 1.2. Рассмотрим задачу оптимизации функции трех переменных

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

при ограничениях

$$-2x_1 + x_2^2 = 1,$$

$$x_2 + x_3 = 1.$$

Составляем функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) &= \\ &= x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1 (-2x_1 + x_2^2 - 1) + \lambda_2 (x_2 + x_3 - 1) \end{aligned}$$

и приравниваем ее частные производные нулю:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + x_3 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = x_2 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -2x_1 + x_2^2 - 1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_2 + x_3 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Полученная система уравнений имеет два решения

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0, 1, 0), \quad \lambda^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, -1 \right),$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \left(-\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), \quad \lambda^{(2)} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3} \right).$$

Таким образом, найденные две точки $\mathbf{x}^{(1)}$ и $\mathbf{x}^{(2)}$ являются «подозрительными» на экстремальные. Для решения вопроса о том, будут ли эти точки действительно экстремальными, следует использовать достаточные условия условного экстремума, излагаемые далее.

Для функции Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

матрицу Гессе (по переменным x_1, x_2, \dots, x_n) будем обозначать через $H_L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$, т.е.

$$H_L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

В терминах этой матрицы в следующей теореме, доказательство которой можно найти в [4, т.2], формулируются необходимые, а также достаточные условия экстремума для задачи оптимизации функции f на множестве X вида (1.7).

Теорема 1.8 (необходимое и достаточное условия локального экстремума второго порядка). Пусть все функции f, g_1, g_2, \dots, g_m имеют непрерывные частные производные второго порядка в каждой точке некоторой окрестности точки $\mathbf{x}^* \in X$, причем векторы $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$, $j = 1, 2, \dots, m$, образуют линейно независимую систему.

Необходимое условие экстремума. Если \mathbf{x}^* является точкой локального условного максимума (минимума) функции f на множестве X вида (1.7), то существуют множители Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$, такие, что имеет место равенство (1.8) и, кроме того, неравенство

$$\mathbf{y} \cdot H_L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \cdot \mathbf{y}^T \leq (\geq) 0$$

выполняется для всех векторов-строк $\mathbf{y} \in Y$, где

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \mid \langle \nabla g_j(\mathbf{x}^*), \mathbf{y} \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \right\}.$$

Достаточное условие экстремума. Если для точки $\mathbf{x}^* \in X$ и некоторого вектора $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ справедливо равенство (1.7) и, кроме того, неравенство

$$\mathbf{y} \cdot H_L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \cdot \mathbf{y}^T < (>) 0$$

выполняется для всех $\mathbf{y} \in Y$, $\mathbf{y} \neq 0$, то \mathbf{x}^* — точка локального условного максимума (минимума) функции f на множестве X .

Пример 1.2 (продолжение). Продолжим начатое ранее решение задачи оптимизации функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

при ограничении

$$-2x_1 + x_2^2 = 1,$$

$$x_2 + x_3 = 1.$$

Вычислим матрицу Гессе H_L для функции Лагранжа:

$$H_L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda_1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что выше были найдены две «подозрительные» на экстремальные точки

$$\mathbf{x}^{(1)} = (0, 1, 0) \text{ и } \mathbf{x}^{(2)} = \left(-\frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

вместе с соответствующими векторами

$$\boldsymbol{\lambda}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, -1\right) \text{ и } \boldsymbol{\lambda}^{(2)} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right).$$

Для первой точки имеем

$$H_L(\mathbf{x}^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_1(\mathbf{x}^{(1)}) = (-2, 2, 0),$$

$$\nabla g_2(\mathbf{x}^{(1)}) = (0, 1, 1).$$

Множество Y , которое участвует в формулировке теоремы 1.8, представляет собой множество решений системы из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} -2y_1 + 2y_2 = 0, \\ y_2 + y_3 = 0. \end{cases}$$

С использованием этих равенств можно записать

$$\mathbf{y} \cdot H_L(\mathbf{x}^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}^{(1)}) \cdot \mathbf{y}^T = 2y_1 y_2 + y_2^2 + 2y_2 y_3 = y_2^2 > 0$$

для всех $y_2 \neq 0$. Следовательно, точка $\mathbf{x}^{(1)}$ является точкой локального условного минимума.

Аналогично для второй точки $\mathbf{x}^{(2)}$ получаем

$$H_L(\mathbf{x}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_1(\mathbf{x}^{(2)}) = (-2, 2/3, 0),$$

$$\nabla g_2(\mathbf{x}^{(2)}) = (0, 1, 1).$$

В этом случае множество Y задается следующей системой линейных уравнений

$$\begin{cases} -2y_1 + \frac{2}{3}y_2 = 0, \\ y_2 + y_3 = 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$\mathbf{y} \cdot H_L(\mathbf{x}^{(2)}, \boldsymbol{\lambda}^{(2)}) \cdot \mathbf{y}^T = 2y_1y_2 + \frac{1}{3}y_2^2 + 2y_2y_3 = -y_2^2 < 0$$

для всех $y_2 \neq 0$. Согласно достаточному условию теоремы 1.8 это означает, что $\mathbf{x}^{(2)}$ — точка локального условного максимума.

Замечание. Разобранный пример задачи на условный экстремум иллюстрирует применение результатов теорем 1.7 и 1.8. Следует отметить, что изложенный способ решения данной задачи не является рациональным. Значительно более простое решение состоит в следующем. Используя ограничения-равенства, переменные x_1 и x_3 можно выразить через x_2 :

$$x_1 = \frac{x_2^2 - 1}{2}, \quad x_3 = 1 - x_2$$

Подставив найденные выражения в формулу, задающую целевую функцию f , получим

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 = \frac{x_2^3}{2} - x_2^2 + \frac{x_2}{2}$$

в виде функции одной переменной x_2 . Таким образом, исходная задача на условный экстремум сведена к задаче на безусловный экстремум функции одной переменной. Приравнивая производную этой функции нулю, получим квадратное уравнение

$$f' = \frac{3}{2}x_2^2 - 2x_2 + \frac{1}{2} = 0,$$

имеющее два корня $x'_2 = 1$, $x''_2 = \frac{1}{3}$. Поскольку $f''(1) = 1 > 0$, $f''(1/3) = -1 < 0$, то в первой точке достигается локальный минимум, а во второй — локальный максимум.

1.3.5. Необходимые и достаточные условия экстремума в задаче с ограничениями в форме неравенств

Рассмотрим задачу минимизации функции f при ограничениях в форме неравенств, т.е. на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, которое имеет вид

$$X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m \right\}, \tag{1.10}$$

где $g_j : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Выпишем функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x}),$$

где числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ образуют вектор множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$.

Пусть $\mathbf{x}^* \in X$. Ограничение $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ называют *активным в точке \mathbf{x}^** , если $g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ и *неактивным в точке \mathbf{x}^** , если $g_j(\mathbf{x}^*) < 0$. Рис. 1.13 иллюстрирует введенные понятия.

Теорема 1.9 (необходимое условие Куна-Таккера в дифференциальной форме). Пусть все функции f, g_1, g_2, \dots, g_m дифференцируемы в точке $\mathbf{x}^* \in X$. Если среди функций g_1, g_2, \dots, g_m имеется хотя бы одна нелинейная, то дополнительно

предполагается выполненным условие регулярности: векторы $\nabla g_j(\mathbf{x}^*)$, отвечающие активным в точке \mathbf{x}^* ограничениям образуют линейно независимую систему.

Для того чтобы $\mathbf{x}^* \in \mathbf{R}^n$ являлась точкой локального условного минимума функции f на множестве X вида (1.10), необходимо, чтобы существовали такие неотрицательные множители Лагранжа $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$, что имеет место равенство

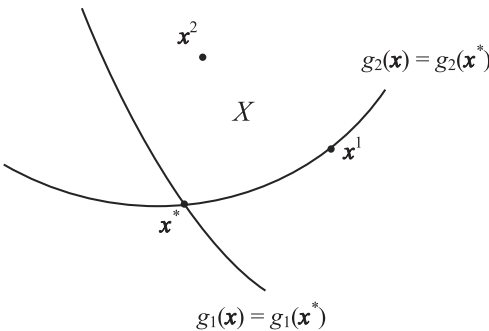


Рис. 1.13. В точке \mathbf{x}^* активны оба ограничения; в точке \mathbf{x}^1 активно второе ограничение; в точке \mathbf{x}^2 оба ограничения неактивны.

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \nabla g_j(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

и, кроме того,

$$\lambda_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.11)$$

$$g_j(\mathbf{x}^*) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.12)$$

Неравенства (1.12) требуют, чтобы точка \mathbf{x}^* принадлежала допустимому множеству X .

Равенства (1.11) называют *условием дополнительной нежесткости*. Согласно этому условию все множители Лагранжа, отвечающие неактивным ограничениям, должны равняться нулю. Если все ограничения в точке \mathbf{x}^* оказываются неактивными, то $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \dots = \lambda_m^* = 0$ и необходимое условие теоремы 1.9 сводится к необходимому условию безусловного локального экстремума из теоремы 1.3.

Теорема 1.10 (достаточное условие оптимальности Куна-Таккера в дифференциальной форме). *Предположим, что все функции f, g_1, g_2, \dots, g_m дифференцируемы в точке \mathbf{x}^* и выпуклы на \mathbf{R}^n . Для того чтобы \mathbf{x}^* была точкой глобального условного минимума достаточно, чтобы для некоторых неотрицательных множителей Лагранжа $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$ были выполнены условия (1.8), (1.11), (1.12).*

1.3.6. Условия экстремума в седловой форме

Рассмотрим задачу минимизации

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in D}, \quad (1.13)$$

при ограничениях

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.14)$$

где $D \subset \mathbf{R}^n$, $g_j: D \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Нередко $D = \mathbf{R}^n$ или

$$D = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Сформулированной задаче математического программирования сопоставим функцию Лагранжа

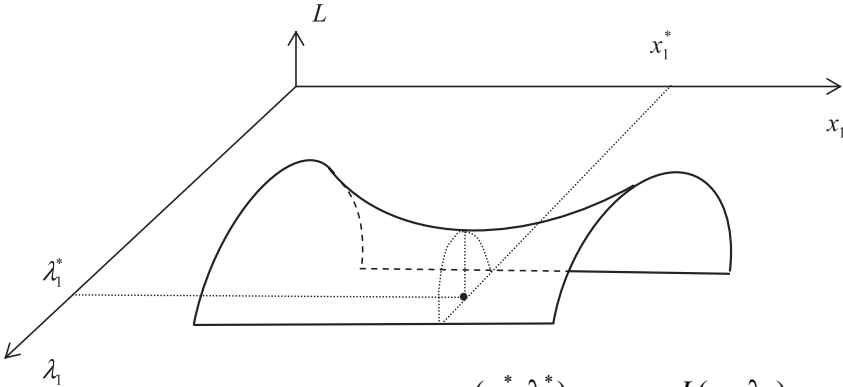


Рис. 1.14. Седловая точка (x_1^*, λ_1^*) функции $L(x_1, \lambda_1)$.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x),$$

которую будем рассматривать при $x \in D$ и

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \Lambda = \{\lambda \mid \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Говорят, что пара (x^*, λ^*) образует *седловую точку* функции Лагранжа $L(x, \lambda)$, если неравенства

$$L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*) \quad (1.15)$$

выполняются для всех $x \in D$ и всех $\lambda \in \Lambda$; иными словами, функция $L(x, \lambda^*)$ достигает минимума на множестве D в точке x^* , а функция $L(x^*, \lambda)$ — максимума на множестве Λ в точке λ^* .

Если функция Лагранжа зависит только от двух переменных, то ее график сходен с поверхностью гиперболического параболоида (рис. 1.14). Эта поверхность действительно напоминает седло, что и послужило причиной происхождения наименования *седловой* точки.

Теорема 1.11 (условия оптимальности Куна-Таккера в седловой форме).

Достаточное условие. Если пара (x^*, λ^*) , где $x^* \in D$ и $\lambda^* \in \Lambda$, образует седловую точку функции Лагранжа $L(x, \lambda)$, то x^* — точка глобального минимума.

Необходимое условие. Пусть множество D выпукло, все функции f, g_1, g_2, \dots, g_m выпуклы на нем и выполнено **условие регулярности Слейтера**: существует точка $\bar{x} \in D$, для которой $g_j(\bar{x}) < 0, j = 1, 2, \dots, m$. Для того чтобы $x^* \in D$ была точкой глобального минимума в задаче математического программирования (1.13)-(1.14) необходимо, чтобы существовал вектор множителей Лагранжа

$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*) \in \Lambda$, при котором пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.

Доказательство достаточного условия. По условию (x^*, λ^*) является седловой точкой. Запишем левое неравенство (1.15) из определения седловой точки:

$$f(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x^*) \leq L(x^*, \lambda^*) \quad \text{для всех } \lambda \in \Lambda.$$

Если здесь предположить, что для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ верно неравенство $g_j(x^*) > 0$, то для достаточно большого λ_j это неравенство нарушится. Следовательно,

$$g_j(x^*) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.16)$$

Теперь рассмотрим правое неравенство из (1.15):

$$L(x^*, \lambda^*) \leq f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(x) \quad \text{для всех } x \in D. \quad (1.17)$$

Для любого $x \in D$, удовлетворяющего (1.16), имеем

$$\lambda_j^* g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.18)$$

Поэтому из левого неравенства (1.15) при $\lambda = 0$ следует равенство

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^* g_j(x^*) = 0.$$

Учитывая это равенство, а также неравенства (1.18), из (1.17) получаем

$$L(x^*, \lambda^*) = f(x^*) \leq f(x)$$

для всех $x \in D$, удовлетворяющих (1.16). Это означает, что x^* — точка глобального минимума в задаче математического программирования (1.13)-(1.14) ▲

Вопросы и упражнения к главе 1

- 1) Сформулируйте задачу оптимизации.
- 2) Что значит – решить задачу оптимизации?
- 3) Какие решения задачи оптимизации вы знаете?
- 4) Чем отличаются задачи на условный и безусловный экстремум?
- 5) Что дают для решения задачи оптимизации необходимые условия экстремума, а что – достаточные?
- 6) Какие бывают необходимые и достаточные условия в зависимости от целевой функции?
- 7) Какие необходимые условия первого порядка безусловного экстремума вы знаете?
- 8) Что такое стационарная точка? Каким образом она связана с решением задачи оптимизации?
- 9) Сформулируйте достаточные условия безусловного экстремума второго порядка.
- 10) Запишите общий вид функции Лагранжа.
- 11) Приведите определение седловой точки функции Лагранжа.
- 12) Сформулируйте необходимое условие условного экстремума первого порядка.
- 13) Как выглядят условия экстремума в седловой форме?
- 14) Изобразите на плоскости \mathbf{R}^2 линии уровня $\{(x, y) \mid f(x, y) = C\}$, где $C = 0, 1, 2$, следующих функций ($a, b > 0$):
 - i) $f(x, y) = ax + by$,
 - ii) $f(x, y) = ax^2 + by^2$,
 - iii) $f(x, y) = \min(x, y)$,
 - iv) $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$.
- 15) Вычислите градиент $\nabla f(x, y)$ и матрицу Гессе $H(x, y)$ функции f в точке (x_0, y_0) для следующих функций
 - i) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
 - ii) $f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$,
 - iii) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
- 17) Пусть f, g – числовые функции, заданные на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$. Докажите следующие соотношения

$$i) \min_{x \in X} (af(x) + b) = a \min_{x \in X} f(x) + b,$$

где $a > 0$ и b – любое число,

$$ii) \min_{x \in X} (f(x) + g(x)) \geq \min_{x \in X} f(x) + \min_{x \in X} g(x),$$

$$iii) \max_{x \in X} (f(x) + g(x)) \leq \max_{x \in X} f(x) + \max_{x \in X} g(x),$$

в предположении, что участвующие в них минимумы и максимумы существуют. Приведите примеры, в которых указанные нестрогие неравенства выполняются как строгие неравенства, а также примеры, в которых приведенные нестрогие неравенства выполняются как равенства.

- 18) Пусть функция f принимает только положительные значения на множестве X . Установите, что минимизация (максимизация) функции f на множестве X равносильна минимизации (максимизации) на X функций

$$f^\alpha(x) \ (\alpha > 0), \quad -1/f(x), \quad \log_\beta f(x) \ (\beta > 0).$$

- 19) Пусть g_1, \dots, g_k – непрерывные функции, заданные на всем пространстве \mathbf{R}^n . Докажите, что множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} g_1(x) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ g_k(x) = 0, \end{cases}$$

а также множество решений системы нестрогих неравенств

$$\begin{cases} g_1(x) \leq 0, \\ \dots\dots\dots \\ g_k(x) \leq 0, \end{cases}$$

являются замкнутыми, а множество решений системы строгих неравенств

$$\begin{cases} g_1(x) < 0, \\ \dots\dots\dots \\ g_k(x) < 0, \end{cases}$$

является открытым. Сохранится ли в общем случае указанное положение, если среди нестрогих неравенств будет присутствовать одно строгое неравенство, а среди строгих неравенств появится одно нестрогое неравенство?

20) Установите, что многомерный параллелепипед

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\},$$

где a_i, b_i – фиксированные числа, представляет собой компактное множество.

21) Докажите, что замкнутый шар

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon\}$$

с центром в точке \mathbf{x}^* и радиусом $\varepsilon > 0$ является компактом.

22) Докажите, что пересечение любого числа выпуклых множеств в \mathbf{R}^n является выпуклым множеством.

23) Проверьте, что гиперплоскость $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \alpha\}$, где $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^n, \alpha \in \mathbf{R}$, а также полупространства $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \geq \alpha\}$ и $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \leq \alpha\}$ представляют собой неограниченные замкнутые выпуклые множества.

24) Убедитесь в выпуклости следующих множеств на плоскости

i) $\{(x, y) \mid x^2 \leq y\},$

ii) $\{(x, y) \mid xy \geq 1, y > 0\},$

iii) $\{(x, y) \mid \sin x \geq y, 0 \leq x \leq \pi\},$

iv) $\{(x, y) \mid e^x \leq y\}.$

25) Докажите, что ε -окрестность точки $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством.

26) *Задача об оптимальном сроке подготовленности студента к экзамену.* До экзамена по математике осталось 4 дня. При подготовке к экзамену студент И. Ванов за x дней выучивает $\frac{x}{x+0.5}$ -ю часть курса, но при этом забывает $0.01x$ -ю часть. Будет ли этот студент к моменту сдачи экзамена подготовлен наилучшим образом?

27) *Задача о наиболее экономичной консервной банке.* Консервная банка фиксированного объема V имеет форму кругового цилиндра высоты h и радиусом основания r . Требуется определить такое соотношение между величинами h и r , при котором

i) на изготовление банки понадобится наименьшее возможное количество жести;

ii) длина сварочного шва, проходящего по боковой поверхности перпендикулярно основанию, а также по окружностям дна и крышки, будет минимальной.

28) *Задача о прокладке шоссе.* Завод A нужно соединить шоссеиной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен поселок B . Расстояние AC от завода до железной дороги равно a , а расстояние BC по

железной дороге равно b . Стоимость перевозок грузов по шоссе в k раз ($k > 1$) выше стоимости перевозок по железной дороге. В какую точку D отрезка BC следует провести шоссе от завода, чтобы стоимость перевозок грузов от завода A к поселку B была наименьшей?

- 29) Каким должен быть котел, состоящий из цилиндра, завершеного полусферами, со стенками заданной толщины, чтобы при заданной вместимости v на его изготовление пошло наименьшее количество материала?
- 30) Исследуйте функцию $u = u(x, y)$ двух переменных на экстремум, если

i) $u = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$,

ii) $u = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1^2$,

iii) $u = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$,

iv) $u = x^4 + y^4 - 2x^2$,

v) $u = \frac{x+y}{xy} - xy$,

vi) $u = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$,

vii) $u = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$.

- 31) Найдите условные экстремумы функции $z = f(x, y)$, если

i) $z = xy, \quad x + y - 1 = 0$,

ii) $z = x^2 + y^2, \quad 3x + 2y = 6$,

iii) $z = x^2 - y^2, \quad 2x - y = 3$,

iv) $z = xy, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

v) $z = x^2 - y^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

vi) $z = xy^2, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Глава 2. Линейное программирование

2.1. Задачи линейного программирования и их свойства

2.1.1. Общая задача линейного программирования

Пусть имеется линейная целевая функция n переменных x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n, \quad (2.1)$$

где c_1, c_2, \dots, c_n — некоторые числовые коэффициенты, образующие вектор \mathbf{c} . Рассмотрим систему линейных неравенств и уравнений

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\geq b_i, & i = 1, 2, \dots, k_1, \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n &\leq b_j, & j = k_1 + 1, \dots, k_2, \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n &= b_l, & l = k_2 + 1, \dots, k_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь, в частности, могут быть только равенства (при $k_1 = k_2 = 0$) или только неравенства (при $k_2 = k_3$). Множество всех n -мерных векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих системе (2.2), образует *множество допустимых решений*, или короче — *допустимое множество*.

Общая задача линейного программирования заключается в максимизации (или минимизации) линейной целевой функции (2.1) при ограничениях (2.2). Иначе говоря, в этой задаче среди всех векторов допустимого множества, задаваемого системой (2.2), требуется найти такой, в котором линейная функция (2.1) принимает свое максимальное (или минимальное) возможное значение.

Если система (2.2) не имеет решений, то допустимое множество является пустым. В этом случае сформулированная задача линейного программирования заведомо не имеет оптимального решения.

В другом крайнем случае каждый вектор пространства \mathbf{R}^n удовлетворяет системе (2.2), т.е. ограничений по существу нет, и допустимое множество совпадает с \mathbf{R}^n . Тогда задача линейного программирования тоже не будет иметь оптимального решения, так как линейная функция (2.1) на всем пространстве \mathbf{R}^n не является ограниченной ни сверху, ни снизу. Отсюда следует, что какие-то ограничения (в форме равенств и/или неравенств) в задаче линейного программирования обязательно должны присутствовать.

Нередко среди ограничений задачи линейного программирования встречаются условия неотрицательности переменных: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

2.1.2. Геометрия задачи линейного программирования

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = x_1 + x_2 \rightarrow \max ,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3 ,$$

$$2x_1 - x_2 \leq 1 ,$$

$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 ,$$

где вектор \mathbf{c} является градиентом целевой функции $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle$ и имеет вид $\mathbf{c} = (1, 1)$.

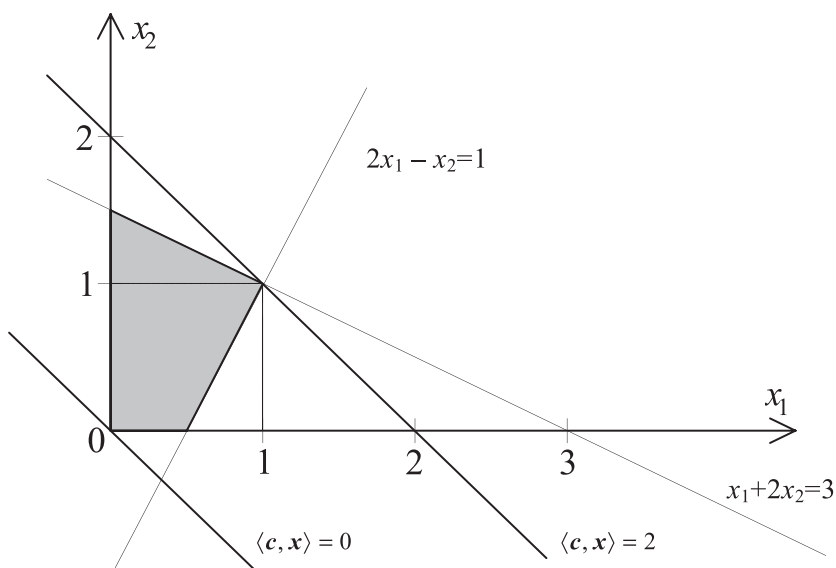


Рис. 2.1. Пример задачи линейного программирования.

Допустимым множеством в данной задаче является плоский четырехугольник (см. рис. 2.1). Линии уровня целевой функции, т.е. множество точек плоскости, удовлетворяющих равенству $\langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = x_1 + x_2 = C$ ($C = \text{const}$), образуют семейство параллельных прямых, перпендикулярных вектору $\mathbf{c} = (1, 1)$. На рис. 2.1 изображены две линии уровня, соответствующие двум значениям $C = 0$ и $C = 2$.

Нас интересует максимальное значение линейной целевой функции на четырехугольнике. Такое значение дает линия уровня, имеющая одну общую

(общие) точку (точки) с данным четырехугольником и являющаяся крайней в направлении возрастания целевой функции, т.е. в направлении вектора c .

Как нетрудно видеть, для данной задачи это будет прямая $x_1 + x_2 = 2$. Следовательно, максимальное значение целевой функции равно 2 и достигается оно в единственной точке – вершине четырехугольника $(1, 1)$.

В рассмотренном примере допустимым множеством является четырехугольник. В общем случае при $n = 2$ допустимое множество может представлять собой точку, луч, отрезок (рис. 2.2 (а)), многоугольник (рис. 2.2 (б)), быть неограниченным (рис. 2.2 (в,г)) или не иметь ни одной вершины (рис. 2.3 (г)).

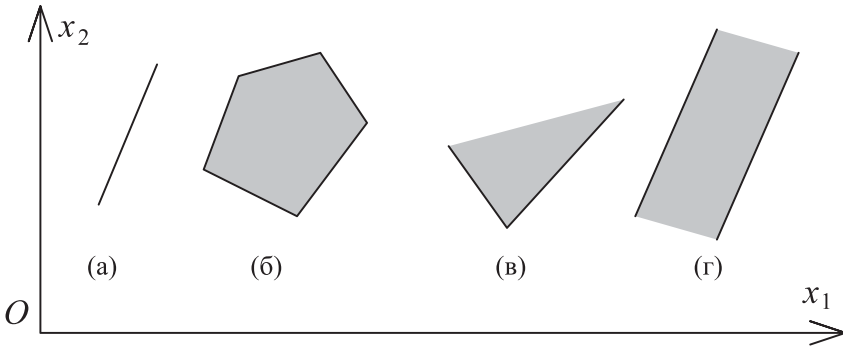


Рис. 2.2. Различные варианты допустимых множеств на плоскости.

Из геометрических соображений ясно, что в случае непустого плоского многоугольника точкой максимума линейной функции обязательно должна быть хотя бы одна вершина многоугольника (рис. 2.3). Этот факт играет важную роль и в более общем случае $n > 2$.

Допустимое множество, задаваемое ограничениями (2.2), представляет собой пересечение конечного числа замкнутых полупространств и гиперплоскостей. Такое множество называют *многогранным*. Оно выпукло и замкнуто. В частности, оно может оказаться пустым или неограниченным. Ограниченное многогранное множество называют *многогранником*. Например, *многомерный параллелепипед*

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

дает простейший пример многогранника.

Точку многогранного множества, если она не лежит внутри ни одного из отрезков, целиком принадлежащих данному множеству, называют *вершиной*.

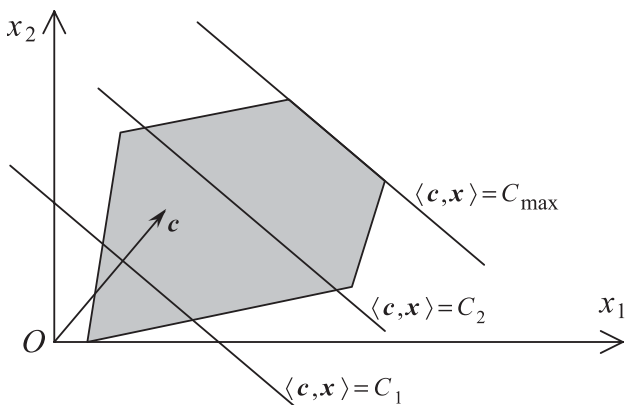


Рис. 2.3. Геометрия задачи линейного программирования на плоскости.

Известно, что *если многогранное множество имеет вершины, то их не более чем конечное число.*

В соответствии с теоремой Вейерштрасса линейная функция всегда достигает своего максимального и минимального значений на многограннике. Если же допустимое множество не ограничено, то указанные значения могут и не достигаться. В общем случае необходимым условием достижения максимального (минимального) значения является ограниченность целевой функции сверху (снизу). Оказывается, для задачи линейного программирования это условие является и достаточным. А именно, имеет место следующий результат: *если линейная целевая функция (2.1) ограничена сверху (снизу) на непустом допустимом множестве (2.2), то она на этом множестве достигает своего максимального (минимального) значения.*

Выше было отмечено, что среди точек максимума (и минимума) линейной функции $y = c_1x_1 + c_2x_2$ на плоском многоугольнике обязательно должна быть хотя бы одна вершина этого многоугольника. Аналогичное утверждение имеет место и в общем случае: *если допустимое множество (2.2) имеет вершины, то среди точек максимума (минимума) всегда будет по крайней мере одна из вершин.*

На основе последнего утверждения можно предложить следующий способ решения задачи линейного программирования: сначала определить все вершины допустимого многогранного множества (это в принципе осуществимо, так как число вершин конечно), а затем среди найденных вершин выбрать ту, в которой целевая функция принимает наибольшее (наименьшее)

значение. Таким способом задача линейного программирования в принципе может быть решена за некоторое ограниченное время.

Предложенный метод не вызывает принципиальных возражений, однако всерьез о нем говорить не приходится, так как количество вершин в реальных задачах оказывается настолько большим, что их перебор даже с помощью современных компьютеров может потребовать непомерно большого времени.

В излагаемом далее симплекс-методе решения задачи линейного программирования также производится перебор вершин многогранного множества, но этот перебор осуществляется целенаправленно, что позволяет исключить из рассмотрения значительное количество вершин, заведомо не являющихся оптимальными.

2.1.3. Каноническая задача линейного программирования

Поскольку множество точек минимума целевой функции $y = \langle c, x \rangle$ совпадает с множеством точек максимума функции $y = -\langle c, x \rangle$, далее ограничим рассмотрение лишь задачей максимизации.

Формулируемый ниже симплекс-метод приспособлен для решения *канонической задачи линейного программирования*:

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle &\rightarrow \max, \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ – вектор-столбец коэффициентов целевой функции; $A = (a_{ij})$ – прямоугольная матрица размера $k \times n$, называемая *матрицей коэффициентов ограничений*; $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)^T$ – вектор-столбец ограничений и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-столбец переменных (неизвестных). Запись $x \geq 0$ означает выполнение неравенств $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

В развернутой форме каноническая задача имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n &\rightarrow \max, \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n &= b_k, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.3')$$

Ясно, что каноническая задача линейного программирования представляет собой некоторый специальный случай общей задачи линейного программирования из п. 2.1.1. С другой стороны, *любую задачу линейного программирования можно привести к каноническому виду.*

Действительно, ограничение типа неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ можно записать в виде равенства

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i,$$

если ввести дополнительную неотрицательную переменную x_{n+1} .

Неравенство $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ аналогично сводится к равенству

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i$$

с дополнительной неотрицательной переменной x_{n+1} .

В том случае, когда на переменную x_i не наложено условие неотрицательности, ее можно заменить разностью двух новых неотрицательных переменных x'_i и x''_i : $x_i = x'_i - x''_i$. Такая замена правомерна, поскольку любое число может быть представлено в виде разности некоторых двух неотрицательных чисел ▲

В соответствии с доказанным общая задача линейного программирования эквивалентна канонической задаче линейного программирования, в которой число переменных может быть больше числа переменных общей задачи. Это обстоятельство позволяет ограничить последующее рассмотрение лишь канонической задачей.

Каноническую задачу линейного программирования (2.3') можно еще сформулировать так: среди всех неотрицательных решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k \end{aligned} \tag{2.4}$$

найти такое, при котором целевая функция $\langle c, x \rangle$ достигает своего максимального значения. Если система уравнений (2.4) несовместна или не имеет неотрицательных решений, то и каноническая задача (2.3') не имеет оптимального решения. В том случае, когда система (2.4) имеет единственное неотрицательное решение, это решение, очевидно, является и оптимальным.

Поэтому собственно о задаче оптимизации (2.3') имеет смысл говорить лишь тогда, когда система линейных уравнений (2.4) имеет более чем одно неотрицательное решение.

Предполагая, что из системы уравнений (2.4) исключены «лишние» уравнения, которые выражаются в виде линейной комбинации остальных, всегда при необходимости можно считать, что ранг матрицы системы (2.4) равен числу уравнений, т.е. $\text{rang } A = k$.

2.2. Симплекс-метод

2.2.1. Идея симплекс-метода

Напомним, что основу распространенного *метода Гаусса* решения систем линейных уравнений составляет применение следующих элементарных преобразований:

- 1) умножение какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к одному уравнению любого другого, предварительно умноженного на какое угодно число;
- 3) перемена местами двух уравнений.

Как известно из линейной алгебры, *элементарные преобразования не изменяют множества решений системы линейных уравнений*.

Поясним идею симплекс-метода на простом примере. Рассмотрим следующую каноническую задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} y &= -x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Поставим в соответствие этой задаче следующую систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} y + x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

При помощи элементарных преобразований от этой системы можно прийти к системе

$$y - 3x_3 = -7, \tag{2.6'}$$

$$x_1 + 3x_3 = 4, \tag{2.6''}$$

$$x_2 + x_3 = 3. \tag{2.6'''}$$

Действительно, уравнение (2.6''') – это сумма второго и третьего уравнений из (2.5); (2.6'') является суммой второго уравнения из (2.5) и полученного уравнения (2.6'''); (2.6') – это разность первого уравнения из (2.5) и суммы уравнений (2.6''), (2.6''').

Нетрудно увидеть решение $y = -7$, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ системы (2.6') – (2.6'''), а значит, и системы (2.5), которое благодаря неотрицательности всех компонент является допустимым. Величина y – это значение исходной целевой функции. Так как $y = 3x_3 - 7$ (см. (2.6')), то при увеличении x_3 величина y возрастает. Мы стремимся получить наибольшее возможное значение y , поэтому увеличим x_3 настолько, насколько это окажется возможным. Переменная x_3 должна удовлетворять равенствам (2.6'') и (2.6'''); следовательно, увеличивать ее неограниченно нельзя, иначе x_1 и x_2 станут отрицательными. Здесь $x_1 = 4 - 3x_3$ и $x_2 = 3 - x_3$. Поэтому наибольшее значение x_3 , при котором x_1 и x_2 неотрицательны, определяется следующим образом:

$$x_3 = \min\{4/3, 3/1\} = 4/3.$$

Положим $x_3 = 4/3$. Тогда из (2.6'') следует $x_1 = 0$. При помощи элементарных преобразований приведем систему (2.6') – (2.6''') к виду

$$\begin{aligned} y + x_1 &= -3, \\ \frac{1}{3}x_1 + x_3 &= \frac{4}{3}, \\ -\frac{1}{3}x_1 + x_2 &= \frac{5}{3}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

в котором легко угадывается допустимое решение $y = -3$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$ с полученными ранее значениями переменных x_1 и x_3 . Здесь $y = -x_1 - 3$, поэтому с увеличением x_1 (а уменьшать x_1 нельзя, так как ее значения не должны быть отрицательными) значение y уменьшается. Следовательно, значение $y = -3$ целевой функции увеличить невозможно, а значит, оно является максимальным. Ему отвечает оптимальное решение $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$. Задача успешно решена.

2.2.2. Алгоритм симплекс-метода

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования

$$\begin{aligned}
 y = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle &\rightarrow \max, \\
 A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\
 \mathbf{x} &\geq \mathbf{0},
 \end{aligned}$$

в которой система уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (где $\text{rang } A = k < n$) в результате применения элементарных преобразований уже приведена к виду

x_1	$+ a_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$	(2.8)
x_2	$+ a_{2,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$	
.....	
x_k	$+ a_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{kn}x_n = b_k,$	

причем $b_i \geq 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, k$. Случай, когда такое преобразование выполнить трудно, разбирается в следующем пункте.

Прибавив к уравнению $y - \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = 0$ все k уравнений (2.8), предварительно умноженные на числа c_1, c_2, \dots, c_k соответственно, получим уравнение для y , в котором все переменные x_1, x_2, \dots, x_k отсутствуют (однако может появиться свободный член).

Переобозначая $y = x_0, b_i = a_{i0}, i = 1, 2, \dots, k$, запишем уравнение, содержащее x_0 , вместе с системой (2.8) окончательно в виде:

x_0	$+ a_{0,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{0n}x_n = a_{00},$	(2.9)
x_1	$+ a_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n = a_{10},$	
x_2	$+ a_{2,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{2n}x_n = a_{20},$	
.....	
x_k	$+ a_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{kn}x_n = a_{k0}.$	

Здесь $a_{0j} = \sum_{m=1}^k c_m a_{mj} - c_j, j = k+1, \dots, n; a_{00} = \sum_{m=1}^k c_m b_m.$

О системе линейных уравнений (2.9) говорят, что она имеет *диагональный вид* или является *диагональной формой* относительно переменных x_0, x_1, \dots, x_k . Решением этой системы (без учета уравнения, содержащего x_0) является набор чисел

$$x_i = a_{i0}, i = 1, 2, \dots, k; x_{k+1} = \dots = x_n = 0, \tag{2.10}$$

который называется *базисным решением*, а переменные x_1, x_2, \dots, x_k — *базисными переменными*. Благодаря предположению о неотрицательности компонент вектора \mathbf{b} базисное решение является допустимым.

Если среди коэффициентов $a_{10}, a_{20}, \dots, a_{k0}$ имеются нулевые, то соответствующие компоненты допустимого базисного решения также равны нулю. В таком случае говорят о *вырожденном* базисном решении.

Заметим, что базисным переменным x_1, x_2, \dots, x_k соответствуют первые k столбцов матрицы A :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые, очевидно, линейно независимы. Это наблюдение положено в основу следующего определения.

Пусть $\text{rang } A = k$, $k \leq n$. В этом случае в матрице A , столбцы которой обозначим через A_1, A_2, \dots, A_n , имеется k линейно независимых столбцов. Обозначим через $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}\}$ какой-нибудь набор k линейно независимых столбцов матрицы A . Решение $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ называется *базисным*, если $x_j^* = 0$ для всех $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. В случае, когда компоненты вектора \mathbf{x}^* являются еще и неотрицательными, этот вектор называют *допустимым базисным решением*.

Замечание. Оказывается, что допустимые базисные решения — это не что иное, как вершины многогранного множества, задаваемого условиями $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Систему уравнений (2.9) обычно представляют в виде табл. 1. Каждая строка таблицы задает соответствующее уравнение системы (2.9), свободный член которого записан в самом левом (нулевом) столбце. Слева от таблицы записаны текущие базисные переменные. Столбцы, отвечающие базисным переменным, образуют единичную подматрицу таблицы.

Таблица 1. Симплекс-таблица, соответствующая системе уравнений (2.9).

	x_1	x_2		x_k	x_{k+1}		x_n	
x_0	a_{00}	0	0	...	0	$a_{0,k+1}$...	a_{0n}
x_1	a_{10}	1	0	...	0	$a_{1,k+1}$...	a_{1n}
x_2	a_{20}	0	1	...	0	$a_{2,k+1}$...	a_{2n}
\vdots
x_k	a_{k0}	0	0	...	1	$a_{k,k+1}$...	a_{kn}

Табл. 1 называют *симплекс-таблицей*.

Следует отметить, что исходная каноническая задача линейного программирования может быть приведена к диагональному виду относительно x_0 и каких-то других k переменных из набора x_1, x_2, \dots, x_n (не обязательно относительно первых k переменных). В этом случае будут какие-то другие базисные переменные, а столбцы, отвечающие этим базисным переменным, располагаясь в соответствующих колонках симплекс-таблицы, образуют подматрицу, отличающуюся от единичной лишь перестановкой столбцов.

В любом случае *текущим базисным решением* будем называть такое решение, в котором все небазисные переменные имеют нулевое значение, а базисные переменные равны соответствующим элементам нулевого столбца.

Например, системе (2.7) отвечает табл. 2, в которой текущим базисным решением является $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = \frac{4}{3}$.

Таблица 2. Симплекс-таблица, отвечающая системе уравнений (2.7).

	x_1	x_2	x_3
	-3	1	0
x_3	4/3	1/3	0
x_2	5/3	-1/3	1

Алгоритм симплекс-метода начинает свою работу с таблицы, которая соответствует диагональной форме относительно x_0 и некоторых k базисных переменных из полного набора x_1, x_2, \dots, x_n . Все элементы нулевого столбца (кроме, возможно, a_{00}) должны быть неотрицательными. Применение алгоритма заключается в выполнении следующих трех шагов.

Шаг 1. Если среди элементов нулевой строки (не считая a_{00}) нет отрицательных, то вычисления следует закончить, так как текущее базисное решение оптимально и максимальное значение целевой функции равно a_{00} . Таблица, соответствующая этому положению, называется *оптимальной таблицей*. Если таблица не является оптимальной, то среди отрицательных элементов нулевой строки (исключая a_{00}) следует выбрать некоторый элемент. Обычно выбирают минимальный элемент, однако это не обязательно. Пусть выбран элемент $a_{0s} < 0$. Тогда столбец с номером s называют *ведущим столбцом*.

Пояснение. Когда все элементы нулевой строки неотрицательны, значение x_0 целевой функции, найденное из нулевого уравнения, будет представлять собой разность между a_{00} и суммой небазисных переменных с соответствующими коэффициентами: $x_0 = a_{00} - \sum a_{0j}x_j$ (так как коэффициенты при базисных переменных равны нулю). Таким образом, величина x_0 зависит только от небазисных переменных. Коэффициенты a_{0j} неотрицательны, и небазисные переменные могут принимать лишь неотрицательные значения. Поэтому максимальное значение x_0 достигается только в том случае, когда значения всех небазисных переменных равны нулю. Следовательно, число $x_0 = a_{00}$ действительно является максимальным возможным, а текущее базисное решение оптимально.

Шаг 2. Среди положительных элементов a_{is} ведущего столбца выделить элемент, для которого отношение a_{i0}/a_{is} является наименьшим. Пусть это будет элемент a_{rs} . Его называют *ведущим элементом*, а строку с номером r — *ведущей строкой*.

Пояснение. При выполнении шага 2 предполагается, что в ведущем столбце s найдется по крайней мере один положительный элемент. Если это предположение не выполняется, т.е. если *все элементы столбца s (кроме a_{0s}) неположительны*, то исходная задача не имеет конечного решения (целевая функция не ограничена сверху на допустимом множестве). Чтобы убедиться в этом, допустим, что симплекс-таблица имеет вид табл. 1 и $s = n$. Решение

$$\begin{aligned} x_i(\lambda) &= a_{i0} - \lambda a_{in}, & i = 1, 2, \dots, k, \\ x_i(\lambda) &= 0, & i = k + 1, \dots, n - 1, \\ x_n(\lambda) &= \lambda \end{aligned}$$

является допустимым при любом $\lambda \geq 0$, так как $a_{i0} \geq 0$, $a_{in} \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ (в этом можно убедиться непосредственной подстановкой вектора с указанными компонентами $x_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, в уравнения системы ограничений (2.9)). Для данного допустимого решения из нулевой строки табл. 1 получаем

$$x_0 = a_{00} - \sum_{j=1}^n a_{0j} x_j(\lambda) = a_{00} - \lambda a_{0n}.$$

Поскольку $a_{0n} < 0$, отсюда следует, что, увеличивая λ , можно неограниченно увеличивать значение x_0 целевой функции.

Шаг 3. Применяя элементарные преобразования, следует добиться того, чтобы ведущий элемент a_{rs} стал равным единице (для этого r -ю строку таблицы нужно разделить на a_{rs}), а все остальные элементы ведущего столбца — нулевыми. Последнего можно добиться, прибавляя к i -й строке ($i \neq r$) r -ю, предварительно умноженную на коэффициент $-a_{is}$. В результате получим новую симплекс-таблицу, соответствующую системе линейных уравнений диагонального вида относительно нового набора базисных переменных. Этот новый набор отличается от прежнего тем, что в нем вместо переменной x_r участвует переменная x_s . Поэтому базисную переменную x_r слева от таблицы следует заметить на x_s . После этого необходимо вернуться к шагу 1.

Последовательное выполнение шагов 1–3 составляет *итерацию* симплекс-метода.

Итерации выполняются до тех пор, пока среди элементов нулевой строки (не считая a_{00}) не окажется ни одного отрицательного. Тогда текущее базисное решение будет оптимальным, а максимальное значение целевой функции равно левому верхнему элементу a_{00} .

Если на одном из шагов 2 будет получен ведущий столбец, все элементы которого неположительны, не считая элемента нулевой строки, то целевая функция не является ограниченной сверху на допустимом множестве, и вычисления следует закончить из-за невозможности получить оптимальное решение.

Замечания.

1. Описанный алгоритм симплекс-метода обладает тем важным свойством, что после выполнения некоторого конечного числа итераций либо будет найдено оптимальное решение, либо установлена неразрешимость данной задачи оптимизации.
2. На каждой итерации симплекс-метода сохраняется допустимость базисного решения, т.е. элементы нулевого столбца (не считая a_{00}) все время остаются неотрицательными. Справедливость этого свойства вытекает из правила выбора ведущей строки на шаге 2.
3. При переходе от одного допустимого базисного решения к другому значение целевой функции, равное элементу a_{00} , не уменьшается. В самом деле, если в табл. 1 ведущим выбран элемент a_{rs} , то после выполнения шага 3 в левой верхней клетке таблицы будет находиться разность $a_{00} - (a_{r0}/a_{rs}) \cdot a_{0s}$, которая благодаря неотрицательности

коэффициентов a_{r_0} , a_{r_s} и отрицательности a_{0s} будет не меньше, чем a_{00} . Величина этой разности и является новым значением целевой функции.

2.2.3. Пример применения алгоритма симплекс-метода

Применим алгоритма симплекс-метода к решению следующей задачи

$$\begin{aligned} x_0 &= -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \rightarrow \max, \\ x_1 &+ 2x_4 - x_5 + x_6 = 1, \\ x_2 + x_5 + x_6 &= 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 1, \\ x_1, x_2, \dots, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Вычтем из уравнения, содержащего x_0 , все остальные уравнения, и полученный результат занесем в нулевую строку табл. 3.

Таблица 3. Начальная симплекс-таблица примера.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	-4	0	0	-2	0	-2
x_1	1	0	0	2	-1	1
x_2	2	0	1	0	1	1
x_3	1	0	0	-1	1	-1

В этой таблице текущим (исходным) базисным решением является $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

Нулевая строка содержит два отрицательных элемента (не считая a_{00}), поэтому текущее базисное решение не является оптимальным. В качестве ведущего столбца выберем, например, последний столбец. Он содержит два положительных элемента: $a_{16} = a_{26} = 1$. Сравнивая отношения $a_{10}/a_{16} = 1/1$ и $a_{20}/a_{26} = 2/1$, приходим к выводу, что ведущей должна стать первая строка, а ведущим элементом будет $a_{16} = 1$ (он отмечен в табл. 3 рамкой). В соответствии с этим переменную x_1 из базиса следует вывести, а вместо нее ввести переменную x_6 . Для этой цели первую строку табл. 3 последовательно умно-

жаем на числа 2, -1 , 1 и получившиеся строки прибавляем соответственно к нулевой, второй и третьей строкам. В результате все элементы ведущего столбца (кроме ведущего) станут нулевыми, и симплекс-таблица на второй итерации примет вид табл. 4.

Таблица 4. Симплекс-таблица после выполнения первой итерации.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	-2	2	0	0	2	0
x_6	1	1	0	0	2	-1
x_2	1	-1	1	0	-2	2
x_3	2	1	0	1	1	0

Здесь в нулевой строке имеется единственный отрицательный элемент $a_{05} = -2$, поэтому ведущий столбец (пятый) определяется однозначно. Так же однозначно определяется и ведущий элемент $a_{25} = 2 > 0$. Теперь переменную x_2 следует вывести из базиса, а вместо нее ввести переменную x_5 . Для этого сначала все элементы второй строки разделим на 2 (чтобы ведущий элемент стал равным 1), а затем с помощью элементарных преобразований сделаем так, чтобы все остальные элементы ведущего столбца стали нулевыми. В итоге приходим к табл. 5, нулевая строка которой не содержит отрицательных элементов (не считая a_{00}), а значит, эта таблица является оптимальной.

Таблица 5. Оптимальная симплекс-таблица.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	-1	1	1	0	0	0
x_6	1.5	0.5	0.5	0	1	0
x_5	0.5	-0.5	0.5	0	-1	1
x_3	2	1	0	1	1	0

Таким образом, текущее базисное решение $x_1 = x_2 = x_4 = 0$, $x_3 = 2$, $x_5 = 0.5$, $x_6 = 1.5$ оптимально, а максимальное значение целевой функции равно -1 .

$$\begin{array}{rcl}
 d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n + z & & = z_0, \\
 -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n & + y & = 0, \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & & + x_{n+1} = b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & & + x_{n+2} = b_2, \\
 \dots & & \dots \\
 a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n & & + x_{n+k} = b_k,
 \end{array} \quad (2.13)$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+k} \geq 0,$$

где $d_j = -\sum_{i=1}^k a_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$; $z_0 = -\sum_{j=1}^k b_j$.

Полученная система (2.13) имеет диагональный вид относительно z , y , x_{n+1}, \dots, x_{n+k} (где переменная y может принимать и отрицательные значения). К ней можно применить изложенный выше алгоритм симплекс-метода. Все искусственные переменные неотрицательны, поэтому максимальное возможное значение функции $z = -x_{n+1} - \dots - x_{n+k}$ равно $z_{\max} = 0$. Следовательно, в том случае, когда исходная система ограничений $Ax = b$, $x \geq 0$ совместна (т.е. допустимое множество не пусто), значение $z_{\max} = 0$ будет достигнуто, причем все искусственные переменные, соответствующие этому максимальному значению, должны обратиться в нуль. Вместо них в число базисных должны войти какие-то из переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Далее строку с z можно вычеркнуть из симплекс-таблицы и перейти к максимизации y . Описанный способ решения исходной задачи (2.12) называют *двухфазным симплекс-методом*. На первой его фазе, максимизируя z , из числа базисных выводятся все искусственные переменные, а на второй фазе максимизируется y и определяется оптимальное решение исходной задачи (2.12).

Рассмотрим более подробно случаи, которые могут встретиться в результате выполнения первой фазы алгоритма:

- 1) Если оптимальное значение целевой функции z окажется отрицательным, т.е. $z_{\max} < 0$, то это свидетельствует о том, что система ограничений $Ax = b$, $x = 0$ задачи (2.12) не совместна (допустимое множество пусто).
- 2) Если $z_{\max} = 0$ и слева от симплексной таблицы нет ни одной искусственной переменной, то можно приступать к выполнению второй фазы, т.е. к максимизации y .
- 3) Если $z_{\max} = 0$ и слева от таблицы имеются искусственные переменные, то, используя элементарные преобразования, эти переменные следует вывести из числа базисных, а вместо них ввести какие-то переменные из исходного набора x_1, x_2, \dots, x_n . В этом случае базисное

решение будет иметь нулевые компоненты. Возможен еще случай, когда $z_{\max} = 0$, но некоторую искусственную переменную, например, x_{n+r} , невозможно вывести из числа базисных вследствие того, что $a_{rj} = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$. В этом случае r -е уравнение системы $Ax = b$ – «лишнее», и соответствующую ему строку симплекс-таблицы следует просто вычеркнуть.

2.3.2. Пример

Следующая задача линейного программирования

$$\begin{aligned} y &= -x_1 + x_2 + 1 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= -3, \\ x_1 + 11x_2 + 3x_3 &= 11, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

иллюстрирует первую фазу алгоритма симплекс-метода.

Умножим второе ограничение на -1 и образуем задачу для первой фазы, введя неотрицательные искусственные переменные x_4, x_5, x_6 :

$$\begin{aligned} z + x_4 + x_5 + x_6 &= 0, \\ y + x_1 - x_2 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 &= 3, \\ x_1 + 11x_2 + 3x_3 + x_6 &= 11. \end{aligned}$$

Исключив из первого уравнения искусственные переменные, приходим к системе

$$\begin{aligned} z - 2x_1 - 15x_2 - 5x_3 &= -15, \\ y + x_1 - x_2 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 &= 3, \\ x_1 + 11x_2 + 3x_3 + x_6 &= 11. \end{aligned}$$

которой соответствует табл. 6.

Таблица 6. Начальная симплекс-таблица примера.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
z	-15	-2	-15	-5	0	0
y	1	1	-1	0	0	0
x_4	1	2	1	3	1	0
x_5	3	-1	3	-1	0	1
x_6	11	1	11	3	0	1

Ведущим выберем второй столбец (соответствующий переменной x_2). Сравнивая отношения $1/1$, $3/3$, $11/11$, делаем вывод, что ведущей может быть любая из трех последних строк. Выбираем в качестве ведущей строку с наименьшим номером. Таким образом, базисную переменную x_4 следует заменить на x_2 . В результате выполнения соответствующих преобразований приходим к табл. 7.

Таблица 7. Симплекс-таблица после выполнения первой итерации.

	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6
z	0	28	0	40	0
y	0	3	0	3	0
x_2	1	2	1	3	0
x_5	0	-7	0	-10	1
x_6	0	-21	0	-30	1

Четвертый столбец, соответствующий выведенной из числа базисных переменных x_4 , далее не понадобится, поэтому он из таблицы исключен.

Как видим, максимальное возможное (нулевое) значение z достигнуто. Однако искусственные переменные x_5 и x_6 еще не выведены из числа базисных. Выведем переменную x_5 . Сначала умножим предпоследнюю строку на -1 (что допустимо, так как в нулевом столбце этой строки стоит нулевой элемент). Введем переменную x_1 вместо x_5 . Для этого элементы ведущей строки разделим на 7 и с помощью элементарных преобразований добьемся появления нулевых элементов в ведущем столбце. В итоге приходим к табл. 8.

Таблица 8. Завершающая симплекс-таблица первой фазы.

	x_1	x_2	x_3	x_6
z	0	0	0	0
y	0	0	$-9/7$	0
x_2	1	0	$1/7$	0
x_1	0	1	$10/7$	0
x_6	0	0	0	1

Переменную x_6 из числа базисных вывести нельзя, так как все соответствующие этому уравнению коэффициенты равны нулю. Это означает, что последнее уравнение исходной системы ограничений оказалось «лишним». Удалив верхнюю и нижнюю строки табл. 8 вместе с последним столбцом, можно переходить ко второй фазе.

2.4. Прикладные задачи линейного программирования

2.4.1. Задача о производстве продукции при ограниченных запасах сырья

Предположим, что из n видов некоторого сырья производится m различных типов определенной продукции. Стоимость реализации изготовленной продукции i -го типа составляет α_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Обозначим через β_j запас сырья j -го вида на планируемый период (это может быть месяц, год и т.п.), $j = 1, 2, \dots, n$. Пусть потребность в сырье j -го вида для производства единицы продукта i -го типа на данный период составляет p_{ij} . Заметим, что в ходе производства могут образовываться побочные продукты, представляющие сырье для других продуктов. Это означает, что среди коэффициентов p_{ij} могут встречаться и отрицательные. Исходным данным задачи соответствует табл. 9.

Задача состоит в определении для каждого типа продукции i ($i = 1, 2, \dots, m$) такого объема производства, который обеспечивает максимальную стоимость реализации изготовленной продукции при условии неперевышения запасов имеющегося сырья.

Таблица 9. Таблица исходных данных для задачи о производстве продукции.

Тип продукции	Вид сырья				Стоимость продукции
	1	2	...	n	
1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}	α_1
2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}	α_2
...
m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}	α_m
Запас сырья	β_1	β_2	...	β_n	

Обозначим через x_i объем производства i -го продукта, $i = 1, 2, \dots, m$. Стоимость всей произведенной продукции равна $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$. Условие невыщеснения запасов имеющегося сырья выражается в виде неравенств $\sum_{i=1}^m p_{ij} x_i \leq \beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, математическая постановка задачи о производстве продукции при ограниченных запасах сырья принимает вид следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i &\rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^m p_{ij} x_i &\leq \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

2.4.2. Задача о загрузке оборудования

Имеется m различных станков, на каждом из которых можно изготовить n типов деталей. Известна производительность c_{ij} станка i -го типа при изготовлении j -й детали. Требуемое (плановое) количество деталей j -го типа равно A_j , $j = 1, 2, \dots, n$, а ресурс времени работы i -го станка составляет B_i , (см. табл. 10).

Таблица 10. Таблица исходных данных для задачи о загрузке оборудования.

Станки	Тип деталей				Ресурс времени
	1	2	...	n	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	B_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	B_2
...
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	B_m
Требуемое кол-во деталей	A_1	A_2	...	A_n	

Требуется, учитывая ресурсы времени работы каждого станка, распределить задания между станками таким образом, чтобы все задания были выполнены и при этом общее время работы всех станков оказалось минимальным возможным.

Обозначим через t_{ij} время изготовления i -м станком детали j -го типа. Тогда ограничение по ресурсу времени может быть представлено в виде неравенства

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \leq B_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.14)$$

а условие выполнения плановых заданий принимает форму равенства

$$\sum_{i=1}^m c_{ij} t_{ij} = A_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.15)$$

В итоге задача о загрузке оборудования сводится к минимизации линейной функции

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij}$$

при ограничениях (2.14)–(2.15) с дополнительным условием неотрицательности всех переменных t_{ij} .

2.4.3. Транспортная задача

В этой задаче имеется m поставщиков некоторой однородной продукции. Считается, что i -й поставщик располагает a_i единицами продукции, $i = 1, 2, \dots, m$. Продукцию поставщиков используют n потребителей, потребности которых характеризуются числами b_1, b_2, \dots, b_n (т.е. j -му потребителю необходимо b_j единиц продукции). Все числа a_i, b_j положительны и считаются заданными. Кроме того, известна стоимость перевозки единицы про-

Поставщики Потребители

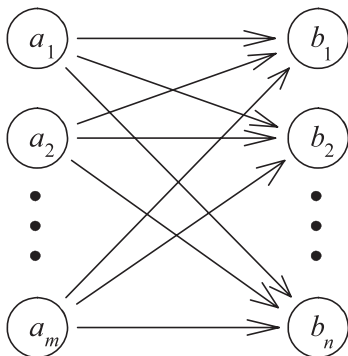


Рис. 2.4. Схематическое изображение транспортной задачи.

дукции от i -го поставщика j -му потребителю: c_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Продукция однородна, поэтому любой поставщик может предложить ее любому потребителю (рис. 2.4).

Задача состоит в определении такого количества единиц продукции, перевозимой от каждого поставщика к каждому потребителю, при котором транспортные расходы являются минимальными и потребности всех потребителей удовлетворены. При этом, разумеется, предполагается, что общий объем возможных поставок должен быть не меньше общего объема потребностей.

Обозначим через x_{ij} число единиц продукции, перевозимой от i -го поставщика j -му потребителю.

Тогда транспортные расходы этой пары поставщик-потребитель составят $c_{ij}x_{ij}$, а общая стоимость всех перевозок равна $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$. Тот факт, что потребности каждого потребителя должны быть удовлетворены, можно выразить в виде неравенств $\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, а условие осуществимости выполнения поставок — в виде неравенств $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. Кроме того, все переменные x_{ij} должны быть подчинены условию неотрицательности.

В соответствии со сказанным транспортная задача записывается в виде следующей задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} &\rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

В этой задаче $m \cdot n$ переменных и $m + n$ ограничений типа неравенств (не считая условий неотрицательности переменных).

Если суммарные возможности поставок совпадают с требуемой суммарной потребностью (т.е. $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$), то можно организовать перевозки так, чтобы вся имеющаяся у поставщиков продукция была вывезена, и при этом каждый потребитель получил необходимое количество продукции. В этом случае транспортная задача принимает вид канонической задачи линейного программирования

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

и называется *закрытой транспортной задачей*.

Вопросы и упражнения к главе 2

- 1) Сформулируйте каноническую задачу линейного программирования (ЗЛП).
- 2) Какой вид имеет симплекс-таблица?
- 3) В чем состоят шаги алгоритма симплекс-метода?
- 4) Для чего предназначен двухфазный симплекс-метод?
- 5) Приведите ЗЛП

$$z = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2,$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 14,$$

$$-2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 - \text{любое число}$$

к каноническому виду

- 6) Решите графически следующую ЗЛП

$$-x_1 + x_2 + x_4 + 3x_5 \rightarrow \min$$

$$x_1 - 6x_4 + 11x_5 = 11,$$

$$x_2 - x_4 + 3x_5 = 3,$$

$$x_3 + x_4 + 3x_5 = 0,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

- 7) Решите с помощью симплекс-метода следующие задачи

- i) $6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$

$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,$$

$$5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4,$$

$$2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 0,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

- ii) $2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 1,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

- iii) $x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 &= 5, \\x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= 9, \\3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 4, \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.\end{aligned}$$

iv) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 5, \\2x_1 - x_3 + x_4 &= 1, \\-x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4, \\x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0.\end{aligned}$$

- 8) В отделе технического контроля (ОТК) некоторого предприятия работают контролеры 1 и 2 разрядов. Норма выработки ОТК за 8-часовой рабочий день составляет не менее 1800 изделий. Контролер 2 разряда проверяет 25 изделий в час, причем не ошибается в 98% случаев. Контролер 1 разряда проверяет 15 изделий в час, его точность составляет 95%. Зарплата контролера 2 разряда равна 400 руб. в час, тогда как контролер 1 разряда получает 300 руб. в час. При каждой ошибке контролера предприятие несет убыток в размере 200 руб. Данное предприятие может использовать не более 8 контролеров 2 разряда и не более 10 контролеров 1 разряда. Требуется определить оптимальный состав ОТК, при котором общие затраты на контроль будут минимальными.

Глава 3. Численные методы оптимизации

3.1. Методы оптимизации функций одной переменной

Этот раздел посвящен методам численного решения задачи поиска экстремума функции одной переменной на конечном отрезке.

3.1.1. Унимодальные функции

Унимодальные функции играют важную роль в последующем изложении численных методов оптимизации функций одной переменной на заданном отрезке.

Числовую функцию f , определенную на отрезке $[a, b]$, называют *унимодальной* на этом отрезке, если она на нем имеет и притом единственную точку x^* глобального максимума, причем слева от этой точки функция f является строго возрастающей, а справа – строго убывающей.

Иначе говоря, функция f *унимодальна* на отрезке $[a, b]$, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, для которых $x_1 < x_2$, из выполнения неравенства $x_1 > x^*$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, а из неравенства $x_2 < x^*$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Важное свойство унимодальной функции раскрывает следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть функция f унимодальна на отрезке $[a, b]$ и $x_1, x_2 \in [a, b]$, причем $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда

$$f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow x^* \notin [x_2, b],$$

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow x^* \notin [a, x_1],$$

где x^* – точка глобального максимума функции f на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Предположим, что для указанной в формулировке леммы пары точек x_1, x_2 выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$. Допустим противное: $x_2 \leq x^*$. Если имеет место строгое неравенство $x_2 < x^*$, то по определению унимодальной функции должно быть выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, что несовместимо с начальным предположением $f(x_1) \geq f(x_2)$. Если же верно равенство $x_2 = x^*$, то получаем $f(x_1) \geq f(x_2) = f(x^*) \geq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Следовательно, x_1 – вторая точка (первой является точка x_2) глобального максимума функции f на отрезке $[a, b]$. По определению унимодальной функции этого тоже быть не должно.

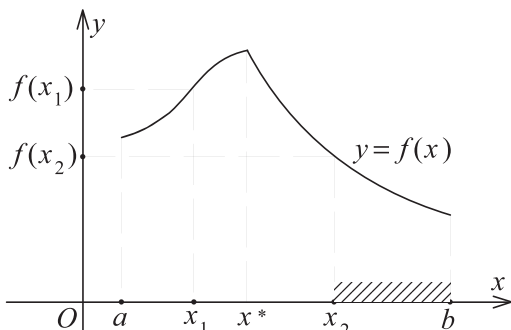


Рис. 3.1. Свойство унимодальной функции.

функции f не может находиться правее точки x_2 (в заштрихованной части отрезка $[a, b]$).

Полученные противоречия свидетельствуют о том, что предположение $x_2 \leq x^*$ оказалось неверным, а значит, выполнено $x^* \notin [x_2, b]$.

Аналогичным образом проверяется вторая часть леммы ▲

Рис. 3.1 иллюстрирует первую часть леммы 3.1. Здесь $f(x_1) \geq f(x_2)$, а значит, точка максимума функции

3.1.2. Метод локализации экстремума

Считая функцию f унимодальной на отрезке $[a, b]$, обратимся к задаче ее максимизации на этом отрезке.

В соответствии с *методом локализации экстремума* сначала выбирают положительное число h , которое называют *величиной шага*, таким образом, чтобы оно было мало в сравнении с длиной отрезка $[a, b]$.

Дальнейшее применение метода состоит в последовательном осуществлении определенных шагов.

На начальном (нулевом) шаге полагают $x_0 = a$ и вычисляют значение $f(x_0)$.

Первый шаг заключается в вычислении точки $x_1 = x_0 + h$ и значения $f(x_1)$.

На втором шаге определяют точку $x_2 = x_1 + h$ и значение $f(x_2)$ и т. д.

В общем случае на k -м шаге вычисление точки x_k производят по формуле

$$x_k = x_{k-1} + h, \quad k = 1, 2, \dots$$

Одновременно с этим вычисляется значение $f(x_k)$ целевой функции в точке x_k . При этом по мере выполнения указанных вычислений последовательно проверяют справедливость неравенств

$$f(x_0) < f(x_1), \quad f(x_1) < f(x_2), \dots$$

до тех пор, пока при некотором $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ не окажется выполненным противоположное неравенство $f(x_k) \geq f(x_{k+1})$.

В этом случае в соответствии с леммой 3.1 получаем, что точка максимума x^* не может располагаться в отрезке $[x_{k+1}, b]$. Кроме того, точка x^* не может находиться и в отрезке $[a, x_{k-1}]$ (если $k > 1$), так как в противном случае было бы выполнено неравенство $f(x_{k-1}) \geq f(x_k)$.

Таким образом, $x^* \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$. Это означает, что теперь поиск точки максимума локализован пределами отрезка $[x_{k-1}, x_{k+1}]$. По сути дела, точка максимума найдена с абсолютной погрешностью, равной $x_k - x_{k-1}$.

Если полученная погрешность вычислений приемлема, то в качестве точки приближенного максимума выбирают точку x_k . В противном случае на отрезке $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ действуют так же, как на исходном отрезке $[a, b]$. Для этой цели выбирают новую величину шага h' ($0 < h' < x_{k+1} - x_{k-1}$), производят вычисление точек по формуле

$$x'_k = x'_{k-1} + h', \quad k = 1, 2, \dots, \quad x'_0 = x_{k-1},$$

и одновременно проверяют выполнение неравенств

$$f(x'_0) < f(x'_1), \quad f(x'_1) < f(x'_2), \quad \dots$$

Описанным способом, последовательно локализуя поиск, можно получить приближение к точке x^* максимума функции f на отрезке $[a, b]$.

Отметим некоторые недостатки изложенного метода. В его описании не указано, каким образом выбирать величину шага. Выбор слишком малого шага может повлечь выполнение большого объема вычислений (в частности, большого числа вычислений значений максимизируемой функции), тогда как относительно большой шаг ведет к незначительной локализации поиска. Еще один недостаток метода заключается в отсутствии априорной оценки объема вычислений для получения заданной точности локализации точки максимума. Иными словами, неизвестно, сколько шагов необходимо выполнить, чтобы абсолютная погрешность вычисления точки максимума была меньше некоторого наперед заданного положительного числа.

Описываемые далее два численных метода в определенной степени свободны от указанных недостатков.

3.1.3. Метод золотого сечения

Как и в предыдущем пункте максимизируемая на отрезке $[a, b]$ функция f считается унимодальной на этом отрезке.

Выберем произвольную точку x_1 внутри отрезка $[a, b]$ и вычислим значение $f(x_1)$. Зная значение $f(x_1)$ максимизируемой функции лишь в одной точке, не представляется возможным сузить область поиска неизвестной точки максимума x^* . Поэтому выберем еще одну внутреннюю точку x_2 . Пусть $a < x_1 < x_2 < b$.

Вычислим значение $f(x_2)$ и сравним его с $f(x_1)$. Возможен один и только один из следующих двух случаев:

$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ или } f(x_1) < f(x_2). \quad (3.1)$$

В первом случае согласно лемме 3.1 выполняется $x^* \notin [x_2, b]$, тогда как во втором случае верно $x^* \notin [a, x_1]$ (на рис. 3.2 указанные части отрезка $[a, b]$ отмечены штриховкой).

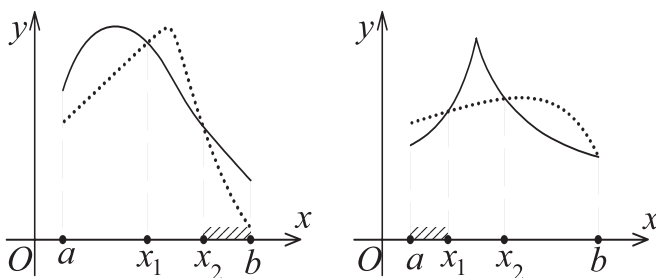


Рис. 3.2. Два варианта сужения области поиска точки максимума.

В любом случае область поиска точки максимума сужается: в первом случае из отрезка $[a, b]$ удаляется отрезок $[x_2, b]$, во втором — отрезок $[a, x_1]$.

Итак, знание значений целевой функции в двух различных внутренних точках отрезка $[a, b]$ дает возможность сузить область поиска точки максимума за счет удаления некоторой его левой или правой части. Возникает следующий вопрос: каким образом лучше всего выбирать эти две точки x_1 и x_2 ? Чтобы ответить на этот вопрос, прежде всего, заметим, что положение точки максимума x^* не известно, поэтому оба разобранных случая (3.1) естественно считать равновероятными. Отсюда следует, что точки x_1 и x_2 следует выбирать расположенными симметрично относительно середины отрезка $[a, b]$. В этом случае удаляемые части $[a, x_1]$ и $[x_2, b]$ будут иметь одинаковую длину. Далее, для того, чтобы максимально сузить область последующего поиска, эти точки должны располагаться как можно дальше от концов отрезка $[a, b]$. Однако слишком близкими друг к другу их брать не следует, так как после удаления левой или правой части отрезка $[a, b]$ уко-

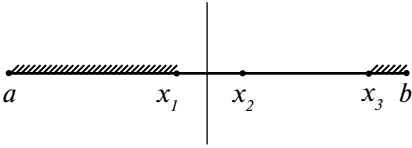


Рис. 3.3. Случай близкого расположения точек x_1 и x_2 к середине отрезка.

учитывать многошаговость численной процедуры) — слишком близкими их брать нельзя. Нужно найти некоторую «золотую середину» между двумя указанными крайними возможностями. Этому способствует следующее определение.

Пусть имеется отрезок AD и две точки B и C внутри него, причем

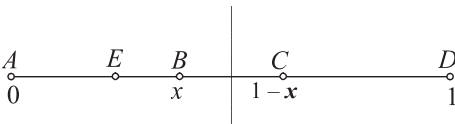


Рис. 3.4. Золотое сечение отрезка AD точками B и C .

$|AB| = |CD|$ (рис. 3.4). Говорят, что точка B (а также точка C) осуществляет *золотое сечение* отрезка AD , если

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Лемма 3.2. Точки B и C , осуществляющие золотое сечение отрезка AD , расположены от концов отрезка AD на расстоянии $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot 100\% \approx 38,2\%$ длины $|AD|$.

Для доказательства поместим точку A в начало координат вещественной оси. Не уменьшая общности, будем считать, что $|AD| = 1$. Обозначим координату точки B через x и найдем эту координату. По определению золотого сечения, выполняется пропорция $\frac{x}{1} = \frac{1-2x}{1-x}$. Отсюда следует квадратное уравнение $x^2 - 3x + 1 = 0$, имеющее единственный положительный корень, меньший единицы, равный $(3-\sqrt{5})/2$ ▲

В следующей лемме устанавливается важное с точки зрения последующего изложения свойство золотого сечения отрезка.

Лемма 3.3. Пусть имеется отрезок AD и две точки B и C внутри него, причем $|AB| = |CD|$. Точка B осуществляет золотое сечение отрезка AD тогда и только тогда, когда она осуществляет золотое сечение отрезка AC .

роченный отрезок ($[x_1, b]$ или $[a, x_2]$) будет содержать оставшуюся точку (x_2 или x_1 соответственно), невыгодно расположенную вблизи конца этого укороченного отрезка (см. рис. 3.3).

Таким образом, с одной стороны, точки x_1 и x_2 следует выбирать рядом с серединой отрезка, а с другой (если

учитывать многошаговость численной процедуры) — слишком близкими их брать нельзя. Нужно найти некоторую «золотую середину» между двумя указанными крайними возможностями. Этому способствует следующее определение.

Пусть имеется отрезок AD и две точки B и C внутри него, причем

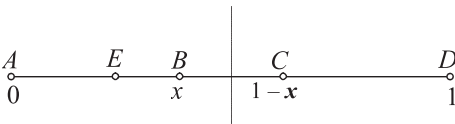


Рис. 3.4. Золотое сечение отрезка AD точками B и C .

$|AB| = |CD|$ (рис. 3.4). Говорят, что точка B (а также точка C) осуществляет *золотое сечение* отрезка AD , если

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Лемма 3.2. Точки B и C , осуществляющие золотое сечение отрезка AD , расположены от концов отрезка AD на расстоянии $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot 100\% \approx 38,2\%$ длины $|AD|$.

Для доказательства поместим точку A в начало координат вещественной оси. Не уменьшая общности, будем считать, что $|AD| = 1$. Обозначим координату точки B через x и найдем эту координату. По определению золотого сечения, выполняется пропорция $\frac{x}{1} = \frac{1-2x}{1-x}$. Отсюда следует квадратное уравнение $x^2 - 3x + 1 = 0$, имеющее единственный положительный корень, меньший единицы, равный $(3-\sqrt{5})/2$ ▲

В следующей лемме устанавливается важное с точки зрения последующего изложения свойство золотого сечения отрезка.

Лемма 3.3. Пусть имеется отрезок AD и две точки B и C внутри него, причем $|AB| = |CD|$. Точка B осуществляет золотое сечение отрезка AD тогда и только тогда, когда она осуществляет золотое сечение отрезка AC .

Для доказательства обратимся к рис. 3.4 и отметим на нем точку E , симметричную точке B относительно середины отрезка AC . В соответствии с данным выше определением точка E (а значит, и точка B) осуществляет золотое сечение отрезка AC тогда и только тогда, когда

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|AB|},$$

или, с учетом равенства $|AE| = |BC|$, когда

$$\frac{1-2x}{1-x} = \frac{x-(1-2x)}{x}.$$

Нетрудно убедиться в том, что последнее уравнение равносильно уравнению $x^2 - 3x + 1 = 0$ из доказательства леммы 3.2. Это влечет требуемый результат \blacktriangle

Согласно методу золотого сечения точки x_1 и x_2 , о которых шла речь выше, выбирают так, чтобы они осуществляли золотое сечение отрезка $[a, b]$. После сравнения значений максимизируемой функции f в этих точках и удаления частей $[x_2, b]$ или $[a, x_1]$ в зависимости от выполнения того или другого неравенства (3.1), в укороченном отрезке останется одна из этих точек, причем в силу леммы 3.3 она будет осуществлять золотое сечение укороченного отрезка. Поэтому для продолжения процесса вычислений достаточно построить одну новую точку симметрично оставшейся относительно середины укороченного отрезка. Далее вычисляется значение функции f в новой точке, и полученное значение сравнивается со значением в точке, оставшейся в укороченном отрезке. Последующие шаги выполняются аналогичным образом.

Перейдем к точному описанию *алгоритма метода золотого сечения*. Для удобства положим $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Шаг 0. По формулам

$$y_0 = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0),$$

$$z_0 = a_0 + b_0 - y_0$$

вычислить начальные точки, симметричные относительно середины исходного отрезка. Затем найти значения $f(y_0)$ и $f(z_0)$ в этих точках.

Шаг k ($k \geq 1$). В результате выполнения предыдущего шага известны следующие числа:

$$a_{k-1}, b_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}, f(y_{k-1}), f(z_{k-1}),$$

причем $a_{k-1} < b_{k-1}$ и $y_{k-1} < z_{k-1}$. Следует сравнить значения функции f в точках y_{k-1} и z_{k-1} .

Если выполнено неравенство $f(y_{k-1}) \geq f(z_{k-1})$, то необходимо положить

$$a_k = a_{k-1}, \quad b_k = z_{k-1}, \quad z_k = y_{k-1}, \quad f(z_k) = f(y_{k-1})$$

и вычислить новую точку y_k по формуле

$$y_k = a_k + b_k - z_k$$

вместе со значением $f(y_k)$ в этой точке.

Если же имеет место обратное неравенство $f(y_{k-1}) < f(z_{k-1})$, то нужно положить

$$a_k = y_{k-1}, \quad b_k = b_{k-1}, \quad y_k = z_{k-1}, \quad f(y_k) = f(z_{k-1})$$

и вычислить новую точку z_k по формуле

$$z_k = a_k + b_k - y_k$$

вместе со значением $f(z_k)$ в этой точке.

Кроме того, на k -м шаге необходимо вычислить длину $(k+1)$ -го отрезка, т.е. число

$$\Delta_{k+1} = b_k - y_k = z_k - a_k.$$

Шаги описанного алгоритма последовательно производят до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство $\Delta_{k+1} \leq \varepsilon$, где положительное число ε характеризует требуемую точность вычислений. Как только указанное неравенство будет выполнено, из двух чисел $f(y_k)$ и $f(z_k)$ выберут наибольшее; оно является приближенным максимумом функции f на отрезке $[a, b]$, а точка, в которой этот максимум достигается — точкой приближенного максимума. При этом абсолютная погрешность отклонения точки приближенного максимума от точки x^* точного максимума не будет превосходить ε .

Следующая теорема показывает, что теоретически с помощью описанного алгоритма точка x^* максимума унимодальной функции f может быть вычислена с любой наперед заданной точностью.

Теорема 3.1. Пусть функция f унимодальна на отрезке $[a, b]$, и x^* — точка ее глобального максимума на этом отрезке. Система вложенных отрезков $[a_k, b_k]$, построенных с помощью алгоритма метода золотого сечения, при $k \rightarrow \infty$ стягивается в точку x^* , т.е.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] = \{x^*\}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Для произвольного натурального k найдем длину Δ_k отрезка $[a_k, b_k]$:

$$\Delta_k = b_k - a_k = \left(1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \Delta_{k-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Delta_{k-1}.$$

Отсюда следует

$$\Delta_k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Delta_{k-1} = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2 \Delta_{k-2} = \dots = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^k (b - a).$$

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = (b - a) \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^k = 0,$$

так как $\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} < \frac{(\sqrt{9} - 1)}{2} = 1$.

Выполнение равенства $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0$ на основании теоремы о вложенных отрезках из курса математического анализа [4, т.1] означает, что пересечение $\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ состоит из единственной точки, принадлежащей одновременно всем отрезкам $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$. Согласно алгоритму метода золотого сечения и лемме 3.1 для каждого $k = 1, 2, \dots$ выполнено включение $x^* \in [a_k, b_k]$. Следовательно, единственной точкой, принадлежащей указанному выше пересечению, является x^* , т.е. равенство (3.2) имеет место \blacktriangle

В заключение отметим определенную «экономичность» изложенного метода с точки зрения количества необходимых вычислений значений целевой функции: на нулевом шаге вычисляются два таких значения, а на каждом последующем шаге — лишь одно.

3.1.4. Метод Фибоначчи

Этот метод в идейном отношении тесно связан с методом золотого сечения. Его применение оказывается удобным в тех случаях, когда вычисление значений функции оказывается непростым и для достижения заданной точности вычислений необходимо заранее знать общее число вычислений значений целевой функции.

Последовательность чисел $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ носит название *последовательности Фибоначчи*, если она строится по следующей рекуррентной формуле:

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}, \quad k = 3, 4, \dots; \quad F_1 = F_2 = 1.$$

При этом члены указанной последовательности называют *числами Фибоначчи*.

Укажем несколько первых чисел Фибоначчи:

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21, \quad \dots$$

В следующем утверждении указывается явный вид произвольного числа Фибоначчи.

Теорема 3.2. *Для любого натурального k имеет место формула*

$$F_k = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $k=1$ справедливость формулы (3.3) сомнений не вызывает:

$$F_1 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1.$$

Предположим, что доказываемая формула имеет место для всех натуральных чисел, меньших k . Убедимся в справедливости равенства (3.3). Действительно,

$$\begin{aligned} F_k &= F_{k-1} + F_{k-2} = \\ &= \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-1} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k-2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k-2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \left[\frac{2}{1+\sqrt{5}} + \frac{4}{6+2\sqrt{5}} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \left[\frac{2}{1-\sqrt{5}} + \frac{4}{6-2\sqrt{5}} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Перейдем к описанию метода Фибоначчи, предназначенного для поиска максимума функции f на отрезке $[a, b]$, которая предполагается унимодальной на данном отрезке

На нулевом шаге алгоритма метода Фибоначчи следует выбрать и зафиксировать натуральное число n (ровно столько раз будет вычисляться значение целевой функции f) и вычислить пару начальных симметричных точек по формулам

$$y_0 = a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_0 - a_0),$$

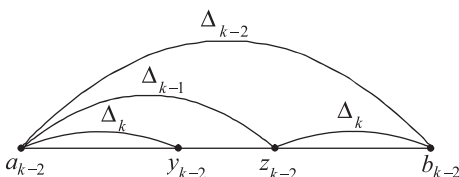


Рис. 3.5. Иллюстрация к доказательству теоремы 3.5

$z_0 = a_0 + b_0 - y_0$ вместе со значениями $f(y_0)$, $f(z_0)$ в этих точках.

Здесь, как и в предыдущем пункте, считается, что $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Описание k -го шага алгоритма метода Фибоначчи в точности повторяет k -й шаг алгоритма метода золотого сечения при $k = 1, 2, \dots$ и

поэтому не приводится. В отличие от метода золотого сечения здесь отпадает необходимость вычисления длины отрезка Δ_{k+1} , поскольку метод Фибоначчи содержит лишь конечное число n шагов (включая нулевой шаг). Этот факт составляет содержание следующей теоремы.

Теорема 3.3. Точки y_{n-1} и z_{n-1} , вычисленные согласно алгоритму метода Фибоначчи, совпадают, т.е. $y_{n-1} = z_{n-1}$.

Доказательство. Обратимся к рис. 3.5. Исходя из геометрических соображений, можно записать:

$$\Delta_1 = z_0 - a = b_0 - y_0 = \Delta_0 - \frac{F_n}{F_{n+2}} \Delta_0 = \frac{F_{n+2} - F_n}{F_{n+2}} \Delta_0 = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \Delta_0,$$

$$\Delta_k = \Delta_{k-2} - \Delta_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n+1.$$

Поэтому

$$\Delta_2 = \Delta_0 - \Delta_1 = \Delta_0 - \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \Delta_0 = \frac{F_{n+2} - F_{n+1}}{F_{n+2}} \Delta_0 = \frac{F_n}{F_{n+2}} \Delta_0,$$

$$\Delta_3 = \Delta_1 - \Delta_2 = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \Delta_0 - \frac{F_n}{F_{n+2}} \Delta_0 = \frac{F_{n-1}}{F_{n+2}} \Delta_0,$$

.....

$$\Delta_k = \Delta_{k-2} - \Delta_{k-1} = \frac{F_{n+2-k}}{F_{n+2}} \Delta_0, \quad k = 2, \dots, n+1. \tag{3.4}$$

Последнее равенство «угадано». Его справедливость легко установить с помощью метода математической индукции, но мы этого делать не будем.

Используя равенство (3.4) при $k = n + 1$ и $k = n$, можно записать

$$y_{n-1} = a_{n-1} + \Delta_{n+1} = a_{n-1} + \frac{F_1}{F_{n+2}} \Delta_0,$$

$$z_{n-1} = a_{n-1} + \Delta_n = a_{n-1} + \frac{F_2}{F_{n+2}} \Delta_0.$$

Отсюда в силу $F_1 = F_2 = 1$ приходим к требуемому равенству $y_{n-1} = z_{n-1}$



В соответствии с доказанной теоремой вычисления согласно методу Фибоначчи на $(n-1)$ -м шаге заканчиваются, и точка y_{n-1} (совпадающая с точкой z_{n-1}) принимается за приближенное значение точки x^* максимума функции f на отрезке $[a, b]$. При этом абсолютная погрешность отклонения точки приближенного максимума от точки точного максимума x^* равна $(b-a)/F_{n+2}$, так как

$$|y_{n-1} - x^*| \leq \frac{\Delta_{n-1}}{2} = \frac{F_3}{2F_{n+2}} \Delta_0 = \frac{\Delta_0}{F_{n+2}} = \frac{b-a}{F_{n+2}}.$$

Здесь мы воспользовались равенством (3.4) при $k = n - 1$.

Нередко в задаче максимизации функции f задана абсолютная погрешность вычислений $\varepsilon > 0$. Иными словами, требуется, чтобы выполнялось неравенство

$$|y_{n-1} - x^*| \leq \varepsilon.$$

В этом случае по заданному ε необходимое число шагов n определяется как наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{b-a}{F_{n+2}} \leq \varepsilon.$$

Например, для $b-a=1$ и $\varepsilon=0.1$ имеем $F_{n+2} \geq 10$, а значит, $F_{n+2} = F_7 = 13$ т.е. $n=5$.

3.1.5. Метод равномерного перебора

Здесь рассматривается один из наиболее простых методов отыскания глобального максимума функции f на отрезке $[a, b]$. При этом свойство унимодальности целевой функции выполненным не предполагается.

В соответствии с *методом равномерного перебора* сначала фиксируют величину шага h ($0 < h < b-a$). Затем последовательно вычисляют точки

$$x_1 = a + \frac{h}{2}; \quad x_k = x_{k-1} + h, \quad k = 2, 3, \dots, n-1;$$

$$x_n = \min\{x_{n-1} + h; b\}, \quad (3.5)$$

где число n заранее выбирается таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{h}{2} < b - x_{n-1} \leq \frac{3h}{2}, \quad (3.6)$$

и находят значение функции f в этих точках: $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$. Заметим, что набор точек x_1, x_2, \dots, x_n таков, что система n отрезков длины h с центрами в этих точках полностью покрывает весь отрезок $[a, b]$.

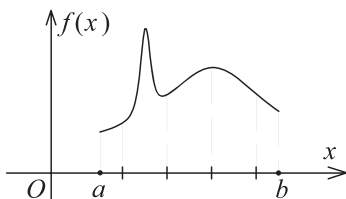


Рис. 3.6. Пример неудачного выбора величины шага.

После проделанных вычислений определяют число

$$\max_{k=1,2,\dots,n} f(x_k) = \max\{f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n)\}$$

и принимают его за приближенный глобальный максимум $\max_{x \in [a,b]} f(x)$. Тем самым, максимизация функции f на отрезке $[a, b]$ заменяется максимизацией этой функции на конечном множестве точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ этого отрезка.

При практической реализации описанного метода основная проблема заключается в выборе величины шага h . Простые примеры (см. рис. 3.6) убеждают, что даже при сравнительно малых h существует возможность «проскочить» глобальный максимум.

3.2. Методы безусловной оптимизации

Методы безусловной оптимизации предназначены для численного решения задачи максимизации целевой функции f на всем пространстве \mathbf{R}^n , т.е. задачи максимизации без ограничений. Поиск оптимальных точек непосредственно на основе необходимых и достаточных условий оптимальности на практике оказывается, как правило, неосуществимым из-за сложных вычислительных задач, возникающих при решении получающейся системы уравнений $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому особую актуальность приобретают различного рода численные методы, позволяющие получить приближенное решение исходной задачи.

3.2.1. Общая схема методов подъема

Процесс приближенного численного решения задачи оптимизации заключается в построении по определенным правилам последовательности точек $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ в пространстве \mathbf{R}^n , которая при $k \rightarrow \infty$ должна сходиться к точке глобального (или локального) экстремума. При достижении заданной точности вычислений процесс построения указанной последовательности на некотором шаге обрывается, и очередная точка объявляется приближенным оптимальным решением.

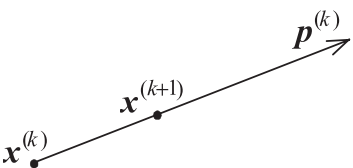
Методом подъема для решения задачи безусловной максимизации функции f называют численный метод, который заключается в построении последовательности точек $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ пространства \mathbf{R}^n , обладающей свойством неубывания целевой функции:

$$f(\mathbf{x}^{(0)}) \leq f(\mathbf{x}^{(1)}) \leq \dots \leq f(\mathbf{x}^{(k)}) \leq f(\mathbf{x}^{(k+1)}) \leq \dots \quad (3.7)$$

При этом $\mathbf{x}^{(0)}$ называют *начальным приближением* или *начальной точкой*, а $\mathbf{x}^{(k)}$ — *k-м приближением*.

Часто для построения указанной последовательности $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ используют простую формулу

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}, \quad \alpha_k \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.8)$$



где α_k называют *величиной шага*, а n -мерный вектор $\mathbf{p}^{(k)}$ — *направлением подъема* на k -м шаге.

Рис. 3.7, на котором вектор $\mathbf{p}^{(k)}$ изображен приложенным к точке $\mathbf{x}^{(k)}$, иллюстрирует формулу (3.8) при $n = 2$.

Формально различные методы подъема отличаются друг от друга лишь способом выбора числа α_k и вектора $\mathbf{p}^{(k)}$. Если для определения α_k и $\mathbf{p}^{(k)}$ требуется вычислять только значение целевой функции, то соответствующие методы называют *методами нулевого порядка* или *методами поиска*. *Методы первого порядка* предполагают, кроме того, вычисление частных производных первого порядка целевой функции. Если же в методе используются и частные производные второго порядка, то его называют *методом второго порядка*. И т.д.

Важнейшей характеристикой любого численного метода поиска экстремума является его *сходимость*. С точки зрения практики наиболее желательным является такой тип сходимости, когда последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ сходится

ся к точке глобального (или хотя бы локального) максимума. Однако точки максимума могут образовывать целое множество, и некоторые алгоритмы генерируют лишь последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$, которая сама не является сходящейся, но любая ее сходящаяся подпоследовательность имеет в качестве предельной некоторую точку максимума. Это положение иллюстрирует рис. 3.8, на котором изображен график некоторой функции одной переменной.

В таких случаях говорят, что *каждая предельная точка последовательности $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ является точкой максимума* (локального или глобального).

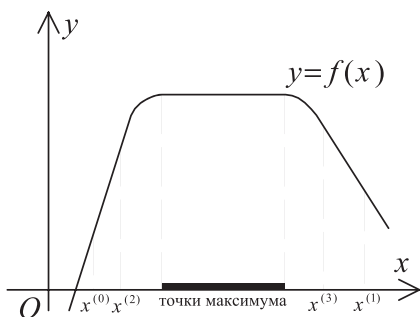


Рис. 3.8. Пример сходимости ко множеству.

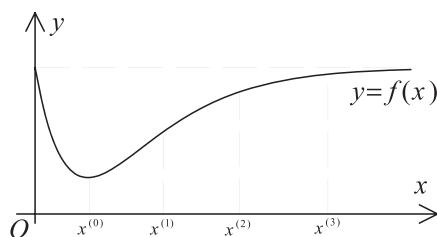


Рис. 3.9. Пример сходимости по функции.

Возможен случай, когда и о сходимости подпоследовательностей ничего определенного сказать не удастся, однако известно, что соответствующая последовательность значений функции $\{f(\mathbf{x}^{(k)})\}$ сходится к локальному или глобальному максимуму. Тогда говорят, что последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ *сходится по функции* (рис. 3.9).

Имеются еще более слабые типы сходимости. Например, когда последовательность $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ (каждая ее сходящаяся подпоследовательность) имеет в качестве предельной стационарную точку (т.е. точку, в которой градиент обращается в нулевой вектор). Как известно, стационарная точка является лишь «подозрительной» на оптимальную.

Как правило, тип сходимости одного и того же метода зависит от конкретного вида целевой функции. При достаточно жестких требованиях к функции f с помощью данного метода можно построить последовательность, сходящуюся к точке глобального экстремума. Если же тот же самый метод применить к функциям, не удовлетворяющим этим требованиям, то может быть получена последовательность, сходящаяся лишь по функции, либо последовательность, не являющейся сходящейся ни в каком смысле.

3.2.2. Метод покоординатного подъема

Согласно методу покоординатного подъема, направление подъема последовательно выбирается параллельным координатным осям.

Обозначим единичный вектор i -й координатной оси через $e^{(i)}$. Вектор $e^{(i)}$ имеет n компонент, среди которых лишь i -я отлична от нуля и равна единице.

Пусть задано некоторое начальное приближение $x^{(0)}$ и некоторое положительное число α_0 . Точку $x^{(1)}$ строят следующим образом. Вычисляют значение функции $f(x)$ при $x = x^{(0)} + \alpha_0 e^{(1)}$ и проверяют выполнение неравенства

$$f(x^{(0)} + \alpha_0 e^{(1)}) > f(x^{(0)}). \quad (3.9)$$

Если это неравенство выполняется, то вдоль первой координатной оси (в положительном направлении) значение целевой функции f увеличилось, и поэтому полагают

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 e^{(1)}, \quad \alpha_1 = \alpha_0.$$

Если неравенство (3.9) не имеет места, то делается попытка сделать шаг вдоль первой координатной оси в отрицательном направлении, т.е. проверяют неравенство

$$f(x^{(0)} - \alpha_0 e^{(1)}) > f(x^{(0)}). \quad (3.10)$$

В случае его выполнения полагают

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \alpha_0 e^{(1)}, \quad \alpha_1 = \alpha_0.$$

Если оба неравенства (3.9) – (3.10) не имеют места, то следует принять

$$x^{(1)} = x^{(0)}, \quad \alpha_1 = \alpha_0.$$

Следующий шаг осуществляется вдоль второй координатной оси. Если $f(x^{(1)} + \alpha_1 e^{(2)}) > f(x^{(1)})$, то полагают

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 e^{(2)}, \quad \alpha_2 = \alpha_1.$$

В противном случае проверяют неравенство $f(x^{(1)} - \alpha_1 e^{(2)}) > f(x^{(1)})$ и при его выполнении полагают

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \alpha_1 e^{(2)}, \quad \alpha_2 = \alpha_1.$$

Если же ни одно из двух последних неравенств не имеет места, то следует принять

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)}, \alpha_2 = \alpha_1.$$

Описанным способом последовательно перебирают все направления, параллельные n координатным осям. На этом *первая итерация* метода закончена.

На n -м шаге будет получена некоторая точка $\mathbf{x}^{(n)}$. Если $\mathbf{x}^{(n)} \neq \mathbf{x}^{(0)}$ (т.е. по крайней мере на одном из шагов произошло перемещение из начальной точки), то, начиная с $\mathbf{x}^{(n)}$, аналогичным образом производят *вторую итерацию*. Если же $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(0)}$, то величину шага рекомендуется уменьшить, приняв, например, $\alpha_{n+1} = \alpha_n/2$, и в следующей итерации использовать новое значение величины шага.

Последующие итерации производят точно так же.

Процесс вычислений продолжают до тех пор, пока не окажутся выполненными какие-нибудь условия окончания счета, например,

$$|f(\mathbf{x}^{(k+1)}) - f(\mathbf{x}^{(k)})| \leq \varepsilon \quad \text{или} \quad \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| \leq \delta, \quad (3.11)$$

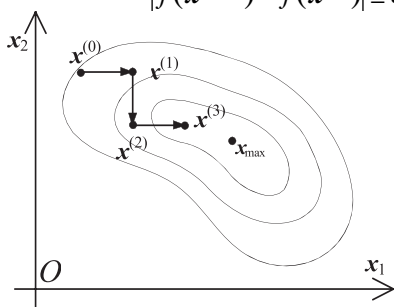


Рис. 3.10. Геометрическая иллюстрация к методу покоординатного подъема.

где ε и δ – некоторые заданные положительные числа, характеризующие точность решения исходной задачи оптимизации.

На рис. 3.10 изображены несколько линий уровня некоторой функции двух переменных и проиллюстрирован описанный метод.

Сходимость метода покоординатного подъема устанавливает следующая теорема, доказательство которой не приводится.

Теорема 3.4. *Предположим, что функция f вогнута и имеет непрерывные частные производные первого порядка на \mathbf{R}^n . Если начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ выбрано так, что множество $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^{(0)})\}$ ограничено, то каждая предельная точка последовательности, построенной в соответствии с методом покоординатного подъема, является точкой глобального максимума функции f .*

Рассматриваемый метод относится к классу методов нулевого порядка, и для его реализации не требуется вычислять частные производные. Тем не менее, в условиях сформулированной теоремы имеется требование непрерывной дифференцируемости функции. Примеры показывают, что если метод покоординатного подъема применять к функциям, не удовлетворяющим этому требованию, то указанного в теореме типа сходимости может и не быть.

3.2.3. Метод многогранника

Рассмотрим правильный треугольник на плоскости с вершинами a , b , c (рис.3.11(а)).

Предположим, что функция f двух переменных, которую необходимо максимизировать, в точках a , b и c принимает такие значения, что

$$f(a) = \min\{f(a), f(b), f(c)\}.$$

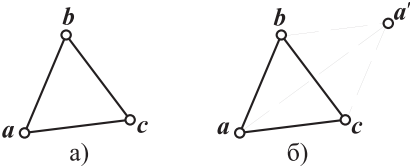


Рис. 3.11. Правильный треугольник (а). Построение нового правильного треугольника (б).

Поскольку мы стремимся максимизировать функцию f , то из трех вершин указанного треугольника вершина a оказывается наихудшей, и поэтому вполне естественно стремление продолжить поиск точки максимума «в стороне» от этой вершины. Идея метода многогранника (на плоскости) заключается в построении на следующем шаге нового правильного треугольника,

у которого две вершины b и c остаются прежними, а вместо «худшей» вершины a строится новая вершина a' (см. рис. 3.11(б)), которая является зеркальным отражением a относительно центра тяжести вершин b и c .

В общем случае, когда максимизируемая функция f зависит от n переменных, роль правильного треугольника будет играть многогранник в пространстве \mathbf{R}^n , имеющий $n+1$ вершин, равноотстоящих друг от друга. Отсюда происходит название метода — *метод многогранника*. При $n=3$ это будет тетраэдр.

Перейдем к подробному описанию *метода многогранника*.

Шаг 1. Выбрать положительное число α , характеризующее длину ребра многогранника, и начальное приближение (вершину многогранника) $x^{(0)}$. Построить остальные вершины многогранника $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ по формуле

$$x_j^{(i)} = \begin{cases} x_j^{(0)} + \alpha \cdot \frac{\sqrt{n+1} + n - 1}{n\sqrt{2}}, & \text{если } j \neq i, \\ x_j^{(0)} + \alpha \cdot \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n\sqrt{2}}, & \text{если } j = i. \end{cases} \quad (3.12)$$

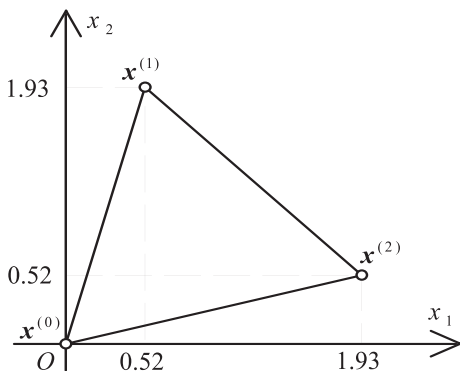


Рис. 3.12. Начальный правильный треугольник на плоскости.

Например, при $n=2$, $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$ и $\alpha=2$ указанным многогранником будет правильный треугольник, изображенный на рис. 3.12.

Убедимся в случае $n=3$, что точки $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}$, построенные по формуле (3.12), задают вершины тетраэдра.

Не уменьшая общности, положим $\alpha=1$ и $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. В этом случае

$$\mathbf{x}^{(1)} = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}} \right),$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}} \right),$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{1}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}} \right).$$

Для того чтобы установить требуемое, убедимся в том, что векторы $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ и $\mathbf{x}^{(3)}$ имеют одинаковую длину. В самом деле, имеем

$$\|\mathbf{x}^{(1)}\| = \|\mathbf{x}^{(2)}\| = \|\mathbf{x}^{(3)}\| = \sqrt{\frac{16}{9 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 2}} = 1.$$

Более того, выполнено

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\| = \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(3)}\| = \|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)}\| = 1.$$

Следовательно, точки $\mathbf{0}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ и $\mathbf{x}^{(3)}$ действительно являются вершинами тетраэдра (с ребром единичной длины)

Шаг 2. Сравнить значения функции f в вершинах многогранника и найти среди них ту (обозначим ее через $\mathbf{x}_{\text{ст}}^{(k)}$), в которой значение целевой функции минимально. Если минимум достигается в нескольких вершинах, то среди них можно выбрать любую.

Шаг 3. В имеющемся наборе вершин многогранника заменить вершину $\mathbf{x}_{\text{ст.}}^{(k)}$ на новую $\mathbf{x}_{\text{нов.}}^{(k)}$, рассчитываемую по формуле

$$\mathbf{x}_{\text{нов.}}^{(k)} = \mathbf{x}_{\text{ст.}}^{(k)} + 2(\mathbf{x}_{\text{цт.}} - \mathbf{x}_{\text{ст.}}^{(k)}) = 2\mathbf{x}_{\text{цт.}} - \mathbf{x}_{\text{ст.}}^{(k)}.$$

где вершина $\mathbf{x}_{\text{цт.}}$, соответствующая центру тяжести вершин многогранника без учета $\mathbf{x}_{\text{ст.}}^{(k)}$, определяется следующим образом:

$$\mathbf{x}_{\text{цт.}} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \mathbf{x}^{(i)}.$$

Если окажется выполненным неравенство $f(\mathbf{x}_{\text{нов.}}^{(k)}) > f(\mathbf{x}_{\text{ст.}}^{(k)})$, то вернуться к шагу 2 с измененным набором вершин многогранника. В противном случае предлагается уменьшить число α и повторить вычисления с шага 1.

Иногда на шаге 3 в случае $f(\mathbf{x}_{\text{нов.}}^{(k)}) \leq f(\mathbf{x}_{\text{ст.}}^{(k)})$ рекомендуют попробовать заменить не $\mathbf{x}_{\text{ст.}}^{(k)}$, а ту вершину, которой соответствует следующее по величине значение функции f .

Вычисления заканчивают, если размеры многогранника или разности между значениями функции f в вершинах многогранника становятся достаточно малыми. Иначе говоря, в качестве условий окончания вычислений выбирают условия (3.11). При этом в качестве точки $\mathbf{x}^{(k)}$ в первом неравенстве (3.11) следует взять $\mathbf{x}_{\text{нов.}}^{(k)}$, а в качестве $\mathbf{x}^{(k+1)}$ — ту из оставшихся n точек текущего многогранника, в которой целевая функция принимает наибольшее значение.

3.2.4. Градиентные методы

Одной из главных составляющих всех методов подъема является выбор направления перемещения на очередном шаге таким образом, чтобы, двигаясь в этом направлении, можно было увеличить значение целевой функции по сравнению с ее значением в данной точке. При реализации метода покоординатного подъема это направление всегда параллельно какой-нибудь координатной оси (т.е. совпадает с одним из единичных векторов $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \dots, \mathbf{e}^{(n)}$ или им противоположных $-\mathbf{e}^{(1)}, -\mathbf{e}^{(2)}, \dots, -\mathbf{e}^{(n)}$). Согласно методу многогранника, направление перемещения зависит от значений целевой функции в вершинах текущего многогранника и не обязательно параллельно какой-нибудь координатной оси.

Если целевая функция дифференцируема (а значит, имеет градиент), то ее ненулевой градиент «порождает» целый класс направлений, которые ведут к увеличению значения целевой функции. Это справедливо благодаря основному свойству градиента (теорема 1.1).

Тот факт, что любое достаточно малое перемещение в направлении градиента приводит к увеличению значения целевой функции, лежит в основе *градиентных методов*, вычисление очередного приближения $\mathbf{x}^{(k+1)}$ согласно которым производится по формуле (3.8) при $\mathbf{p}^{(k)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$, т.е.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Различные градиентные методы отличаются друг от друга лишь способом выбора величины шага α_k . Ясно, что при достаточно малом α_k будет достигнуто увеличение значения целевой функции:

$$f(\mathbf{x}^{(k+1)}) = f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})) > f(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (3.14)$$

но для достижения заданной точности может потребоваться слишком большое число шагов. С другой стороны, если α_k не является малым, то неравенство (3.14) может и не быть выполненным.

В *градиентном методе простой итерации* фиксируется некоторое положительное α , одинаковое для всех шагов, т.е. $\alpha_k = \alpha$. Если на некотором шаге неравенство (3.14) нарушается, то величину α уменьшают так, чтобы с новым значением α указанное неравенство оказалось выполненным, а после осуществления шага с уменьшенным значением α можно попробовать вернуться к старому значению.

Нередко величину α_k рекомендуют выбирать так, чтобы имело место более жесткое условие убывания, чем (3.14), а именно

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})) - f(\mathbf{x}^{(k)}) \geq \xi \alpha_k \|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\|, \quad (3.15)$$

где $0 < \xi < 1$ – некоторая фиксированная константа. Здесь также сначала фиксируют некоторое $\alpha_k = \alpha > 0$ (например, $\alpha_k = 1$), одинаковое для всех итераций, а затем при необходимости уменьшают его до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство (3.15).

Согласно *методу наискорейшего подъема* величина шага α_k находится из условия максимизации функции $f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))$ одной переменной α , т.е. из условия

$$f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})) = \max_{\alpha > 0} f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})). \quad (3.16)$$

Так как функция $f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))$ при $\alpha = \alpha_k$ достигает максимума, то ее производная в этой точке равна нулю:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\alpha} f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})) \right|_{\alpha=\alpha_k} &= \\
 &= \frac{d}{d\alpha} f\left(x_1^{(k)} + \alpha \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_1}, x_2^{(k)} + \alpha \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_2}, \dots, x_n^{(k)} + \alpha \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_n}\right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}))}{\partial x_i} \frac{\partial f(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_i} = \\
 &= \langle \nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)}), \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \rangle = 0
 \end{aligned}$$

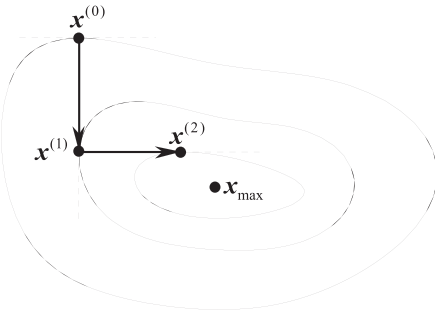


Рис. 3.13. Геометрическая иллюстрация к градиентному методу.

Последнее равенство означает, что направление подъема на $(k+1)$ -м шаге (т.е. вектор $\nabla f(\mathbf{x}^{(k+1)})$) ортогонально направлению подъема на k -м шаге (т.е. вектору $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$). Таким образом, кривая перемещения по методу наискорейшего подъема представляет собой ломаную, соседние звенья которой взаимно ортогональны (см. рис. 3.13).

В качестве критериев окончания счета при реализации градиентных методов, кроме (3.11) используют

также условие вида $\|\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})\| < \mu$, где $\mu > 0$ – фиксированная точность вычислений.

3.2.5. Метод Ньютона

В соответствии с *методом Ньютона* последовательность приближений $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ строится по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot H^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.17)$$

где $H^{-1}(\mathbf{x})$ – матрица $n \times n$, обратная по отношению к матрице Гессе $H(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \right)$, образованная из частных производных второго порядка целевой функции.

В равенстве (3.17) считается, что $\mathbf{x}^{(k)}$ и $\mathbf{x}^{(k+1)}$ – n -мерные векторы, записанные в виде строки, а $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot H^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})$ означает умножение строки на

квадратную матрицу по правилу перемножения матриц, принятому в линейной алгебре.

Будем предполагать, что целевая функция f имеет в каждой точке пространства \mathbf{R}^n все возможные непрерывные частные производные второго порядка, образующие матрицу Гессе, причем для этой матрицы Гессе существует обратная матрица.

Еще одно предположение заключается в требовании отрицательной определенности матрицы Гессе $H(\mathbf{x})$ в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Последнее означает выполнение неравенства $\mathbf{y} \cdot H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}^T < 0$ для любого ненулевого вектора-строки $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ и каждого $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

При $n = 1$ формула (3.17) принимает вид

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.18)$$

и с ее помощью можно решать задачу максимизации функции f одной переменной.

Каждый шаг согласно методу Ньютона производится в направлении возрастания функции f . Но так как величина перемещения из точки $\mathbf{x}^{(k)}$ в точку $\mathbf{x}^{(k+1)}$ никак не регулируется, то возможна ситуация, когда в последующем приближении значение функции f не увеличится, а, наоборот, уменьшится. Более того, если начальное (или очередное) приближение расположено «сравнительно далеко» от точки максимума, то точки последовательности $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$, вычисляемые по формуле (3.17), могут удаляться от искомой точки максимума.

В подтверждение сказанного рассмотрим следующий пример: $n = 1$, $f(x) = -\sqrt{1+x^2}$. Графиком этой функции является нижняя ветвь гиперболы с единственной точкой максимума $x_{\max} = 0$. Для начального приближения $x_0 = 2$ по формуле (3.18) нетрудно подсчитать, что $x_1 = -8$, $x_2 = 512$, $x_3 = -134217728$, и т. д. В результате получаем последовательность точек $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$, быстро удаляющуюся от точки максимума.

Попытки видоизменить метод Ньютона таким образом, чтобы он был лишен отмеченного недостатка, привели к появлению так называемых *методов Ньютона с регулировкой шага*, основанных на использовании вместо (3.17) следующей формулы:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot H^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\alpha_k > 0$, $k = 0, 1, \dots$. Здесь обычно полагают $\alpha_0 = 1$, что соответствует простому методу Ньютона. Если при этом окажется, что $f(\mathbf{x}^{(1)}) \leq f(\mathbf{x}^{(0)})$, то значение α_0 следует уменьшить, взяв, например, $\alpha_0 = 1/2$. С этим α_0 вновь проверяется выписанное выше неравенство. Уменьшение (например, деление

пополам) α_0 производят до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство $f(\mathbf{x}^{(1)}) > f(\mathbf{x}^{(0)})$. На следующем шаге можно вновь начать с $\alpha_1 = 1$ и действовать аналогично.

Вопросы и упражнения к главе 3

- 1) Сформулируйте определение унимодальной функции.
- 2) Опишите метод золотого сечения.
- 3) Опишите метод Фибоначчи.
- 4) В чем состоит существо метода многогранника?
- 5) Опишите метод наискорейшего подъема.
- 6) Опишите метод Ньютона.
- 7) Методом золотого сечения и методом Фибоначчи найдите точку минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью до 0.2, если
 - i) $f(x) = x + x^2 - x^3 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^6$, $a = -1, b = 0$,
 - ii) $f(x) = x \sin x + 2 \cos x$, $a = \pi/4, b = \pi/3$,
 - iii) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x(\ln x - 1)$, $a = 0.5, b = 1$.
- 8) В структуре капитальных вложений на развитие химического завода важное место занимают затраты на приобретение и монтаж труб, а также затраты на установку насосного оборудования. Трубопровод длиной L (м) должен обеспечивать подачу жидкости со скоростью V (м³/мин.). Выбор наиболее экономичного диаметра трубы D (м) осуществляется на основе минимизации функции затрат на приобретение труб, насосов и прокачивания жидкости. Известно, что функция затрат в единицу времени в случае, когда трубопровод состоит из труб, изготовленных из углеродистой стали, и центробежного насоса с электродвигателем, имеет вид

$$f = 0.45L + 0.245LD^{1.5} + 325\sqrt{hp} + 61.6(hp)^{0.925} + 102,$$

$$\text{где } hp = 4.4 \cdot 10^{-9} \frac{LV^3}{D^5} + 1.92 \cdot 10^{-9} \frac{LV^{2.68}}{D^{4.68}}.$$

Сформулируйте соответствующую задачу оптимизации функции одной переменной для проектирования трубопровода длиной 1000 м, который должен обеспечивать подачу жидкости со скоростью 20 м³/мин. Диаметр трубы должен быть заключен в пределах от 0.25 до 6 м. Решите эту задачу методом золотого сечения с точностью до 0.5 м.

- 11) Дана функция двух переменных $f(x, y) = -8x^2 - 4xy - 5y^2$. Взяв в качестве начальной точки $(-4, -4)$, выполните несколько шагов в соответствии с методами покоординатного подъема, многогранника, наискорейшего подъема и Ньютона с целью максимизации данной функции.
- 12) Примените метод наискорейшего подъема для максимизации функции $f(x, y) = 10xy - 2x^3 - 4xy^3 - y^2$, взяв в качестве начальной точку $(2, 5)$ и выполнив несколько шагов. Затем используйте для решения этой задачи метод многогранника. Полученные результаты сравните.

Глава 4. Элементы динамического программирования

4.1. Дискретные управляемые системы

4.1.1. Общие сведения об управляемых системах

Важнейшими в теории оптимального управления являются понятия *системы (объекта) и управления*.

Слово «система» широко используется в обыденной речи, являясь частью таких словообразований, как финансово-кредитная система, система взаимозачета, система отопления и т.п. Этимологически «система» представляет собой греческий эквивалент латинского слова «композиция». Тем самым, понятие системы предполагает одновременное наличие нескольких компонентов (элементов или частей). В этом смысле система имеет общие черты с обычным множеством, т.е. совокупностью элементов. Однако, в отличие от множества термин «система» подразумевает определенное взаимодействие, взаимосвязь составляющих ее элементов. Эта взаимосвязь придает системе в целом такие свойства, которых нет в каждом из элементов данной системы.

Не вдаваясь в детализацию понятия системы, отметим, что наиболее общеупотребительным является представление о системе, как о совокупности взаимосвязанных элементов (частей, подсистем). Взаимосвязь элементов системы (т.е. внутреннее строение данной системы) описывается ее *структурой*. В качестве простого наглядного примера системы можно упомянуть, например, нашу солнечную систему. Элементами солнечной системы являются планеты, входящие в нее. Планеты при помощи своих гравитационных полей определенным образом взаимосвязаны друг с другом. Эта взаимосвязь подчиняется физическим законам и может быть описана математическим языком.

Еще одним фундаментальным термином, непосредственно относящимся к любой системе, является *состояние* системы. Предполагается, что всякая система (точнее говоря, динамическая система, т.е. система, которая определенным образом развивается, эволюционирует во времени) в каждый момент времени может пребывать в одном из некоторого (конечного или бесконечного) числа возможных состояний. Именно смена состояний системы с течением времени дает возможность говорить о *развитии* или *функционировании* данной системы. Например, положение ракеты в пространстве (если ее отождествить с материальной точкой) может быть описано тремя простран-

твенными координатами – тройкой чисел. Эта тройка чисел (зависящая от времени) и определяет текущее пространственное положение (состояние) ракеты.

Далее будут рассматриваться только такие объекты, состояние которых в каждый момент времени может быть однозначно охарактеризовано определенным конечным набором n числовых параметров (т.е. n -мерным вектором) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Такого рода системы широко распространены в технике и экономике.

Векторное пространство \mathbf{R}^n , которому принадлежат возможные состояния системы, называют *пространством состояний* или *фазовым пространством*. Поскольку система развивается (эволюционирует) во времени, то указанные числовые параметры представляют собой функции времени, т.е. $\mathbf{x}^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_n^{(t)})$. При изменении времени от какого-то начального значения $t = t_0$ до некоторого конечного точка $\mathbf{x}^{(t)}$ в фазовом пространстве описывает определенную кривую, которую называют *траекторией* системы.

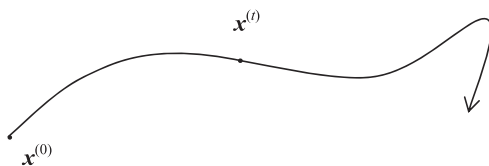


Рис. 4.1. Фазовая траектория на плоскости.

В случае $n \leq 3$ траектория может быть изображена в фазовом пространстве соответствующей размерности, и с ее помощью можно получить наглядное представление о функционировании данной системы (см. рис. 4.1).

Существуют два типа (два класса) систем. Один из них составляют те объекты, на развитие которых человек не может оказать никакого воздействия. Пример такого рода дает Солнечная система. Другой класс систем составляют те, состояние которых может меняться по воле отдельного человека или же целой группы людей в зависимости от преследуемых ими целей (это, например, финансово-кредитная система, космический корабль и т.п.). *Управление* – это и есть воздействие, способное изменить текущее состояние, а значит и все последующее развитие системы. В технических системах механизм управления реализуется посредством определенных технических устройств. В экономических системах управление происходит в основном благодаря изменению установленных ранее правил экономического поведения (например, путем изменения процентных ставок, введения ограничений на рост цен на природные ресурсы и т.п.). Здесь следует отметить, что на функционирование сложных систем, как правило, оказывают воздействия очень многие факторы. И управление является лишь одним из целого множества имеющихся воздействий. Поэтому на практике из-за

сильных «внешних помех» человеку в результате управления часто не удается в полной мере достичь желаемого эффекта.

Дальнейшее рассмотрение будет связано с классом *управляемых систем*, поведение (развитие) которых удастся менять, оказывая то или иное воздействие, причем таким образом, что в результате изменения достигаются определенные, заранее поставленные цели.

Будем считать, что управляющие воздействия можно описать некоторым конечным набором числовых параметров (управлений) $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_r)$, которые управляющий орган способен выбирать в пределах некоторого множества (области управления). Разумеется, выбор того или иного управления зависит от текущего момента времени, а значит, управление \mathbf{u} представляет собой некоторый набор функций (вектор-функцию) времени, т.е. $\mathbf{u}^{(t)} = (u_1^{(t)}, u_2^{(t)}, \dots, u_r^{(t)})$.

4.1.2. Математическое представление дискретной управляемой системы

Ограничим последующее рассмотрение классом систем управления, развитие (функционирование) которых происходит в дискретные моменты времени $t = 0, 1, 2, \dots, N$. Момент времени $t = 0$ называют *начальным*, а $t = N$ — *конечным моментом*.

Соответственно получаем конечную *последовательность управлений*

$$\mathbf{u}^{(t)} = (u_1^{(t)}, u_2^{(t)}, \dots, u_r^{(t)}), \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

и конечную *последовательность состояний*

$$\mathbf{x}^{(t)} = (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}), \quad t = 0, 1, \dots, N.$$

Состояние $\mathbf{x}^{(0)}$ в начальный момент времени обычно считается заранее заданным. Переменные управления выбираются органом управления в пределах *множеств допустимых управлений* U_t , т.е.

$$\mathbf{u}^{(t)} \in U_t \subset \mathbf{R}^r, \quad t = 1, 2, \dots, N$$

Состояние системы $\mathbf{x}^{(t)}$ в момент времени t в общем случае зависит от состояния $\mathbf{x}^{(t-1)}$, в котором находилась система в предыдущий момент времени, и управления $\mathbf{u}^{(t)}$ в данный момент t . Будем считать, что эта зависимость функционально выражается в виде равенств

$$\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{g}^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)}), \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1)$$

где правая часть равенства

$$\mathbf{g}^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)}) = \\ = (g_1^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)}), g_2^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)}), \dots, g_n^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)})), \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

представляет собой n -мерную векторную функцию $n+r$ переменных $x_1^{(t-1)}, x_2^{(t-1)}, \dots, x_n^{(t-1)}, u_1^{(t)}, u_2^{(t)}, \dots, u_r^{(t)}$.

Развитие (функционирование) системы во времени происходит следующим образом. При $t = 0$ система находится в заданном начальном состоянии $\mathbf{x}^{(0)}$. Выбирая управление $\mathbf{u}^{(1)} \in U_1$, управляющий орган тем самым переводит систему из начального состояния в состояние $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{g}^{(1)}(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)})$ к моменту времени $t = 1$. Далее, выбор управления $\mathbf{u}^{(2)} \in U_2$ определяет следующее состояние $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{g}^{(2)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)})$ в момент времени $t = 2$. И т.д. Конечное состояние системы $\mathbf{x}^{(N)} = \mathbf{g}^{(N)}(\mathbf{x}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N)})$ зависит от состояния $\mathbf{x}^{(N-1)}$ в предпоследний момент времени и выбора управления $\mathbf{u}^{(N)}$ в пределах множества U_N .

Таким образом, последовательность управлений $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(N)}\}$, члены которых выбираются из допустимых множеств U_1, U_2, \dots, U_N , однозначно определяет соответствующую последовательность состояний $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}$, называемую *траекторией системы*. Пара \mathbf{U}, \mathbf{X} образует *процесс*.

4.2. Задача оптимального управления. Принцип оптимальности

4.2.1. Постановка задачи оптимального управления

Выбор различных последовательностей управления \mathbf{U} будет приводить к разным последовательностям состояний \mathbf{X} . Цель управления заключается в получении процесса наилучшего качества. Для оценки качества должны быть заданы определенные функции.

Будем считать, что качество управления на t -ом шаге функционирования (т.е. при переходе от состояния $\mathbf{x}^{(t-1)}$ к состоянию $\mathbf{x}^{(t)}$) оценивается показателем $f^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)})$, представляющим собой некоторую числовую функцию $n+r$ переменных. При этом качество процесса за весь период управления характеризуется суммарным *критерием качества*

$$I = \sum_{t=1}^N f^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)}), \quad (4.2)$$

называемым также *критерием оптимальности*.

Теперь можно сформулировать задачу оптимального управления дискретной системой. Дана управляемая дискретная система (4.1) с начальным состоянием $\mathbf{x}^{(0)}$. Требуется найти такую последовательность допустимых управлений

$$\bar{\mathbf{U}} = (\bar{\mathbf{u}}^{(1)}, \bar{\mathbf{u}}^{(2)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{(N)}); \quad \bar{\mathbf{u}}^{(t)} \in U_t \subset \mathbf{R}^r, \quad t = 1, 2, \dots, N,$$

и соответствующую ей согласно (4.1) последовательность состояний

$$\bar{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}^{(0)}, \bar{\mathbf{x}}^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{x}}^{(N)}),$$

для которых критерий качества (4.2) принимает наибольшее возможное значение. Пару $\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{X}}$, являющуюся решением сформулированной задачи оптимального управления, называют *оптимальным процессом*.

Нетрудно понять, что задача оптимального управления представляет собой некоторую задачу оптимизации (в данном случае – максимизации) заданной числовой функции (4.2) специального суммарного вида, которая зависит как от переменных управления, так и переменных состояния. При этом варьируются (выбираются) лишь переменные управления, тогда как переменные состояния однозначно определяются переменными управления (они играют в задаче некоторую «промежуточную» роль) посредством (4.1).

4.2.2. Принцип оптимальности Беллмана

Разобьем весь временной промежуток $T = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ на два периода

$$T_1 = \{0, 1, 2, \dots, k\}, \quad T_2 = \{k+1, \dots, N\}.$$

Предположим, что в результате применения допустимых управлений $\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(k)}$ дискретная система (4.1) перешла в состояние $\mathbf{x}^{(k)}$. Это состояние можно рассматривать как начальное для второго периода времени T_2 . При этом первому периоду времени T_1 отвечает критерий оптимальности

$$I_1 = \sum_{t=1}^k f^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)}),$$

а второму –

$$I_2 = \sum_{t=k+1}^N f^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)}).$$

Рассмотрим произвольную оптимальную последовательность управлений $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{\mathbf{u}}^{(1)}, \bar{\mathbf{u}}^{(2)}, \dots, \bar{\mathbf{u}}^{(N)})$ и соответствующую ей оптимальную траекторию $\bar{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}^{(0)}, \bar{\mathbf{x}}^{(1)}, \dots, \bar{\mathbf{x}}^{(N)})$. Справедливо следующее необходимое условие опти-

мальности, называемое принципом оптимальности Р. Беллмана в честь американского математика, впервые получившего это условие.

Теорема 4.1 (принцип оптимальности). *Оптимальная последовательность управлений $\bar{U} = (\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots, \bar{u}^{(N)})$ для системы (4.1) с критерием оптимальности (4.2) обладает тем свойством, что для любого номера $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ подпоследовательность управлений $\bar{u}^{(k+1)}, \dots, \bar{u}^{(N)}$ является оптимальной последовательностью для второго периода управления T_2 относительно критерия оптимальности I_2 с начальным состоянием $\bar{x}^{(k)}$.*

Доказательство. Предположим напротив, что последовательность управлений $\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots, \bar{u}^{(N)}$ является оптимальной, но при некотором $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ найдется подпоследовательность допустимых управлений $u^{(k+1)}, \dots, u^{(N)}$, такая, что

$$\sum_{t=k+1}^N f^{(t)}(x^{(t-1)}, u^{(t)}) > \sum_{t=k+1}^N f^{(t)}(\bar{x}^{(t-1)}, \bar{u}^{(t)}), \quad (4.3)$$

где $x^{(t)} = g^{(t)}(x^{(t-1)}, u^{(t)})$, $t = k+1, \dots, N$; $x^{(k)} = \bar{x}^{(k)}$ — подпоследовательность состояний, отвечающая управлениям $u^{(k+1)}, \dots, u^{(N)}$ с начальным состоянием $\bar{x}^{(k)}$.

Ясно, что последовательность управлений

$$\bar{u}^{(1)}, \dots, \bar{u}^{(k)}, u^{(k+1)}, \dots, u^{(N)}$$

является допустимой в исходной задаче оптимального управления системой (4.1) с критерием оптимальности (4.2), и ей соответствует траектория

$$x^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(N)},$$

причем в силу (4.3) выполнено

$$\sum_{t=1}^k f^{(t)}(\bar{x}^{(t-1)}, \bar{u}^{(t)}) + \sum_{t=k+1}^N f^{(t)}(x^{(t-1)}, u^{(t)}) > \sum_{t=1}^N f^{(t)}(\bar{x}^{(t-1)}, \bar{u}^{(t)}).$$

Полученное неравенство противоречит тому, что последовательность управлений $\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots, \bar{u}^{(N)}$ является оптимальной \blacktriangle

Замечание. Обращаем внимание на следующий факт. Если выше формально принять $k=0$, то останется лишь один период времени T_2 , совпадающий с T , и утверждение теоремы 4.1 превратится в тавтологию: оптимальная последовательность управлений $\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots, \bar{u}^{(N)}$ обладает тем свойством, что она является оптимальной последовательностью управлений для исходной задачи. Отсюда следует, что принцип оптимальности, в котором вместо $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ записано $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, будет представлять собой как необходимое, так и достаточное условие оптимальности.

4.2.3. Схема применения принципа оптимальности

Рассмотрим рис. 4.2. В начальный момент времени $t = 0$ система находится в состоянии $\mathbf{x}^{(0)}$. Выбирая то или иное возможное управление $\mathbf{u}^{(1)} \in U_1$ (на рис. 4.2 таких управлений указано ровно три – по числу стрелок, исходящих из $\mathbf{x}^{(0)}$), к моменту времени $t = 1$ систему можно перевести в одно из некоторого набора возможных состояний. Далее, из каждого из получившихся возможных состояний в момент времени $t = 1$ систему под воздействием допустимых управлений $\mathbf{u}^{(2)} \in U_2$ к моменту $t = 2$ можно перевести в какое-то новое множество возможных состояний. И т.д. В конце концов, получим множество возможных состояний, в которых может оказаться сис-

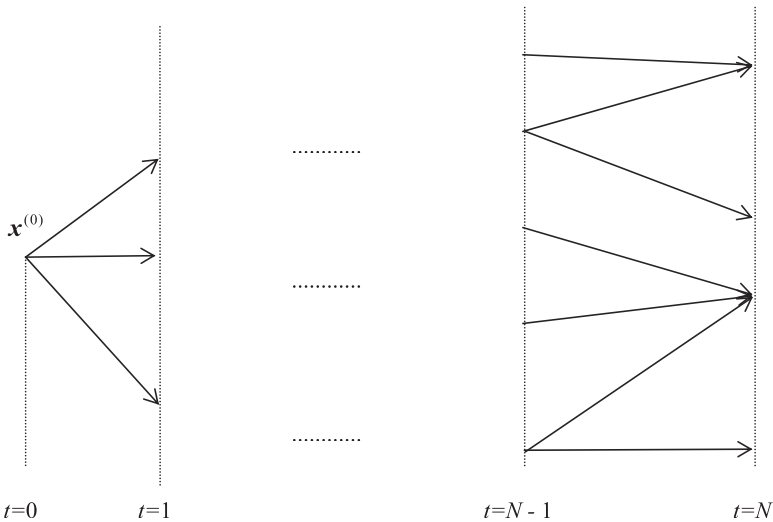


Рис. 4.2. Изменение состояний дискретной системы под воздействием допустимых управлений.

тема к конечному моменту времени $t = N$. Ломаная линия, начинающаяся в начальной точке $\mathbf{x}^{(0)}$ и заканчивающаяся при $t = N$ в какой-то конечной точке, отвечающей некоторому конечному состоянию, будет соответствовать определенной траектории системы.

Принцип Беллмана для отыскания оптимальной последовательности управлений применяют следующим образом. Для простоты далее будем считать, что на каждом шаге число возможных управлений (а, тем самым, и число возможных состояний системы) является конечным. Для каждого их всех возможных состояний системы в предпоследний момент времени $t = N - 1$ находят допустимое управление, максимизирующее функцию

$f^{(N)}(\mathbf{x}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N)})$. Тем самым, каждому возможному состоянию $\mathbf{x}^{(N-1)}$ сопоставляется (и запоминается) управление, доставляющее максимум критерию качества на последнем шаге функционирования системы. Затем аналогично для всех возможных состояний системы в момент времени $t = N - 2$ находят (и запоминают) последовательность из двух управлений, доставляющих максимум критерию качества $f^{(N-1)}(\mathbf{x}^{(N-2)}, \mathbf{u}^{(N-1)}) + f^{(N)}(\mathbf{x}^{(N-1)}, \mathbf{u}^{(N)})$ на двух последних шагах функционирования; при этом учитываются найденные ранее управления, доставляющие максимум критерию качества на последнем шаге. После этого точно так же действуют до тех пор, пока не дойдут до момента времени $t = 1$; при этом для каждого из всех возможных состояний $\mathbf{x}^{(1)}$ системы на первом шаге функционирования будет найдена своя, так называемая условно-оптимальная последовательность $N - 1$ управлений.

Остается завершить процесс вычислений. Начальное состояние системы единственно и для него следует аналогичным образом отыскать такое допустимое управление $\mathbf{u}^{(1)} \in U_1$, которое максимизирует сумму $f^{(1)}(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}) + \sum_{t=2}^N f^{(t)}(\mathbf{x}^{(t-1)}, \mathbf{u}^{(t)})$. Заметим, что второе слагаемое в этой сумме уже известно в результате выполнения предыдущих вычислений.

Выбирая то или иное допустимое управление $\mathbf{u}^{(1)}$, мы переводим систему из начального в какое-то возможное состояние $\mathbf{x}^{(1)}$ к моменту времени $t = 1$, для каждого из которых ранее была построена соответствующая последовательность условно оптимальных управлений вплоть до последнего шага. Поэтому максимизация указанной выше суммы не вызывает принципиальных вычислительных затруднений. В результате этой максимизации находится последовательность управлений, которая благодаря единственности начального состояния будет оптимальной. Зная оптимальную последовательность управлений, можно построить соответствующую оптимальную последовательность состояний.

4.3.4. Пример применения принципа оптимальности

Обратимся к рис. 4.3.

Здесь $N = 3$. Стрелки указывают переход системы из одного возможного состояния в другое под воздействием допустимых управлений. Например, на первом шаге имеется три возможных управления, которым отвечают три стрелки. Тем самым, при $t = 1$ получаем три возможных состояния системы (им соответствуют концы стрелок). У каждой стрелки выписано соответствующее значение критерия качества, отвечающее переходу из одного состояния

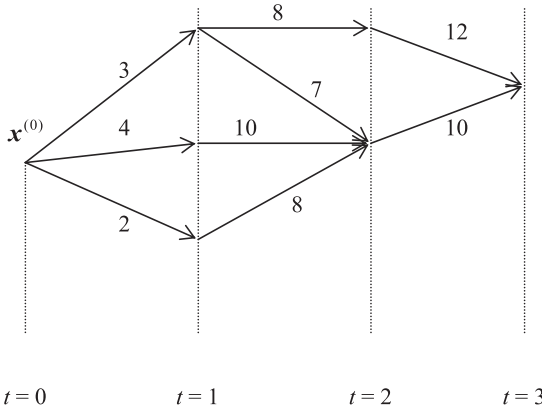


Рис. 4.3. Иллюстративный пример.

в другое. Нетрудно подсчитать, что здесь всего четыре возможных траектории и оптимальное значение критерия оптимальности равно 24. Оптимальной будет траектория, проходящая через «среднее» состояние при $t = 1$ и «нижнее» при $t = 2$.

Теперь найдем оптимальную траекторию с помощью принципа оптимальности. Начинаем с предпоследнего момента времени $t = 2$. Из каждого из двух возможных

состояний системы при $t = 2$ выходит по одной стрелке, поэтому здесь собственно вычислять ничего не требуется, так как переход из этих состояний в единственное конечное определен однозначно, и этот переход приводит к значениям 12 и 10. Запоминаем их.

Рассмотрим три возможных состояния при $t = 1$. Из «верхнего» состояния выходят две стрелки, верхней стрелке соответствует значение $8 + 12 = 20$, тогда как нижней — $7 + 10 = 17$. Это означает, что если оптимальная траектория «пройдет» через «верхнее» состояние при $t = 1$, то далее нужно двигаться так, чтобы получить значение 20. Из «среднего» и «нижнего» состояний при $t = 1$ переходы определены однозначно и им отвечают суммарные значения критерия качества, равные 20 и 18 соответственно. Эти значения следует запомнить, они будут использоваться ниже.

Из начального состояния выходят три стрелки («верхняя», «средняя» и «нижняя»), которым отвечают следующие значения $3 + 20 = 23$, $4 + 20 = 24$ и $2 + 18 = 20$. Максимальным из этих трех чисел является 24; именно оно соответствует оптимальному процессу.

Замечание. В рассмотренном примере оптимальный процесс (т.е. оптимальные последовательности управлений и состояний) легко находится без применения принципа оптимальности. Однако при больших N и большом количестве допустимых управлений «угадать» оптимальный процесс невозможно и приходится использовать какие-то вычислительные процедуры, одна из которых основана на использовании принципа оптимальности и описана выше.

Вопросы и упражнения к главе 4

- 1) Что такое система? Какие системы вы знаете?
- 2) Приведите примеры динамических систем, с которыми вы сталкивались. Какие возможные состояния были у этих систем? Являлись ли эти системы управляемыми?
- 3) Запишите общий вид дискретной управляемой системы.
- 4) В чем заключается задача оптимального управления дискретной системой?
- 5) Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.
- 6) *Задача управления запасами.* Процесс производства и хранения однородной продукции рассматривается на протяжении N периодов времени $t = 1, 2, \dots, N$. Объем производства продукции за период времени t составляет u_t , а объем запасов к концу периода t равен x_t . Для каждого периода времени t известен неотрицательный спрос B_t на данный вид продукции, который должен быть удовлетворен. По технологическим причинам в каждом периоде времени должно быть произведено не менее u_t^- и не более u_t^+ единиц продукции. Считается, что запасы в начале и конце планового периода равны нулю. Известна функция затрат $c_t(\cdot)$ (а также $L_t(\cdot)$), определяющая затраты на производство (затраты на хранение) в зависимости от объема производства (объема запасов) для любого $t = 1, 2, \dots, N$. Сформулируйте математическую модель управления запасами в виде задачи оптимального управления дискретной управляемой системой считая, что суммарные затраты за весь период времени $t = 1, 2, \dots, N$ должны быть минимизированы.
- 7) *Поиск кратчайшего маршрута.* На основе принципа оптимальности Беллмана найдите маршрут из пункта A в пункт B (рис. 4.4), имеющий минимальную длину.

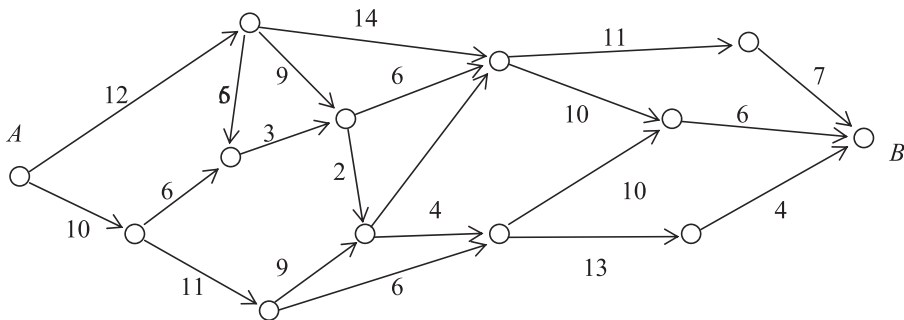


Рис. 4.4. Сеть маршрутов из пункта A в пункт B

Литература

1. Ашманов С.А. *Линейное программирование*. М.: Наука, 1981.
2. Болтянский В.Г. *Оптимальное управление дискретными системами*. М.: Наука, 1973.
3. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач*. М.: Наука, 1988.
4. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа*. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1981.
5. Ногин В.Д. и др. *Основы теории оптимизации*. М.: Высшая школа, 1986.
6. Ногин В.Д. *Элементы теории оптимизации и математической экономики*. Л.: Изд-во ЛПИ, 1986.
7. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. *Численные методы в экстремальных задачах*. М.: Наука, 1975.
8. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. *Курс методов оптимизации*. М.: Наука, 1986.

Ногин Владимир Дмитриевич,
д.ф.-м.н., профессор

Методы оптимальных решений

Учебное пособие

Рецензент	Н. А. Зенкевич, к. ф.-м. н., доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ Ю. И. Рейнов, к. т. н., зав. кафедрой математики СПб филиала ГУВШЭ
Тех. редактор	Е. А. Трифонова
Верстка	Е. Е. Свежинцев

Издательство «Ютас»
190008, Санкт-Петербург, ул. Рощинская, д. 36,
тел. (812) 388-03-21;
e-mail: jutasprint@gmail.com

Подписано в печать 20.04.2006. Формат 60x88/16
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Объем: 6,75 печ. л., 3,5 учетно-издат. л.
Тираж 200. Заказ № 012

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии ООО «Деметра»
190121, Санкт-Петербург, наб. канала Грибоедова, 176
тел./факс: (812) 714-79-42, e-mail: jutasprint@gmail.com

ISBN 5-91185-003-6



9 785911 185003 6 >