**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ-
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ФИЛИАЛ

В.Д. Ногин

Введение в оптимальное управление

Учебно-методическое пособие

*Санкт-Петербург
2008*

УДК 330.41

Рецензенты:
Зенкевич Н.А., к. ф.-м. н., доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ
Рейнов Ю.И., к.т.н., доцент кафедры математики СПб филиала ГУ-ВШЭ

В.Д. Ногин
Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое пособие. – СПб: Изд-во «ЮТАС», 2008 г., 92 с.

ISBN 978-5-91185-068-5

Рассматривается задача оптимального управления объектами, которые описываются системами дифференциальных уравнений. Формулируется и подробно обсуждается известный принцип максимума Л.С. Понтрягина, предназначенный для решения задач оптимального управления. На основе этого принципа исследуется модель Р. Солоу односекторной экономики, а также некоторые другие задачи экономического содержания.
Пособие предназначено студентам – экономистам и слушателям программ высшего профессионального обучения по управлению на предприятиях.

Для студентов и слушателей программ высшего профессионального образования.

Рекомендовано к печати Учебно – методическим советом СПб филиала ГУ-ВШЭ.

ISBN 978-5-91185-068-5

Оглавление

Предисловие

Согласно сложившейся в последнее время точке зрения, оптимальное управление представляет собой определенный раздел теории экстремальных задач (теории оптимизации), посвященный исследованию и решению вопросов максимизации и минимизации функционалов на множествах функций специального вида. С другой стороны, – оптимальное управление тесно связано с выбором наиболее выгодных (оптимальных) режимов управления сложными объектами, которые описываются при помощи систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Если первая точка зрения непосредственно согласуется с классификацией, принятой в «классической» математике, то вторая – более прикладная, поскольку ориентирована на решение различного рада задач из экономики и техники. При изложении материала данного пособия предпочтение отдается именно второй точке зрения.

Пособие посвящено изложению принципа максимума Л.С. Понтрягина – одному из основных инструментов решения задач оптимального управления динамическими системами. Сначала приводятся краткие сведения из теории дифференциальных уравнений, активно используемые в дальнейшем, обсуждается понятие функционала и задача его оптимизации. Затем дается постановка задачи оптимального управления динамической системой, поведение которой может быть описано с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводится несколько вариантов принципа максимума, соответствующих различным разновидностям задачи оптимального управления (с фиксированными и подвижными концами, с фиксированной и нефиксированной продолжительностью управления). Изучается модель односекторной экономики, предложенная Нобелевским лауреатом Р. Солоу, и на ее основе ставится и решается задача оптимального экономического роста. Кроме того, с помощью принципа максимума изучаются две задачи оптимального использования энергии с учетом возможных отрицательных последствий для окружающей среды.

Пособие содержит пять глав, каждая из которых завершается выводами, списком основных терминов, контрольных вопросов и упражнений. В конце пособия предлагаются темы курсовых работ, которые должны являться продолжением развития тематики данного пособия.

Глава 1. Необходимые сведения из теории дифференциальных уравнений и функционального анализа

Материал этой главы необходим для понимания всего последующего изложения. Читатель, знакомый с ним, может переходить к изучению следующей главы.

1.1. Дифференциальное уравнение первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) . \tag{1.1}$$

Здесь $x = x(t)$ – искомая числовая функция аргумента t, определенная на некотором числовом промежутке (a,b), а $f(t,x)$ – заданная числовая функция двух переменных. Обычно функцию f считают непрерывной на некоторой плоской области $D, D \subset R^2$.

Решением дифференциального уравнения (1.1) называют такую дифференцируемую на интервале (a,b) функцию $x = x(t)$, которая при подстановке в уравнение (1.1) обращает его в тождество, т.е.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t)) \qquad \text{при всех } t \in (a,b) .$$

При этом график функции $x = x(t)$ именуют *интегральной кривой*.

Пусть заданы два числа $t_0 \in (a,b)$ и x_0, такие, что $(t_0, x_0) \in D$. Задачу отыскание решения $x = x(t)$ уравнения (1.1), удовлетворяющего *начальному условию* $x(t_0) = x_0$, называют *задачей Коши*. Геометрически задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой уравнения (1.1), проходящей через заданную точку $M_0(t_0, x_0)$ (рис 1.1).

При этом возможны следующие три случая:

1. Через точку M_0 проходит единственная интегральная кривая;
2. Через точку M_0 проходит по крайней мере две интегральные кривые;
3. Через точку M_0 не проходит ни одной интегральной кривой.

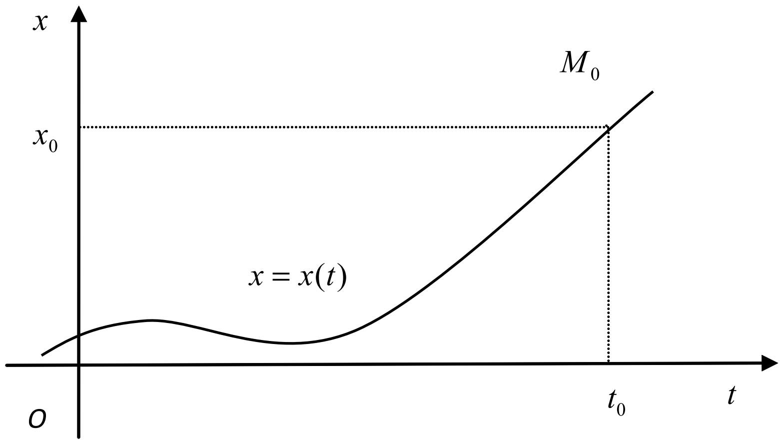

Рис. 1.1. Интегральная кривая

Из курса дифференциальных уравнений известно, что при выполнении определенных (не слишком «жестких») требований к функции $f(t,x)$ решение задачи Коши на некотором интервале $(t_0 - h, t_0 + h)$ (где положительное число h достаточно мало́) всегда существует и определяется однозначно (т.е. является единственным).

Пример 1.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{t}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что, например, функция $x = 2t$ ($t \neq 0$) является решением задачи Коши для этого уравнения с начальным условием $x(1) = 2$.

Допустим, что область D обладает тем свойством, что в каждой точке этой области задача Коши для уравнения (1.1) имеет единственное решение (т.е. через каждую точку этой области проходит, причем в точности одна интегральная кривая). Однопараметрическое семейство функций $x = x(t,C)$, где C – параметр, называется *общим решением* уравнения (1.1) в области D, если для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ выполняются следующие два условия

1. уравнение $x_0 = x(t_0, C)$ относительно C имеет единственное решение $C = C_0$;
2. функция $x = x(t, C_0)$ является решением задачи Коши для уравнения (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Пример 1.2. Пусть имеется дифференциальное уравнение $x' = 3\sqrt[3]{x}$. Проверим, что семейство функций $x(t,C) = \sqrt{(2t+C)^3}$, где C – произвольная постоянная, является общим решением данного уравнения на всей плоскости, т.е. при $D = R^2$. С этой целью сначала из уравнения $x_0 = \sqrt{(2t_0+C)^3}$ находим единственное решение $C = C_0 = x_0^{2/3} - 2t_0$. Далее, убеждаемся в том, что функция $x(t,C_0) = \sqrt{(2t + x_0^{2/3} - 2t_0)^3}$ является решением данного дифференциального уравнения:

$$(x(t,C_0))' = \left(\sqrt{(2t + x_0^{2/3} - 2t_0)^3}\right)' =$$

$$= \frac{3}{2}(2t + x_0^{2/3} - 2t_0)^{1/2}\, 2 = 3\sqrt{2t + x_0^{2/3} - 2t_0} = 3\sqrt[3]{x(t,C_0)}$$

при всех t. Остается проверить выполнение начального условия:

$$x(t,C_0)\Big|_{t=t_0} = \sqrt{(2t + x_0^{2/3} - 2t_0)}\Bigg|_{t=t_0} = x_0 .$$

Проинтегрировать дифференциальное уравнение (1.1) означает найти его решение (или общее решение). Способ интегрирования в сильной степени зависит от конкретного вида правой части уравнения (1.1), т.е. от функции $f(t,x)$. В стандартном курсе дифференциальных уравнений (см., например, [7]) изучаются способы интегрирования следующих классов дифференциальных уравнений:

- уравнения с разделяющимися переменными,
- линейные уравнения,
- уравнения в полных дифференциалах,
- однородные уравнения.

При этом каждый класс характеризуется специфическими для него приемами интегрирования, на которых мы здесь не останавливаемся (об этом см., например, [7]).

1.2. Начальные понятия теории систем дифференциальных уравнений

1.2.1. Системы из двух дифференциальных уравнений

Нормальная система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2). \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ – искомые функции аргумента t; f_1 и f_2 – заданные функции трех аргументов t, x_1, x_2, определенные на некоторой трехмерной области $D, D \subset R^3$.

Если функции f_1 и f_2 не зависят от аргумента t, то систему (1.2) называют *автономной*.

Решением системы (1.2) на интервале (a,b) называют пару функций $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, определенных и дифференцируемых на данном интервале и обращающих уравнения системы (1.2) в тождества по t, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = f_2(t, x_1(t), x_2(t)) \end{cases}$$

для всех $t \in (a,b)$.

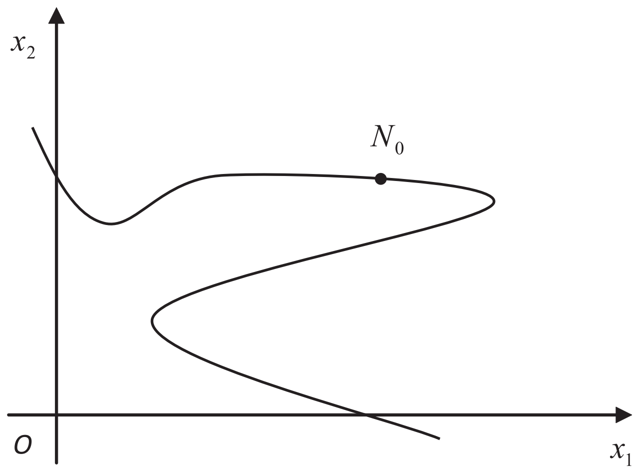

Рис. 1.2. Траектория системы

Задача Коши для системы (1.2) формулируется следующим образом. Заданы начальные данные (числа) $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ и начальный момент времени $t_0 \in (a,b)$ такие, что $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in D$. Требуется найти решение $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ системы (1.2), удовлетворяющее в момент времени $t = t_0$ заданным *начальным условиям*

$$x_1(t_0) = x_1^{(0)}, \quad x_2(t_0) = x_2^{(0)}.$$

Решение задачи Коши для системы (1.2) (т.е. пара функций $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$) в прямоугольной декартовой системе координат x_1Ox_2 на плоскости параметрически задает некоторую кривую, проходящую при $t = t_0$ через точку $N_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ (рис. 1.2). Эту кривую (линию) называют *траекторией системы* (1.2), а плоскость переменных x_1, x_2 именуют *фазовой плоскостью*.

Из курса дифференциальных уравнений известно[1], что при определенных требованиях, предъявляемых к функциям f_1 и f_2, решение задачи Коши на некотором интервале $t_0 - h < t < t_0 + h$ (где положительное число h достаточно мало) существует и единственно.

Набор из двух функций $x_1 = x_1(t, C_1, C_2)$, $x_2 = x_2(t, C_1, C_2)$, зависящих от аргумента t и двух параметров C_1, C_2, называют *общим решением* системы (1.2) в некоторой области D ($D \subset R^3$) существования и единственности решения задачи Коши, если для любой точки $(t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in D$ выполняются следующие два условия:

1) система равенств

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = x_1(t, C_1, C_2) \\ x_2^{(0)} = x_2(t, C_1, C_2) \end{cases}$$

может быть однозначно разрешена относительно C_1, C_2. Обозначим решение этой системы равенств через C_1^0, C_2^0;

2) функции $x_1 = x_1(t, C_1^0, C_2^0)$, $x_2 = x_2(t, C_1^0, C_2^0)$ образуют решение задачи Коши с начальной точкой $N_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ и начальным моментом времени t_0.

Пример 1.3. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \tag{1.3}$$

относительно двух неизвестных функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Проверим, что набор функций

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = C_1 \sin t - C_2 \cos t \tag{1.4}$$

[1] Об этом идет речь в теореме Коши [7].

является общим решением данной системы на всем пространстве R^3. Прежде всего, рассмотрим следующую систему уравнений (относительно C_1, C_2):

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \cos t_0 + C_2 \sin t_0 \\ y_0 = C_1 \sin t_0 - C_2 \cos t_0. \end{cases}$$

Единственным решением этой линейной относительно C_1, C_2 системы алгебраических уравнений является (проверьте этот факт самостоятельно!) пара чисел $C_1^0 = x_0 \cos t_0 + y_0 \sin t_0, C_2^0 = x_0 \sin t_0 - y_0 \cos t_0$. Тем самым, первое условие из определения общего решения выполнено.

Непосредственной подстановкой функций (1.4) в систему (1.3) можно убедиться, что они представляют собой решение этой системы при любых значениях параметров C_1, C_2, причем при выборе $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$ это решение удовлетворяет начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Следовательно, функции (1.4) действительно образуют общее решение системы дифференциальных уравнений (1.3).

В семействе всех возможных систем дифференциальных уравнений второго порядка (1.2) нередко выделяют наиболее простой и изученный класс линейных систем. *Линейная система дифференциальных уравнений второго порядка* записывается в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + F_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + F_2(t) \end{cases}, \tag{1.5}$$

где $a_{11}(t), a_{12}(t), a_{21}(t), a_{22}(t), F_1(t), F_2(t)$ – некоторые функции аргумента t, образующие *коэффициенты* данной системы. В случае, когда $F_1(t) = F_2(t) \equiv 0$, систему (1.5) именуют *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Если ввести векторные (матричные) обозначения

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix},$$

то линейную систему (1.5) можно переписать в следующей векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + F(t). \tag{1.5}$$

Из курса дифференциальных уравнений известно, что в случае, когда все элементы матрицы $A(t)$ и вектора $F(t)$ непрерывны на интервале (a,b), система (1.5) всегда имеет и притом единственное решение $x(t)$, определенное на всем интервале (a,b) и удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x^{(0)}$, где $t_0\in(a,b)$, а компонентами вектора $x^{(0)}$ могут быть произвольно выбранные два числа. В частности, единственным решением однородной системы с *нулевым начальным условием* $x^{(0)}=\mathbf{0}$ будет *нулевое* (*тривиальное*) *решение* $x(t)\equiv\mathbf{0}$, т.е. $x_1(t)=x_2(t)=0$ при всех t.

1.2.2. Общая система дифференциальных уравнений

В общем случае *нормальная система* из n дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями $x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)$ в векторной форме записывается следующим образом

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x). \qquad (1.6)$$

Здесь

$$x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\qquad \frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt}\\ \dfrac{dx_2}{dt}\\ \vdots\\ \dfrac{dx_n}{dt}\end{pmatrix},\qquad f(t,x)=\begin{pmatrix} f_1(t,x)\\ f_2(t,x)\\ \vdots\\ f_n(t,x)\end{pmatrix}.$$

При $n=2$ система (1.6) превращается в систему (1.2).

Для системы (1.6) так же могут быть введены понятия решения, общего решения, задачи Коши и ее решения. В частности, векторная функция $x(t)$, определенная на интервале (a,b), называется *решением* системы (1.6) на этом интервале, если векторное равенство $\dfrac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t))$ представляет собой тождество по t, т.е. имеет место при всех $t\in(a,b)$.

Система (1.6) называется *линейной системой*, если ее правая часть имеет вид $f(t,x)=A(t)x+F(t)$, где

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t)\ldots a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t)\ldots a_{2n}(t)\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t)\ldots a_{nn}(t)\end{pmatrix},\qquad F(t)=\begin{pmatrix} F_1(t)\\ F_2(t)\\ \vdots\\ F_n(t)\end{pmatrix}.$$

1.3. Функционал и задача его оптимизации

1.3.1. Понятие функционала

Рассмотрим все возможные функции аргумента x, определенные на некотором промежутке. Как известно, функции можно складывать и умножать на числа. Суммой двух функций f и g называется такая функция h, заданная на том же самом промежутке, значения которой вычисляются по правилу $h(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ для всех x из данного промежутка. Для того чтобы функцию f умножить на число λ, следует все ее значения умножить на это число, т.е. $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$ для всех x. Множество функций с указанными операциями сложения и умножения на число образует так называемое *линейное пространство функций* (или *функциональное пространство*).

Рассмотрим все возможные непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Сумма двух непрерывных функций является непрерывной функцией и при умножении непрерывной функции на число результатом вновь оказывается непрерывная функция. Следовательно, множество непрерывных функций также образует линейное пространство. Его называют *пространством непрерывных функций* и обозначают $C_{[a,b]}$.

Аналогично можно говорить о пространстве дифференцируемых, непрерывно дифференцируемых (т.е. таких функций, которые непрерывны вместе со своими производными), бесконечно дифференцируемых и т.п. функций.

На функциональных пространствах, как на множествах, можно задавать отображения. Такие отображения играют важную роль в функциональном анализе и последующем изложении.

Пусть имеется некоторое функциональное пространство $\Re$ и в нем зафиксировано некоторое подмножество $X\subset\Re$. Отображение $I:X\to R$, ставящее в соответствие каждой функции $f\in X$ определенное число $I(f)$, называют *функционалом*.

Определенный интеграл

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx\,, \tag{1.7}$$

дает пример функционала, заданного на пространстве непрерывных функций $C_{[a,b]}$. Выбрав какую-либо непрерывную функцию f и вычислив определенный интеграл от этой функции, можно найти значение интегрального функционала на этой функции.

Более общо *интегральный функционал* определяется равенством

$$I(f)=\int_a^b F(x,f(x))dx\,,$$

где F – некоторая заданная функция двух переменных. Нередко рассматривают и интегральные функционалы, в которых подынтегральная функция F зависит не только от переменной x и функции f, но еще и от ее производной f' (т.е. $F(x, f(x), f'(x))$).

Другой пример функционала дает так называемый *терминальный функционал*

$$I(f) = \phi(f(x))\big|_{x=b},$$

где ϕ – заданная функция одной переменной.

Функционал $I: X \to R$ называют *линейным функционалом*, если для любых двух функций $f, g \in X$ и любых чисел λ_1, λ_2 имеет место равенство

$$I(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 I(f) + \lambda_2 I(g).$$

Поскольку интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от данных функций и постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то указанный выше интегральный функционал (1.7) является линейным.

1.3.2. Задача оптимизации функционала

Постановка всякой задачи оптимизации (экстремальной задачи) в функциональном пространстве $\Re$ предполагает наличие двух объектов – непустого (*допустимого*) множества X, $X \subset \Re$, и (*целевого*) функционала I, заданного на множестве X. Сама *задача оптимизации* (минимизации или максимизации) заключается в отыскании такого элемента (точнее говоря, функции) $x^* \in X$, для которого выполняется неравенство

$I(x^*) \leqq I(x)$ при всех $x \in X$ (для задачи минимизации),

$I(x^*) \geqq I(x)$ при всех $x \in X$ (для задачи максимизации).

При этом для постановки задачи минимизации или максимизации используют соответственно запись

$$I(x) \to \min_{x \in X} \qquad \text{или} \qquad I(x) \to \max_{x \in X}.$$

В общем случае задача оптимизации заданного функционала I на множестве X может

- не иметь ни одного решения,
- иметь в точности одно решение,
- иметь более одного решения.

Реализация той или иной из указанных трех возможностей зависит от конкретного вида данного функционала и структуры множества, на котором он максимизируется или минимизируется.

Пример 1.3. Пусть имеется интегральный функционал

$$I(x)=\int_a^b \sqrt{1+(x'(t))^2}\,dt\,, \tag{1.8}$$

а допустимым множеством X является совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям $x(a)=A$ и $x(b)=B$, где A и B – некоторые заданные числа. Нетрудно понять, что графиками функций допустимого множества X являются плоские кривые, соединяющие точки (a,A) и (b,B) (графики некоторых трех из таких функций изображены на рис. 1.3), а интегральный функционал (1.8) выражает собой длину этих кривых.

Так как кратчайшей линией, соединяющей две точки, является прямая, то минимума данный функционал достигает на единственной функции

$$x=\frac{B-A}{b-a}(t-a)+A\,,$$

графиком которой является прямая линия, проходящая через точки (a,A) и (b,B). Тогда как задача его максимизации на указанном допустимом множестве, очевидно, решения не имеет.

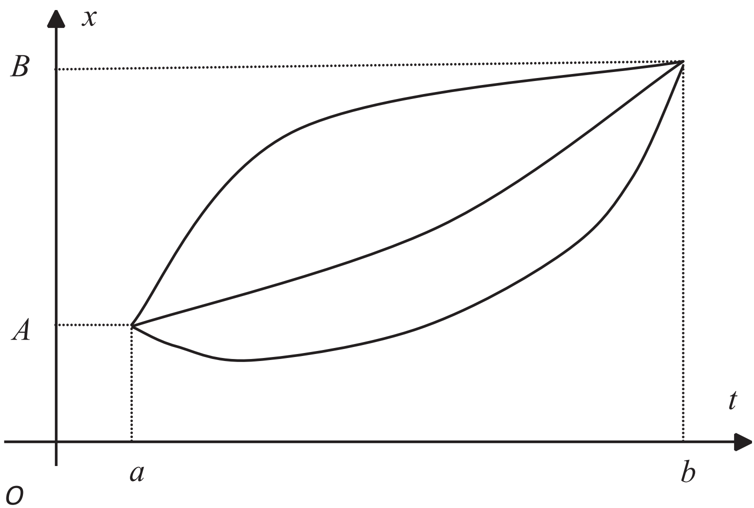

Рис. 1.3. Три кривых допустимого множества

Выводы

В теории оптимального управления используются определенные понятия и сведения из курса теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. Знакомство с ними необходимо для понимания всего последующего материала.

Основные термины

Система дифференциальных уравнений, решение системы, задача Коши, функциональное пространство, пространство непрерывных функций, функционал, интегральный функционал, задача оптимизации.

Контрольные вопросы

1. Напишите общий вид дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.
2. Сформулируйте определения решения и общего решения дифференциального уравнения первого порядка.
3. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Что можно сказать о решении этой задачи?
4. Какой вид имеет нормальная система из двух дифференциальных уравнений?
5. Приведите определения решения и общего решения нормальной системы из двух дифференциальных уравнений.
6. Запишите нормальную линейную неоднородную систему из двух дифференциальных уравнений в векторной форме.
7. Приведите общий вид и сформулируйте понятие решения общей нормальной системы из n дифференциальных уравнений.

Упражнения

1. В чем состоит общее и в чем заключается отличие между понятием решения и общего решения дифференциального уравнения первого порядка?

2. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение $x' = 2te^{-t^2}$ и найдите интегральную кривую, проходящую через точку $M(0,-1)$.

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

4. Решите задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y\cos x$$

с начальным условием $y(0) = 1$.

5. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y' - y\sin x = \sin x \cos x$.

6. Отыщите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y''' - 3y' + 2y = 0$.

7. Укажите решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + y = 4e^x$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 4, y'(0) = -3$.

8. Для системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x - t} \end{cases}$$

найдите решение задачи Коши с начальными данными $x(0) = -1, y(0) = 1$.

9. Проверьте, что пара функций $x = 3C_1e^t + C_2e^{-t}, y = C_1e^t + C_2e^{-t}$ образует общее решение системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} 2x' - 5y' = 4y - x \\ 3x' - 4y' = 2x - y. \end{cases}$$

10. Решите следующую линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (т.е. найдите ее общее решение)

$$\begin{cases} x' = y + 2e^t \\ y' = x + t^2. \end{cases}$$

Глава 2. Модель Солоу

Здесь рассматривается модель экономического роста, предложенная лауреатом Нобелевской премии Р. Солоу. Эта модель, основу которой составляет дифференциальное уравнение первого порядка, играет важную роль в неоклассической теории экономического роста. С ее помощью можно получить ряд полезных экономических выводов.

2.1. Основные параметры и предположения

Модель Солоу является односекторной моделью экономического роста. В этой модели экономическая система рассматривается как единое целое, производящая один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Рынки сбыта работают бесперебойно, производственные факторы (капитал и труд) существенно не понижаются и не повышаются при изменении цен, технология не подвержена никаким изменениям. В целом, модель достаточно адекватно отражает важнейшие макроэкономические аспекты процесса воспроизводства. Экспорт-импорт в явном виде здесь не учитывается.

Состояние экономики в модели Солоу задается следующими пятью эндогенными переменными:

1) X - валовой внутренний продукт (ВВП),
2) C - фонд непроизводственного потребления,
3) I - инвестиции,
4) L – труд (число занятых),
5) K капитал (основные производственные фонды).

Кроме того, в модели используются следующие экзогенные (заданные вне системы) показатели: ν – годовой темп прироста числа занятых, μ – доля выбывших за год основных производственных фондов, ρ – норма накопления (доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте). Экзогенные параметры подчинены следующим ограничениям: $-1 < \nu < 1, 0 < \mu < 1, 0 < \rho < 1$.

Предполагается, что эндогенные переменные изменяются во времени (аргумент опущен, но присутствует по умолчанию). Экзогенные переменные считаются постоянными во времени, причем норма накопления является управляющим параметром, т.е. в начальный момент времени может устанавливаться управляющим органом системы на любом уровне из области допустимых значений.

Время t изменяется непрерывно от начального момента $t_0 = 0$ и единицей измерения является год.

Предполагается, что годовой выпуск в каждый момент времени определяется линейно-однородной неоклассической производственной функцией

$$X = F(K, L)\,, \tag{2.1}$$

которая неотрицательна при неотрицательных значениях переменных K и L , и имеет место равенство $F(0,0) = 0$. Считается, что функция $F(K,L)$ имеет частные производные до второго порядка включительно, причем обе ее частные производные первого порядка положительны и $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$. Кроме того, эта функция предполагается однородной, т.е. равенство $F(rK, rL) = rF(K, L)$ имеет место для всех положительных r .

2.2. Модель Солоу. Равновесная траектория

Выясним, каким образом изменяются ресурсные показатели за небольшой промежуток времени Δt . В соответствии с определением темпа прироста имеем

$$\frac{\Delta L}{L} = \nu \Delta t\,, \qquad \text{или} \qquad \frac{dL}{dt} = \nu L\,.$$

Из последнего дифференциального уравнения находим $\ln L = \nu t + \ln A$, а значит $L = Ae^{\nu t}$. Используя начальное условие $L(0) = L_0$, находим константу $A = L_0$ и приходим к зависимости $L = L_0 e^{\nu t}$.

Износ и инвестиции в расчете на год составляют μK и I соответственно, а за время Δt – соответственно $\mu K \Delta t$, $I \Delta t$, поэтому прирост капитала за это время будет равен $\Delta K = -\mu K \Delta t + I \Delta t$. Отсюда, после деления обеих частей этого равенства на Δt и последующего предельного перехода при $\Delta t \to 0$, приходим к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \quad K(0) = K_0\,.$$

При этом инвестиции составляют $I = \rho X$, а фонд потребления равен $C = (1 - \rho) X$.

В итоге, получаем следующее представление *модели Солоу* в абсолютных показателях:

$$L = L_0 e^{\nu t}, \quad \frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho X, \quad K(0) = K_0,$$
$$X = F(K, L), \quad I = \rho X, \quad C = (1-\rho)X. \tag{2.2}$$

Для удобства последующего изложения введем следующие относительные показатели:

$k = K/L$ – фондовооруженность;

$x = X/L$ – народнохозяйственная производительность труда;

$i = I/L$ – удельные инвестиции (на одного занятого);

$c = C/L$ – среднедушевое потребление (на одного занятого).

Поскольку

$$x = \frac{F(K,L)}{L} = F(\frac{K}{L}, 1) = f(k), \quad i = \rho x, \quad c = (1-\rho)x,$$
$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(kL) = \nu kL + L\frac{dk}{dt},$$

то окончательно *модель Солоу в удельных показателях* принимает следующий вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k), \quad \lambda = \mu + \nu, \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0},$$
$$x = f(k), \quad i = \rho f(k), \quad c = (1-\rho) f(k). \tag{2.3}$$

Так как каждый абсолютный или относительный показатель изменяется с течением времени, то можно говорить о *траектории* системы в абсолютных или относительных показателях.

Траектория называется *равновесной* (*стационарной*, а также *устойчивой*), если основные показатели не изменяются во времени, т.е.

$$k(t) \equiv k^* - \text{const}, \quad x(t) \equiv x^* - \text{const}, \quad i(t) \equiv$$
$$\equiv i^* - \text{const}, \quad c(t) \equiv c^* - \text{const}.$$

Из уравнений (2.3) прямо следует, что стационарность фондовооруженности k влечет стационарность всех остальных основных показателей. Поэтому последующее рассмотрение, связанное со стационарным режимом, можно ограничить лишь одним показателем k.

Для стационарной траектории $k(t) \equiv k^*$ должно выполняться равенство $\frac{dk^*}{dt} = 0$ при всех t, поэтому из первого уравнения (2.3) следует $-\lambda k^* + \rho f(k^*) = 0$, или

$$\rho f(k^*) = \lambda k^*.$$

Таким образом, если стационарная траектория $k(t) \equiv k^*$ существует, то для нее необходимо имеет место написанное выше равенство. Остается решить вопрос существования такой траектории. Этот вопрос, очевидно, эквивалентен существованию положительного корня $k = k^*$ уравнения

$$\rho f(k) = \lambda k. \tag{2.4}$$

Обратимся к производственной функции $F(K,L)$ и построенной на ее основе функции f. Поскольку производственная функция предполагается неоклассической, то выполняются соотношения $f(0) = 0, f' > 0, f'' < 0$, из которых, в частности, следует, что функция f является строго возрастающей и строго вогнутой на промежутке $[0,+\infty)$. Анализ рис. 2.1 с учетом указанных соотношений на основе геометрического смысла понятия производной показывает, что если дополнительно потребовать выполнение условия

$$0 < \frac{\lambda}{\rho} < f'(0), \tag{2.5}$$

то уравнение (2.4) будет иметь и притом единственное положительное решение $k = k^*$.

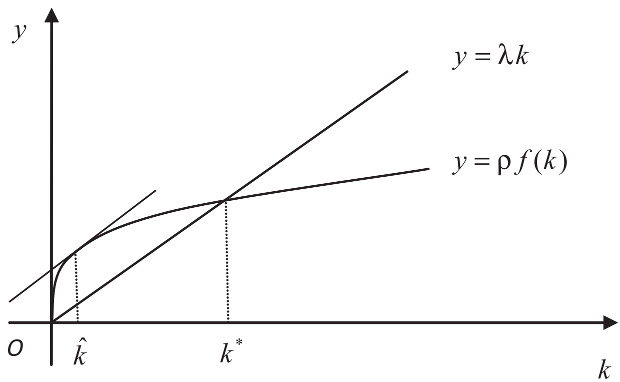

Рис. 2.1. Иллюстрация к существованию решения уравнения (2.4)

Полученный результат представим в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1 (о существовании равновесия)**.** *При выполнении условия* (2.5) *существует единственный положительный корень* $k = k^*$ *уравнения* (2.4). *Тем самым*, *равновесная* (*стационарная*) *траектория существует и единственна*, *если имеет место условие* (2.5)

Замечание 2.1. На рис. 2.1 через $\hat{k}$ ($\hat{k} < k^*$) обозначена фондовооруженность, при которой скорости роста функций $y = \lambda k$ и $y = \rho f(k)$ совпадают, т.е. $k = \hat{k}$ – корень уравнения

$$\rho f'(k) = \lambda . \tag{2.6}$$

2.3. Изучение переходных режимов

Далее будем предполагать, что равновесная траектория существует и единственна.

Когда начальное значение k_0 удовлетворяет равенству $k_0 = k^*$, экономика уже в начальный момент времени находится на равновесной траектории и может сойти с нее только при изменении внешних условий (установление другого значения нормы накопления, либо переход к новым технологиям с изменением функции $F(K,L)$).

При $k_0 \neq k^*$ в экономике будет происходить так называемый *переходный процесс* (*переходный режим*), который по прошествии некоторого длительного промежутка времени закончится установлением стационарного режима. Для проверки справедливости этого факта проведем соответствующее исследование.

В переходном режиме фондовооруженность $k = k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k), \quad k(0) = k_0 . \tag{2.7}$$

Изучим характер изменения траектории $k = k(t)$ переходного режима.

Сначала определим знаки производной k' первого порядка, на основании которых можно будет сделать вывод о возрастании или убывании функции $k = k(t)$. Как видно из рис. 2.1, при всех k, для которых верно $k < k^*$, выполняется неравенство $\rho f(k) > \lambda k$, а значит, в силу (2.7) получаем $k' > 0$. Отсюда следует строгое возрастание функции $k = k(t)$ в указанном случае.

С другой стороны, для всех k, удовлетворяющих неравенству $k > k^*$, аналогичным образом приходим к противоположному неравенству $k' < 0$, устанавливающему строгое убывание функции $k = k(t)$.

Перейдем к определению знаков производной второго порядка k''. Дифференцируя по t обе части дифференциального уравнения (2.7), получим

$$k'' = \frac{d^2k}{dt^2} = k'\left[\rho f'(k) - \lambda\right].$$

Отсюда в случае $k < \hat{k}$, где $\hat{k}$ – число, указанное в замечании 2.1, с учетом знака производной первого порядка (т.е. $k' > 0$) и неравенства $\rho f'(k) > \lambda$ придем к неравенству $k'' > 0$. Это влечет строгую выпуклость функции $k = k(t)$ в данном случае. Если $\hat{k} < k < k^*$, то подобным образом придем к противоположному неравенству $k'' < 0$, означающему строгую вогнутость функции $k = k(t)$. Если же рассмотреть случай $k > k^*$, то с учетом неравенств $\rho f'(k) < \lambda$ и $k' < 0$ вновь получим $k'' > 0$, что опять свидетельствует о строгой выпуклости фондовооруженности. Полученные результаты представлены в табл. 2.1.

Табл. 2.1. Характер изменения функции $k(t)$.

	$0 < k < \hat{k}$	$\hat{k} < k < k^*$	$k > k^*$
k'	+	+	–
k''	+	–	+
$k(t)$	возрастающая, строго выпуклая	возрастающая, строго вогнутая	убывающая, строго выпуклая

Прежде чем перейти к построению графика фондоворуженности $k = k(t)$ в зависимости от начального состояния, отметим еще одно (предельное) свойство переходного процесса:

$$\lim_{t \to +\infty} k(t) = k^*. \tag{2.9}$$

Именно это свойство дает возможность заключить, что ***любой переходный процесс независимо от начального состояния по прошествии достаточно длительного времени станет незначительно отличаться от стационарного***.

❑ Проверку предельного равенства (2.9) проведем в предположении, что производственная функция является функцией Кобба-Дугласа

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

с некоторыми положительными параметрами A и $\alpha \in (0,1)$. Нетрудно убедиться, что в этом случае выполняются равенства

$$f(k) = F(k,1) = A k^{\alpha}, \quad f'(k) = \alpha A k^{\alpha-1},$$

$$\hat{k} = \left(\frac{\alpha\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad k^* = \left(\frac{\rho A}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad ,$$

а уравнение (2.7) принимает вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho A k^{\alpha}, \quad k(0) = k_0 .$$

Выполнив здесь замену $k = e^{-\lambda t} u$, для новой переменной u после несложных преобразований получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{u^{\alpha}} = \rho A e^{(1-\alpha)\lambda t} dt .$$

В результате его интегрирования находится решение

$$u(t) = \left[\frac{\rho A}{\lambda} e^{(1-\alpha)\lambda t} + k_0^{\,1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

которое с использованием равенства $\dfrac{\rho A}{\lambda} = (k^*)^{1-\alpha}$ может быть записано в виде

$$u(t) = \left[(k^*)^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)\lambda t} + k_0^{\,1-\alpha} - (k^*)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} .$$

После возврата к старой переменной, т.е. в результате умножения выражения, стоящего в квадратных скобках, на $e^{-(1-\alpha)\lambda t}$, получаем

$$k(t) = \left[(k^*)^{1-\alpha} + \left(k_0^{\,1-\alpha} - (k^*)^{1-\alpha}\right) e^{-(1-\alpha)\lambda t}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} .$$

После осуществления предельного перехода при $t \to +\infty$ в обеих частях последнего равенства придем к требуемому равенству (2.9) ■

Подведем итоги проведенного исследования. В результате установлено существование трех типов переходного процесса:

1. при $k_0 < \hat{k}$ сначала происходит ускоренный рост фондовооруженности, который по достижении значения $k = \hat{k}$ сменяется замедленным ростом;

2. при $\hat{k} < k_0 < k^*$ имеет место замедленный рост фондовооруженности;
3. при $k_0 > k^*$ получаем замедляющееся падение фондовооруженности («проедание» фондов).

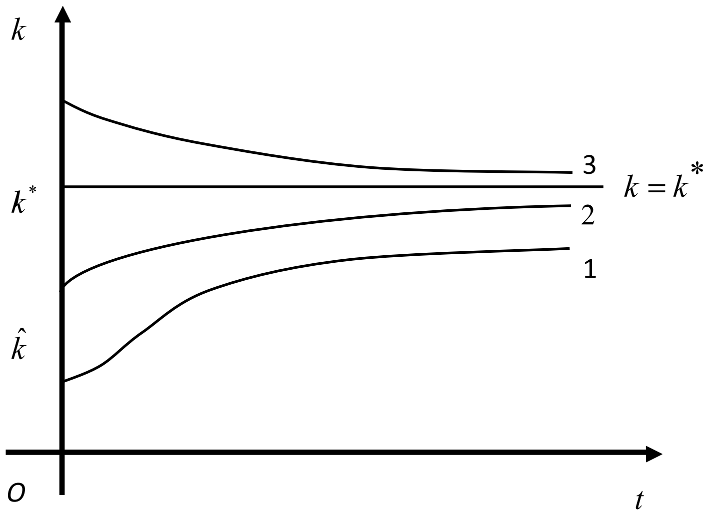

Рис. 2.2. Сходимость к стационарному значению

На рис. 2.2 изображены все указанные три типа сходимости фондовооруженности к стационарному значению $k = k^*$ (соответственно кривые 1–3) в зависимости от выбора начального значения $k_0 = k(0)$ на вертикальной оси.

Сходным образом происходит изменение и остальных относительных показателей x, i, c, поскольку все они в силу (2.3) непосредственно связаны с величиной k.

2.4. «Золотое» правило накопления

Суть этого правила состоит в том, что надлежащим выбором нормы накопления можно максимизировать среднедушевое потребление в стационарном режиме, а значит, благодаря (2.9), и в переходном режиме по прошествии некоторого времени получить среднедушевое потребление близкое к максимальному возможному.

Вновь примем, что производственная функция является функцией Кобба-Дугласа. Тогда для величины c^* имеет место представление

$$c^*(\rho) = (1-\rho)A(k^*)^\alpha = (1-\rho)A\left[\frac{\rho A}{\lambda}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = B\left[g(\rho)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

где

$$B = \left[\frac{A}{\lambda^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad g(\rho) = \rho^\alpha (1-\rho)^{1-\alpha}.$$

Как видим, среднедушевое потребление целиком определяется функцией $g(\rho)$. Нетрудно найти производную этой функции:

$$\frac{dg}{d\rho} = \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^\alpha \frac{\alpha-\rho}{\rho}.$$

Знак этой производной (равно как и производной $\frac{dc^*}{d\rho}$) полностью определяется соотношением между величинами α и ρ. А именно, при $\rho < \alpha$ имеет место неравенство $\frac{dc^*}{d\rho} > 0$, тогда как при $\rho > \alpha$ выполняется противоположное неравенство $\frac{dc^*}{d\rho} < 0$. Из этого следует, что при $\rho = \alpha$ достигается наибольшее возможное значения среднедушевого потребления. В этом случае ***норма накопления*** ρ ***равна эластичности выпуска по фондам*** α. На практике норма накопления обычно меньше своего оптимального значения ($\rho < \alpha$), т.е. имеет место недонакопление (рис. 2.3).

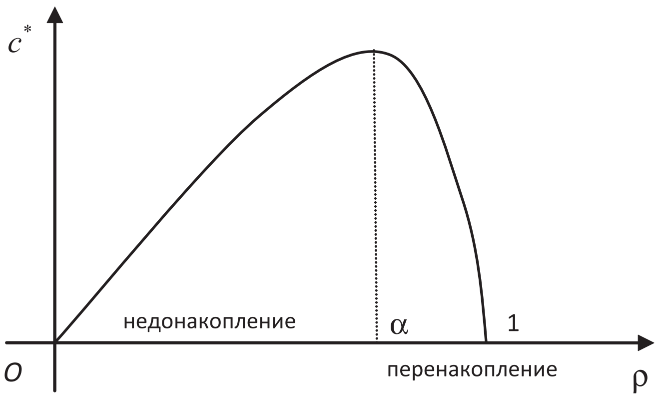

Рис. 2.3. Два типа накопления

Замечание 2.2. Если вместо нормы накопления ρ (при $\rho < \alpha$) установить меньшую норму накопления $\tilde{\rho} = \rho - \Delta\rho$ ($\Delta\rho > 0$), то текущее среднедушевое потребление возрастет с величины $c_0 = (1-\rho)Ak_0^\alpha$ до $\tilde{c}_0 = (1-\rho+\Delta\rho)Ak_0^\alpha$ Однако этот выигрыш через достаточно короткий промежуток времени сначала сойдет на нет, а потом превратится в проигрыш, поскольку при $\rho < \alpha$ в силу $\frac{dc^*}{d\rho} > 0$ стационарное среднедушевое потребление составляет $c^* = c^*(\rho) > c^*(\rho - \Delta\rho) = \tilde{c}^*$. Отсюда делаем вывод, что ***выигрыш в текущем потреблении неизбежно влечет проигрыш в ближайшей перспективе***.

Общая сравнительная картина изменения среднедушевого потребления в этих двух случаях изображена на рис. 2.4.

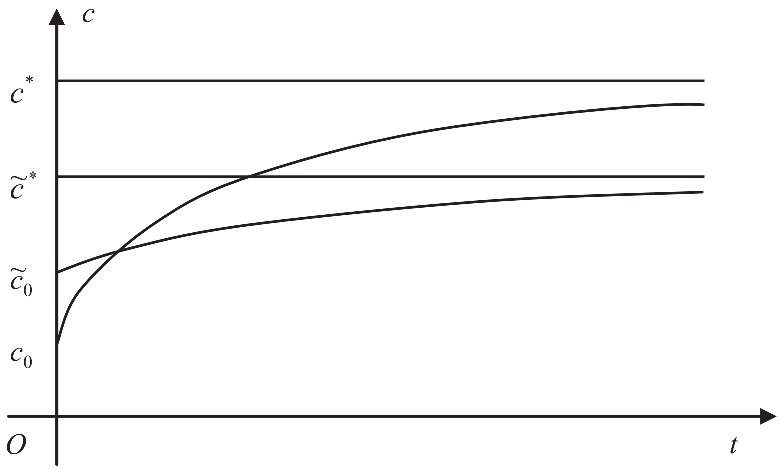

Рис. 2.4. Сравнительная картина изменения среднедушевого потребления

Выводы

Для изучения экономического роста оказывается удобным использования математической модели Р. Солоу в форме определенного дифференциального уравнения первого порядка. Его исследование дает возможность получить ряд важных экономических выводов. Среди них – «золотое» правило накопления.

Основные понятия

Модель Солоу, равновесная траектория, переходный режим, «золотое» правило накопления.

Контрольные вопросы

1. Какие параметры участвуют в модели Солоу?
2. Запишите модель Солоу в удельных показателях.
3. Что такое стационарная (равновесная) траектория и при каких условиях она существует и единственна?
4. Охарактеризуйте три типа переходных процессов.
5. В чем заключается предельное свойство всякого переходного процесса?
6. Укажите экономический смысл «золотого» правила накопления.
7. Каким образом «золотое» правило накопления выражается в математических терминах?

Упражнения

1. Убедитесь, что производственная функция Кобба-Дугласа $F(K,L)=AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ с некоторыми положительными параметрами A и $\alpha\in(0,1)$ удовлетворяет всем требованиям, сформулированным к ней в разд. 2.1.

2. Проанализируйте в переходных процессах изменение относительных показателей $x=x(t), i=i(t), c=c(t)$, которые связаны с удельным потреблением $k=k(t)$ посредством равенств (2.3).

3. Выпишите частный случай модели Солоу с постоянной численностью занятых. Как формулируется в этом случае «золотое» правило накопления?

4. Пусть производственная функция имеет вид $F=5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}e^{0,03t}$. Норма выбытия капитала составляет 0,08. Численность занятых растет на 2% в год. Норма накопления составляет 25%. Каков равновесный уровень фондовооруженности единицы труда с постоянной эффективностью? Каков равновесный уровень удельного дохода, инвестиций и потребления? Соответствует ли имеющаяся норма накопления «золотому» правилу? Если нет, то какой она должна для этого стать? Каков равновесный уровень удельного дохода, инвестиций и потребления по «золотому» правилу?

Глава 3. Постановка задачи оптимального управления

Здесь обсуждаются основные понятия теории управляемых систем и варианты различных постановок задачи оптимального управления.

3.1. Общие сведения об управляемых системах

Важнейшими в теории оптимального управления являются понятия *системы* (*объекта*) и *управления*.

Слово «система» широко используется в обыденной речи, являясь частью таких словообразований, как финансово-кредитная система, система взаимозачета, система отопления и т.п. Этимологически «система» представляет собой греческий эквивалент латинского слова «композиция». Тем самым, понятие системы предполагает одновременное наличие нескольких компонентов (элементов или частей). В этом смысле система имеет общие черты с обычным множеством, т.е. совокупностью элементов. Однако, в отличие от множества термин «система» подразумевает определенное взаимодействие, взаимосвязь составляющих ее элементов. Эта взаимосвязь придает системе в целом такие свойства, которых нет в каждом из элементов данной системы.

Не вдаваясь в детализацию понятия системы (объекта), отметим, что наиболее общеупотребительным является представление о системе, как о совокупности взаимосвязанных элементов (частей, подсистем). Взаимосвязь элементов системы (т.е. внутреннее строение данной системы) описывается ее *структурой*. В качестве простого наглядного примера системы можно упомянуть, например, нашу солнечную систему. Элементами солнечной системы являются планеты, входящие в нее. Планеты при помощи своих гравитационных полей определенным образом взаимосвязаны друг с другом. Эта взаимосвязь подчиняется физическим законам и может быть описана математическим языком.

Еще одним фундаментальным термином, непосредственно относящимся к любой системе, является *состояние* системы. Предполагается, что всякая система (точнее говоря, динамическая система, т.е. система, которая определенным образом развивается, эволюционирует во времени) в каждый момент времени может пребывать в одном из некоторого (конечного или бесконечного) числа возможных состояний. Именно смена состояний системы с течением времени дает возможность говорить о *развитии* или *функционировании* данной системы. Например, положение ракеты в пространстве (если ее отождествить с материальной точкой) может быть описано тремя пространственными координатами – тройкой чисел. Эта тройка чисел (зависящая от времени) и определяет текущее пространственное положение (состояние) ракеты.

Далее будут рассматриваться только такие объекты, состояние которых в каждый момент времени может быть однозначно охарактеризовано определенным конечным набором n числовых параметров (т.е. n-мерным вектором) $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$. Такого рода системы широко распространены в технике и экономике.

Векторное пространство R^n, которому принадлежат возможные состояния системы, называют *пространством состояний* или *фазовым пространством*. Поскольку система развивается (эволюционирует) во времени, то указанные числовые параметры представляют собой функции времени, т.е. $y(t)=(y_1(t),y_2(t),...,y_n(t))$. При изменении времени от какого-то начального значения $t=t_0$ до некоторого конечного $t=T$ точка $y(t)$ в фазовом пространстве описывает определенную кривую, которую называют *траекторией* системы. В случае $n\leq 3$ траектория может быть изображена в фазовом пространстве соответствующей размерности, и с ее помощью можно получить наглядное представление о функционировании данной системы.

Существуют два типа (два класса) систем. Один из них составляют те объекты, на развитие которых человек не может оказать никакого воздействия. Пример такого рода дает Солнечная система. Другой класс систем составляют те, состояние которых может меняться по воле отдельного человека или же целой группы людей в зависимости от преследуемых ими целей (например, финансово-кредитная система, космический корабль и т.п.). *Управление* – это и есть воздействие, способное изменить текущее состояние, а значит и все последующее развитие системы. В технических системах механизм управления реализуется посредством определенных технических устройств. В экономических системах управление происходит в основном благодаря изменению установленных ранее правил экономического поведения (например, путем изменения процентных ставок, введения ограничений на рост цен на природные ресурсы и т.п.). Здесь следует отметить, что на функционирование сложных систем, как правило, оказывают воздействия очень многие факторы. И управление является лишь одним из целого множества имеющихся воздействий. Поэтому на практике из-за сильных «внешних помех» человеку в результате управления часто не удается в полной мере достичь желаемого эффекта.

Дальнейшее рассмотрение будет ограничено классом *управляемых систем*, поведение (развитие) которых удается менять, оказывая то или иное воздействие, причем таким образом, что в результате изменения достигаются определенные, заранее поставленные цели.

Будем считать, что управляющие воздействия можно описать некоторым конечным набором числовых параметров (управлений) $u=(u_1,u_2,...,u_r)$, которые управляющий орган способен выбирать в пределах некоторой *области управления* (множества) $U, U \subset R^r$. Разумеется, выбор того или иного управления зависит от текущего момента времени, а значит, управление u представляет собой некоторый набор функций (вектор-функцию) времени: $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...,u_r(t))$, где $t\in[t_0,T]$.

3.2. Математическое представление динамической системы

Пара векторных функций $y(t)$, $u(t)$ образует *процесс*. Между векторными функциями $y(t)$ и $u(t)$ имеется определенная связь: как только выбран какой-то конкретный закон управления в форме вектор-функции $u(t)$, последовательность ее состояний (т.е. траектория) $y(t)$ определяется однозначно.

Будем считать, что компоненты векторной функции $u(t)$ являются кусочно-непрерывными[2] на промежутке $[t_0,T]$. Всякое управление $u=u(t)$ с кусочно-непрерывными компонентами, удовлетворяющее условию $u(t)\in U$ при всех $t\in[t_0,T]$, называют *допустимым управлением.*

Дальнейшее рассмотрение посвящено таким динамическим системам, в которых связь между переменными управления и фазовыми переменными математически может быть выражена при помощи следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=f_1(t,y_1,...,y_n,u_1,...,u_r), \\ \dfrac{dy_2}{dt}=f_2(t,y_1,...,y_n,u_1,...,u_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt}=f_n(t,y_1,...,y_n,u_1,...,u_r). \end{cases} \qquad t_0 \leqq t \leqq T. \tag{3.1}$$

Здесь в правых частях уравнений записаны функции $f_1,f_2,...,f_n$ от $n+r+1$ переменных, которые определяют закон изменения производных (т.е. скоростей изменения) фазовых переменных $y_1,y_2,...,y_n$. Если в (3.1) функции f_i

[2] *Кусочно-непрерывной* называется числовая функция, непрерывная в каждой точке данного промежутка, за исключением, возможно, некоторого не более чем конечного числа его внутренних точек, в которых она терпит разрывы первого рода. В частности, всякая непрерывная на промежутке функция кусочно-непрерывна на нем.

не зависят явно от времени, т.е. $f_i = f_i(y_1, y_2, ..., y_n, u_1, u_2, ..., u_r)$, $i = 1,2,...,n$, то получаем *автономную систему*.

Более компактно рассматриваемую систему дифференциальных уравнений можно переписать в векторной форме

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u)\,, \qquad t_0 \leqq t \leqq T\ . \tag{3.1}$$

где

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dy_2}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dt} \end{pmatrix}, \qquad f(t, y, u) = \begin{pmatrix} f_1(t, y, u) \\ f_2(t, y, u) \\ \vdots \\ f_n(t, y, u) \end{pmatrix}.$$

Частный случай системы (3.1) – автономная система – имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u)\,, \qquad t_0 \leqq t \leqq T\ . \tag{3.2}$$

где

$$f(y, u) = \begin{pmatrix} f_1(y, u) \\ f_2(y, u) \\ \vdots \\ f_n(y, u) \end{pmatrix}.$$

Выясним, каким образом происходит функционирование (развитие во времени) системы (3.1) (а значит, и ее частного случая – автономной системы (3.2)). С этой целью выберем произвольное допустимое управление $u = u(t)$ и зафиксируем *начальное состояние* системы $y^{(0)} \in R^n$. На языке теории дифференциальных уравнений это означает, что задано начальное условие $y(t_0) = y^{(0)}$, где $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)})$, которое более подробно в координатной форме записывается в виде

$$y_i(t_0) = y_i^{(0)}, \quad i = 1,2,...,n\,. \tag{3.3}$$

После того, как управляющая векторная функция $u = u(t)$ выбрана, подставив ее в правую часть системы дифференциальных уравнений (3.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, ..., y_n, u_1(t), ..., u_r(t)), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, ..., y_n, u_1(t), ..., u_r(t)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, ..., y_n, u_1(t), ..., u_r(t)), \end{cases} \qquad t_0 \leqq t \leqq T \ ,$$

относительно неизвестных функций $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), ..., y_n = y_n(t)$. Будем полагать, что функции $f_1, f_2, ..., f_n$ обладают такими свойствами, что задача Коши для полученной системы с начальным условием (3.3) имеет и притом единственное решение $y = y(t)$ (соответствующее произвольно выбранному допустимому закону управления $u = u(t)$), причем компоненты этого решения $y = y(t)$ кусочно-дифференцируемы[3]. В результате, образуется пара векторных функций $y(t), u(t)$, т.е. некоторый процесс, который именуют *допустимым процессом*. При этом нередко говорят, что в данном случае допустимое управление $u = u(t)$ *переводит систему* (объект) *из начального состояния* $y^{(0)} \in R^n$ *в конечное состояние* $y(T) \in R^n$ по (фазовой) траектории $y = y(t),\ t_0 \leqq t \leqq T$.

3.3. Задача управления с закрепленными концами

Сформулируем две вспомогательные задачи, которые условимся называть задачами управления (в отличие от задачи оптимального управления).

Задача управления с фиксированной продолжительностью управления предполагает задание в фазовом пространстве двух точек (состояний системы) $C, D \in R^n$ и состоит она в нахождении среди всех допустимых такого управления, которое переводит систему, находящуюся в начальный момент времени в состоянии $y(t_0) = C$, в состояние $y(T) = D$ к заранее заданному моменту $t = T$ (см. рис.3.1).

Задача управления с нефиксированной продолжительностью управления так же предполагает задание начального C и конечного D состояний и состоит в нахождении среди всех допустимых такого управления, которое переводит

[3] *Кусочно-дифференцируемой* называется функция, которая имеет производную во всякой внутренней точке промежутка, на котором она определена, за исключением, возможно, некоторого не более чем конечного числа внутренних точек, в которых она является непрерывной.

систему из начального состояния в конечное, но при этом конечный момент времени T заранее не задан и также подлежит определению.

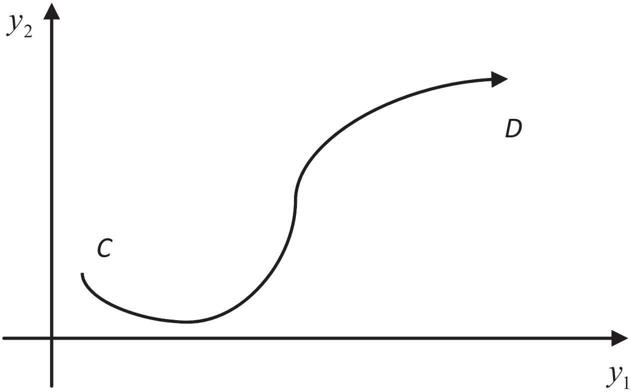

Рис. 3.1. Траектория системы

Как видим, обе задачи близки по содержанию. И в той и другой из них данную систему требуется перевести из одного фиксированного состояния в другое. Отличие сформулированных задач состоит лишь в том, что во второй из них (задаче с нефиксированной продолжительностью) период управления (т.е. время перевода системы из начального состояние в конечное) не задан, а значит, может оказаться какой угодно длины.

Для указанных задач важную роль играет вопрос о существовании допустимого управления, переводящего данную систему из заданного начального состояния в заданное конечное. Это вопрос *управляемости* системы. Если указанного управления не существует (т.е. система неуправляема), то обе сформулированные задачи решения не имеют, и потому сам процесс решения этих задач становится бессмысленным.

В общем случае вопрос управляемости оказывается чрезвычайно сложным. Однако, если ограничиться в определенном смысле «простыми» системами, то для такого класса систем можно дать исчерпывающий ответ на поставленный вопрос.

Введем необходимые определения. Систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Ay + Bu ,$$

где A и B числовые матрицы размера $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, называют *линейной системой управления*. Эту систему именуют *полностью управляе-*

мой, если для любой пары точек (состояний) $C, D \in R^n$ существует допустимое управление, переводящее за некоторое время данную систему из одного из этих состояний в другое.

Оказывается (см. [3]) *линейная система полностью управляема тогда и только тогда, когда ранг* $(n \times nr)$*-матрицы, составленной из матриц* $B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B$ *, равен* n *.*

В соответствии со сформулированным критерием полной управляемости, если ранг указанной матрицы для некоторой линейной системы окажется меньше n, то найдется такая пара точек, для которых невозможно найти допустимое управление, переводящее эту линейную систему из одного из двух данных состояний в другое.

В общем случае, говоря об объекте, описываемом системой дифференциальных уравнений (3.1) (и (3.2)), как об *управляемой системе*, обычно считают, что допустимое управление, переводящее ее из начального состояния в конечное, существует.

3.4. Задача оптимального управления

Для подавляющего большинства прикладных задач управления, связанных с реальными объектами, существует и, как правило, не один набор управляющих функций $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t))$, который решает задачу управления (с фиксированным или нефиксированным временем управления). По этой причине возникает возможность выбора из всех решений задачи управления такого решения (т.е. такого набора управляющих функций), которое было бы в каком-то смысле наиболее выгодным. В этом случае приходим к задаче оптимального управления.

Для того, что сформулировать задачу оптимального управления, необходимо задать условие, которое позволяет отличать друг от друга более и менее выгодные решения данной задачи. Этой цели служит *критерий оптимальности* (*критерий качества управления* или *целевой функционал*)

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, y_1(t), ..., y_n(t), u_1(t), ..., u_r(t))dt \ , \tag{3.4}$$

в котором $f_0(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r)$ – фиксированная функция $n + r + 1$ переменных, обладающая такими свойствами, чтобы обеспечить существование интеграла. Признаком большей или меньшей выгоды выбора управления u будет служить значение интегрального функционала (3.4), вычисленного на этом управлении, т.е. число $I(u)$. Для определенности будем считать, что чем больше значение критерия оптимальности $I(u)$, тем более выгодным является данное управление u. Тогда самым выгодным будет управление, которое доставляет наибольшее возможное значение интегральному функционалу (3.4).

Заметим, что в частном случае подынтегральная функция f_0 из (3.4) может явно от времени не зависеть, т.е. возможно равенство $f_0 = f_0(y_1, y_2, ..., y_n, u_1, u_2, ..., u_r)$.

Верхний предел интегрирования T в интеграле из (3.4) в зависимости от типа задачи управления может быть фиксированным или нет. Во втором случае целевой функционал зависит не только от управления u, но и от конечного момента времени T. Поэтому для задачи с нефиксированным временем управления было бы естественно писать не $I(u)$, а $I(u,T)$, но мы этого делать не будем, специально оговаривая, там, где это необходимо, что имеется в виду задача с нефиксированным временем управления.

Итак, *задача оптимального управления* для системы дифференциальных уравнений (3.1) заключается в максимизации интегрального функционала (3.4) на множестве всех допустимых управлений, переводящих систему (3.1) из заданного начального состояния в заданное конечное. С математической точки зрения эта задача является специального вида задачей оптимизации интегрального функционала на определенном множестве функционального пространства кусочно-непрерывных управляющих функций. Решением этой задачи является управление (вектор-функция) $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t), ..., u_r^*(t))$, которое именуют *оптимальным управлением*. Этому управлению однозначно соответствует определенная траектория $y^*(t) = (y_1^*(t), y_2^*(t), ..., y_n^*(t))$, называемая *оптимальной траекторией*. При этом пару векторных функций $y^*(t)$, $u^*(t)$ называют *оптимальным процессом*. Нередко задачу оптимального управления формулируют как задачу отыскания не только оптимального управления, но и всего оптимального процесса (т.е. оптимального управления и соответствующей оптимальной траектории).

Пусть подынтегральная функция f_0 в (3.4) тождественно равна -1. Тогда

$$I = \int_{t_0}^{T} (-1)dt = -(T - t_0)$$

и максимизация функционала I при фиксированном t_0 и нефиксированном T равносильна минимизации периода управления $T - t_0$ (а значит, минимизации T). Тем самым, приходим к так называемой *задаче оптимального быстродействия*, в которой требуется найти управление, переводящее систему из одного состояния в другое за наименьшее возможное время.

Ранее уже говорилось о том, что функции управления должны выбираться в пределах специального множества допустимых управлений. Его составляют те векторные функции $u = u(t)$, компоненты $u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$

которых являются кусочно-непрерывными функциями на отрезке $[t_0, T]$ со значениями в заданной допустимой области U, т.е. $u(t) \in U \subset R^r$ для всех $t \in [t_0, T]$.

Один из наиболее простых способов задания допустимой области состоит в ограничении значений управляющих функций определенными постоянными пределами:

$$\alpha_i \leqq u_i(t) \leqq \beta_i, \quad i = 1,2,...,r, \qquad \text{при всех } t \in [t_0, T],$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ и $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ – заданные числа. Такой способ задания соответствует случаю, когда управляющее воздействие u_i может изменяться лишь в пределах некоторого промежутка $[\alpha_i, \beta_i]$. Указанные выше простые ограничения на выбор управляющих функций часто встречаются в практике. Например, среди органов управления самолетом имеются рули высоты и поворота. Как известно, изменение угла поворота этих рулей ограничено определенными пределами, которые определяются техническими параметрами данного самолета. Величина подачи горючего в двигатель самолета (или автомобиля) также ограничена некоторым верхним пределом.

Выводы

Сложные объекты, как правило, представляют собой совокупность взаимосвязанных элементов. Функционированием многих из таких объектов можно управлять. Постановка задачи оптимального управления включает систему дифференциальных уравнений, описывающих поведение (функционирование) данного объекта и критерий оптимальности (функционал), который следует максимизировать или минимизировать, выбирая управляющие переменные. Решением задачи оптимального управления является оптимальный процесс, т.е. оптимальное управление и соответствующая ему оптимальная траектория.

Основные термины

Система, состояние системы, переменные состояния, переменные управления, траектория системы, процесс, задача управления, задача оптимального управления, задача оптимального быстродействия.

Контрольные вопросы

1. Перечислите переменные, участвующие в постановке задачи управления динамической системой.
2. Запишите общий вид системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение управляемой динамической системы.

3. Охарактеризуйте пространство состояний динамической системы. Дайте определение траектории системы.
4. Опишите класс допустимых управлений.
5. Выпишите общий вид линейной системы управления.
6. Что такое управляемая система и что можно сказать о наличии свойства полной управляемости у линейных систем?
7. Запишите критерий качества управления общего вида.
8. Сформулируйте задачу оптимального управления (с фиксированным и нефиксированным временем управления).
9. Дайте определение процесса и оптимального процесса. В чем состоит их отличие?
10. В чем заключается задача оптимального быстродействия?

Упражнения

1. Приведите пример какой-либо известной вам системы из области экономики. Опишите элементы этой системы, взаимосвязь между ними и возможные состояния системы. Является ли, на ваш взгляд, указанная система управляемой, и в какой степени?

2. Рассмотрите частный случай системы (3.1) при $m = 2$. Используя материал главы 1, ответьте на вопрос: гарантирует ли теорема Коши о существовании и единственности решения задачи Коши существование решения этой системы при сделанных выше предположениях *на всем* временном промежутке $[t_0, T]$?

3. Установите, является ли полностью управляемой следующая линейная система из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 2y_1 - y_2 + u_1 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 - u_1 + u_2 \end{cases}. \tag{3.5}$$

4. Найдите уравнения траектории линейной системы (3.5) при $u_1(t) = u_2(t) \equiv 0$, проходящей через точку $N(1,0)$. Изобразите найденную траекторию на фазовой плоскости.

5. Сформулируйте задачу минимизации

$$T \to \min$$

при условиях $\left|x''(t)\right| \leqq 2$, $x(-1)=1$, $x(T)=-1$, $x'(-1)=x'(T)=0$ в форме задачи оптимального быстродействия системой, описываемой двумя фазовыми переменными и одной управляющей функцией. Выпишите граничные условия и опишите допустимую область управлений.

Указание. Выполните замену переменных $y_1 = x, y_2 = x', u = x''$.

Глава 4. Принцип максимума

Принцип максимума Понтрягина[4]– это определенного типа необходимое условие экстремума, которое дает возможность среди всех возможных допустимых процессов выделить те, которые могут претендовать на роль оптимальных. Для определенного класса задач управления принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

Здесь рассматриваются варианты принципа максимума для различных задач оптимального управления – с фиксированным и нефиксированным временем управления, для автономных и неавтономных систем, для задач, в которых начальное и конечное состояния системы не обязательно жестко фиксированы.

Обсуждается схема применения принципа максимума и дается экономическая интерпретация сопряженных переменных, участвующих в его формулировке.

4.1. Принцип максимума для задач с закрепленными концами

4.1.1.Принцип максимума для задачи с фиксированным временем управления

Рассмотрим задачу оптимального управления объектом, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, ..., y_n, u_1 ..., u_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r), \end{cases} \qquad t_0 \leqq t \leqq T \ . \tag{4.1}$$

с заданным начальным моментом времени $t = t_0$, фиксированным конечным моментом времени управления $t = T$, начальным состоянием $y(t_0) = y^{(0)} \in R^n$ конечным состоянием $y(T) = y^{(1)} \in R^n$, критерием качества управления

[4] Л.С. Понтрягин (1908-1988)– выдающийся российский математик, академик РАН.

$$I(u)=\int_{t_0}^{T} f_0(t,y_1(t),...,y_n(t),u_1(t),...,u_r(t))dt \qquad (4.2)$$

и областью управления $U, U \subset R^r$. При этом относительно функций $y, u, f_0, f_1,..., f_n$ будем считать выполненными все требования, которые понадобятся при формулировке принципа максимума (см., например, [4]).

Задача оптимального управления для системы (4.1) заключается в максимизации интегрального функционала (4.2) на множестве всех допустимых управлений, переводящих систему (4.1) из заданного начального состояния $y^{(0)}$ в начальный момент времени t_0 в заданное конечное состояние $y^{(1)}$ к фиксированному моменту времени T. Решением этой задачи является оптимальное управление (векторная функция) $u^*(t)=(u_1^*(t),u_2^*(t),...,u_r^*(t))$ и оптимальная траектория (векторная функция) $y^*(t)=(y_1^*(t),y_2^*(t),...,y_n^*(t))$, в совокупности образующие оптимальный процесс $y^*(t),u^*(t)$.

Принцип максимума – это определенного типа необходимое условие оптимальности, которое позволяет среди всех возможных допустимых процессов отобрать те, которые могут претендовать на роль оптимальных. В идейном смысле принцип максимума имеет много общего с известным из курса математического анализа условием экстремума функций нескольких переменных (применительно к задачам экстремума с ограничениями-равенствами), хотя по форме они сильно отличаются друг от друга.

Как известно, в формулировке необходимых условий экстремума для функции нескольких переменных с ограничениями-равенствами участвует функция Лагранжа. В теории оптимального управления подобную роль выполняет *функция Гамильтона* (*функция Понтрягина*) или *гамильтониан*:

$$H(t,y,\hat{\Psi},u)=\sum_{i=0}^{n}\Psi_i f_i(t,y,u), \qquad (4.3)$$

где $y=(y_1,y_2,...,y_n)$, $u=(u_1,u_2,...,u_r)$, $f_0,f_1,...,f_n$ – функции из (4.1), (4.2) и $\hat{\psi}=(\psi_0,\psi_1,...,\psi_n)$. Нетрудно видеть, что функция Гамильтона H всего имеет $2n+r+2$ переменных.

Для удобства последующей записи введем обозначение

$$\psi=(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n).$$

Переменные $\psi_0,\psi_1,...,\psi_n$ называют *сопряженными переменными*. Если использовать упомянутое выше соответствие между принципом максимума и необходимым условием экстремума в терминах функции Лагранжа, то можно сказать, что сопряженные переменные – это своеобразный аналог множителей Лагранжа.

Теорема 4.1 (принцип максимума для задачи с фиксированной продолжительностью управления)**.** *Пусть вектор-функция* $u^*(t)$ *является оптимальным* *управлением, а вектор-функция* $y^*(t)$ *– соответствующей оптимальной траекторией в сформулированной задаче оптимального управления с закрепленными концами и фиксированными начальным* t_0 *и конечным* T *моментами времени.*

Тогда необходимо существуют неотрицательное число ψ_0^* *и векторная функция* $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), ..., \psi_n^*(t))$ *с непрерывными на отрезке* $[t_0, T]$ *компонентами такие, что выполняются следующие три условия*

1) *вектор-функция* $\hat{\psi}^*(t) = (\psi_0^*, \psi_1^*(t), ..., \psi_n^*(t))$, $t_0 \leqq t \leqq T$, *является ненулевой*[5];

2) *вектор-функция* $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), ..., \psi_n^*(t))$ *является решением сопряженной системы уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H(t, y, \hat{\psi}, u)}{\partial y_1}\right|_{\substack{u=u^*(t)\\ y=y^*(t)}} = -\sum\limits_{j=0}^{n} \psi_j \dfrac{\partial f_j(t, y^*, u^*)}{\partial y_1}, \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H(t, y, \hat{\psi}, u)}{\partial y_2}\right|_{\substack{u=u^*(t)\\ y=y^*(t)}} = -\sum\limits_{j=0}^{n} \psi_j \dfrac{\partial f_j(t, y^*, u^*)}{\partial y_2}, \quad t_0 \leqq t \leqq T \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\psi_n}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H(t, y, \hat{\psi}, u)}{\partial y_n}\right|_{\substack{u=u^*(t)\\ y=y^*(t)}} = -\sum\limits_{j=0}^{n} \psi_j \dfrac{\partial f_j(t, y^*, u^*)}{\partial y_n}, \end{cases} \quad (4.4)$$

в которой $\psi_0 = \psi_0^*$;

3) *при каждом значении* $t \in [t_0, T]$, *при котором все компоненты управляющей вектор-функции* $u^*(t)$ *непрерывны, функция Гамильтона* $H(t, y^*(t), \hat{\psi}^*(t), u)$ *векторной переменной* $u = (u_1, u_2, ..., u_r)$ *достигает максимума на множестве* U *при* $u = u^*(t)$, *т.е.*

$$H(t, y^*(t),\ \hat{\psi}^*(t),\ u^*(t)) = \max_{u \in U} H(t, y^*(t),\ \hat{\psi}^*(t), u),\ t_0 \leqq t \leqq T \quad (4.5)$$

Следует заметить, что в утверждении теоремы 4.1 центральным является условие максимума (4.5). Именно поэтому данную теорему называют *принципом максимума.*

Сопряженная система (4.4) состоит из n уравнений относительно n неизвестных функций $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ (которые называют *сопряженными* или *двойственными* переменными). Она представляет собой линейную однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой

[5] Это означает, что либо число ψ_0^* отлично от нуля, либо среди функций $\psi_1^*(t), ..., \psi_n^*(t)$ найдется по крайней мере одна, не равная тождественно нулю на отрезке $[t_0, T]$.

матрицу коэффициентов образуют функции $\dfrac{\partial f_j(y^*,u^*)}{\partial y_i}$, $i,j=1,2,...,n$, аргумента t.

С помощью функции Гамильтона H исходную систему (4.1) вместе с сопряженной системой (4.4) часто записывают в следующем симметричном виде

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = \dfrac{dH(t,y,\hat{\psi},u)}{d\psi_i}, \\ \dfrac{d\psi_i}{dx} = -\dfrac{dH(t,y,\hat{\psi},u)}{dy_i}, \end{cases} \qquad i=1,2,...,n.$$

Принцип максимума в общем случае дает только необходимое условие оптимальности. Поэтому если некоторое допустимое управление удовлетворяет этому принципу, то оно не обязательно является оптимальным. Часто, желая подчеркнуть это обстоятельство, векторную функцию $u^*(t)$ (а иногда ее вместе с соответствующей оптимальной траекторией $y^*(t)$), удовлетворяющую всем условиям принципа максимума, называют *экстремалью Понтрягина*.

При решении прикладных задач принцип максимума нередко позволяет однозначно определить оптимальное управление. Так, если, во-первых, заранее известно, что оптимальное управление существует, во-вторых, экстремаль Понтрягина найдена и, в-третьих, доказано, что она единственна, то эта экстремаль является искомым оптимальным управлением.

4.1.2. Теорема 4.1 при $\mathbf{n = r = 1}$

Сначала разберем самый простой случай, когда система уравнений (4.1) превращается в одно уравнение и имеется одна управляющая переменная:

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y,u), \quad t_0 \leqq t \leqq T.$$

Здесь $y=y(t)$, $u=u(t)$ и $f(t,y,u)$ – скалярные функции. Критерием оптимальности служит интегральный функционал

$$I(u) = \int_0^T f_0(t,y(t),u(t))dt,$$

а функция Гамильтона имеет вид

$$H(t,y,\psi_0,\psi_1,u) = \psi_0 f_0(t,y,u) + \psi_1 f_1(t,y,u).$$

Моменты времени t_0 и T зафиксированы и концы траектории закреплены: $y(t_0)=y_0$, $y(T)=y_1$.

Принцип максимума применительно к данному случаю принимает следующий вид.

Теорема 4.1.1. *Пусть числовая функция $u^*(t)$ является оптимальным управлением, а числовая функция $y^*(t)$ — соответствующей оптимальной траекторией в задаче оптимального управления с закрепленными концами при $n=r=1$.*

Тогда необходимо существуют неотрицательное число ψ_0^* и непрерывная на $[t_0,T]$ функция $\psi_1^*(t)$ такие, что выполняются следующие условия:

1) *векторная функция $(\psi_0^*,\psi_1^*(t))$ является ненулевой на отрезке $[t_0,T]$;*
2) *функция $\psi_1^*(t)$ является решением дифференциального уравнения*

$$\frac{d\psi_1}{dt}=-\psi_0^*\frac{\partial f_0(t,y^*,u^*)}{\partial y}-\psi_1\frac{\partial f(t,y^*,u^*)}{\partial y}, \qquad t_0\leqq t\leqq T;$$

3) *для каждой точки $t\in[t_0,T]$, в которой функция $u^*(t)$ непрерывна, функция $H(t,y^*(t),\psi_0^*,\psi_1^*(t),u)$ скалярной переменной и достигает максимума на числовом множестве $U, U\subset R$, при $u=u^*(t)$, т.е.*

$$H(t,y^*(t),\ \psi_0^*,\psi_1^*(t),\ u^*(t))=\max_{u\in U}H(t,y^*(t),\ \psi_0^*,\psi_1^*(t),u),\ t_0\leqq t\leqq T.$$

Пример 4.1. Рассмотрим простейшую задачу оптимального управления, в которой управляемая система задана дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt}=u, \qquad 0\leqq t\leqq T.$$

Здесь $y=y(t)$, $u=u(t)$ — скалярные функции. Будем считать, что ограничения на область управления отсутствуют, т.е. $U=R$. Пусть заданы граничные условия $y(0)=0, y(T)=0$; при этом зафиксированы начальный и конечный момент времени. На множестве допустимых управлений требуется минимизировать интегральный функционал

$$I(u)=\int_0^T (u^2(t)+y^2(t))dt.$$

Эта задача может быть легко решена без привлечения какой бы то ни было теории. В самом деле, под знаком интеграла записана сумма квадратов двух функций, которая не может принимать отрицательные значения. Следовательно, и сам интеграл принимает лишь неотрицательные значения. Тем самым, наименьшим возможным его значением является нуль. Нетрудно видеть, что пара постоянных функций $u^*(t)\equiv 0, y^*(t)\equiv 0$ удовлетворяет граничным условиям, исходному дифференциальному уравнению и доставляет минимальное значение целевому функционалу. Значит, она образует искомый оптимальный процесс.

Продемонстрируем применение принципа максимума на этой простой задаче. С учетом того, что в данном случае критерий оптимальности подлежит минимизации (поэтому вместо $I(u)$ следует рассматривать противоположный по знаку функционал $-I(u)$), выпишем функцию Гамильтона

$$H = -\psi_0(u^2 + y^2) + \psi u$$

и сопряженное уравнение

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{dH}{dy} = 2\psi_0 y .$$

Рассмотрим возможность $\psi_0 = 0$. В этом случае функция Гамильтона $H = \psi u$ может достигать максимального значения по u на всей числовой оси R лишь при $\psi_0 = 0$. Но двойное равенство $\psi_0 = \psi = 0$ противоречит условию 1) теоремы 4.1.1. Следовательно, $\psi_0 \neq 0$. Нетрудно видеть, что в таком случае, разделив функцию Гамильтона и обе части сопряженного уравнения на коэффициент $\psi_0 \neq 0$, добьемся равенства этого коэффициента единице. Это говорит о том, что можно положить $\psi_0^* = 1$. Тогда функция Гамильтона примет вид

$$H = -u^2 - y^2 + \psi u .$$

Согласно последнему условию теоремы 4.1.1 эта функция на оптимальном управлении должна достигать максимума. Поскольку никаких ограничений на величину изменения управления нет (в силу $U = R$), этот максимум в соответствии с известной из курса математического анализа теоремой Ферма можно найти приравниванием нулю производной функции H по u, т.е $\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \psi = 0$. Отсюда находим $u = \frac{\psi}{2}$. В итоге получаем

$$y' = \frac{\psi}{2}, \qquad \psi' = 2y, \qquad 0 \leq t \leq T , \qquad\qquad y(0) = y(T) = 0 .$$

В соответствии с найденным сначала приходим к дифференциальному уравнению $\psi'' = \psi$ и находим его общее решение $\psi(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. После этого из уравнения $y' = \frac{\psi}{2}$ определяем $y = \frac{1}{2}(C_1 e^t - C_2 e^t)$. Далее, на основе начального условия $y(0) = 0$ однозначно отыскиваются константы $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, $y^*(t) = \psi^*(t) \equiv 0$. Поэтому в силу $u^* = \frac{\psi^*}{2} \equiv 0$ приходим к указанному ранее оптимальному управлению $u^*(t) \equiv 0$.

4.1.3. Теорема 4.1 при $\mathrm{n} = \mathrm{r} = 2$

Здесь исходная система (4.1) состоит из двух дифференциальных уравнений и записывается следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, u_1(t), u_2(t)), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, u_1(t), u_2(t)), \end{cases} \quad t_0 \leqq t \leqq T\ . \tag{4.6}$$

Критерий качества имеет вид

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, y_1(t), y_2(t), u_1(t), u_2(t))dt, \tag{4.7}$$

а гамильтониан –

$$H(t, y_1, y_2, \psi_0, \psi_1, u_1, u_2) =$$

$$= \psi_0 f_0(t, y_1, y_2, u_1, u_2) + \psi_1 f_1(t, y_1, y_2, u_1, u_2)\ . \tag{4.8}$$

Теорема 4.1.2. *Пусть вектор-функция* $u^* = (u_1^*(t), u_2^*(t))$ *является оптимальным управлением, а вектор-функция* $y^* = (y_1^*(t), y_2^*(t))$ *– соответствующей оптимальной траекторией в сформулированной выше задаче оптимального управления при* $n = r = 2$.

Тогда необходимо существуют неотрицательное число ψ_0^* *и векторная функция* $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t))$ *с непрерывными на отрезке* $[t_0, T]$ *компонентами такие, что выполняются следующие три условия*

1) *вектор-функция* $\hat{\psi}^*(t) = (\psi_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t))$ *является ненулевой на отрезке* $t_0 \leqq t \leqq T$;

2) *вектор-функция* $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t))$ *является решением сопряженной системы*

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\psi_0^* \dfrac{\partial f_0(t, y^*, u^*)}{\partial y_1} - \psi_1 \dfrac{\partial f_1(t, y^*, u^*)}{\partial y_1} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2(t, y^*, u^*)}{\partial y_1} \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\psi_0^* \dfrac{\partial f_0(t, y^*, u^*)}{\partial y_2} - \psi_1 \dfrac{\partial f_1(t, y^*, u^*)}{\partial y_2} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2(t, y^*, u^*)}{\partial y_2} \end{cases}$$

$$t_0 \leqq t \leqq T\ ; \tag{4.9}$$

3) *при каждом* $t \in [t_0, T]$, *в котором обе функции* $u_1 = u_1^*(t), u_2 = u_2^*(t)$ *непрерывны, функция* $H(t, y_1^*(t), y_2^*(t), \psi_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), u_1, u_2)$ *двух переменных* u_1, u_2 *достигает максимума на множестве* $U, U \subset R^2$, *при* $u_1 = u_1^*(t), u_2 = u_2^*(t)$ *т.е.*

$$H(t, y_1^*(t), y_2^*(t), \psi_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), u_1^*(t), u_2^*(t)) =$$
$$= \max_{(u_1, u_2) \in U} H(t, y_1^*(t), y_2^*(t), \psi_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), u_1, u_2) \ ,$$
$$t_0 \leqq t \leqq T \ . \tag{4.10}$$

4.2. Принцип максимума для задачи с бесконечным горизонтом управления

Ранее предполагалось, что управление осуществляется на определенном конечном промежутке времени $[t_0, T]$. В некоторых задачах важно получить представление об оптимальном процессе при длительном, практически неограниченном продолжении процесса. Тогда задачу управления следует формулировать для бесконечного промежутка времени $[t_0, +\infty)$. Оказывается, что в этом случае утверждение принципа максимума сохраняет свою силу. Необходимо лишь ввести определенные коррективы, связанные с формальной заменой числа T на символ $+\infty$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, ..., y_n, u_1 ..., u_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r), \end{cases} \qquad t_0 \leqq t < +\infty \, . \tag{4.1′}$$

Считается заданным начальный момент времени $t = t_0$, начальное состояние $y^{(0)} \in R^n$, критерий оптимальности

$$I(u) = \int_{t_0}^{+\infty} f_0(t, y_1(t), ..., y_n(t), u_1(t), ..., u_r(t)) dt \tag{4.2′}$$

и область управления $U, U \subset R^r$. Допустимыми здесь являются управляющие векторные функции $u(t)$, компоненты которых определены, ограничены и кусочно-непрерывны на промежутке $[t_0,+\infty)$ [6], причем выполнено включение $u(t)\in U$ для всех $t \geqq t_0$.

Кроме того, задано конечное состояние $y^{(1)}\in R^n$, к которому должно стремиться текущее состояние $y(t)$ при $t\to+\infty$, т.е.

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = y^{(1)}.$$

Если некоторому допустимому управлению отвечает траектория с заданными начальным и конечным состояниями, то здесь, как и ранее, используют фразу *управление переводит систему из начального состояния* $y^{(0)}$ *в конечное* $y^{(1)}$ *на промежутке управления* $[t_0,+\infty)$.

Задача оптимального управления с бесконечным горизонтом управления для системы (4.1′) заключается в отыскании такого допустимого управления, которое переводит эту систему из заданного начального состояния $y^{(0)}$ в конечное состояние $y^{(1)}$ на временно́м промежутке $[t_0,+\infty)$ и при этом доставляет наибольшее возможное значение критерию оптимальности (4.2'). Решение этой задачи называют *оптимальным управлением*, а соответствующую ему траекторию – *оптимальной траекторией*.

Прежде чем формулировать соответствующий принцип максимума, напомним общий вид функции Гамильтона

$$H(t,y,\hat{\psi},u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f_i(t,y,u). \tag{4.3}$$

Теорема 4.1′ (принцип максимума для задачи с бесконечным горизонтом управления)**.** *Пусть вектор-функция* $u^*(t)$ *является оптимальным управлением, а вектор-функция* $y^*(t)$ *– соответствующей оптимальной траекторией в задаче оптимального управления с бесконечным горизонтом управления.*

Тогда необходимо существуют неотрицательное число ψ_0^* *и векторная функция* $\psi^*(t)=(\psi_1^*(t),\psi_2^*(t),...,\psi_n^*(t))$, *определенная и непрерывная на промежутке* $[t_0,+\infty)$, *такие, что выполняются следующие три условия*

1) вектор-функция $\hat{\psi}^*(t)=(\psi_0^*,\psi_1^*(t),...,\psi_n^*(t))$, $t_0\leqq t < +\infty$, *является ненулевой*[7];

2) вектор-функция $\psi^*(t)=(\psi_1^*(t),\psi_2^*(t),...,\psi_n^*(t))$ *является решением сопряженной системы уравнений*

---

[6] Т.е. являются кусочно-непрывными на каждом конечном промежутке, содержащемся в $[t_0,+\infty)$. Напомним, что определение кусочно-непрерывной функции на конечном промежутке приведено в разделе 3.2.

[7] Это означает, что либо число ψ_0^* отлично от нуля, либо среди функций $\psi_1^*(t),...,\psi_n^*(t)$ найдется по крайней мере одна, не равная тождественно нулю на промежутке $[t_0,+\infty)$.

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H(t,y,\hat{\psi},u)}{\partial y_1}\right|_{\substack{u=u^*(t)\\ y=y^*(t)}} = -\sum\limits_{j=0}^{n}\psi_j \dfrac{\partial f_j(t,y^*,u^*)}{\partial y_1}, \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H(t,y,\hat{\psi},u)}{\partial y_2}\right|_{\substack{u=u^*(t)\\ y=y^*(t)}} = -\sum\limits_{j=0}^{n}\psi_j \dfrac{\partial f_j(t,y^*,u^*)}{\partial y_2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\psi_n}{dt} = -\left.\dfrac{\partial H(t,y,\hat{\psi},u)}{\partial y_n}\right|_{\substack{u=u^*(t)\\ y=y^*(t)}} = -\sum\limits_{j=0}^{n}\psi_j \dfrac{\partial f_j(t,y^*,u^*)}{\partial y_n}, \end{cases} \quad t_0 \leqq t < +\infty,$$

в которой следует положить $\psi_0 = \psi_0^*$;

3) при каждом $t \geqq t_0$, *в котором все компоненты управляющей вектор-функции* $u^*(t)$ *непрерывны, функция Гамильтона* $H(t,y^*(t),\hat{\psi}^*(t),u)$ *векторной переменной* $u=(u_1,u_2,...,u_r)$ *достигает максимума на множестве* U *при* $u=u^*(t)$, *т.е.*

$$H(t,y^*(t),\ \psi_0^*,\psi_1^*(t),\ u^*(t)) = \max_{u\in U} H(t,y^*(t),\ \psi_0^*,\psi_1^*(t),u),$$

$$t_0 \leqq t < +\infty .$$

4.3. Схема применения принципа максимума

Обсудим стандартную схему применения принципа максимума на примере задачи оптимального управления с закрепленными концами при $n = r = 2$. Этому случаю соответствует утверждение теоремы 4.1.2.

Прежде всего, рассмотрим имеющиеся возможности изменения числа ψ_0^*. В соответствии с принципом максимума это число должно быть неотрицательно. Здесь следует выделить два случая: $\psi_0^* > 0$ и $\psi_0^* = 0$. В первом из них, деля равенства (4.9) – (4.10) на ψ_0^* и вводя новые сопряженные переменные, отличающихся от старых $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ множителем $1/\psi_0^*$ придем к равенствам, аналогичным (4.9) – (4.10), в которых, однако, $\psi_0^* = 1$.

Тем самым, всегда можно ограничиться рассмотрением лишь двух возможностей: $\psi_0^* = 1$ или $\psi_0^* = 0$. Во втором случае функция Гамильтона (4.8) не включает слагаемое с функцией f_0 из критерия оптимальности (4.7). Это означает, что при $\psi_0^* = 0$ утверждение принципа максимума не содержит никакой информации о критерии оптимальности. Следовательно, заменяя исходный критерий оптимальности любым другим, мы получим те же самые условия оптимальности в форме принципа максимума. Задачи подобного типа называют *особыми*; они требуют специального исследования, которое выходит за рамки данного учебного пособия.

Применение принципа максимума (нахождение экстремали Понтрягина) обычно начинают с формирования функции Гамильтона $H = H(t, y_1, y_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2, u_1, u_2)$ и использования условия максимума:

$$H \to \max_{(u_1, u_2) \in U}.$$

Из этого условия при каждом фиксированном наборе параметров $t, y_1, y_2, \psi_0, \psi_1, \psi_2$ находят управление $u = (u_1, u_2)$ (в общем случае зависящее от всех указанных параметров), доставляющее максимальное значение функции Гамильтона H. Обозначим это управление через

$$u = (u_1(t, y, \hat{\psi}), u_2(t, y, \hat{\psi})). \tag{4.11}$$

В общем случае найти управление в виде (4.11) не просто, однако для некоторых классов задач управления такую функцию управления удается записать в явном виде. Например, пусть

$$f_k(t, y, u) = f_k(t, y) + f_{k1}(t, y)u_1 + f_{k2}(t, y)u_2, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$U = \{u = (u_1, u_2) | \alpha_1 \leqq u_1 \leqq \beta_1, \quad \alpha_2 \leqq u_2 \leqq \beta_2\},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – заданные числа. В том случае функция Гамильтона может быть записана в виде

$$\begin{aligned} H = {} & \psi_0 f_0(t, y) + \psi_1 f_1(t, y) + \psi_2 f_2(t, y) + \\ & + \big(\psi_0 f_{01}(t, y) + \psi_1 f_{11}(t, y) + \psi_2 f_{21}(t, y)\big) u_1 + \\ & + \big(\psi_0 f_{02}(t, y) + \psi_1 f_{12}(t, y) + \psi_2 f_{22}(t, y)\big) u_2 . \end{aligned}$$

Она достигает своего максимального значения (благодаря линейности по переменным u_1, u_2 и специальному виду области управления) только в граничных точках множества U, а именно при

$$u_k = \begin{cases} \beta_k, & \text{если} \quad \psi_0 f_{0k}(t, y) + \psi_1 f_{1k}(t, y) + \psi_2 f_{2k}(t, y) > 0, \\ \alpha_k, & \text{если} \quad \psi_0 f_{0k}(t, y) + \psi_1 f_{1k}(t, y) + \psi_2 f_{2k}(t, y) < 0, \end{cases} \quad k = 1, 2.$$

Предположим, что в общем случае функция (4.11) каким-то образом найдена. Подставим ее в исходную и сопряженную системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, u_1(t, y, \hat{\psi}), u_2(t, y, \hat{\psi})), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, u_1(t, y, \hat{\psi}), u_2(t, y, \hat{\psi})), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\psi_0 \dfrac{\partial f_0(t, y, u(y, \hat{\psi}))}{\partial y_1} - \psi_1 \dfrac{\partial f_1(t, y, u(y, \hat{\psi}))}{\partial y_1} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2(t, y, u(y, \hat{\psi}))}{\partial y_1}, \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\psi_0 \dfrac{\partial f_0(t, y, u(y, \hat{\psi}))}{\partial y_2} - \psi_1 \dfrac{\partial f_1(t, y, u(y, \hat{\psi}))}{\partial y_2} - \psi_2 \dfrac{\partial f_2(t, y, u(y, \hat{\psi}))}{\partial y_2}. \end{cases}$$

Полученная система из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений содержит четыре неизвестные функции y_1, y_2, ψ_1, ψ_2 (не считая числа ψ_0). Предположим, что удалось найти ее общее решение, которое содержит четыре произвольные постоянные. Конкретные значения этих четырех произвольных постоянных определяются с помощью имеющихся четырех граничных условий:

$$y_1(t_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(t_0) = y_2^{(0)}, \qquad y_1(T) = y_1^{(1)}, \quad y_2(T) = y_2^{(1)}.$$

Если все вышесказанное удастся реализовать, то в итоге будут найдены некоторые функции $y_1^*(t), y_2{}^*(t), \psi_1^*(t), \psi_2^*(t)$. Для определения числа $\psi_0 = \psi_0^*$ достаточно установить, какой из двух случаев $\psi_0^* = 1$ или $\psi_0^* = 0$ имеет место в действительности. При этом следует учитывать, что согласно условию 1) принципа максимума векторная функция $\hat{\psi}^*(t) = (\psi_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t))$ не должна оказаться тождественно равной нулю на промежутке $t_0 \leqq t \leqq T$.

Пусть, наконец, число ψ_0^* и все функции $y_1^*(t), y_2^*(t), \psi_1^*(t), \psi_2^*(t)$ найдены. Подставив их в правую часть равенства (4.11), получим

$$u^* = (u_1(t, y^*(t), \hat{\psi}^*(t)), u_2(t, y^*(t), \hat{\psi}^*(t))).$$

Если эта двумерная векторная функция имеет кусочно-непрерывные компоненты, причем ее значения не выходят за пределы допустимой области, т.е. $(u_1(t, y^*(t), \hat{\psi}^*(t)), u_2(t, y^*(t), \hat{\psi}^*(t))) \in U$ при всех $t \in [t_0, T]$, то она является экстремалью Понтрягина и может претендовать на роль оптимального управления.

В случае, когда дополнительно из каких-либо соображений известно, что решение задачи оптимального управления существует и установлена единственность экстремали Понтрягина, найденная экстремаль будет искомым оптимальным управлением.

Пример 4.2. В соответствии с изложенной схемой решим задачу оптимального управления, заключающуюся в максимизации функционала

$$I(u)=\int_0^T (u^2(t)+y(t))dt .$$

При этом состояние управляемой системы определяется скалярной величиной $y(t)$, подчиненной дифференциальному уравнению $y'=u$, $0\leqq t\leqq T$, со следующими граничными условиями $y(0)=0,\quad y(T)=0$.

Пусть выбор скалярной функции управления u стеснен условием $|u(t)|\leqq 1$ при $0\leqq t\leqq T$. Время управления T считается фиксированным.

Запишем функцию Гамильтона для данной задачи

$$H=\psi_0(u^2+y)+\psi u$$

и сопряженное уравнение

$$\psi'=-\psi_0 .$$

Если в сопряженном уравнении предположить выполнение равенства $\psi_0=0$, то из него получим представление $\psi=C$, где $C-\text{const}$. Сразу заметим, что равенство $C=0$ невозможно благодаря условию 1) теоремы 4.2. Рассмотрим оставшиеся возможности. Если $C>0$, то максимальное значение функции $H=Cu$ достигается при $u=1$ (для всех $t\in[0,T]$). Но тогда, если из исходного уравнения $y'=u$ при управлении $u(t)\equiv 1$ с начальным условием $y(0)=0$ получим траекторию $y=t$, для которой не будет выполняться граничное условие $y(T)=0$. Аналогично устанавливается невозможность выполнения неравенства $C<0$. Следовательно, $\psi_0\neq 0$, а значит, в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением случая $\psi_0^*=1$.

Решая сопряженное уравнение, в котором $\psi_0^*=1$, найдем

$$\psi(t)=C_1-t,\quad C_1-\text{const} .$$

Следовательно, сопряженная переменная ψ является линейной функцией времени, а значит, существует единственная точка, в которой она меняет свой знак (это обстоятельство будет использовано ниже).

Перепишем функцию Гамильтона (с учетом равенства $\psi_0^*=1$):

$$H=u^2+y+\psi u .$$

Как видим, она является квадратичной функцией переменной u, графиком которой служит парабола с ветвями, направленными вверх. Отсюда следует, что своего максимального значения на отрезке $[-1,1]$ функция H может достигать лишь в граничных точках $u = \pm 1$. Если вершина указанной параболы лежит в левой (правой) полуплоскости, то максимум достигается на правом (соответственно – левом) конце, т.е. при $u = 1$ ($u = -1$) (см. рис. 4.1).

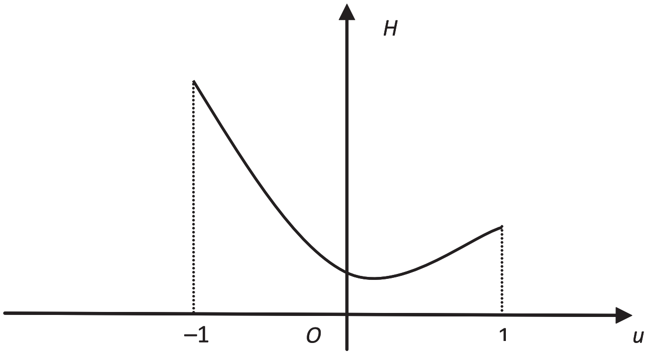

Рис. 4.1. Геометрия максимизации функции Гамильтона

Вершине указанной параболы соответствует точка $u = -\dfrac{\psi}{2}$. Как было установлено выше, линейная функция $\psi = \psi(t)$ может изменять свой знак (причем в точности один раз). Если $-\dfrac{\psi}{2} = \dfrac{t - C_1}{2} > 0$, что равносильно неравенству $t > C_1$, то максимум функции H достигается при $u = 1$. Тогда как в случае $t < C_1$ это произойдет при $u = -1$.

Из исходного дифференциального уравнения $y' = u$ следует, что управлению $u(t) \equiv 1$ отвечает траектория $y(t) = t + C_2$ в виде прямой линии с угловым коэффициентом 1, а управлению $u(t) \equiv -1$ – соответственно $y(t) = -t + C_2$, графиком которой является прямая с угловым коэффициентом -1.

Таким образом, с учетом граничных условий $y(0) = 0$ и $y(T) = 0$ приходим к следующим двум возможным вариантам (рис. 4.2):

1) сначала применяется управление $u(t) \equiv 1$, а затем $u(t) \equiv -1$; этому варианту соответствует верхняя траектория на рис. 4.2;

2) первым используется управление $u(t) \equiv -1$, после чего принимается $u(t) \equiv 1$; этому варианту соответствует нижняя траектория на рис. 4.2.

Для выполнения граничного условия $y(T) = 0$ необходимо, чтобы в обоих случаях точка $\hat{t}$, в которой происходит изменение значения управления (*точка переключения*) была расположена симметрично относительно концов отрезка $[0,T]$, т.е. $\hat{t} = T/2$. В момент переключения выполняется равенство $\psi(\hat{t}) = C_1 - \hat{t} = 0$. Следовательно, $C_1 = T/2$, а значит, $\psi^*(t) = T/2 - t$.

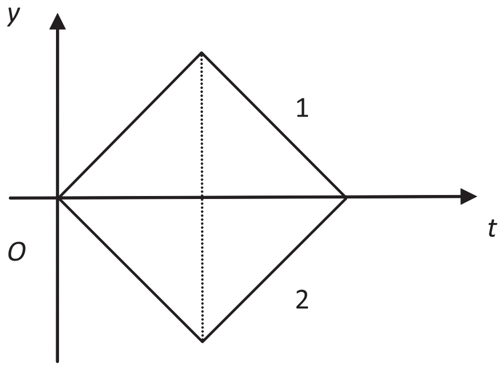

Рис. 4.2. Два варианта управления

Теперь обратимся к условию максимума функции Гамильтона $H(y, \psi_0, \psi, u)$. Нам известны функции $u(t), y(t)$ для каждого из указанных выше двух вариантов, а также $\psi_0^* = 1, \psi = \psi^*(t) = T/2 - t$. Непосредственный подсчет значения функции H (выполненный отдельно для левой и правой половин отрезка $[0,T]$) показывает, что для первого варианта это значение равно $1 + T/2$, а для второго $1 - T/2$. Следовательно, второй вариант не удовлетворяет принципу максимума и единственной экстремалью Понтрягина в данной задаче является

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad t < T/2, \\ -1, & \text{при} \quad t > T/2. \end{cases}$$

4.4. Принцип максимума для задачи с нефиксированным временем управления

Вновь обратимся к задаче оптимального управления системой

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, ..., y_n, u_1 ..., u_r), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_r), \end{cases} \qquad t_0 \leqq t \leqq T\ , \tag{4.1}$$

с подлежащим максимизации критерием качества управления

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, y_1(t), ..., y_n(t), u_1(t), ..., u_r(t))dt\ , \tag{4.2}$$

заданными начальным моментом времени $t = t_0$, областью управления $U, U \subset R^r$, начальным состоянием $y(t_0) = y^{(0)} \in R^n$ и конечным состоянием $y(T) = y^{(1)} \in R^n$. Однако в отличие от задачи оптимального управления, рассмотренной ранее, здесь конечный момент времени T будем считать не фиксированным и подлежащим определению.

Выпишем функцию Гамильтона

$$H(t, y, \hat{\psi}, u) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i\, f_i(t, y, u), \tag{4.3}$$

которая ничем не отличается от введенной ранее.

Рассматриваемая *задача оптимального управления с нефиксированным конечным моментом времени* заключается в максимизации интегрального функционала (4.2) на множестве всех допустимых управлений, переводящих систему (4.1) из заданного начального состояния $y^{(0)}$ в заданное конечное состояние $y^{(1)}$ к некоторому заранее не известному моменту времени T. Решением этой задачи являются оптимальное управление (векторная функция) $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t), ..., u_r^*(t))$, соответствующая оптимальная траектория (векторная функция) $y^*(t) = (y_1^*(t), y_2^*(t), ..., y_n^*(t))$ и оптимальное время T^*. Следует заметить, что в данном случае правильнее было бы вместо $I(u)$ писать $I(T, u)$, подчеркивания тем самым зависимость критерия качества от конечного момента времени. Но мы этого делать не будем, поскольку заранее оговорили, что здесь рассматривается задача с нефиксированным конечным моментом времени.

Предположим, что пара векторных функций $u^*(t), y^*(t)$ и время T^* являются оптимальными в сформулированной задаче. Совершенно очевидно, что эта пара функций будет представлять собой оптимальный процесс и в задаче оптимального управления, отличающейся от приведенной выше лишь фиксацией конечного момента времени $T = T^*$. Поэтому согласно теореме 4.1 процесс $u^*(t), y^*(t)$, оптимальный в исходной задаче с нефиксированным конечным моментом времени управления, будет удовлетворять всем трем условиям этой теоремы при $T = T^*$. Тем самым, принцип максимума для рассматриваемой задачи должен содержать уже известные условия 1) — 3) теоремы 4.1, но при этом они должны быть дополнены каким-то дополнительным требованием для определения оптимального значения конечного момента времени T^*. Действительно, имеет место следующий результат (см. [4]).

Теорема 4.2 (принцип максимума для задачи с нефиксированным временем управления). *Пусть* $u^*(t), y^*(t)$ *— оптимальный процесс в задаче оптимального управления с нефиксированным временем управления системой* (4.1), *критерием оптимальности* (4.2), *заданными начальным* $y^*(t_0) = y^{(0)} \in R^n$ *и конечным* $y^*(T^*) = y^{(1)} \in R^n$ *состояниями.*

Тогда необходимо существуют неотрицательное число ψ_0^* *и непрерывная векторная функция* $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t), \dots, \psi_n^*(t))$ *такие, что выполняются условия* 1) — 3) (*в которых следует положить* $T = T^*$) *теоремы* 4.1 *и, кроме того, имеет место равенство*

$$\max_{u \in U} H(T, y^*(T), \hat{\psi}^*(T), u)\Big|_{T=T^*} = 0 . \tag{4.12}$$

Рассматриваемый ниже пример иллюстрирует применение теоремы 4.2 и имеет наглядную механическую интерпретацию.

Пример 4.3. Пусть материальная точка с координатой $x(t)$ движется по числовой оси Ox по закону

$$x''(t) = u(t) \qquad t \geqq 0.$$

Данное равенство означает, что управление движением материальной точкой на прямой линии осуществляется путем изменения ускорения ее движения. Требуется найти кусочно-непрерывное управление, удовлетворяющее неравенству

$$|u(t)| \leqq 1, \qquad 0 \leqq t \leqq T ,$$

такое, чтобы точка, выйдя с нулевой скоростью из заданного начального положения $x(0) = 1$, «вошла» в начало координат с нулевой скоростью за наименьшее возможное время T. Это типичная задача быстродействия.

Уравнение движения материальной точкой представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Известно, что это уравнение может быть сведено к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Для того чтобы такое сведение выполнить, введем новые фазовые переменные по правилу:

$$y_1 = x, \qquad y_2 = x'.$$

Тогда сформулированную одномерную задачу оптимального управления можно переписать следующим образом. Дана система из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = u, \end{cases} \qquad t \geqq 0.$$

Заданы начальное $y(0) = (1{,}0)$ и конечное $y(T) = (0{,}0)$ состояния системы и область управления $U = [-1, 1]$. Варьируя управления в классе допустимых, необходимо максимизировать интегральный функционал

$$I = -\int_0^T dt = -T.$$

Для решения задачи составляем функцию Гамильтона

$$H = -\psi_0 + \psi_1 y_2 + \psi_2 u$$

и выписываем сопряженную систему

$$\begin{cases} \psi_1' = -\dfrac{\partial H}{\partial y_1} = 0, \\ \psi_2' = -\dfrac{\partial H}{\partial y_2} = -\psi_1, \end{cases} \qquad t \geqq 0.$$

Решая эту систему, находим $\psi_1(t) = C$, $\psi_2(t) = -Ct + D$, где C и D некоторые постоянные. Если предположить, что $\psi_2(t) \equiv 0$, то $C = D = 0$ и $\psi_1(t) \equiv 0$. Но тогда из условия (4.12), которое в данном случае имеет вид

$$\max_{u \in [0,1]} (-\psi_0 + C - Ctu + Du) = 0, \tag{4.13}$$

будет следовать равенство $\psi_0 = 0$, что вместе с полученным выше $\psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0$ противоречит условию 1) принципа максимума. Следовательно, функция $\psi_2(t)$ не равна нулю тождественно.

Функция, записанная под знаком максимума в (4.13), линейна по u, а значит может принимать максимальные значения лишь на концах отрезка $[-1,1]$:

$$u(t)=\operatorname{sign}(-Ct+D).$$

Таким образом, оптимальное управление (если оно существует) является кусочно-непрерывной функцией, принимающей значения +1, либо –1. При этом благодаря линейности функции $\psi_2(t)=-Ct+D$ управление имеет не более одной точки $\hat{t}$ переключения (смены знаков).

Нетрудно проверить непосредственно, что траектории, выходящие из начальной точки и соответствующие режимам управления

a) $u(t)=+1,\ t\geqq 0,$

b) $u(t)=-1,\ t\geqq 0,$

c) $u(t)=+1,\ 0\leqq t\leqq \hat{t}, u(t)=-1,\ t\geqq \hat{t},$

никогда не пройдут через конечную точку (0, 0). Остается рассмотреть единственный оставшийся возможный режим $u(t)=-1$ при $0\leqq t\leqq \hat{t}$ и $u(t)=+1$ при $t\geqq \hat{t}$. Ему отвечает траектория $(y_1(t),y_2(t))$, где

$$y_1(t)=\begin{cases}1-t^2/2, & 0\leqq t\leqq \hat{t},\\ t^2/2-2\hat{t}t+\hat{t}^2+1, & t\geqq \hat{t},\end{cases}\qquad y_2(t)=\begin{cases}-t, & 0\leqq t\leqq \hat{t},\\ t-2\hat{t}, & t\geqq \hat{t}.\end{cases}$$

Из условий $y_1(T)=y_2(T)=0$ можно найти $\hat{t}=1,\ T=T^*=2$. Значит, полученное выше представление для траектории можно переписать в форме

$$y_1(t)=\begin{cases}1-t^2/2, & 0\leqq t\leqq 1,\\ (t-2)^2/2, & 1\leqq t\leqq 2,\end{cases}\qquad y_2(t)=\begin{cases}-t, & 0\leqq t\leqq 1,\\ t-2, & 1\leqq t\leqq 2.\end{cases}$$

В качестве величин ψ_0^*, ψ_1^* и ψ_2^* можно взять $\psi_0^*=0,\ \psi_1^*(t)=-1,\ \psi_2^*(y)=t-1$ при $0\leqq t\leqq 2$. Найденный процесс является единственным, удовлетворяющим принципу максимума.

Если вернуться к терминам исходной одномерной постановки задачи оптимального управления материальной точкой на числовой оси, то получим следующую картину. В соответствии с принципом максимума, для того чтобы за наименьшее время из точки, расположенной на расстоянии одной единицы справа от начала координат, попасть в начало координат, следует сразу (т.е. в начальный момент времени), начав движение влево, включить максимальное ускорение (это соответствует выбору управления $u(t)\equiv-1$). По прошествии одной единицы времени необходимо осуществить переключение управления в режим $u(t)\equiv+1$, что отвечает режиму максимального торможения. Тогда через единицу времени после переключения данная точка «попадет» в начало координат и ее скорость в конечный момент времени будет в точности равна нулю.

4.5. Задача оптимального управления с подвижными концами

На практике нередко возникают задачи управления, в которых один или оба конца траекторий (начальный и/или конечный), отвечающих допустимым управлениям, не являются «жестко закрепленными» и могут выбираться в пределах некоторых заданных множеств. Такого рода задачи именуют *задачами управления с подвижными концами*.

Сначала рассмотрим задачу оптимального управления с подвижным правым концом. В ней целевой функционал подлежит максимизации на множестве всех допустимых управлений, переводящих управляемую систему из заданной точки $y(t_0)$ фазового пространства в какую-либо точку некоторого заданного множества S, $S \subset R^n$. В этом случае говорят, что систему из заданного начального состояния следует *перевести на множество* S (рис. 4.3).

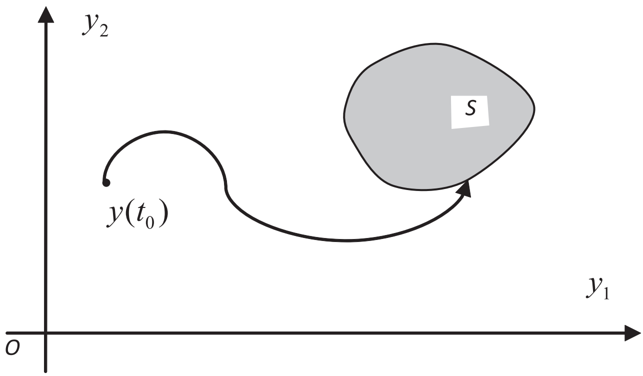

Рис. 4.3. Перевод системы из точки на множество

В случае, когда $S = R^n$, говорят о *задаче со свободным правым концом*.

Точно так же, если указано определенное множество возможных начальных состояний системы, то можно говорить о задаче оптимального управления с подвижным левым концом. В общем случае оба конца траектории могут быть подвижными, т.е. располагаться на двух заданных множествах.

Далее будем предполагать, что ограничения на возможные изменения начального $y(t_0) \in R^n$ и конечного $y(T) \in R^n$ состояний заданы при помощи следующей системы неравенств и уравнений

$$g_i(y(t_0),y(T)) \geqq 0, \quad i=1,2,...,m;$$

$$g_j(y(t_0),y(T))=0, \quad j=m+1,...,M\ . \tag{4.14}$$

Здесь может быть $m=0$ или $M=m$. Первому варианту соответствует случай отсутствия ограничений-неравенств, а второму — ограничений-равенств. Далее условимся считать выполненными все требования к функциям $2n$ переменных g_i и g_j, которые могут потребоваться от них при формулировке принципа максимума[8].

Задача оптимального управления с подвижными концами формулируется следующим образом. Дана управляемая система (4.1) и задан интегральный функционал (4.2). Среди всех допустимых управлений, переводящих систему (4.1) из некоторой начальной точки $y(t_0)$, удовлетворяющей ограничениям (4.14), на множество тех конечных состояний $y(T)$, для которых выполнены соотношения (4.14), требуется найти такое управление, которое доставляет наибольшее возможное значение интегральному функционалу (4.2). Определению подлежат и концы оптимальной траектории, т.е. точки $y^*(t_0)$ и $y^*(T)$. При этом время управления может быть фиксированным или нефиксированным.

Предположим, что процесс u^*,y^* является оптимальным в сформулированной задаче, причем траектория начинается в точке $y^*(t_0)=y^{(0)}$ и заканчивается в точке $y^*(T)=y^{(1)}$, причем обе эти точки удовлетворяют соотношениям (4.14). Из общих соображений ясно, что элемент, доставляющий функционалу наибольшее возможное значение на некотором допустимом множестве максимизирует тот же самый функционал на любом подмножестве допустимого множества, содержащем данный элемент.

Поэтому управление u^*, оптимальное в задаче перевода системы (4.1) с одного множества на другое, должно быть оптимальным и в задаче перевода данной системы из фиксированного начального состояния $y^{(0)}$ в фиксированное конечное состояние $y^{(1)}$. Отсюда сразу следует, что для указанного выше оптимального управления u^* и соответствующей ему траектории y^* обязательно должен выполняться принцип максимума в форме теоремы 4.1 или 4.2 (имеются в виду условия 1) – 3)) в зависимости от того, фиксировано или не фиксировано время управления. Таким образом, центральная часть утверждения принципа максимума для задачи с подвижными концами остается такой же, как в задаче с фиксированными концами.

Изменение формулировки необходимого условия оптимальности в форме принципа максимума для задачи с подвижными концами заключается

[8] Эти требования можно найти, например, в [4].

(см. [4]) в замене $2n$ граничных условий $y(t_0)=y^{(0)}$, $y(T)=y^{(1)}$ для концов оптимальной траектории на специального вида требования, которые записываются в виде следующей системы $2n$ равенств

$$\psi_i^*(t_0)=\sum_{j=1}^{M}\alpha_j\left.\frac{\partial g_j(y(t_0),y(T))}{\partial y_i(t_0)}\right|_{(y^*(t_0),y^*(T))}, \qquad i=1,2,...,n,$$

$$\psi_i^*(T)=-\sum_{j=1}^{M}\alpha_j\left.\frac{\partial g_j(y(t_0),y(T))}{\partial y_i(T)}\right|_{(y^*(t_0),y^*(T))}, \qquad i=1,2,...,n,$$

называемых *условиями трансверсальности*, и m равенств

$$\alpha_j g_j(y^*(t_0),y^*(T))=0, \qquad j=1,2,...,m,$$

именуемых *условиями дополняющей нежесткости*, при некоторых (подлежащих определению) неотрицательных числах $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ и некоторых (также подлежащих определению) числах $\alpha_{m+1},...,\alpha_M$ произвольного знака, в совокупности обладающих свойством $(\psi_0^*,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_M)\neq\mathbf{0}$. В случае, когда один из концов траектории (например, начальный) закреплен, условие трансверсальности на закрепленном конце (т.е. то, в левой части которого стоит $\psi_i^*(t_0)$) становится лишним.

Заметим, что общее число всех выписанных выше равенств (условий трансверсальности и дополняющей нежесткости) $2n+m$ совпадает с суммой числа m подлежащих определению констант $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ и числа $2n$ компонент начальной и конечной точек $y^{*(0)}$, $y^{*(1)}$ оптимальной траектории. Если к перечисленным добавить еще $M-m$ ограничений-равенств из (4.14), то в итоге получим $2n+M$ равенств для определения такого же числа неизвестных компонент $y_1^*(0),...,y_n^*(0)$, $y_1^*(T),...,y_n^*(T)$ начальной и конечной точек оптимальной траектории и констант $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_M$.

Выясним, какой вид приобретают сформулированные выше условия трансверсальности и дополняющей нежесткости в некоторых простейших случаях.

Случай задачи управления со свободным правым концом может быть получен при граничном условии $y(t_0)=y^{(0)}$. Это условие можно переписать в виде ограничений-равенств $g_j(y(t_0),y(T))=y_j(t_0)-y_j^{(0)}=0$, $j=1,2,...,n$ Из-за отсутствия ограничений-неравенств условия дополняющей нежесткости здесь отсутствуют. Далее, так как левый конец траектории закреплен, то условие трансверсальности следует записывать только для конечного момента времени $t=T$. Заметим, что ни одна из функций g_j от $y_i(T)$ не зависит. Значит, все участвующие в условии трансверсальности производные от функции g_i по $y_i(T)$ обращаются в нуль. В итоге приходим к тому, что *для задачи оптимального управления со свободным правым концом условие трансверсальности имеет вид*

$$\psi^*(T) = \mathbf{0}\,.$$

Разберем еще случай, когда левый конец закреплен, а для правого конца должны выполняться неравенства

$$y_i(T) \geqq a_i, \quad i = 1,2,...,n\,,$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ – заданные числа. В этом случае ограничения-равенства отсутствуют, а имеющиеся ограничения-неравенства можно представить в форме $g_i(y(t_0), y(T)) = y_i(T) - a_i \geqq 0, \quad i = 1,2,...,n$. Выпишем получающиеся в данном случае условия трансверсальности и дополнительной нежесткости на правом конце траектории:

$$\psi_i^*(T) = \alpha_i, \quad i = 1,2,...,n\,; \qquad \alpha_j(y_j^*(T) - a_j) = 0, \quad j = 1,2,...,n\,.$$

Благодаря тому, что все числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ неотрицательны, полученные условия окончательно можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\psi_i^*(T) \geqq 0, \qquad \psi_i^*(T)(y_i^*(T) - a_i) = 0, \quad i = 1,2,...,n\,.$$

Общая схема применения принципа максимума для задач с подвижными (одним или обоими) концами в своей основе остается такой же, что и для задачи с закрепленными концами. Отличие состоит в оперировании здесь с бо́льшим количеством величин, подлежащих определению на основе условий трансверсальности и дополнительной нежесткости.

4.6. Экономическая интерпретация принципа максимума

Предположим, что некоторая фирма стремится получить максимально возможную прибыль на временно́м промежутке $[0, T]$. Пусть единственной переменной состояния является капитал $K = K(t)$, а единственной управляющей переменной служит функция $u = u(t)$ (это может быть, например, величина средств на рекламную компанию или внедрения новых технологий). В каждый момент времени t величина прибыли фирмы зависит от величины капитала K и от управления u. В соответствии с этим, функция прибыли в момент времени t имеет вид $\pi(t, K, u)$. Тогда суммарная прибыль за весь временной промежуток $[0, T]$ составит

$$\Pi(u)=\int_0^T \pi(t,K(t),u(t))dt\ . \tag{4.15}$$

Для получения наибольшей возможной прибыли функционал (4.5) необходимо максимизировать. Скорость изменения величины капитала, т.е. производная K', зависит от величины капитала K и от управления u; при этом она изменяется со временем по определенному закону (с некоторой функцией f):

$$K'=f(t,K,u)\,, \qquad 0\leqq t\leqq T\ . \tag{4.16}$$

Кроме того, пусть задано начальное условие $K(0)=K_0$ и конечный момент времени T, тогда как правый конец траектории $K(T)$ свободен.

В формулировке принципа максимума в общем случае присутствуют три типа переменных – состояния, управления и сопряженные переменные. Переменные состояния и управления уже описаны выше. Поскольку (4.16) представляет собой одно дифференциальное уравнение, то сопряженная переменная в данной задаче единственна. Постараемся далее ответить на вопрос: какой экономический смысл имеет сопряженная переменная $\psi^*=\psi^*(t)$?

Ограничим последующее рассмотрение случаем $\psi_0^*=1$ и применительно к нему для оптимального процесса запишем функцию Гамильтона:

$$H(t,K^*,u^*,\psi^*)=\pi(t,K^*,u^*)+\psi^* f(t,K^*,u^*)\,.$$

Благодаря уравнению (4.16) целевой функционал можно переписать так:

$$\Pi^*(u)=\int_0^T \{\pi(t,K^*(t),u^*(t))+\psi^*(t)(f(t,K^*(t),u^*(t))-K^{*\prime}(t))\}dt\,.$$

Преобразуем его следующим образом

$$\Pi^*(u)=\int_0^T \{H(t,K^*(t),u^*(t),\psi^*(t))-\psi^*(t)K^{*\prime}(t)\}dt=$$

$$=\int_0^T H(t,K^*(t),u^*(t),\psi^*(t))dt-\int_0^T \psi^*(t)K^{*\prime}(t)dt=$$

$$=\int_0^T H(t,K^*(t),u^*(t),\psi^*(t))dt-\psi^*(t)K^*(t)\Big|_0^T+\int_0^T \psi^{*\prime}(t)K^*(t)dt=$$

$$=\int_0^T \{H(t,K^*(t),u^*(t),\psi^*(t))+\psi^{*\prime}(t)K^*(t)\}dt-\psi^*(T)K^*(T)+\psi^*(0)K_0\,.$$

Используя последнее из полученных выше представлений для $\Pi^*(u)$, вычислим частные производные этой функции:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial K_0} = \psi^*(0), \qquad \frac{\partial \Pi^*}{\partial K^*(T)} = -\psi^*(T)\,. \tag{4.17}$$

На основании первого равенства из (4.17) можно сказать, что $\psi^*(0)$ представляет собой меру чувствительности оптимальной суммарной прибыли к заданному начальному капиталу K_0. Иными словами, если увеличить начальный капитал на условную единицу, то величина суммарной прибыли возрастет на величину $\psi^*(0)$. Таким образом, $\psi^*(0)$ можно рассматривать как *теневую цену единицы начального капитала.*

Аналогично из второго равенства (4.17) видим, что $\psi^*(T)$ представляет собой *отрицательную* скорость изменения суммарной прибыли Π^*. Таким образом, если мы хотим сохранить условную единицу капитала в конце рассматриваемого периода времени (т.е. уменьшить его на единицу), то нам придется пойти на уменьшение суммарной прибыли на величину $\psi^*(T)$. Следовательно, $\psi^*(T)$ является *теневой ценой единицы конечного капитала.*

В общем случае в рамках рассматриваемой задачи оптимального управления величина $\psi^*(t)$ может рассматриваться как *теневая цена капитала в текущий момент времени* t .

Обратимся теперь к условию трансверсальности. Поскольку правый конец траектории является свободным, то условие трансверсальности на правом конце записывается (см. предыдущий разд.) в виде

$$\psi^*(T) = 0\,.$$

Выполнение этого равенства означает, что для оптимального процесса теневая цена капитала в конечный момент времени равна нулю. Иными словами, в конце периода управления он должен полностью «выработать» себя и, тем самым, потерять всякую ценность.

Для фирмы, которая намеревается продолжить свое существование сверх рассматриваемого периода времени $[0,T]$, резонно было бы зарезервировать некоторое количество капитала на определенном минимально приемлемом уровне. Это условие приводит к требованию выполнения неравенства $K(T) \geqq K_{\min}$ в конечный момент времени. Согласно результатам предыдущего раздела в таком случае условия трансверсальности и дополняющей нежесткости имеют вид:

$$\psi^*(T) \geqq 0, \qquad \psi^*(T)(K^*(T) - K_{\min}) = 0\,.$$

Анализ выписанных условий показывает, что если превышение величины $K^*(T)$ над граничным значением $K_{\min}$ возможно, то теневая цена $\psi^*(T)$ обязательно должна быть равна нулю, как и в рассмотренном выше случае со свободным правым концом. Но если теневая цена $\psi^*(T)$ капитала в конечный момент времени строго положительна (капитал полностью еще не «выработан»), то благодаря второму из выписанных выше условий обязательно должно быть выполнено равенство $K^*(T) = K_{\min}$, означающее, что имеющийся капитал к конечному моменту времени следует израсходовать до минимального возможного предела.

Выводы

Принцип максимума Л.С. Понтрягина представляет собой определенного вида необходимое условие оптимальности для задачи оптимального управления. В его формулировке участвуют функции специального вида – гамильтониан и сопряженные переменные. Это необходимое условие принимает тот или иной вид в зависимости от разновидности задачи оптимального управления. Существует определенная схема применения принципа максимума. Однако в общем случае использование принципа максимума требует высокой математической квалификации и нередко – изобретательности.

Основные понятия

Гамильтониан, принцип максимума Понтрягина, сопряженные переменные, экстремаль Понтрягина, оптимальный процесс, задача оптимального управления с бесконечным горизонтом управления, задача оптимального управления с подвижными концами.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем управления и выпишите для нее принцип максимума.
2. Что такое сопряженные переменные и какой системе уравнений они согласно принципу максимума должны удовлетворять?
3. Сформулируйте задачу оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем управления в случае одной фазовой переменной и одной управляющей функцией и запишите для нее принцип максимума.
4. Сформулируйте задачу оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем управления в случае двух фазовых переменных и двух управляющих функций и запишите соответствующий ей вариант принципа максимума.
5. Сформулируйте в общей форме задачу оптимального управления с закрепленными концами и нефиксированным временем управления и выпишите для нее принцип максимума.

6. В чем состоит общее и в чем заключается отличие принципа максимума для задач с фиксированным и нефиксированным конечным моментом времени?
7. Сформулируйте в общем виде задачу оптимального управления с незакрепленными концами и фиксированным временем управления и запишите для нее принцип максимума.
8. В чем состоит общее и чем отличается принцип максимума для задач с закрепленными и незакрепленными концами траекторий?
9. Сформулируйте в общем виде задачу оптимального управления с незакрепленными концами и нефиксированным временем управления и запишите для нее принцип максимума.
10. Выпишите условия трансверсальности и дополняющей нежесткости.
11. Дайте экономическую интерпретацию сопряженных переменных.

Упражнения

1. Сформулируйте задачу оптимального управления с закрепленными концами и фиксированным временем управления в случае двух фазовых переменных и одной управляющей функцией и запишите для нее принцип максимума.

2. Сформулируйте задачу оптимального быстродействия для системы общего вида и запишите принцип максимума для этой задачи. Как видоизменится принцип максимума, если рассмотрение ограничить классом линейных систем управления?

3. Примените принцип максимума для решения задачи максимизации функционала

$$I(u)=\int_0^T (y^2(t)-u^2(t))dt$$

со скалярными функциями $y(t)$ и $u(t)$, подчиненными дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt}=u\,, \qquad t_0 \leqq t \leqq T\,,$$

и граничным условиям $y(0)=y(T)=0$. Здесь конечный момент времени T фиксирован. Отдельно рассмотрите два случая: $0 \leqq T \leqq \pi$ и $T \geqq \pi$.

4. Найдите экстремаль Понтрягина для задачи оптимального управления системой, поведение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt}=ay+u, \qquad t \geqq 0,$$

где a – отрицательный параметр и y, u – скалярные функции. Задано начальное условие $y(0) = y_0 > 0$. Конечный момент времени T и конечное состояние системы $y(T)$ не фиксированы. Критерий качества, который необходимо минимизировать, имеет вид интегрального функционала

$$I(u) = \int_0^T (y^2(t) + u^2(t))dt.$$

5. Требуется a) максимизировать и b) минимизировать интегральный функционал

$$I(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} x \sin t dt$$

при ограничениях $|x'(t)| \leqq 1,\ x(-\pi) = x(\pi) = 0$. Сформулируйте эти две задачи в форме задач оптимального управления и для их решения примените принцип максимума.

6. Требуется a) максимизировать и b) минимизировать интегральный функционал

$$I(x) = \int_0^1 x dt$$

при условиях $|x''(t)| \leqq 2,\ x(0) = x'(0) = 0$. Сформулируйте эти задачи в форме задач оптимального управления и для их решения примените принцип максимума.

Указание. Предварительно переформулируйте данные задачи в виде задач оптимального управления с двумя фазовыми переменными и одной управляющей функцией.

7. Решите задачу оптимального быстродействия (т.е. задачу минимизации конечного момента времени T) для системы, поведение которой описывается скалярной функцией $x(t)$, подчиненной условиям

$$|x''(t)| \leqq 2, \quad x(-1) = 1, \quad x(T) = -1, \quad x'(-1) = x'(T) = 0.$$

Указание. Предварительно переформулируйте данную задачу в виде задачи оптимального управления с двумя фазовыми переменными и одной управляющей функцией.

8. Требуется a) максимизировать и b) минимизировать интегральный функционал

$$I(x) = \int_0^2 x dt$$

при условиях $|x''(t)| \leqq 2$ и $x(0) = x'(0) = x(2) = 0$.

Указание. Предварительно переформулируйте эти задачи в виде задач оптимального управления с двумя фазовыми переменными и одной управляющей функцией.

9. Требуется a) максимизировать и b) минимизировать интегральный функционал

$$I(x)=\int_0^4 x\,dt$$

при условиях $|x''(t)| \leqq 2$ и $x(0)+x(4)=0$, $x'(0)=x'(4)=0$.

Указание. Предварительно переформулируйте данные задачи в виде задач оптимального управления с двумя фазовыми переменными и одной управляющей функцией. В этих задачах оптимального управления должны присутствовать два ограничения-равенства, связывающие значения фазовых переменных и переменной управления в начальный и конечный моменты времени. Не забудьте про условия трансверсальности!

10. Рассмотрим задачу о расширенном воспроизводстве (см. [9]). Предположим, что некоторая отрасль производства производит определенную продукцию. Через $x=x(t)$ обозначим денежную сумму, получаемую от реализации этой продукции в момент времени t. Предположим, что доля в размере $u=u(t)$ этой продукции используется для расширения производства, идет на закупку нового оборудования и пр. Считается, что скорость роста производства, а значит, и суммы $x(t)$, прямо пропорциональна затратам на эту цель, т.е.

$$x'=\alpha u x\,, \qquad (\alpha>0).$$

При этом $t_0=0$ и $x(0)=a$, где $a>0$ – заданное число (начальный капитал). Расходы на текущее производство можно считать пропорциональными количеству производимой продукции, т. е. в единицу времени они составляют величину $\beta x(t)$, где $\beta>0$. Налог выплачивается с оставшейся суммы $x(t)-u(t)x(t)-\beta x(t)$. Поэтому чистая прибыль за промежуток времени от $t_0=0$ до $t=T$ равна

$$\Pi(u)=\int_0^T \tau[(1-u(t)-\beta)x(t)]dt\,.$$

Здесь τ – заданная возрастающая выпуклая функция одной переменной, характеризующая налоговую политику. На выбор функции $u(t)$ наложены ограничения $0 \leqq u(t) \leqq (1-\beta)$ при всех t. Задача состоит в определении доли $u(t)$, при которой чистая прибыль $\Pi(u)$ максимальна.

Записать сформулированную задачу в терминах задачи оптимального управления и, используя принцип максимума, решить ее.

Глава 5. Применение принципа максимума к решению экономических задач

Здесь принцип максимума используется при решении трех задач, имеющих определенное экономическое содержание.

Первая и вторая задачи связаны с поиском стратегии рационального использования энергии в условиях, когда это использование может иметь как желательные, так и нежелательные последствия (например, сопровождается загрязнением окружающей среды).

Третья задача основана на модели Солоу, введенной в главе 2, и связана с изучением динамики односекторной экономики. Здесь предполагается, что показатель удельного потребления может варьироваться в определенных пределах с целью достижения максимального благосостояния на длительном промежутке времени. Изучаются некоторые свойства оптимальной стратегии.

5.1. Оптимальное использование энергии с учетом качества окружающей среды (одномерная модель)

5.1.1. Введение

Как известно, использование энергии, вырабатываемой, например, атомной, тепловой или электростанцией, имеет для общества как положительные, так и отрицательные последствия. С одной стороны, энергия позволяет использовать различного рода приборы, устройства, машины и механизмы, работающие от электрической сети и облегчающие жизнь человека. С другой, – сам процесс производства энергии, а также функционирование электроприборов, как правило, отрицательно влияют на качество окружающей среды. В этой связи возникает задача определения такого режима использования энергии, который приводит к наиболее выгодным социальным последствиям с учетом качества окружающей среды. Один из наиболее простых вариантов задачи такого рода рассматривается ниже.

5.1.2. Формирование математической модели оптимального управления

Пусть $E = E(t)$ означает *количество* (*запас*) *энергии* того или иного вида, а $V = V(t)$ – *темп* (*скорость*) *расходования* этой энергии в момент времени

$t,\ 0 \leqq t \leqq T$. Исходя из смысла введенных величин, они должны быть связаны друг с другом равенством

$$\frac{dE}{dt} = -V \,. \tag{5.1}$$

Использование энергии, с одной стороны, приводит к увеличению товаров и услуг; обозначим этот положительный фактор через $C = C(V)$. А с другой, – ведет в загрязнению окружающей среды; этот отрицательный фактор обозначим $P = P(V)$. Очевидно, при увеличении расходования энергии происходит рост обеих величин, тогда как темп скорости их роста имеет противоположные знаки. Другими словами, имеют место неравенства

$$C'(V) > 0, C''(V) < 0, \quad P'(V) > 0, P''(V) > 0 \,. \tag{5.2}$$

Отметим, что благодаря процессам самоочищения загрязнение здесь не считается накапливаемым.

Введем в рассмотрение *общественную функцию полезности* $U = U(C, P)$, которая устанавливает закон изменения величины полезности для общества от использования энергии в зависимости от двух переменных C и P. Не ставя перед собой задачу получения аналитического выражения для этой функции, будем считать выполненным лишь следующие условия (для всех $t \in [0, T]$):

$$\frac{\partial U}{\partial C} > 0, \quad \frac{\partial U}{\partial P} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial C^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial P^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial P \partial C} = 0 \,. \tag{5.3}$$

Первые два неравенства в (5.3) означают, что общественная функция полезности является возрастающей по переменной C и убывающей по переменной P, что вполне согласуется с интуитивными представлениями о зависимости значения общественной функции полезности как от величины товаров и услуг, так и от величины загрязнения окружающей среды. Согласно следующим двум неравенствам темп изменения полезности с ростом переменных замедляется.

В рассматриваемой задаче на роль переменных управления и состояния может претендовать как величина энергии E, так и темп ее расходования V. При этом ясно, что именно темп расходования энергии является тем параметром, который мы можем выбирать из экономических или каких-то иных соображений. Следовательно, V будем считать переменной управления, тогда как E – переменной состояния (фазовой переменной).

Для того чтобы сформулировать задачу оптимального управления необходимо иметь критерий оптимальности. В данном случае критерием оптимальности (функционалом), который следует максимизировать, будет интегральная общественная полезность за рассматриваемый период от начального момента времени $t=0$ до конечного $t=T$, т.е.

$$\int_0^T U(C(V(t)),P(V(t)))dt \ . \tag{5.4}$$

Итак, задача оптимального управления, к решению которой сведена задача наилучшего использования энергии, заключается в максимизации интегрального функционала (5.4) при условиях

$$\begin{aligned} &\frac{dE}{dt}=-V, \quad E(0)=E_0, \quad E(T)\geqq 0, \\ &V(t)>0, \quad 0\leqq t\leqq T. \end{aligned} \tag{5.5}$$

где числа E_0 и $E(T)$ считаются заданными.

5.1.3. Применение принципа максимума и анализ полученных результатов

Составляем функцию Гамильтона, ограничив рассмотрение случаем $\psi_0^*=1$:

$$H(V,\psi)=U(C(V),P(V))-\psi V \ .$$

Предполагая функцию H дифференцируемой по положительной переменной V, запишем для этой функции необходимое условие экстремума, приравняв нулю ее частную производную по V:

$$\frac{\partial H}{\partial V}=\frac{dU}{dV}-\psi=\frac{\partial U}{\partial C}C'(V)+\frac{\partial U}{\partial P}P'(V)-\psi=0 \text{ [9]}. \tag{5.6}$$

С учетом (5.2) – (5.3) для производной второго порядка функции H получаем место неравенство

$$\frac{\partial^2 H}{\partial V^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial C^2}C'^2+\frac{\partial U}{\partial C}C''+\frac{\partial^2 U}{\partial P^2}P'^2+\frac{\partial U}{\partial P}P''<0 \ ,$$

которое в соответствии с известным результатам из курса математического анализа свидетельствует о том, что решение уравнения (5.6) (оно является «подозрительным» на экстремальное) будет максимизировать функцию Гамильтона по переменной V.

Сопряженное уравнение в данном случае принимает вид

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial E}=0 \ .$$

---

[9] Из равенства (5.6), в частности, следует, что сопряженная переменная ψ в данной задаче выражает собой скорость U'_V изменения общественной функции полезности U в зависимости от темпа расходования энергии V.

Из этого уравнения находим оптимальное значение сопряженной переменной $\psi^*(t)=c$, где c – const, для всех $t\in[0,T]$. Для того чтобы определить константу c, следует воспользоваться условием трансверсальности на правом конце. В данном случае (см. разд. 4.5) оно имеет вид неравенства $\psi^*(T)\geqq 0$ и равенства $\psi^*(T)E(T)=0$. Из неравенства в силу $\psi^*(t)\equiv c$ следует

$$\psi^*(t)=c\geqq 0 \qquad \text{для всех } t\in[0,T].$$

Учитывая установленный результат, уравнение (5.6) теперь можно переписать так:

$$\frac{\partial U}{\partial C}C'(V)+\frac{\partial U}{\partial P}P'(V)=c.$$

В это уравнение переменная t не входит. Поэтому его решение, т.е. величина V, так же не должна зависеть от времени t. Следовательно, для оптимального значения темпа расходования энергии получаем $V(t)=V^*$ при всех $t\in[0,T]$, где V^* – некоторая положительная константа.

Полученное означает, что ***в рассматриваемой задаче оптимальный режим характеризуется постоянным темпом расходования энергии***.

При постоянном оптимальном значении $V(t)\equiv V^*$ нетрудно решить дифференциальное уравнение из (5.5) и найти соответствующее оптимальное значение фазовой переменной $E^*(t)=E_0-V^*t$, описывающей имеющееся количество энергии в момент времени t.

Поскольку участвующие в постановке задачи функции $U(C,P)$, $C(V)$ и $P(V)$ конкретно не заданы, то определить оптимальное значение V^* не представляется возможным. Остается лишь провести общий качественный анализ, используя условие неотрицательности запаса энергии $E^*(T)\geqq 0$ в конечный момент времени T. Из установленного ранее равенства $E^*(t)=E_0-V^*t$ при $t=T$ легко вывести, что в случае $E^*(T)=0$ (это соответствует полному расходу имеющейся энергии до заданного конечного момента времени T или в точности в этот момент) величина оптимального значения V^* темпа расходования энергии имеет вид

$$V^*=\frac{E_0}{T}.$$

Необходимо отметить, что полученный выше вывод о постоянстве оптимального значения темпа расходования энергии имеет место благодаря тому, что в целевом функционале под знаком интеграла (5.4) отсутствует дисконтирующий множитель (полезно сравнить полученный здесь результат с решением задачи из упр. 1, приведенного в конце данной главы).

5.2. Оптимальное использование энергии с учетом качества окружающей среды (двумерная модель)

5.2.1. Формирование основных зависимостей

Как и ранее, пусть $E = E(t)$ означает количество энергии определенного вида, $V = V(t)$ – темп (скорость) расходования этой энергии, а $P = P(t)$ – величина загрязнения в момент времени t, $0 \leq t \leq T$.

Использование энергии приводит к загрязнению окружающей среды. Будем считать, что скорость загрязнения прямо пропорциональна темпу расходования энергии:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha V, \qquad \alpha > 0 .$$

Через A обозначим уровень деятельности, направленной на охрану окружающей среды и будем считать, что этот уровень может прямо пропорционально снижать темп загрязнения, т.е.

$$\frac{dP}{dt} = -\beta A, \qquad \beta > 0 .$$

Примем, что в силу процессов самоочищения уровень загрязнения падает экспоненциально. Этот факт можно выразить в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dP}{dt} = -\delta P, \qquad \delta > 0 .$$

Теперь, учитывая одновременно все три перечисленные выше фактора (т.е. суммируя выписанные выше три дифференциальные уравнения[10]), влияющие на скорость загрязнения, приходим к следующему дифференциальному уравнению относительно функции P :

$$\frac{dP}{dt} = \alpha V - \beta A - \delta P, \qquad \alpha > 0, \beta > 0, \delta > 0 .$$

Перейдем к формированию второго уравнения для скорости изменения количества используемой энергии. Имеется равенство (5.1). Кроме того, ясно, что осуществление мер по охране окружающей среды, в свою очередь, также требует использования энергии. Предположим, что зависимость между величинами E' и A является прямо пропорциональной, т.е. $E' = -A$. Складывая это равенство с (5.1), при сохранении старых обозначений придем к дифференциальному уравнению

[10] Следует иметь в виду, что при этом на постоянный множитель 1/3 изменятся константы α, β, δ . Тем не менее, далее за новыми константами сохранены прежние обозначения.

$$\frac{dE}{dt} = -A - V \ ,$$

относительно функции E .

5.2.2. Задача оптимального управления

В качестве управляющих переменных здесь естественно выбрать V и A . Тогда P и E будут переменными состояния.

Как и в предыдущем разделе, введем *общественную функцию полезности* $U = U(C(V), P)$, обладающую свойствами

$$U'_C > 0, \ U'_P < 0, \ U''_{CC} < 0, \ U''_{PP} < 0, \ C' > 0, \ C'' < 0 \ ,$$

где величина $C(V)$ характеризует положительный фактор, связанный с использованием энергии. Качество управления будем оценивать величиной интегральной полезности

$$\int_0^T U(C(V(t)), P(t))dt \ . \qquad (5.7)$$

В итоге приходим к задаче оптимального управления с двумя фазовыми переменными P , E и двумя управляющими функциями V и A . Эта задача состоит в максимизации функционала (5.7) при условиях

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \alpha V - \beta A - \delta P, \\ \dfrac{dE}{dt} = -A - V, \end{cases}$$

$$P(0) = P_0 > 0, \qquad P(T) \geqq 0 \ , \qquad (5.8)$$

$$E(0) = E_0 > 0, \qquad E(T) \geqq 0 \ ,$$

$$V(t) > 0, \qquad 0 \leqq A(t) \leqq \hat{A} \ ; \qquad 0 \leqq t \leqq T \ ,$$

причем начальный и конечный моменты времени считаются фиксированными, а конечные значения $P(T)$ и $E(T)$ фазовых переменных – свободными. Последняя строка в (5.8) задает ограничения на изменение управляющих переменных. В соответствии с ней скорость V расходования энергии должна быть положительной, тогда как уровень деятельности, направленной на охрану окружающей среды, т.е. величина A, вместе с условием неотрицательности дополнительно не может превышать некоторого «порогового» фиксированного значения $\hat{A}$, которое диктуется имеющимися реальными возможностями.

5.2.3. Максимизация гамильтониана

Составим функцию Гамильтона (полагая $\psi_0^* = 1$):

$$H = U(C(V), P) + \psi_P(\alpha V - \beta A - \delta P) - \psi_E(A + V) .$$

Здесь через ψ_P и ψ_E обозначены сопряженные переменные, отвечающие дифференциальным уравнениям для величин P и E соответственно. Необходимое условие экстремума для функции Гамильтона записывается в виде уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial V} = U'_C C'(V) + \alpha\psi_P^* - \psi_E^* = 0 . \tag{5.9}$$

А так как $\partial^2 H / \partial V^2 = U''_{CC} C'^2 + U'_C C'' < 0$, то решение уравнения (5.9) соответствует максимальному возможному значению функции Гамильтона по переменной V.

Уравнение (5.9) можно переписать в форме

$$U'_C C'(V) = \psi_E^* - \alpha\psi_P^* . \tag{5.10}$$

Это равенство допускает следующую экономическую интерпретацию. Производную $\partial U / \partial V = U'_C C'(V)$, записанную в левой части (5.10), можно рассматривать как величину прироста полезности, отвечающей увеличению темпа расходования энергии на одну единицу. Сопряженная переменная ψ_E^* характеризует теневую цену использования энергетического ресурса, а член $-\alpha\psi_P^*$ связан с теневой ценой загрязнения окружающей среды. Тем самым, равенство (5.10) показывает, что величина прироста полезности складывается из двух указанных показателей теневых цен.

Из-за невозможности исследовать здесь все мыслимые варианты, ограничим последующее рассмотрение лишь интересным с точки зрения практики случаем, когда теневая цена загрязнения окружающей среды строго возрастает, т.е. примем

$$\frac{d\psi_P^*}{dt} > 0 , \qquad 0 \leqq t \leqq T . \tag{5.11}$$

Запишем условие максимума функции Гамильтона H по переменной A. Так как эта функция линейна относительно A, а сама эта переменная заключена в пределах от 0 до $\hat{A}$, то точка максимума A^* функции H по A будет зависеть от значения сопряженных переменных следующим образом:

$$A^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta\psi_P^* + \psi_E^* > 0, \\ \hat{A}, & \text{если } \beta\psi_P^* + \psi_E^* < 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

В (5.12) отсутствует возможность выполнения равенства $\beta\psi_P^* + \psi_E^* = 0$ Как будет показано в следующем разделе, это равенство действительно не может иметь места ни на каком временно́м промежутке $[t',t'']$ вида $[t',t''] \subset [0,T]$.

5.2.4. Исследование возможных значений оптимального уровня A^*

Согласно ограничениям из (5.8) значения переменной A должны быть заключены в пределах отрезка $[0,\hat{A}]$. Оптимальное значение A^* тоже должно принадлежать ему. В формуле (5.12), задающей A^*, фигурируют лишь граничные значения указанного отрезка. Убедимся в невозможности выполнения неравенств $0 < A^* < \hat{A}$ на произвольном временно́м промежутке $[t',t''] \subset [0,T]$. С этой целью запишем систему уравнений для сопряженных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_P^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial P} = -U_P' + \delta\psi_P^*, \\ \frac{d\psi_E^*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial E} = 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Для доказательства предположим противное: неравенства $0 < A^* < \hat{A}$ справедливы при $t' \leqq t \leqq t''$. Согласно (5.12) это возможно лишь при условии равенства $\beta\psi_P^* + \psi_E^* = 0$ для всех $t \in [t',t'']$. Отсюда вместе с равенством $\psi_E^* = \text{const}$, вытекающим из второго уравнения (5.13), следует равенство $\psi_P^*(t) = \text{const}$ для всех $t \in [t',t'']$. Следовательно, $d\psi_P^* / dt = 0$ для всех $t \in [t',t'']$, что противоречит неравенству из (5.11). Полученное противоречие завершает доказательство невозможности выполнения неравенства $0 < A^* < \hat{A}$ для всех $t \in [t',t'']$.

Таким образом, на любом временно́м промежутке $[t',t'']$ могут оказаться выполненными лишь две возможности $A^* = 0$ или $A^* = \hat{A}$. Следовательно, промежуточные между ними значения величина A^* может принимать только в отдельные фиксированные моменты времени. А так как значение управляющей переменной A в отдельно взятый момент времени по существу никак не влияет на качество процесса управления, то всегда можно считать, что величина A^* ни в какой момент времени не принимает значения, промежуточные между граничными значениями 0 и $\hat{A}$.

5.2.5. Выводы на основе принципа максимума

В соответствии с полученным результатом существуют только два (крайних) значения, которые может принимать оптимальное значение переменной A, указывающей уровень деятельности, направленной на охрану окружающий среды. Нулевое значение $A^* = 0$ соответствует ситуации, когда не осуществляется никаких мер по охране окружающей среды, тогда как в случае $A^* = \hat{A}$ принимаемые меры таковы, что загрязнение снижается с наибольшей возможной скоростью.

Перепишем равенство (5.12) следующим образом:

$$A^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_E^* > -\beta\psi_P^*, \\ \hat{A}, & \text{если } \psi_E^* < -\beta\psi_P^*. \end{cases}$$

Согласно первой строке этого равенства, если являющейся постоянной теневая цена использования энергетического ресурса превышает выражение $-\beta\psi_P^*$, характеризующее величину цены загрязнения (т.е. цена ψ_E^* является достаточно высокой), то нет смысла дорогостоящий источник энергии тратить на охрану окружающей среды (т.е. следует принять $A^* = 0$), поскольку проигрыш в использовании энергии будет больше, чем выигрыш от охраны среды. В противном случае (этому положению отвечает вторая строка последнего равенства) следует использовать максимум энергетических возможностей для охраны окружающей среды, что соответствует выполнению равенства $A^* = \hat{A}$.

Рассмотрим случай $A^* = 0$ более подробно. С этой целью продифференцируем равенство (5.10) по переменной t:

$$(U''_{CC}C'^2 + U'_C C'')V' = -\alpha\frac{d\psi_P}{dt}.$$

Благодаря неравенству (5.11) и предположенным выше свойствам функции U отсюда следует неравенство $V'(t) > 0$ при всех $t \in [0, T]$, что соответствует постоянному росту темпа использования энергии. В свою очередь, постоянный рост темпа использования энергии ведет к истощению энергетического ресурса. Из второго уравнения (5.13) следует, что $\psi_E^* - \mathrm{const}$, причем эта константа должна быть положительной, так как переменная ψ_E^* означает теневую цену используемых энергетических ресурсов. Неравенство

$\psi^*_E(T) > 0$ вместе с условием трансверсальности $E(T)\,\psi^*_E(T) = 0$ приводит к равенству $E(T) = 0$, показывающему, что в конечный момент времени запасы энергии должны полностью закончиться. Аналогично из второго соотношения условия трансверсальности $P(T)\,\psi^*_P(T) = 0$ в силу $P(T) > 0$ приходим к равенству $\psi^*_P(T) = 0$, означающему, что в конечный момент времени теневая цена загрязнения равна нулю.

Перейдем к анализу второй возможности, когда $A^* = \hat{A}$. Благодаря (5.11) функция $\psi^*_P(t)$ является строго возрастающей. На основании этого и условия $\psi^*_E - \text{const}$ из (5.12) получаем, что наступит определенный момент времени, когда вместо неравенства $\beta\psi^*_P + \psi^*_E > 0$ окажется выполненным неравенство $\beta\psi^*_P + \psi^*_E < 0$. В этом случае уровень загрязнения P достигнет некоторой относительно небольшой величины и дальнейшее применение мер по охране среды станет невыгодным. Остальная часть процесса будет такой же, как и в случае $A^* = 0$.

В итоге получаем следующую картину оптимального процесса. **Если с самого начала уровень загрязнения относительно невелик, то никаких мер по охране окружающей среды применять не надо. При этом темп расходования энергии таков, что к концу периода управления энергия оказывается полностью израсходованной. В случае, когда уровень загрязнения значительный, необходимо сразу принимать самые действенные меры по охране окружающей среды до тех пор, пока уровень загрязнения не снизится значительно. После этого до конца периода управления никаких мер по охране окружающей среды не предусматривается.**

5.3. Односекторная модель оптимального экономического роста

5.3.1. Описание модели

Вернемся к изучению поведения односекторной экономической системы, описанной в главе 2 на основе модели Солоу:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k), \quad \lambda = \mu + \nu, \quad k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}, \qquad (2.3)$$
$$x = f(k), \quad i = \rho f(k), \quad c = (1-\rho) f(k),$$

где

$k = K/L$ – фондовооруженность, K фонды, L – труд (число занятых);

$x = X/L$ – народнохозяйственная производительность труда,

X - валовой внутренний продукт (ВВП);

$i = I/L$ – удельные инвестиции (на одного занятого); I - инвестиции;

$c = C/L$ – среднедушевое (удельное) потребление (на одного занятого);

C - фонд непроизводственного потребления;

ν – годовой темп прироста числа занятых;

ρ – норма накопления;

μ – доля выбывших за год основных производственных фондов.

Эта модель была рассмотрена при условии постоянства нормы накопления: $\rho - \mathrm{const}$. Следуя [6], откажемся от этого условия и сформулируем задачу рационального ведения хозяйства, исследование которой проведем с помощью принципа максимума Понтрягина.

Итак, будем считать, что $\rho \neq \mathrm{const}$. Из последнего равенства в (2.3) выразим $\rho f(k) = f(k) - c$ и первое из уравнений (2.3) перепишем в виде

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - (\mu + \nu)k - c, \quad k(0) = k_0 .$$

Полученное уравнение управляемой системы будет основой дальнейшего рассмотрения.

5.3.2. Постановка задачи оптимального управления

В качестве управляющей функции выберем удельное потребление c. Допустимым управлением будем считать произвольную кусочно-непрерывную функцию $c = c(t)$, удовлетворяющую неравенствам

$$0 < c_* \leqq c(t) \leqq f(k(t)) \qquad \text{при всех } t \geqq 0, \tag{5.14}$$

где c_* – нижняя предельно допустимая граница удельного потребления.

Задача управляющего органа экономической системы – так управлять системой с помощью налогово-кредитной политики или директив, меняя $c(t)$, чтобы за длительный интервал времени дисконтированная полезность от потребления была бы наибольшей, т.е.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} u(c(t))dt \to \max, \tag{5.15}$$

где δ – положительный параметр дисконтирования, с помощью которого будущие полезности приводятся к настоящему времени (исходя из того, что ближайшее во времени потребление важнее отдаленного); $u = u(c)$ – функция полезности потребления. Относительно функции полезности обычно считается, что она является положительной, строго возрастающей функцией и удовлетворяющей условию $u(0)=0$. В целях упрощения последующего изложения примем, что полезность прямо пропорциональна удельному потреблению, т.е.

$$u(c)=\alpha c\,, \qquad \alpha>0,\quad \alpha-\mathrm{const}\,.$$

С математической точки зрения задача об оптимальном росте для односекторной замкнутой экономической системы с бесконечным горизонтом управления и положительной нормой дисконтирования заключается в максимизации интегрального функционала

$$I(c)=\alpha\int_0^{+\infty}e^{-\delta t}c(t)dt \tag{5.16}$$

при условиях

$$\frac{dk}{dt}=f(k)-\lambda k-c(t),\quad k(0)=k_0\,, \tag{5.17}$$

$$0<c_*\leqq c(t)\leqq f(k(t))\,,\ \ k(t)\geqq 0 \qquad \text{для всех } t\geqq 0\,,$$

где $\lambda=\mu+\nu$.

В этой задаче оптимального управления единственной фазовой переменной является фондовооруженность $k=k(t)$, единственной управляющей функцией – удельное потребление $c=c(t)$, а целевым функционалом служит интеграл благосостояния (5.16). Правый конец траектории $k=k(t)$ (при $t\to+\infty$) не фиксирован, но подчиняется требованию $\lim\limits_{t\to+\infty}k(t)\geqq 0$. Решением задачи является оптимальный процесс $k^*(t), c^*(t)$, при котором благосостояние принимает наибольшее возможное значение.

5.3.3. Применение принципа максимума

Вместо исходной сопряженной переменной $\psi_1(t)$ введем новую $\psi(t)=e^{\delta t}\psi_1$ и запишем для нее гамильтониан (в предположении $\psi_0^*=1$):

$$H=e^{-\delta t}\left\{\alpha c+\psi\,[f(k)-\lambda k-c]\right\}. \tag{5.18}$$

Исходя из (5.18), новую сопряженную переменную ψ можно интерпретировать как теневую цену (приростных) фондов. Выражение в фигурных скобках (5.18) представляет собой полезность конечного удельного выпуска, поскольку αc – полезность части, которая идет на непроизводственное потребление, а $\psi\,[f(k)-\lambda k-c]$ – полезность части, используемой на расширение фондов. Умножением на дисконтирующий множитель $e^{-\delta t}$ указанная полезность приведена к настоящему моменту времени.

Запишем дифференциальное уравнение для сопряженной переменной:

$$\frac{d\psi_1}{dt}=\frac{d}{dt}\left(e^{-\delta t}\psi\right)=-\frac{\partial H}{\partial k}.$$

После почленного дифференцирования и последующего упрощения оно примет вид

$$\frac{d\psi}{dt}=[(\lambda+\delta)-f'(k)]\psi .$$

Перепишем это уравнение вместе с исходным дифференциальным уравнением в виде системы

$$\begin{aligned}&\frac{dk}{dt}=f(k)-\lambda k-c,\quad k(0)=k_0,\\&\frac{d\psi}{dt}=[(\lambda+\delta)-f'(k)]\psi.\end{aligned}\qquad(5.19)$$

Напомним, что функция f аргумента k подчинена условиям $f'>0,\ f''<0$, означающим, что она сама строго возрастает, а ее производная строго убывает для всех неотрицательных k. Согласно равенству $f(0)=0$ график функции f начинается в начале координат. Дополнительно предположим, что $\lim\limits_{k\to+0}f'(k)=+\infty$ и $\lim\limits_{k\to+\infty}f'(k)=0$.

Обратимся к системе дифференциальных уравнений (5.19). У нее существует стационарное решение $k(t)\equiv k^*-\text{const},\ c(t)\equiv c^*-\text{const}$ (для него $dk^*/dt=dc^*/dt\equiv 0$). Оно находится приравниванием нулю правых частей этих уравнений:

$$f'(k^*)=\lambda+\delta,\quad c^*=f(k^*)-\lambda k^*.\qquad(5.20)$$

Установим существование и единственность констант c^* и k^* (а тем самым, и стационарного режима), удовлетворяющих (5.20). Согласно равенству $f(0)=0$ график функции f начинается в начале координат. Кроме того, выше было предположено, что $f''<0$, $\lim\limits_{k\to+0}f'(k)=+\infty$ и $\lim\limits_{k\to+\infty}f'(k)=0$ Поэтому производная f' при изменении k от нуля до бесконечности непрерывно уменьшается от $+\infty$ до нуля. Следовательно, найдется (и притом единственное) положительное число $k=k^*$, при котором эта производная в точности примет положительное значение $\lambda+\delta$, причем

$$(\lambda+\delta)-f'(k)>0 \text{ при } k<k^*;$$

$$(\lambda+\delta)-f'(k)<0 \text{ при } k>k^*.\qquad(5.21)$$

Таким образом, первое равенство в (5.20) (для заданного фиксированного $\delta > 0$) выполняется. После этого число c^* на основании указанного k^* можно однозначно найти в соответствии со вторым равенством в (5.20). При этом благодаря неравенству $f'(k^*) = \lambda + \delta > \lambda = (\lambda k)'\big|_{k=k^*}$ между угловыми коэффициентами касательной к графику функции $y = f(k)$ в точке $k = k^*$ и прямой $y = \lambda k$ будет выполнено $f(k^*) > \lambda k^*$. Поэтому число c^* будет удовлетворять неравенству $0 < c^* < f(k^*)$.

Найденным значениям констант c^* и k^* соответствует единственная так называемая *траектория сбалансированного роста* (*стационарный режим*). Эта траектория с экономической точки зрения является очень привлекательной; она отвечает ситуации, когда осуществляется воспроизводство, позволяющее при постоянном удельном потреблении поддерживать фондовооруженность на стационарном уровне $k = k^*$. Далее число c_* будем считать настолько малым, что $c_* < c^*$.

Перепишем гамильтониан (5.18) в форме

$$H = e^{-\delta t}\left\{(\alpha - \psi)c + \psi[f(k) - \lambda k]\right\}.$$

Поскольку он линейно зависит от c, то его максимум по c определяется знаком выражения $(\alpha - \psi)$ и в силу неравенств (5.14) достигается при следующем релейном законе изменении удельного потребления

$$c^*(t) = \begin{cases} c_*, & \psi^*(t) > \alpha, \\ f(k(t)), & \psi^*(t) < \alpha. \end{cases} \tag{5.22}$$

Условие трансверсальности на правом конце траектории в данном случае имеет вид $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi_1^*(t) k^*(t) = 0$.

5.3.4. Построение интегральных кривых уравнения (5.17)

Изучим характер интегральных кривых исходного дифференциального уравнения (5.17) в зависимости от начального условия $k(0)$ в двух случаях: при $c(t) \equiv c_*$ и $c(t) = f(k(t))$. Напомним, что используемое ниже значение фондовооруженности k^* было введено выше и определяется первым равенством (5.20).

1) Пусть $c(t) \equiv c_*$. В этом случае уравнение (5.17) перепишется следующим образом

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \lambda k - c_*, \quad k(0) = k_0. \tag{5.23}$$

Положение равновесия $k(t) \equiv \text{const}$ (для него $dk/dt = 0$) этого уравнения находится приравниванием нулю правой части указанного дифференциального уравнения, т.е. из условия

$$f(k) - \lambda k = c_* . \qquad (5.24)$$

Будем считать, что уравнение (5.24) имеет ровно два положительных корня $k_1 = k_{\min}$ и $k_2 = k_{\max}$ (а значит, и две стационарные траектории $k(t) \equiv k_{\min}$ и $k(t) \equiv k_{\max}$)[11]. Нетрудно видеть (см. рис. 5.1), что до первого корня $k_{\min}$ выражение $f(k) - \lambda k - c_*$ отрицательно, после первого до второго корня $k_{\max}$ – положительно и далее, после второго корня, – вновь отрицательно. Кроме того, очевидно, выполняется $k_{\min} < k^* < k_{\max}$.

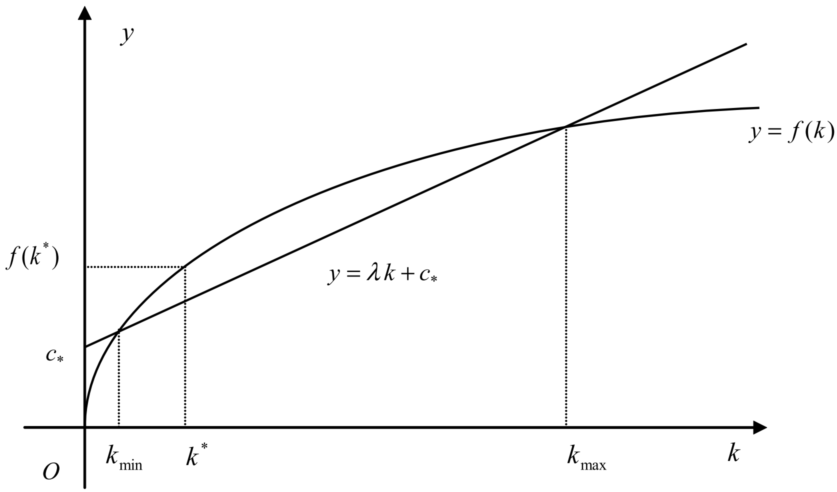

Рис.5.1. Два корня уравнения $f(k) - \lambda k - c_* = 0$

Решения дифференциального уравнения (5.23) имеют различный вид в случаях $0 < k_0 < k_{\min}$, $k_{\min} < k < k_{\max}$ и $k > k_{\max}$.

Так, если выполнено неравенство $0 < k_0 < k_{\min}$, то правая часть уравнения (5.23) отрицательна. Отрицательность левой части этого уравнения, т.е. производной ${dk}/{dt}$, влечет строгое убывание фондовооруженности $k = k(t)$ со временем. Продифференцируем уравнение (5.17)

$$k'' = f'(k)k' - \lambda k' = (f'(k) - \lambda)k'$$

[11] Тем самым, случаи, когда корней нет, либо он единственный, исключены из дальнейшего рассмотрения. Подобные случаи могут возникнуть тогда, когда число c_* не является достаточно малым; они не представляют особого интереса.

и, воспользовавшись тем же уравнением (5.17), получим следующее представление для производной второго порядка

$$k'' = (f'(k) - \lambda)(f(k) - \lambda k - c_*) . \qquad (5.25)$$

В данном случае $k_0 < k_{\min}$, а значит $f'(k) - \lambda > 0$ и $f(k) - \lambda k - c_* < 0$. Отсюда на основании (5.25) следует $k'' < 0$, что свидетельствует о строгой вогнутости интегральной кривой $k(t)$.

Если $k_{\min} < k_0 < k_{\max}$, то благодаря положительности правой части уравнения (5.23) его решение $k(t)$ строго возрастает, асимптотически приближаясь к значению $k = k_{\max}$. При этом анализ знака производной второго порядка (5.25) на основе рис. 5.1 показывает, что при увеличении t эта производная сначала положительна, затем в некоторой точке обращается в нуль, после чего становится отрицательной и далее знака не меняет. Отсюда можно сделать вывод о том, что при увеличении t в определенный момент (при $f'(k) = \lambda$) строгая выпуклость функции $k(t)$ сменяется на строгую вогнутость.

При $k_0 > k_{\max}$ правая часть уравнения (5.23) отрицательна. Отрицательность левой части этого уравнения влечет убывание фондовооруженности со временем и ее стремление ко второму стационарному значению $k_{\max}$. Заметим, что в данном случае $k'' > 0$, что свидетельствует о строгой выпуклости рассматриваемого семейства интегральных кривых.

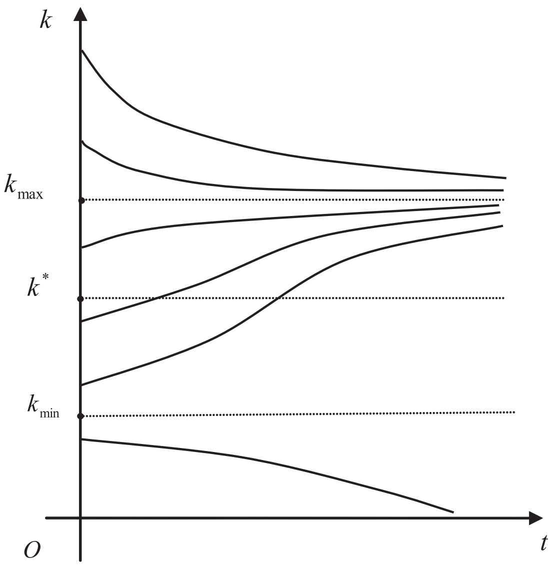

Рис. 5.2. Вид интегральных кривых при $c(t) \equiv c_*$.

2) Теперь пусть $c(t) = f(k(t))$. В этом случае на потребление работают все фонды (нет ни расширения, ни даже восстановления фондов). Уравнение (5.17) тогда принимает вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda\, k, \quad k(0) = k_0$$

и его решение легко находится интегрированием: $k(t) = k_0 e^{-\lambda t}$. В этом случае независимо от начальной точки k_0 фондовооруженность $k(t)$ со временем снижается экспоненциально, асимптотически приближаясь к нулевому уровню (см. рис. 5.3).

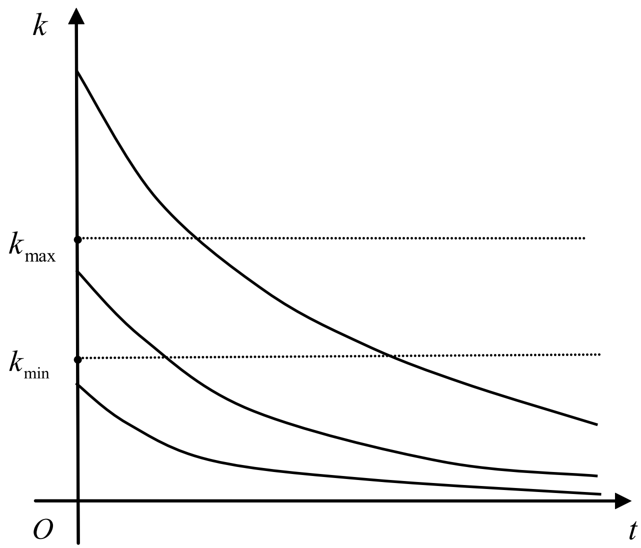

Рис. 5.3. Вид интегральных кривых при $c(t) = f(k(t))$.

5.3.5. Изучение экстремалей Понтрягина

Выше было отмечено, что с экономической точки зрения наибольший интерес представляет траектория сбалансированного роста, соответствующая $k(t) \equiv k^*, c(t) \equiv c^*$. Если в начальный момент времени выполнено $k_0 = k(0) = k^*$, то, применяя управление $c^*(t) \equiv c^*$, получим при всех $t \geq 0$ стационарный режим, отвечающий траектории сбалансированного роста. Если же $k_0 \neq k^*$, то стационарный режим в результате осуществления процесса управления может быть достигнут лишь по прошествии какого времени, либо вообще никогда не осуществится. Чтобы не усложнять последующее рассмотрение, ограничим его классом только таких экстремалей Понтрягина, которые в какой-то конечный момент времени выводят систему на траекторию сбалансированного роста.

1) Пусть $k_0 < k_{\min}$. В этом случае, как видно из рис. 5.2 и 5.3, применение как управления $c(t) \equiv c_*$, так и управления $c(t) = f(k(t))$ ведет к уменьшению фондовооруженности, что исключает достижение траектории сбалансированного роста в какой-либо последующий момент времени.

2) Пусть $k_{\min} < k_0 < k^*$. При таком начальном условии повысить значение фондовооруженности с k_0 до k^* можно лишь в результате использования управления $c^*(t) \equiv c_*$. Так как $k_{\min} < k^* < k_{\max}$, то найдется такой момент времени $t_1 > 0$, при котором окажется выполненным равенство $k(t_1) = k^*$, т.е. в этот момент система выйдет на траекторию сбалансированного роста. Далее чтобы остаться на указанной траектории для всех последующих $t > t_1$ следует применять управление $c^*(t) \equiv c^* - \mathrm{const}$, отвечающее стационарному режиму.

Отметим здесь также следующее. Если в момент $t = t_1$ не сделать переключение с управления $c^*(t) \equiv c_*$ на $c^*(t) \equiv c^*$, то далее фондовооруженность будет принимать значения в промежутке между k^* и $k_{\max}$ и последующее переключение в какой-то момент времени $t' > t_1$ на управление $c(t) = f(k(t))$ уже не в состоянии вывести систему на траекторию сбалансированного роста. В самом деле, если в момент t' было бы осуществлено переключение управления, то непрерывная сопряженная переменная $\psi^*(t)$ в момент $t = t'$ перешла бы значение, равное α. При $k^* < k < k_{\max}$ в силу (5.21) и второго уравнения (5.19) сопряженная переменная строго убывает, поэтому ее значение в тот момент, когда траектория приблизится к уровню $k = k^*$ будет строго меньше α, а значит благодаря (5.22) переключения управления при $t = t'$ быть не должно. Оно возможно лишь по прошествии некоторого времени после пересечения интегральной кривой стационарного уровня $k = k^*$, когда $k_{\min} < k < k^*$ и сопряженная переменная строго возрастает. Аналогично рассуждая и далее, можно прийти к выводу о невозможности перехода на стационарный уровень ни в какой другой последующий момент времени $t > t_1$.

3) Пусть $k_0 > k^*$. В этом случае как при $k^* < k_0 < k_{\max}$, так и при $k_0 > k_{\max}$ для выхода на траекторию сбалансированного роста необходимо применить управление $c^*(t) = f(k(t))$. Это следует из того, что управление $c(t) \equiv c_*$ без последующего переключения не способно привести к достижению стационарного уровня $k = k^*$, а при последующем использовании переключения значение целевого функционала (5.6), очевидно, будет меньше, нежели тогда, когда сразу «включается» максимально возможное управление

$c^*(t) = f(k(t))$ Далее, после того система достигнет уровня $k = k^*$, до конца периода управления используется стационарное управление $c^*(t) \equiv c^*$.

Нетрудно понять, что благодаря постоянству с некоторого момента времени указанных функций $\psi^*(t)$ и $k^*(t)$, отвечающих экстремали Понтрягина, условие трансверсальности $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\delta t}\psi^*(t)k^*(t) = 0$ выполняется.

На рис. 5.4 изображены экстремальные траектории фондовооруженности для тех двух случаев, в которых установлена возможность выхода системы на траекторию сбалансированного роста.

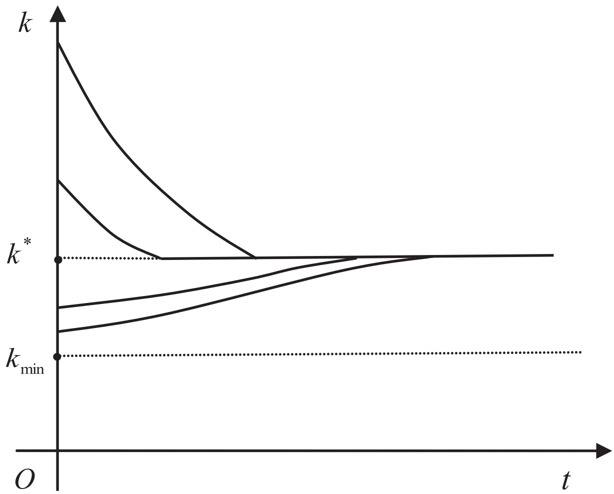

Рис. 5.4. Экстремальные траектории фондовооруженности.

5.3.5. Характер оптимального процесса управления

При $k_{\min} < k_0 < k^*$ сначала используется управление $c^*(t) = c_*$ и фондовооруженность непрерывно растет за счет того, что удельное потребление удерживается на предельно низком уровне c_*. Как только в некоторый момент времени фондовооруженность достигает стационарного значения k^*, определяемого равенством $f'(k^*) = \lambda + \delta$, система переключается на траекторию сбалансированного роста (переходит в стационарный режим) и остается на ней на протяжении всего остального периода времени. В стационарном режиме благодаря применению управления $c^*(t) \equiv c^* - \text{const}$ имеет место воспроизводство, позволяющее поддерживать фондовооруженность на постоянном уровне k^*; при этом удельное потребление неизменно и составляет $f(k^*)-\lambda k^*$.

Если $k_0 > k^*$, то на первом этапе закон управления имеет вид $c^*(t)=f(k(t))$ т.е. в фонды не поступает никаких вложений и фондовооруженность экспоненциально сокращается (за счет износа и увеличения числа занятых) по закону $k^*(t)=k_0 e^{-\lambda t}$, $\lambda=\mu+\nu$. Потребление также сокращается по закону $c^*(t)=f(k_0 e^{-\lambda t})$ пока фондовооруженность не достигнет в какой-то момент времени стационарного значения k^*, после чего на втором этапе система входит в стационарный режим и остается в нем неограниченно долго.

Во всех остальных случаях стационарный режим не достигается.

Выводы

Принцип максимума может быть успешно использован при решении различных экономических задач, в которых участвуют переменные, зависящие от времени. В частности, это задача об оптимальном использовании энергии с учетом качества окружающей среды и задача оптимального экономического роста.

Следует отметить, что в некоторых случаях для получения нетривиальных результатов могут потребоваться определенные математические усилия.

Основные понятия

Оптимальное использование энергии с учетом качества окружающей среды, односекторная модель оптимального экономического роста, траектория сбалансированного роста.

Контрольные вопросы

1. Объясните, что такое общественная функция полезности. Какими свойствами она обладает?
2. Сформулируйте одномерную задачу наилучшего использования энергии в виде задачи оптимального управления. Сколько в этой задаче фазовых и сколько управляющих переменных? Назовите эти переменные.
3. Какие экономические выводы можно сделать в результате анализа задачи наилучшего использования энергии?
4. Сформулируйте двумерную задачу наилучшего использования энергии в виде задачи оптимального управления.
5. Как выглядит функция Гамильтона для двумерной задачи оптимального управления?

6. Запишите сопряженную систему для двумерной задачи оптимального управления.
7. Опишите характер оптимального процесса в двумерной задаче оптимального управления.
8. Сформулируйте задачу оптимального экономического роста односекторной модели экономики. Назовите управляющие и фазовые переменные.
9. Как выглядит функционал Гамильтона для сформулированной задачи оптимального экономического роста односекторной модели экономики?
10. Запишите дифференциальное уравнение для сопряженной переменной.
11. Какой вид имеет управление, соответствующее экстремали Понтрягина?
12. Как выглядит при различных начальных условиях экстремаль Понтрягина, когда имеет место сходимость к стационарному режиму? Прокомментируйте характер изменения этой траектории.

Упражнения

1. Рассмотрите новый целевой функционал в одномерной задаче наилучшего использования энергии (с дисконтирующим множителем):

$$I(V)=\int_0^T U(C(V(t)),P(V(t)))e^{-\delta t}\,dt$$

Для этого случая

a) выпишите новый функционал Гамильтона и соответствующий ему вариант принципа максимума;
b) найдите оптимальное значение сопряженной переменной;
c) ответьте на вопрос: будет ли постоянной в этом случае оптимальное значение расходования энергии E^* ?
d) вычислите производную dV/dt. Что можно сказать о характере изменения функции $V^*(t)$?

2. Как изменится оптимальное решение в двумерной задаче наилучшего использования энергии, если управляющая переменная A будем подчинена лишь условию $A \geq 0$?

3. Рассмотрите новый целевой функционал в двумерной задаче наилучшего использования энергии, который содержит дисконтирующий множитель. Для этого случая выпишите новый функционал Гамильтона и соответствующий вариант принципа максимума.

4. Для задачи об оптимальном экономическом росте односекторной экономики постройте графики оптимальных траекторий удельного потребления.

5. В рамках задачи об оптимальном экономическом росте односекторной экономики ответьте на вопрос: при каких условиях снижение нормы накопления приводит к длительному снижению потребления в расчете на одного занятого?

Темы курсовых работ

1. Задачи оптимизации на основе модели Рамсея.
2. Модель смены технологического уклада.
3. Трехсекторная модель экономики.
4. Применение вариационного исчисления при решении экономических задач.
5. Оптимальное управление и вариационное исчисление: общие черты и различие двух теорий.
6. Задача о расширенном воспроизводстве.

Литература

1. Алексеев В.В., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984.
2. Алексеев В.В., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. Линейная теория. – М.: Высшая школа, 2001.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
5. Замков О.О., Толстопятенко Ф.И., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 1997.
6. Колемаев В.А. Математическая экономика. – М.: ЮНИТИ, 1998.
7. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1983.
8. Кротов В.Ф. (ред.) Основы теории оптимального управления. – М.: Высшая школа, 1990.
9. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления. – СПб: Изд-во СПб ун-та, 2003.
10. Ногин В.Д. и др. Основы теории оптимизации. – М.: Высшая школа, 1988.
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969.
12. Chiang A.C. Elements of dynamic optimization. – New-York-London-Paris-Tokyo-Toronto: McGraw-Hill Inc., 1992.

Ногин В.Д.

Введение в оптимальное управление

Учебно-методическое пособие

Рецензенты: *Н.А. Зенкевич*, к. ф.-м. н., доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ
Ю.И. Рейнов, к.т.н., доцент кафедры математики СПб филиала ГУ-ВШЭ

Тех. редактор *Н. З. Петросян*

Верстка *Е. Е. Свежинцев*

Издательство «Ютас»
190008, Санкт-Петербург, ул. Рощинская, д. 36,
тел. (812) 388-03-21;
e-mail: 3880321@mail.ru

Подписано в печать 24.12.2008. Формат 60x88/16
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Объем: 5,75 печ. л.
Тираж 150. Заказ № 502.

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии ООО «Ютас»
190008, Санкт-Петербург, ул. Рощинская, д. 36
тел./факс (812) 388-03-21; e-mail: 3880321@mail.ru

ISBN 978-5-91185-068-5

9 785911 850685 >