**ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ-
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ**

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ФИЛИАЛ

В.Д. Ногин

Принятие решений при многих критериях

Учебно-методическое пособие

*Санкт-Петербург
2007*

УДК 658.012.41

В.Д. Ногин.
Принятие решений при многих критериях. Учебно-методическое пособие.– СПб. Издательство «ЮТАС», 2007. – 104 с.

ISBN 978-5-91185-018-4

Рецензенты:
Н.А. Зенкевич, к.ф-м.н., доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ
А.С. Рыбакин, к.т.н., доцент кафедры математики СПБ ф ГУ-ВШЭ

Изучаются вопросы выбора наилучших решений при различных обстоятельствах. Пособие содержит три части и посвящено общим вопросам принятия решений при наличии нескольких критериев: формулируется и обосновывается принцип Эджворта-Парето, приводятся элементы теории относительной важности критериев, дается представление о методе анализа иерархий и целевом программировании.

Изложение математических результатов иллюстрируется примерами из различных областей экономики.

Предназначено для студентов, обучающихся по экономическим специальностям.

Для студентов и слушателей программ высшего профессионального образования.

Рекомендовано к печати Учебно-методическим советом СПб филиала ГУ-ВШЭ.

ISBN 978-5-91185-018-4

Оглавление

Предисловие

Издавна экономика стремилась стать математической, поскольку математика является образцом строгости для любой науки. По этому поводу еще великий Леонардо да Винчи написал: «Ни одно человеческое исследование не может называться истинной наукой, если оно не прошло через математическое доказательство».

Математические методы при исследовании различных экономических явлений и процессов стали использоваться уже в девятнадцатом веке. Здесь уместно упомянуть блистательные имена Антуана Курно, Леона Вальраса, Френсиса Эджворта и Вильфредо Парето. Именно эти замечательные ученые воздвигли величественное здание общей теории равновесия, которая в период Второй мировой войны достигла своей кульминации в книгах Дж. Хикса и П. Самуэльсона.

В двадцатом веке, когда учеными был осознан тот факт, что экономическими процессами можно научиться управлять, в экономику прочно вошло понятие оптимальности. Оптимальность связывается с осуществлением наилучшего выбора (достижением желаемой цели) при ограниченных возможностях. Развитию и внедрению понятия оптимальности в экономике немало способствовало появление таких разделов математики, как линейное, нелинейное и динамическое программирование.

С 1969 года стала вручаться Нобелевская премия в области экономики. Среди Нобелевских лауреатов имеется немало профессиональных математиков или же экономистов, получивших блестящее математическое образование. В этой связи следует напомнить имя нашего соотечественника, математика Л.В. Канторовича, который стоял у истоков зарождения линейного программирования и его широкого применения в плановой экономике. Он стал Нобелевским лауреатом совместно с американским экономистом Т. Купмансом в 1975 году.

В том же двадцатом веке в практике экономического анализа стали использовать теорию принятия решений. В указанных направлениях были достигнуты значительные успехи. Здесь, кроме уже упоминавшихся Нобелевских лауреатов П. Самуэльсона, Л.В. Канторовича и Т. Купманса, назовем также имена других Нобелевских лауреатов, работы которых связаны с выбором оптимальных решений – К. Эрроу, Ж. Дебрё и А. Сен.

Предлагаемое пособие посвящено изложению принципиальных основ теории принятия решений, когда допустимые решения оцениваются одновременно по нескольким показателям (критериям). Многокритериальность является неотъемлемой чертой большинства реальных задач выбора и требует специальных методов анализа. Здесь не только представлен, но и аксиоматически обоснован известный принцип Эджворта – Парето, согласно которому наилучшие решения следует выбирать среди парето-оптимальных решений. В дополнение к принципу Эджворта – Парето изучаются основные свойства множества Парето, играющего важную роль в принятии решений. Далее излагаются элементы теории относительной важности критериев, получившей признание как в нашей стране, так и за ее рубежами. Приводится определение относительной важности критериев, которое имеет простую и ясную логическую основу. Показывается, каким образом информацию об относительной важности критериев следует использовать на практике для осуществления наилучшего выбора. Кроме того, дается представление о популярных на Западе целевом программировании и методе анализа иерархий, широко используемых в экономической практике.

Каждая глава заканчивается сводкой выводов, основных понятий, контрольных вопросов и упражнений по данной главе. Знак □ используется для указания начала доказательства, а ■ для обозначения его конца.

У читателя предполагается наличие определенного математического уровня, хотя для понимания и усвоения материала книги вполне достаточно владения стандартным курсом математики обычного вуза.

Глава 1. Начальные понятия многокритериального выбора

Предметом теории принятия решений являются такие задачи наилучшего выбора, когда имеется несколько возможностей и человек волен выбрать из них любую, наиболее ему подходящую. Такого рода задачи часто встречаются в экономике. Эта теория учит осуществлять выбор обоснованно, эффективно используя имеющуюся в наличии информацию о целях и предпочтениях. Кроме того, она помогает избежать принятия заведомо негодных решений и учесть возможные отрицательные последствия непродуманного выбора.

1.1. Задача многокритериального выбора

1.1.1. Множество возможных и множество выбираемых решений

Человек в своей деятельности часто сталкивается с ситуациями, в которых ему приходится осуществлять выбор. Например, руководители различных уровней и рангов вынуждены заниматься формированием персонала, возглавляемых ими подразделений, выбирать ту или иную стратегическую линию поведения, принимать конкретные хозяйственные и экономические решения. Специалисты в самых различных областях науки и техники, занимающиеся разработкой всевозможных устройств и приспособлений, проектированием тех или иных сооружений, конструированием новых моделей и типов автомобилей, самолетов и т.п. так же всякий раз стремятся выбрать наилучшее инженерное, конструкторское или проектное решение. Работники банков выбирают объекты для инвестирования, экономисты предприятий и фирм планируют оптимальную экономическую программу и т.д. и т.п.

Приведенный список задач выбора можно было бы продолжать и дальше. Ограничимся сказанным и выявим общие элементы, присущие всякой задаче выбора.

Прежде всего, должен быть определен и описан набор решений, из которого следует осуществлять выбор. Обозначим его символом X и будем называть *множеством возможных* (или *допустимых*) *решений*. Нередко вместо понятия *решение* используют также термины *альтернатива*, *вариант*, *план, стратегия* и т.п. Минимальное число элементов указанного множества – два (для того, чтобы действительно был выбор). Ограничений сверху на количество возможных решений нет. Оно может быть как конечным, так и бесконечным. При этом природа самих решений в рамках теории принятия решений не имеет никакого значения. Это могут быть проектные решения, варианты или сценарии поведения, политические или экономические стратегии, краткосрочные или перспективные планы, прогнозы развития и т.п.

Выбор решения состоит в указании среди допустимых такого решения, которое объявляется выбранным (наилучшим). Следует заметить, что нередко происходит выбор не одного, а целого набора решений, являющегося определенным подмножеством множества возможных решений X. Простейший тому пример, – когда требуется выбрать несколько человек, претендующих на замещение определенного числа вакантных должностей.

Принципиальная сложность задач выбора при многих критериях заключается в невозможности априорного определения того, что называть наилучшим решением. Каждое лицо, принимающее решение, имеет право вкладывать свой смысл в это понятие. Более того, небольшое изменение обстоятельств, при которых осуществляется выбор, может привести к изменению смысла наилучшего решения. Понятие наилучшего решения зависит от чрезвычайно большого числа параметров, которые не удается учесть в рамках фиксированной математической модели как по причине их количества, так и в силу невозможности математизации (по крайней мере, на данный момент развития) различных аспектов психологического характера, оказывающих влияние на окончательный выбор.

Обозначим *множество выбираемых решений* $C(X)$[1]. Оно представляет собой решение задачи выбора и им может оказаться любое подмножество множества возможных решений X. Таким образом, решить задачу выбора – означает найти множество $C(X)$, $C(X) \subset X$. Когда множество выбираемых решений не содержит ни одного элемента (т.е. пусто), собственно выбора не происходит, так как ни одно решение не оказывается выбранным. Подобная ситуация не представляет практического интереса, так как для того, чтобы выбор состоялся, множество $C(X)$ должно содержать, по крайней мере, один элемент. В некоторых задачах оно может оказаться бесконечным.

[1] Это обозначение происходит от английского глагола to choice (т.е. выбирать).

1.1.2. Лицо, принимающее решение

Процесс выбора невозможен без наличия того, кто осуществляет этот выбор, преследуя свои цели. Человека (или целый коллектив, подчиненный достижению определенной цели), который производит выбор и несет полную ответственность за его последствия, называют *лицом, принимающим решение* (сокращенно: *ЛПР*).

Сама природа ЛПР при решении задачи выбора, как правило, не имеет особого значения. Например, если в качестве ЛПР выступает некоторый человек, то, как всякий человек, он представляет собой сложное биологическое и социальное существо. Это существо имеет тело определенного строения, и в этом теле протекают различные биохимические, психофизические, физиологические и психические процессы. Однако для принятия, например, решения о выборе той или иной экономической стратегии фирмы совсем не обязательно учитывать строение черепа или состояние сердечно-сосудистой системы этого человека. В процессе выбора важно, насколько богатым опытом в области экономики обладает этот человек, каким он представляет будущее своей фирмы, какие интересы, связанные с фирмой, он старается удовлетворить и т.п. Таким образом, говоря о ЛПР в контексте задачи выбора, мы будем иметь в виду не его целиком, а лишь ту его «часть», те его характеристики, которые так или иначе связаны с процессом выбора.

Если различные индивиды в одних и тех же ситуациях выбора ведут себя одинаковым образом, то с точки зрения теории принятия решений они ничем не отличаются друг от друга, т.е. представляют собой одно и то же ЛПР.

1.1.3. Векторный критерий

Обычно считается, что выбранным (а потому – приемлемым, выгодным, лучшим) является такое допустимое решение, которое наиболее полно удовлетворяет желаниям, интересам или целям данного ЛПР. Стремление ЛПР достичь определенной цели нередко в математических терминах удается выразить в виде максимизации (или минимизации) некоторой числовой функции, заданной на множестве X. Однако в более сложных ситуациях приходится иметь дело не с одной, а сразу несколькими подобного рода функциями. Так будет, когда исследуемое явление, объект или процесс рассматриваются с различных точек зрения и для формализации каждой точки зрения используется соответствующая функция. Если явление изучается в динамике, поэтапно и для оценки каждого этапа приходится вводить отдельную функцию, – в этом случае также приходится учитывать несколько функциональных показателей.

На протяжении всего пособия считается, что задан набор числовых функций $f_1, f_2, ..., f_m$, $m \geqq 2$, определенных на множестве возможных решений X. В зависимости от содержания задачи выбора эти функции именуют *критериями оптимальности*, *критериями эффективности* или *целевыми функциями*.

Пример 1.1 (задача выбора наилучшего проектного решения). В этой задаче множество X состоит из нескольких конкурсных проектов (например, строительства нового предприятия), а критериями оптимальности могут служить стоимость осуществления проекта f_1 и величина прибыли f_2, которую обеспечит данное проектное решение (т.е. построенное предприятие). Если ограничить рассмотрение данной задачи лишь одним критерием оптимальности, практическая значимость решения такой задачи будет незначительной. В самом деле, при использовании только первого критерия будет выбран самый дешевый проект, но его воплощение может привести к получению недопустимо малой прибыли. С другой стороны, на строительство самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия оптимальности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если же дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, то к двум перечисленным следует добавить еще один – третий критерий, учитывающий экологический ущерб от строительства предприятия. Что касается ЛПР, то в данной задаче таковым является глава администрации района, на территории которого будет построено предприятие, при условии, что это предприятие является государственным. Если же предприятие – частное, то в качестве ЛПР выступает глава соответствующей фирмы.

Указанные выше числовые функции $f_1, f_2, ..., f_m$ образуют *векторный критерий*

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m), \tag{1.1}$$

который принимает значения в пространстве m-мерных векторов R^m. Это пространство называют *критериальным пространством* или *пространством оценок*, а всякое значение $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in R^m$ векторного критерия f при определенном $x \in X$ именуют *векторной оценкой* возможного решения x. Все возможные векторные оценки образуют *множество возможных оценок* (*возможных* или *допустимых векторов*)

$$Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\}.$$

Наряду с множеством выбираемых решений удобно ввести в рассмотрение *множество выбираемых векторов* (*выбираемых оценок*)

$$C(Y)=f(C(X))=\{y\in Y \mid \ y=f(x) \text{ при некотором } x\in C(X)\},$$

представляющее собой некоторое подмножество множества Y.

Как правило, между множествами возможных решений X и соответствующим множеством векторов Y можно установить взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому возможному решению поставить в соответствие определенный возможный вектор, и обратно – каждому возможному вектору сопоставить определенное возможное решение. В таких случаях выбор во множестве решений с математической точки зрения равносилен выбору во множестве векторов и все определения и результаты можно формулировать как в терминах решений, так и в терминах векторов, причем при желании всегда можно без труда осуществить переход от одной формы изложения к другой.

1.1.4. Многокритериальная задача

Задачу выбора, которая включает множество допустимых решений X и векторный критерий f, обычно называют *многокритериальной задачей* или *задачей многокритериальной оптимизации*.

Необходимо отметить, что формирование математической модели принятия решений (т.е. построение множества X и векторного критерия f) нередко представляет собой сложный процесс, в котором тесно взаимодействуют специалисты двух сторон. А именно, представители конкретной области знаний, к которой относится исследуемая проблема, и специалисты по принятию решений (математики). С одной стороны, следует учесть все важнейшие черты и детали реальной задачи, а с другой, – построенная модель не должна оказаться чрезмерно сложной с тем, чтобы для ее исследования и решения можно было успешно применить разработанный к настоящему времени соответствующий математический аппарат. Именно поэтому этап построения математической модели в значительной степени зависит от опыта, интуиции и искусства исследователей обеих сторон. Его невозможно отождествить с простым формальным применением уже известных, хорошо описанных алгоритмов.

Здесь следует еще добавить, что любая задача выбора (в том числе и многокритериальная) тесно связана с конкретным ЛПР. Уже на стадии формирования математической модели при построении множества возможных решений и векторного критерия дело не обходится без советов, рекомендаций и указаний ЛПР, тем более что векторный критерий как раз и служит для выражения целей ЛПР. При этом ясно, что построить модель в точности соответствующую всем реальным обстоятельствам невозможно. Модель всегда является упрощением действительности. Важно добиться, чтобы она содержала те черты и детали, которые в наибольшей степени влияют на окончательный выбор наилучшего решения.

Предположим, что указанные две компоненты задачи выбора сформированы, четко описаны и зафиксированы. Опыт показывает, что, в терминах критерия f чаще всего не удается выразить всю гамму «пристрастий», «вкусов» и предпочтений данного ЛПР. С помощью векторного критерия лишь намечаются определенные локальные цели, которые нередко оказываются взаимно противоречивыми. Эти цели одновременно, как правило, достигнуты быть не могут, и поэтому требуется дополнительная информация для осуществления компромисса. По этой причине помимо векторного критерия следует располагать какими-то дополнительными сведениями о предпочтениях ЛПР. С этой целью необходимо включить в многокритериальную задачу еще один элемент, который позволил бы выразить и описать эти предпочтения.

1.1.5. Отношение предпочтения

Рассмотрим два допустимых решения x' и x''. Предположим, что после предъявления ЛПР этой пары решений, оно выбирает (отдает предпочтение) первому из них. В этом случае пишут

$$x' \succ_X x''.$$

Знак $\succ_X$ служит для обозначений предпочтений данного ЛПР, выражаемых *отношением строгого предпочтения*, или короче — *отношением предпочтения*.

Следует отметить, что не всякие два возможных решения x' и x'' обязательно связаны соотношением $x' \succ_X x''$, либо соотношением $x'' \succ_X x'$. Иначе говоря, не из любой пары решений ЛПР может сделать окончательный выбор. Вполне могут существовать такие пары, что ЛПР не в состоянии отдать предпочтение какому-то одному решению данной пары, даже если это пара различных решений. Описанная ситуация вполне соответствует реальному положению вещей. Более того, если бы от ЛПР требовалась способность в произвольной паре возможных решений уметь определять решение, более предпочтительное по сравнению с другим, то в таком случае теория, построенная на указанном «жестком» требовании к ЛПР, не имела бы практического интереса.

Отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве возможных решений, естественным образом, а именно

$$f(x') \succ_Y f(x'') \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x'' \qquad\qquad \text{для } x', x'' \in X,$$

индуцирует (порождает) отношение предпочтения $\succ_Y$ на множестве возможных векторов Y. Тем самым, вектор $y' = f(x')$ является предпочтительнее вектора $y'' = f(x'')$ (т.е. $y' \succ_Y y''$) тогда и только тогда, когда решение x' предпочтительнее решения x'' (т.е. $x' \succ_X x''$).

1.1.6. Модель многокритериального выбора

Теперь можно сформулировать все основные компоненты задачи многокритериального выбора.

Постановка всякой задачи многокритериального выбора включает

1) множество возможных решений X,
2) векторный критерий f вида (1.1),
3) отношение предпочтения $\succ_X$.

Само ЛПР в постановку задачи многокритериального выбора не включено. В этом нет необходимости. Подразумевается, что все его устремления, вкусы, пристрастия и предпочтения, оказывающие влияние на процесс выбора, «материализованы» в терминах векторного критерия и отношения предпочтения.

Задача многокритериального выбора состоит в отыскании множества выбираемых решений $C(X)$, $C(X) \subset X$, с учетом его отношения предпочтения $\succ_X$ на основе заданного векторного критерия f, отражающего набор целей ЛПР.

Приведенная задача многокритериального выбора выписана в терминах решений. Нередко данную задачу формулируют в терминах векторов. В таком случае она содержит два объекта

1) множество возможных векторов $Y, Y \subset R^m$,
2) отношение предпочтения $\succ_Y$,

и заключается в отыскании множества выбираемых векторов $C(Y)$, $C(Y) \subset Y$, с учетом отношения предпочтения ЛПР $\succ_Y$.

Как указано выше, две приведенные задачи (в терминах решений и в терминах векторов) в указанном выше смысле эквивалентны, поэтому, руководствуясь соображениями удобства, имеет смысл изучать любую из них, а затем в случае необходимости полученные результаты всегда можно переформулировать в терминах другой задачи.

1.2. Бинарные отношения

1.2.1. Определение бинарного отношения

Для описания и изучения упомянутого в предыдущем разделе отношения предпочтения существует специальное математическое понятие – бинарное отношение. Однако прежде чем его формулировать, напомним определение декартова произведения двух множеств.

Пусть имеются два произвольных непустых множества A и B. *Декартовым произведением* этих множеств называется множество, обозначаемое $A \times B$ и определяемое равенством

$$A \times B = \{(a,b) \mid \text{ при некоторых } a \in A, b \in B\} .$$

Иными словами, декартово произведение образуется из всех возможных пар элементов данных двух множеств, причем первым элементом пары является элемент первого множества, а вторым – элемент второго множества.

Например, декартово произведение двух конечных числовых множеств $A = \{1, 2\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$ содержит шесть элементов и имеет вид

$$A \times B = \{(1, 2),(1, 3),(1, 4),(2, 2),(2, 3),(2, 4)\} .$$

Перейдем к определению бинарного отношения.

Определение 1.1. *Бинарным отношением* $\Re$, заданным на множестве A, называется подмножество декартова произведения $A \times A$, т.е. $\Re \subset A \times A$.

Иными словами, всякое множество пар, составленных из элементов множества A, образует некоторое бинарное отношение. В частности, самым «широким» бинарным отношением является множество $\Re = A \times A$, совпадающее с данным декартовым произведением. Другим крайним случаем является пустое множество пар (пустое отношение).

Если имеет место включение $(a, b) \in \Re$, то обычно пишут $a \Re b$ и говорят, что *элемент a находится в отношении $\Re$ с элементом b*.

Приведем примеры бинарных отношений. Из курса арифметики известен целый ряд бинарных отношений, определенных на множестве вещественных чисел: отношение равенства =, отношения нестрогих неравенств $\geq$ и $\leq$, а также отношения строгих неравенств > и <. В теории множеств рассматривается бинарное отношение включения $\subset$, заданное на множестве всех подмножеств некоторого фиксированного множества. В геометрии школьного курса рассматривалось, например, отношение подобия, определенное на множестве треугольников, а также отношение параллельности на множестве прямых.

Введем следующие используемые в дальнейшем изложении бинарные отношения для произвольных векторов $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ и $b=(b_1,b_2,...,b_m)$ пространства R^m :

$$a>b \quad \Leftrightarrow \quad a_i>b_i, \quad i=1,2,...,m$$

$$a \geqq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \geqq b_i, \quad i=1,2,...,m$$

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a \geqq b \text{ и } a \neq b.$$

Выполнение неравенства $a \geq b$ означает, что каждая компонента вектора a больше либо равна соответствующей компоненты вектора b , причем хотя бы одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

1.2.2. Типы бинарных отношений

В зависимости от свойств, которыми обладают бинарные отношения, производят их классификацию. Приведем определения некоторых распространенных типов бинарных отношений.

Бинарное отношение $\mathfrak{R}$, заданное на множестве A , называют

1) *рефлексивным*, если соотношение aRa имеет место для всех $a \in A$;
2) *иррефлексивным*, если соотношение aRa не выполняется ни для одного $a \in A$;
3) *симметричным*, если всякий раз из выполнения соотношения aRb для произвольных элементов $a,b \in A$ следует выполнение соотношения $b\mathfrak{R}a$;
4) *асимметричным*, если из выполнения соотношения $a\mathfrak{R}b$ для произвольных элементов $a,b \in A$ всегда следует, что соотношение $b\mathfrak{R}a$ места не имеет;
5) *транзитивным*, если для любой тройки элементов $a,b,c \in A$ из выполнения соотношений $a\mathfrak{R}b$, $b\mathfrak{R}c$ всегда следует справедливость соотношения $a\mathfrak{R}c$;
6) *слабо связным*, если для любой пары различных элементов $a,b \in A, a \neq b$, выполняется либо соотношение $a\mathfrak{R}b$, либо соотношение $b\mathfrak{R}a$.

Отношения равенства = и нестрогого неравенства $\geqq$ дают примеры рефлексивных, а отношение строгого неравенства > и отношение $\geq$ – иррефлексивных отношений на пространстве векторов R^m . Отношение равенства является симметричным, а отношения строгих неравенств > и $\geq$ –

асимметричны. Все перечисленные выше отношения $=, \geq, >, \geqq$ транзитивны. Отношение строгого неравенства $>$, рассматриваемое на множестве чисел, является слабо связным, потому что для любых двух различных чисел a и b обязательно имеет место одно из двух неравенств $a > b$, либо $b > a$. Если же отношение строгого неравенства $>$ (равно как и отношение $\geq$) рассматривать на множестве векторов R^m при $m > 1$, то оно уже не будет слабо связным. В этом можно легко убедиться самостоятельно.

Приведем пример нетранзитивного бинарного отношения, заданного на некотором множестве A, состоящем из трех элементов. Пусть $A = \{a,b,c\}$ и справедливы соотношения $a\Re b$, $b\Re c$ и $c\Re a$. При этом все остальные возможные соотношения $a\Re a$, $b\Re b$, $c\Re c$, $b\Re a$, $c\Re b$ и $a\Re c$ не имеют места. Нетрудно видеть, что таким образом заданное отношение $\Re$ является иррефлексивным, асимметричным и слабо связным. При этом оно не является транзитивным. Действительно, если бы оно оказалось таковым, то, например, из соотношений $a\Re b$ и $b\Re c$ следовало бы соотношение $a\Re c$, которое по условию не выполняется.

Между некоторыми типами отношений имеется определенная связь, которая раскрывается в нижеследующих утверждениях.

Лемма 1. 1. *Всякое асимметричное отношение иррефлексивно.*

□ Действительно, если напротив, некоторое асимметричное отношение $\Re$ не является иррефлексивным, то для некоторого $a \in A$ должно быть выполнено соотношение $a\Re a$. Отсюда, благодаря асимметричности данного отношения, это же соотношение $a\Re a$ не должно иметь места. Полученное противоречие устанавливает иррефлексивность асимметричного отношения $\Re$ ■

Лемма 1. 2. *Всякое иррефлексивное и транзитивное отношение является асимметричным.*

□ Для доказательства предположим противное: некоторое отношение $\Re$ иррефлексивно и транзитивно, но не является асимметричным. Последнее означает, что найдется пара элементов $a,b \in A$, для которых выполнены соотношения $a\Re b$ и $b\Re a$ одновременно. На основании транзитивности из этих двух соотношений следует соотношение $a\Re a$, которое несовместимо с условием иррефлексивности отношения $\Re$ ■

Пример 1.2 (лексикографическое отношение порядка). Пример слабо связного, асимметричного и транзитивного отношения, заданного на пространстве R^m, дает *лексикографическое отношение*, определяемое следующим образом. Говорят, что вектор $y' = (y_1', y_2', ..., y_m')$ лексикографически больше вектора $y'' = (y_1'', y_2'', ..., y_m'')$, если выполнено какое-либо одно из следующих условий

1) $y_1' > y_1''$,
2) $y_1' = y_1'', \quad y_2' > y_2''$,
3) $y_1' = y_1'', \quad y_2' = y_2''$, $y_3' > y_3''$,

....

m) $y_i' = y_i'', \quad i = 1,2,...,m-1; \quad y_m' > y_m''$.

Можно проверить (см. упр. 5), что любые два вектора пространства R^m либо равны друг другу, либо один из них лексикографически больше другого вектора. Это означает, что лексикографическое отношение слабо связно.

Выводы

Математическая формулировка задачи многокритериального выбора включает множество возможных решений, векторный критерий и отношение предпочтения лица, принимающего решение. Решить эту задачу – означает найти множество тех решений, которые следует выбрать. Для описания отношения предпочтения, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, используется понятие бинарного отношения. Бинарные отношения могут быть различного типа. При этом некоторые комбинации типов отношений являются зависимыми друг от друга.

Основные термины

Множество возможных (допустимых) решений (векторов), множество выбираемых решений (векторов), лицо, принимающее решение (ЛПР), векторный критерий, критериальное пространство, многокритериальная задача, задача многокритериального выбора, отношение предпочтения, бинарное отношение.

Контрольные вопросы

1. Раскройте аббревиатуру ЛПР и объясните, что она означает.
2. Какие компоненты задачи выбора дают возможность учитывать цели и предпочтения ЛПР?
3. Перечислите все компоненты задачи многокритериального выбора, как в терминах решений, так и в терминах векторов.

4. В чем заключается задача многокритериального выбора и что является результатом ее решения?
5. Какие отношения предпочтения участвуют в постановке задачи многокритериального выбора и какова связь между ними?
6. Что такое бинарное отношение? Приведите определение и примеры.
7. Сформулируйте определения транзитивного, а также слабо связного бинарных отношений.

Упражнения

1. Приведите ситуации из вашей жизни, когда вы сталкиваетесь с необходимостью выбора из нескольких возможностей. Сколько критериев вы при этом учитываете?
2. С помощью каких, на ваш взгляд, критериев можно охарактеризовать «преуспевание в бизнесе»? Какие их этих критериев следует стремиться максимизировать, а какие – минимизировать?
3. Проверьте, что отношение включения, заданное на множестве всех подмножеств некоторого непустого множества, является рефлексивным и транзитивным бинарным отношением, но не обладает свойствами симметричности, асимметричности и слабой связности.
4. Убедитесь в том, что отношение параллельности прямых на плоскости является симметричным и транзитивным, но не является рефлексивным, асимметричным и слабо связным.
5. Покажите, что отношение неравенства $\neq$, а также приближенного равенства $\approx$, заданные на множестве вещественных чисел, не являются транзитивными.
6. Убедитесь, что лексикографическое отношение слабо связно, асимметрично и транзитивно.
7. Бинарное отношение $\succ_M$, заданное на пространстве R^m, называется *мажоритарным*, если соотношение $y' \succ_M y''$ для векторов $y', y'' \in R^m$ имеет место тогда и только тогда, когда число компонент вектора y', которые строго больше соответствующих компонент вектора y'', превышает половину общего числа компонент, т.е. $m/2$. Это отношение соответствует принципу голосования по правилу простого большинства при наличии m участников голосования. Проверьте, что мажоритарное отношение иррефлексивно и асимметрично, но не является ни транзитивным, ни слабо связным.

Глава 2. Принцип Эджворта-Парето

Здесь формулируется система аксиом, описывающая «разумное» поведение ЛПР в процессе выбора. Доказывается, что при выполнении этих аксиом имеет место фундаментальное утверждение, носящее название принципа Эджворта-Парето. Согласно этому принципу наилучший выбор следует осуществлять только среди элементов множества Парето. Приведенная система аксиом обладает свойством минимальности в том смысле, что при невыполнении хотя бы одной из этих аксиом, принцип Эджворта-Парето может нарушаться.

2.1. Основные аксиомы

2.1.1. Аксиома исключения доминируемых решений

Рассмотрим два произвольных возможных решения x' и x''. Для них имеет место один и только один из следующих трех случаев:

1) справедливо соотношение $x' \succ_X x''$ (ЛПР первое решение предпочитает второму),
2) справедливо соотношение $x'' \succ_X x'$ (ЛПР второе решение предпочитает первому),
3) не выполняется ни соотношение $x' \succ_X x''$, ни соотношение $x'' \succ_X x'$ (ЛПР не может отдать предпочтение ни одному из указанных двух решений).

Заметим, что четвертый случай, когда оба участвующих здесь соотношения $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'$ выполняются, невозможен благодаря асимметричности отношения предпочтения $\succ_X$.

В первом из указанных выше случаев, т.е. при выполнении соотношения $x' \succ_X x''$, говорят, что решение x' *доминирует* решение x'' (по отношению

$\succ_X$). Во втором случае x'' *доминирует* x'. Если же реализуется третий случай, то говорят, что решения x' и x'' *не сравнимы* по отношению предпочтения.

Обратимся к задаче многокритериального выбора, в которой задано множество допустимых решений X, векторный критерий f и отношение предпочтения $\succ_X$. Пусть для некоторого возможного решения x'' найдется такое возможное решение x', что выполнено соотношение $x' \succ_X x''$. По определению отношения предпочтения это означает, что из данной пары решений ЛПР выберет первое решение и не выберет второе. В терминах множества выбираемых решений этот факт можно выразить следующей эквивалентностью

$$x' \succ_X x'' \quad \Leftrightarrow \quad C\{x', x''\} = \{x'\}$$

для $x', x'' \in X$.

Если решение x'' не выбирается из пары $\{x', x''\}$ в силу того, что для него в этой паре есть лучшее решение x' (т.е. $x' \succ_X x''$), то, рассматривая x'' в пределах всего множества возможных решений X, разумно предположить, что решение x'' в таком случае не должно быть выбранным и из всего множества возможных решений, так как для него в X существует, по крайней мере, одно заведомо более предпочтительное решение (т.е. x').

Приведенные рассуждения показывают, что при выборе первого решения из пары естественно считать, что второе решение не может оказаться выбранным и из всего множества возможных решений. Тем самым, в виде аксиомы сформулируем требование, которому должно удовлетворять поведение ЛПР в процессе выбора.

Аксиома 1 (аксиома исключения доминируемых решений)**.** *Для всякой пары допустимых решений* $x', x'' \in X$, *для которых имеет место соотношение* $x' \succ_X x''$, *выполнено* $x'' \notin C(X)$.

В аксиоме 1 участвует не только отношение предпочтения $\succ_X$, которым ЛПР руководствуется в процессе принятия решений, но и множество выбираемых решений $C(X)$. Это означает, что данное требование следует рассматривать как определенное ограничение на множество выбираемых решений. А именно, любое множество выбираемых решений, каким бы способом оно не было выделено из всего множества возможных решений, не должно содержать ни одного такого решения, для которого может найтись более предпочтительное возможное решение.

Несмотря на всю естественность («разумность») аксиомы 1, не следует думать, что она выполняется во всех без исключения задачах выбора. Приведем простой содержательный пример, в котором эта аксиома нарушается.

Пример 2.1. Рассмотрим задачу выбора из трех возможных претендентов на два вакантных рабочих места. При этом считается, что согласно имеющимся требованиям оба вакантных места обязательно должны быть заполнены. Предположим, что при сравнении претендентов выяснилось, что первый из них является предпочтительнее второго и третьего, а второй предпочтительнее третьего. Поскольку согласно условию из трех кандидатов обязательно следует выбрать двоих, то, очевидно, ими окажутся первый и второй. Таким образом, второй претендент в паре из первых двух уступает первому (так как первый предпочтительнее второго). Тем не менее, из всего множества трех претендентов он оказывается выбранным. Следовательно, аксиома исключения доминируемых решений здесь нарушается.

Следует заметить, что приведенная аксиома 1 может быть сформулирована в терминах векторов следующим образом.

Аксиома 1 (аксиома исключения доминируемых векторов)**.** *Для всякой пары допустимых векторов* $y', y'' \in Y$ *, для которых имеет место соотношение* $y' \succ_Y y''$ *, выполнено* $y'' \notin C(Y)$.

2.1.2. Аксиома Парето

Когда имеется один критерий оптимальности, стремление ЛПР обычно проявляется в том, чтобы получить наибольшее, либо наименьшее значение этого критерия. Например, при решении различного рода экономических задач такой показатель, как затраты обычно стремятся минимизировать, а доход – максимизировать. Из курса математики известно, что любую задачу максимизации (минимизации) всегда можно свести к задаче минимизации (соответственно максимизации), изменив значение целевой функции на противоположное. По этой причине в принципе изучение экстремальных задач можно ограничить лишь одним классом – либо задачами максимизации, либо задачами минимизации.

Если задан не один, а сразу несколько критериев оптимальности, то для определенности для каждого из них необходимо указать «направление заинтересованности» ЛПР. По этой причине далее рассмотрение ограничивается случаем, когда ЛПР стремится к получению по возможности бо́льших значений всех компонент векторного критерия f . Этот факт можно выразить в терминах так называемой *аксиомы Парето*[2].

Аксиома Парето. *Для всех пар допустимых решений* $x', x'' \in X$ *, для которых имеет место неравенство* $f(x') \geq f(x'')$ *, выполняется соотношение* $x' \succ_X x''$.

[2] Вильфредо Парето (1848-1923) – известный итальянский экономист и социолог.

Напомним (см. разд. 1.1), что запись $f(x') \geq f(x'')$ означает выполнение покомпонентных неравенств $f_i(x') \geqq f_i(x'')$ для всех $i = 1,2,...,m$, причем $f(x') \neq f(x'')$. Это означает, что компоненты первого вектора $f(x')$ не меньше соответствующих компонент второго вектора $f(x'')$, причем по крайней мере одна компонента первого вектора строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

В частном случае, когда векторный критерий является скалярным, т.е. имеет лишь одну компоненту, аксиома Парето выражает стремление ЛПР максимизировать эту компоненту.

В терминах векторов аксиома Парето принимает следующий вид.

Аксиома Парето (в терминах векторов). *Для всех пар допустимых векторов $y', y'' \in Y$, для которых имеет место неравенство $y' \geq y''$, выполняется соотношение $y' \succ_Y y''$.*

2.2. Множество и принцип Парето

2.2.1. Множество Парето

Для того чтобы сформулировать принцип Эджворта-Парето, который представляет собой фундаментальный инструмент выбора решений при наличии нескольких критериев, понадобится определение множества Парето. Приведем соответствующее определение.

Определение 2.1. Решение $x^* \in X$ называется *оптимальным по Парето* (*парето-оптимальным*), если не существует такого возможного решения $x \in X$, для которого имеет место неравенство $f(x) \geq f(x^*)$. Все парето-оптимальные решения образуют *множество Парето*, обозначаемое $P_f(X)$.

Замечание 2.1. Если в приведенном определении формально положить число критериев равным единице, т.е. $m = 1$, то оно превратится в определение максимального элемента функции f_1 на множестве X. Это означает, что понятие парето-оптимальности можно рассматривать как обобщение понятия максимального элемента на случай нескольких критериев.

В соответствии с приведенным определением

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{ что } f(x) \geq f(x^*)\}.$$

Пусть x^* – некоторое парето-оптимальное решение и $f(x^*)$ – соответствующий ему парето-оптимальный вектор. В соответствии с определением 2.1, если для некоторого решения $x \in X$, отличного от x^*, оказывается выполненным неравенство $f_i(x) > f_i(x^*)$, то обязательно должен найтись хотя бы один номер j, при котором верно неравенство $f_j(x^*) > f_j(x)$. На основании этого можно сделать следующее заключение: *парето-оптимальное решение — это такое допустимое решение, которое не может быть улучшено* (*увеличено*) *ни по одному из имеющихся критериев без ухудшения* (*уменьшения*) *по какому-то хотя бы одному другому критерию.* Иначе говоря, предпочитая одному парето-оптимальному решению другое парето-оптимальное решение, ЛПР вынуждено идти на определенный компромисс, соглашаясь на некоторую потерю хотя бы по одному критерию (получая, разумеется, определенный выигрыш, по крайней мере, по какому-то другому критерию). По этой причине множество Парето нередко называют *множеством компромиссов.*

Понятие оптимальности по Парето играет важную роль в математической экономике. Именно в этой области часто вместо парето-оптимальности используют наименования *эффективное решение* и *множество эффективных решений.* Тем самым, парето-оптимальность и эффективность в математической экономике нередко оказываются синонимами.

В зависимости от структуры множества X и вида векторного критерия f множество парето-оптимальных решений может

- оказать пустым (не содержать ни одного элемента);
- быть одноэлементным множеством;
- состоять из некоторого конечного числа решений;
- содержать бесконечное число возможных решений;
- совпадать с множеством возможных решений X.

Вектор $f(x^*)$ при парето-оптимальном решении x^* называют *парето-оптимальным вектором*, а множество всех таких векторов — *множеством парето-оптимальных векторов* (*парето-оптимальных оценок*). Для этого множества используют обозначение $P(Y)$. Таким образом,

$$P(Y) = f(P_f(X)) = \{f(x^*) \in Y \mid \text{при некотором } x^* \in P_f(X)\},$$

где Y так же, как и раньше, означает множество возможных векторов, т.е. $Y = f(X)$.

Нетрудно понять, что множество парето-оптимальных векторов можно определить следующим эквивалентным образом:

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y \text{, что } y \geq y^*\}.$$

2.2.2. Принцип Эджворта[3]-Парето

В следующей теореме формулируется фундаментальный принцип, связанный с именами двух выдающихся представителей математической экономики.

Теорема 2.1[4] (принцип Эджворта-Парето в терминах решений) *Пусть выполнена аксиома Парето. Тогда для любого множества выбираемых решений* $C(X)$, *удовлетворяющего аксиоме* 1, *справедливо включение*

$$C(X) \subset P_f(X). \tag{2.1}$$

□ Если множество $C(X)$ пусто, то включение (2.1) выполняется, поскольку пустое множество является подмножеством любого множества. Поэтому пусть $C(X) \neq \varnothing$.

Для доказательства введем *множество недоминируемых решений*

$$\mathrm{Ndom}\, X = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X \text{, что } x \succ_X x^*\}$$

и сначала установим справедливость включения

$$\mathrm{Ndom}\, X \subset P_f(X). \tag{2.2}$$

Пусть, напротив, для некоторого недоминируемого решения $x'' \in \mathrm{Ndom}\, X$ выполнено соотношение $x'' \notin P_f(X)$. Тогда по определению множества парето-оптимальных решений найдется такое возможное решение $x' \in X$, что $f(x') \geq f(x'')$. На основании аксиомы Парето отсюда получаем соотношение $x' \succ_X x''$, которое не совместимо с начальным предположением $x'' \in \mathrm{Ndom}\, X$. Тем самым, справедливость включения (2.2) установлена.

Теперь докажем включение

$$C(X) \subset \mathrm{Ndom}\, X. \tag{2.3}$$

Если предположить противное, т.е. что включение (2.3) не имеет места, то среди элементов множества $C(X)$ должно найтись решение $x'' \in C(X)$, для которого выполнено соотношение $x'' \notin \mathrm{Ndom}\, X$. Тогда по определению множества недоминируемых решений существует такое решение $x' \in X$, что $x' \succ_X x''$. Отсюда, используя аксиому 1, получаем $x'' \notin C(X)$. Это противоречит начальному предположению о том, что x'' – выбранное решение.

[3] Френсис Эджворт (1845-1926) – известный английский экономист.

[4] Следует заметить, что принцип Эджворта-Парето в форме теоремы 2.1 был установлен автором данного пособия лишь в начале XXI века.

Из включений (2.2) и (2.3) немедленно следует требуемое включение (2.1) ■

Формула (2.1) представляет собой математическое выражение *принципа Эджворта-Парето* (или *принципа Парето*), согласно которому

если ЛПР ведет себя «разумно» (т.е. в соответствии с аксиомой 1 и аксиомой Парето, то выбираемые им решения обязательно должны быть парето-оптимальными.

Этот принцип назначает особую, исключительно важную роль множеству парето-оптимальных решений в теории принятия решений при многих критериях.

Геометрическая иллюстрация принципа Эджворта-Парето дана на рис. 2.1.

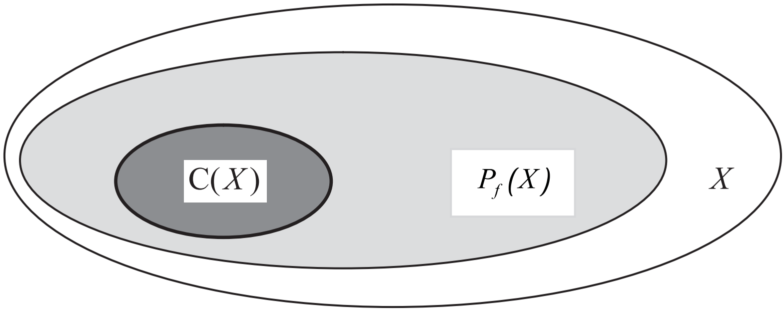

Рис. 2.1. Общий случай соотношения между множествами допустимых, выбираемых и парето-оптимальных решений.

Заметим, что участвующее в соотношении (2.1) включение в частном случае может выполняться как равенство.

Теорема 2.1 сформулирована для решений. Ее можно легко переформулировать в терминах векторов. Тогда она примет следующий вид.

Теорема 2.1 (принцип Эджворта-Парето в терминах векторов). *Пусть выполняются аксиома* 1 *и аксиома Парето. В этом случае для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$ *имеет место включение* $C(Y) \subset P(Y)$.

2.2.3. Минимальность набора основных аксиом

Оказывается, если попробовать отказаться от хотя бы одной из аксиом 1 или Парето, то принцип Эджворта-Парето может оказаться невыполненным. Такое положение означает минимальность указанного набора двух аксиом для справедливости этого принципа. Иначе говоря, данная система аксиом составляет минимально возможные необходимые условия выполнения принципа Эджворта-Парето

Для того чтобы установить указанное свойство минимальности достаточно привести два примера (по числу аксиом), в которых нарушается какая-то одна из аксиом и при этом включение (2.1) не имеет места.

Пример 2.1. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$, $f = (f_1, f_2)$, $Y = f(X) = \{y^{(1)}, y^{(2)}\}$, $y^{(1)} = (0,0)$, $y^{(2)} = (0,1)$, причем $y^{(1)} \succ y^{(2)}$, а все остальные соотношения $y^{(1)} \succ y^{(1)}$, $y^{(2)} \succ y^{(2)}$ и $y^{(2)} \succ y^{(1)}$ места не имеют. Нетрудно видеть, что в данном случае $P_f(X) = \{x_2\}$, поскольку $y^{(2)} \geq y^{(1)}$.

Рассмотрим в качестве множества выбираемых решений $C(X) = \{x_1\}$. В этом случае аксиома 1 справедлива, тогда как принцип Эджворта-Парето, т.е. включение $C(X) = \{x_1\} \subset \{x_2\} = P_f(X)$, не выполняется. Причиной тому служит нарушение аксиомы Парето.

Пример 2.2. Снова пусть $X = \{x_1, x_2\}$, $f = (f_1, f_2)$, $Y = f(X) = \{y^{(1)}, y^{(2)}\}$ $y^{(1)} = (0,0)$, $y^{(2)} = (0,1)$, но $y^{(2)} \succ y^{(1)}$ и все остальные соотношения $y^{(1)} \succ y^{(1)}$, $y^{(2)} \succ y^{(2)}$ и $y^{(1)} \succ y^{(2)}$ места не имеют. Здесь вновь имеем $P_f(X) = \{x_2\}$, причем аксиома Парето выполнена.

Положим $C(X) = \{x_1\}$. В этом случае, как указано выше, аксиома Парето справедлива, тогда как принцип Эджворта-Парето, т.е. включение $C(X) = \{x_1\} \subset \{x_2\} = P_f(X)$, не выполняется из-за нарушения аксиомы 1 об исключении доминируемых варинатов.

Приведенные примеры показывают, что *принцип Эджворта-Парето не является универсальным*, т.е. применимым во всех без исключения задачах многокритериального выбора. Более того, на основе аксиомы 1 и аксиомы Парето (точнее говоря, на основе отрицаний этих аксиом) при желании можно сделать определенный вывод и о том, в каких именно задачах этот принцип может «не работать».

Итак, применение этого принципа рискованно или же вообще недопустимо, если реализуется хотя бы один из следующих двух случаев:

1) не выбираемое из некоторой пары решение оказывается выбранным из всего множества возможных решений;
2) нарушена аксиома Парето, т.е. для некоторой пары допустимых решений $x', x'' \in X$, для которых имеет место неравенство $f(x') \geq f(x'')$, не выполняется соотношение $x' \succ_X x''$.

2.3. Расширение системы «разумных» аксиом

2.3.1. Аксиома транзитивности отношения предпочтения

Предположим, что ЛПР в процессе выбора ведет себя достаточно «разумно» и обсудим требования, которым в таком случае должно удовлетворять его отношение предпочтения.

Прежде всего, следует напомнить, что отношение предпочтения по своей сути является отношением *строгого* предпочтения в том смысле, что ни один вектор (ни одно решение) не может быть предпочтительнее самого себя. В терминах бинарных отношений, рассмотренных в предыдущем разделе, это означает, что отношение предпочтения обязательно должно быть иррефлексивным.

Рассмотрим ситуацию, когда один вектор предпочтительнее второго, а он, в свою очередь, предпочтительнее некоторого третьего вектора. В таком положении человек обычно при сравнении первого и третьего векторов выбирает первый. Здесь происходит примерно то же самое, что и при сравнении чисел с помощью отношения строгого неравенства. Например, если $5>3$ и $3>1$, то непременно выполнено $5>1$. В терминах векторов это свойство может быть сформулировано следующим образом: для любой тройки векторов y',y'',y''' из выполнения соотношений $y' \succ_Y y''$ и $y'' \succ_Y y'''$ обязательно следует справедливость соотношения $y' \succ_Y y'''$. На «языке» бинарных отношений это означает, что отношение предпочтения $\succ_Y$, используемое в задачах многокритериального выбора, подчиняется требованию транзитивности.

Как было указано выше, отношение предпочтения $\succ_Y$ изначально определено на множестве допустимых векторов Y. Примем следующее допущение, которое оказывается очень удобным в математическом отношении. А именно, будем считать, что ЛПР в принципе может сравнивать не только пары числовых векторов из множества Y, но и *любые* два вектора критериального пространства R^m. Иными словами, будем считать, что на пространстве R^m определено некоторое бинарное отношение, обозначаемое далее символом $\succ$, которое на множестве Y совпадает с отношением $\succ_Y$, т.е.

$$y' \succ y'' \quad \Leftrightarrow \quad y' \succ_Y y'' \text{ для всех } y',y'' \in Y .$$

Следует отметить, что конкретный способ задания отношения $\succ$ за пределами множества Y не играет особой роли в дальнейшем изложении, так как не влияет на формулируемые ниже результаты.

Сформулируем в виде аксиомы условие, которое можно рассматривать как одну из составляющих разумного поведения ЛПР в процессе принятия решений.

Аксиома 2 (иррефлексивность и транзитивность отношения предпочтения). *Иррефлексивное отношение предпочтения* $\succ$ *, которым ЛПР руководствуется в процессе выбора, является транзитивным бинарным отношением.*

Замечание 3.1. При выполнении аксиомы 2 благодаря лемме 1.1 все три отношения $\succ_X$, $\succ_X$ и $\succ$ являются транзитивными и асимметричными.

Как указано выше транзитивность отношения предпочтения связывают с «разумным» поведением ЛПР. Однако следует заметить, что человек при осуществлении выбора не всегда ведет себя подобным образом. На этот счет имеются соответствующие примеры. Один из них состоит в том, что человеку предлагают сравнить по предпочтительности сначала два решения x' и x'' , а затем – x'' и x''' . Предположим, что оказались выполненными соотношения $x' \succ_X x''$ и $x'' \succ_X x'''$. После этого ему предлагают выбрать лучшее решение из пары x', x''' . В результате многочисленных экспериментов установлено, что в такой ситуации не все испытуемые всякий раз выбирают третье решение. В определенных случаях некоторые люди в указанной ситуации ведут себя алогично, предпочитая третье решение первому. Их поведение нарушает свойство транзитивности отношения предпочтения, а значит, оно не подчиняется аксиоме 2.

2.3.2. Аксиома согласованности

Поскольку отношение предпочтения, с одной стороны, и критерии, участвующие в модели многокритериального выбора, с другой стороны, выражают «вкусы» и цели одного и того же ЛПР, то они должны быть определенным образом согласованы друг с другом. Введем соответствующее определение.

Определение 3.1. Говорят, что *критерий* f_i *согласован с отношением предпочтения* $\succ$, если для любых двух векторов $y', y'' \in R^m$, таких, что

$$y' = (y_1', ..., y_{i-1}', y_i', y_{i+1}', .., y_m') \,,\; y'' = (y_1', ..., y_{i-1}', y_i'', y_{i+1}', ..., y_m') \,,\; y_i' > y_i'' \,,$$

всегда следует выполнение соотношения $y' \succ y''$.

Содержательно согласованность данного критерия с отношением предпочтения означает, что ЛПР при прочих равных условиях заинтересовано в получении по возможности больших значений этого критерия. Иными словами, ЛПР заинтересовано в максимизации согласованного критерия.

Взаимосвязь отношения предпочтения данного ЛПР с векторным критерием теперь можно выразить в виде следующего требования (аксиомы).

Аксиома 3 (согласованность критериев с отношением предпочтения). *Каждый из критериев* $f_1, f_2, ..., f_m$ *согласован с отношением предпочтения* $\succ$.

Согласованность всех критериев с отношением предпочтения означает, что ЛПР заинтересовано в максимизации одновременно всех имеющихся критериев. С этой точки зрения наилучшим для ЛПР было бы решение (и его следовало бы тогда выбирать), на котором сразу все критерии достигают своего наибольшего возможного значения. К сожалению, на подобную ситуацию в действительности рассчитывать не приходится, поскольку в реальных задачах выбора имеющиеся в наличии критерии, как правило, противоречат друг другу в том смысле, что их множества точек максимума не имеют общих элементов. В связи с этим, и возникает **основная проблема многокритериального выбора**:

> *как осуществить наилучший выбор в условиях взаимно противоречивых критериев?*

2.3.3. Взаимосвязь аксиом «разумного» выбора

Оказывается, аксиома Парето является следствием аксиом 2 – 3. Это устанавливает следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Принятие аксиом* 2 *и* 3 *гарантирует выполнение аксиомы Парето.*

□ Пусть неравенство $f(x') \geq f(x'')$ выполняется для двух произвольных возможных решений $x', x'' \in X$. Из выполнения этого неравенства следует, что найдется по крайней мере один номер $i \in \{1, 2, ..., m\}$, при котором имеет место строгое неравенство $f_i(x') > f_i(x'')$. В общем случае таких строгих неравенств может быть несколько и при этом они не обязательно соответствуют первым номерам компонент векторного критерия. Однако, не уменьшая общности рассуждений, можно считать, что строгие неравенства $f_k(x') > f_k(x'')$ справедливы для первых номеров $k = 1, ..., l$ при некотором $l \in \{1, 2, ..., m\}$. Для всех последующих номеров k, $k > l$, (при условии, что такие найдутся, т.е. при $l < m$), компоненты векторов $f(x')$ и $f(x'')$ будем предполагать равными.

Благодаря согласованности первых l критериев из указанных выше строгих неравенств имеем

$$(f_1(x'), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')) \succ (f_1(x''), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')) \;,$$

$$(f_1(x''), f_2(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')) \succ (f_1(x''), f_2(x''), f(x'), ..., f_l(x'), ..., f_m(x')) \;,$$

....

$$(f_1(x''), f_2(x''), ..., f_{l-1}(x''), f_l(x'), ..., f_m(x')) \succ$$
$$\succ (f_1(x''), f_2(x''), ..., f_l(x''), f_{l+1}(x'), ..., f_m(x')) \;.$$

Отсюда, последовательно используя транзитивность отношения $\succ$, приходим к соотношению

$$\begin{aligned}&(f_1(x'), f_2(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')) \succ \\ &\succ (f_1(x''), f_2(x''),..., f_l(x''), f_{l+1}(x')..., f_m(x'))\end{aligned} \qquad (3.1)$$

На основании сделанного в начале доказательства предположения имеют место равенства $f_k(x') = f_k(x'')$, $k = l+1,...,m$. Поэтому соотношение (3.1) влечет

$$\begin{aligned}&f(x') = (f_1(x'), f_2(x'),..., f_l(x'),..., f_m(x')) \succ \\ &\succ (f_1(x''), f_2(x''),..., f_l(x''),..., f_m(x'')) = f(x'')\end{aligned}.$$

Отсюда, учитывая связь между отношениями $\succ$ и $\succ_X$, получаем требуемое соотношение $x' \succ_X x''$ ■

На основе установленного следствия принцип Эджворта-Парето можно переформулировать следующим образом.

Следствие 3.1. (принцип Эджворта-Парето с использованием аксиом 2 и 3). *Пусть выполняются аксиомы* 2 *и* 3. *В этом случае для любого множества выбираемых векторов* $C(Y)$, *удовлетворяющего аксиоме* 1, *имеет место включение* $C(Y) \subset P(Y)$.

Выводы

В случае принятия аксиомы исключения доминируемых вариантов и аксиомы Парето, имеет место принцип Эджворта-Парето, согласно которому ЛПР следует выбирать только парето-оптимальные векторы и решения. При нарушении хотя бы одной из двух указанных аксиом, наилучший выбор может оказаться за пределами множества Парето.

Так называемый «разумный» выбор можно описать и тройкой аксиом — аксиомой транзитивности отношения предпочтения, аксиомой согласования отношения предпочтения с критериями и аксиомой исключения доминируемых решений.

Основные понятия

Аксиомы «разумного» выбора, аксиома Парето, множество Парето, принцип Эджворта-Парето.

Контрольные вопросы

1. Какие аксиомы «разумного» поведения ЛПР в процессе выбора вы знаете? Сформулируйте эти аксиомы.
2. Приведите свои аргументы в пользу действительной разумности (естественности) каждой из аксиом «разумного» поведения.
3. Сформулируйте аксиому Парето.
4. Приведите определения множества парето-оптимальных решений и множества парето-оптимальных векторов. Какова связь между этими двумя множествами?
5. Сформулируйте принцип Эджворта-Парето как в терминах решений, так и в терминах векторов.
6. Как вы понимаете свойство минимальности аксиомы исключения домиминируемых вариантов и аксиомы Парето?
7. В каких случаях применение принципа Эджворта-Парето в процессе принятия решений может оказаться недопустимым?

Упражнения

1. Выпишите аксиомы 2 – 3 для случая одного критерия $m = 1$.
2. Убедитесь в том, что при $m = 1$ аксиома 3 (о согласованности критериев с отношением предпочтения) совпадает с аксиомой Парето, тогда как при $m > 1$ из выполнения аксиомы Парето следует выполнение аксиомы 3, но не наоборот.
3. Выполняется ли аксиома 3, когда ЛПР желательно, чтобы значения одного из критериев были как можно ближе к некоторому среднему значению, расположенному строго между максимальным и минимальным возможными значениями этого критерия?
4. Выполняется ли аксиома 3 о согласовании критериев с отношением предпочтения, когда для ЛПР необходимо, чтобы значения одного из критериев не превышали некоторого заданного «порогового» значения?
5. Выполняется ли аксиома о транзитивности отношения предпочтения, если для некоторых k (k >3) возможных решений $x_1, x_2, x_3, ..., x_k \in X$

оказались выполненными соотношения $x_1 \succ_X x_2 \succ_X x_3 \succ_X \ldots \succ_X x_k$ и $x_k \succ_X x_1$? Привести пример из практики, когда указанные соотношения имеют место.

6. Справедлив ли принцип Эджворта-Парето том в случае, когда в качестве отношения предпочтения $\succ$ используется мажоритарное отношение $\succ_M$ (определение этого отношения имеется в упр. 6 главы 1).
7. Какой вид принимает принцип Эджворта-Парето в случае одного критерия $m = 1$?

Глава 3.
Свойства множества Парето

Глава посвящена изучению важнейших свойств множества Парето. Прежде всего, разбирается вопрос существования парето-оптимальных решений и векторов. Ответ на него в сильной степени зависит от структуры множества возможных решений (векторов) и вида критериев. Поэтому рассмотрение проводится отдельно для задач с конечным и задач с бесконечным множествами возможных решений (векторов).

Обсуждаются перспективы конструктивного построения множества Парето и приводятся наиболее известные необходимые и достаточные условия парето-оптимальности в терминах так называемой «аддитивной свертки» критериев.

Рассматриваются количественные и качественные шкалы, в которых могут измеряться значения критериев. Устанавливается правомерность использования множества Парето в задачах с критериями, значения которых измеряются как в количественных, так и в порядковых шкалах.

3.1. Задачи с конечным множеством возможных векторов

3.1.1. Существование парето-оптимальных векторов

Согласно принципу Эджворта-Парето наилучшие решения всегда следует выбирать в пределах множества Парето. Если же это множество пусто, то из него невозможно что-либо выбрать. Поэтому с точки зрения практики применения принципа Эджворта-Парето важно знать, в каких классах задач парето-оптимальные векторы (решения) заведомо существуют. Имея дело с такими задачами, можно быть уверенным в том, что принципиальная возможность выбора в пределах множества Парето всегда будет обеспечена.

В этом смысле задачи, в которых множество возможных векторов (или возможных решений) состоит из конечного числа элементов, отличаются тем свойством, что в них множество Парето всегда не пусто вне зависимости от вида критериев.

Прежде чем убедиться в справедливости последнего высказывания, напомним определение множества Парето (решений и векторов):

$$P_f(X) = \{x^* \in X \mid \text{не существует такого } x \in X, \text{ что } f(x) \geq f(x^*)\}.$$

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{не существует такого } y \in Y \text{, что } y \geq y^*\}.$$

где Y означает множество возможных векторов, т.е. $Y = f(X)$.

Теорема 3.1. *В случае непустого конечного множества возможных векторов Y (что заведомо будет выполнено, если непустым и конечным является множество возможных решений) существует хотя бы одно парето-оптимальное решение и хотя бы один парето-оптимальный вектор, т.е.* $P_f(X) \neq \varnothing$ и $P(Y) \neq \varnothing$.

□ Так как множество векторов Y не пусто, то найдется по крайней мере один вектор этого множества. Обозначим его $y^{(1)} \in Y$. Если этот вектор является парето-оптимальным, т.е. $y^{(1)} \in P(Y)$, то доказательство завершено. В противном случае (т.е. когда $y^{(1)} \notin P(Y)$) по определению парето-оптимального вектора должен найтись такой отличный от $y^{(1)}$ вектор $y^{(2)} \in Y$, что выполняется неравенство $y^{(2)} \geq y^{(1)}$. В свою очередь, если $y^{(2)} \in P(Y)$, то теорема доказана. В противном случае вновь существует вектор $y^{(3)} \in Y$, отличный как от вектора $y^{(2)}$, так и от вектора $y^{(1)}$, для которого верна цепочка неравенств $y^{(3)} \geq y^{(2)} \geq y^{(1)}$. Здесь либо вектор $y^{(3)}$ оказывается парето-оптимальным (и тогда доказательство завершено), либо найдется новый вектор $y^{(4)}$ и т.д.

Рассуждая подобным образом, обязательно придем к завершению доказательства. Это может произойти на очередном шаге, когда вектор, который должен найтись окажется парето-оптимальным. Если же указанная возможность ни на одном из очередных шагов не реализуется, то благодаря конечности числа возможных векторов обязательно наступит такой момент, когда для некоторого вектора $y^{(k)} \in Y$ соотношение $y^{(k)} \in P(Y)$ не может быть не выполнено по той простой причине, что этот вектор окажется последним возможным в рассматриваемой цепочке ■

3.1.2. Геометрия парето-оптимальности в случае двух критериев

Разберем простейший случай, когда число критериев равно двум, т.е. $m = 2$. В этом случае рассмотрение допускает наглядное представление, поскольку множество возможных векторов Y можно изобразить как некоторое множество точек на плоскости.

Согласно определению множества Парето вектор y^* будет парето-оптимальным, если для него не существует другого такого вектора $y \in Y$, что имеет место неравенство $y \geq y^*$. Нетрудно понять, что все точки y , для которых выполняется неравенство $y \geq y^*$ [5], составляют угол с вершиной в точке y^* и сторонами, параллельными координатным осям. При этом сама вершина y^* этому углу не принадлежит, так как $y \neq y^*$ (см. рис. 3.1). В соответствии с этим вектор y^* будет парето-оптимальным, если в указанный угол с вершиной в точке y^* не попадает ни одна точка множества Y (т.е. ни один из возможных векторов).

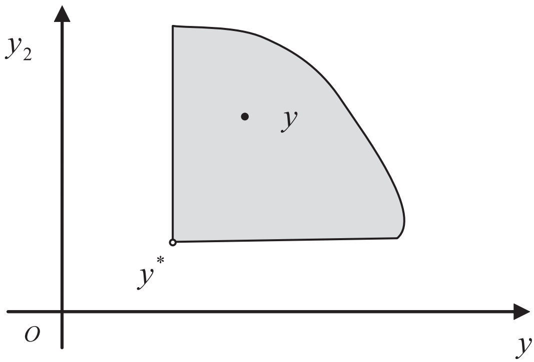

Рис. 3.1. Множество точек $y \in R^2$, удовлетворяющих неравенству $y \geq y^*$.

Таким образом, для того чтобы найти множество Парето, нужно для каждого допустимого двумерного вектора (точки на плоскости) построить (по крайней мере, умозрительно) указанный угол с вершиной в данной точке и посмотреть, находится ли в этом углу хотя бы одна из каких-то возможных точек множества Y или нет. Если такая точка найдется, то вершина угла не является парето-оптимальной, в противном случае вершина парето-оптимальна. Так, на рис. 3.2 из четырех возможных парето-оптимальными оказываются только точки $y^{(2)}$ и $y^{(3)}$, поскольку в соответствующие углы, вершинами которых они являются, не попадает ни одна точка множества Y .

[5] Напомним, что выполнение векторного неравенства $y \geq y^*$ в данном случае означает, что обе компоненты первого вектора y не меньше соответствующих компонент второго вектора, причем по крайней мере одна из этих двух компонент строго больше соответствующей компоненты второго вектора.

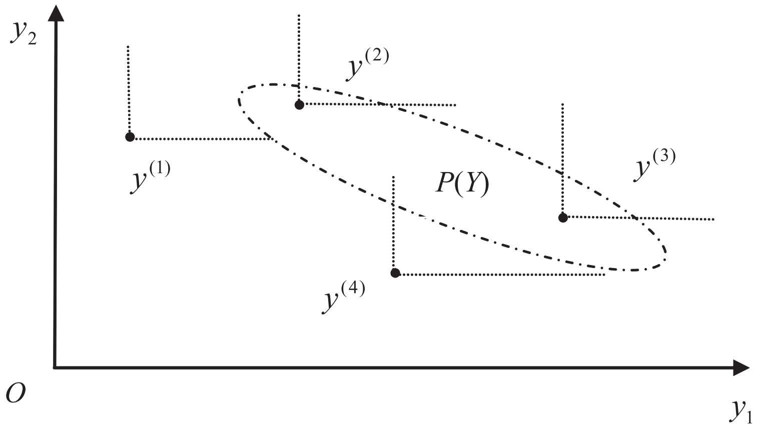

Рис. 3.2. Геометрия отыскания парето-оптимальных векторов на плоскости.

Подобным образом в случае двух критериев построение множества парето-оптимальных векторов всегда может быть произведено чисто геометрическим путем.

3.1.3. Алгоритм нахождения множества Парето

Если же число критериев больше двух, то указанные геометрические построения затруднены, и потому требуются иные подходы. Рассмотрим алгоритмический метод построения множества Парето.

Пусть множество возможных векторов Y состоит из конечного числа N элементов и имеет вид

$$Y = \{y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(N)}\} .$$

Для того чтобы на основе определения множества Парето построить его, следует каждый из векторов $y^{(i)} \in Y$ сравнить со всяким другим вектором $y^{(j)} \in Y$ с помощью отношения $\geq$. В случае, если для какой-то пары векторов неравенство $y^{(i)} \geq y^{(j)}$ выполняется, то второй вектор (т.е. $y^{(j)}$) по определению не может быть парето-оптимальным. Просмотрев таким образом все возможные пары и удалив из множества Y все векторы, которые не могут быть парето-оптимальными, в итоге придем к множеству Парето.

Приведем подробное описание указанного алгоритма, который состоит из следующих семи шагов.

Шаг 1. Положить $P(Y) = Y$, $i = 1, j = 2$. Тем самым образуется так называемое *текущее множество парето-оптимальных векторов*, которое в начале работы алгоритма совпадает с множеством Y , а в конце – составит искомое множество парето-оптимальных векторов. Алгоритм устроен таким образом, что искомое множество парето-оптимальных векторов получается из Y последовательным удалением заведомо неоптимальных векторов.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства $y^{(i)} \geq y^{(j)}$. Если оно оказалось истинным, то перейти к Шагу 3. В противном случае перейти к Шагу 5.

Шаг 3. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор $y^{(j)}$, так как он не является парето-оптимальным. Затем перейти к Шагу 4.

Шаг 4. Проверить выполнение неравенства $j < N$. Если оно имеет место, то положить $j = j + 1$ и вернуться к Шагу 2. В противном случае – перейти к Шагу 7.

Шаг 5. Проверить справедливость неравенства $y^{(j)} \geq y^{(i)}$. В том случае, когда оно является истинным, перейти к Шагу 6. В противном случае – вернуться к Шагу 4.

Шаг 6. Удалить из текущего множества векторов $P(Y)$ вектор $y^{(i)}$ и перейти к Шагу 7.

Шаг 7. Проверить выполнение неравенства $i < N - 1$. В случае истинности этого неравенства следует последовательно положить $i = i + 1$, а затем $j = i + 1$. После этого необходимо вернуться к Шагу 2. В противном случае (т.е. когда $i \geqq N - 1$) вычисления закончить. К этому моменту множество парето-оптимальных векторов построено полностью.

3.1.4. Пример (задача о выборе наилучшего проектного решения)

Предположим, что для участия в конкурсе представлено пять вариантов строительства предприятий различного типа (это могут быть машиностроительный завод, текстильная фабрика, молочный завод и т.п.) на территории, непосредственно прилегающей к жилому району. Оценивание качества проекта производится по четырем критериям: f_1 – стоимость реализации проекта, f_2 – величина прибыли проектируемого предприятия, f_3 – величина экологического ущерба от строительства и f_4 – заинтересованность жителей района в строительстве данного предприятия. Для простоты будем считать, что для оценки всех критериев была использована пятибалльная шкала в 1, 2, 3, 4 и 5 баллов. Поскольку первый и третий критерии желательно минимизировать, а не максимизировать как остальные, то вместо них введем и будем использовать критерии $\hat{f}_1 = 5 - f_1$ и $\hat{f}_3 = 5 - f_3$, подлежащие максимизации.

Число критериев $m=4$. Обозначим множество из пяти возможных векторов (оценок) соответствующих проектов через $Y=\{y^{(1)},y^{(2)},...,y^{(5)}\}$ и допустим, что в результате экспертизы проектов были получены результаты, представленные в табл. 1.1.

Табл. 1.1.

	Первый критерий	Второй критерий	Третий критерий	Четвертый критерий
$y^{(1)}$	4	3	4	3
$y^{(2)}$	5	3	3	3
$y^{(3)}$	2	4	2	4
$y^{(4)}$	5	3	2	3
$y^{(5)}$	3	4	3	4

В соответствии с описанным выше алгоритмом полагаем $P(Y)=Y$ и начинаем сравнивать первый вектор с остальными. Нетрудно заметить, что все пары

$$y^{(1)},y^{(2)};\quad y^{(1)},y^{(3)};\quad y^{(1)},y^{(4)};\quad y^{(1)},y^{(5)}$$

оказываются несравнимыми по отношению $\geq$.

Далее сравниваем вектор $y^{(2)}$ с векторами $y^{(3)},y^{(4)},y^{(5)}$. Пара $y^{(2)},y^{(3)}$ не сравнима по отношению $\geq$. Поскольку $y^{(2)}\geq y^{(4)}$, вектор $y^{(4)}$ удаляем из множества $P(Y)$. Оставшаяся пара векторов $y^{(2)},y^{(5)}$ не сравнима по отношению $\geq$.

Теперь сравниваем вектор $y^{(3)}$. Поскольку $y^{(5)}\geq y^{(3)}$, то вектор $y^{(3)}$ удаляется из $P(Y)$. Так как вектор $y^{(4)}$ был удален как доминируемый, то для сравнения остается один вектор $y^{(5)}$. Поскольку он остался один, то его уже не с чем сравнивать. Следовательно, $P(Y)=\{y^{(1)},y^{(2)},y^{(5)}\}$.

Именно из указанных трех проектов (первого, второго и пятого) и следует осуществлять окончательный выбор. Но для этого необходимо располагать дополнительной информацией о предпочтениях (см., например, гл. 4).

3.2. Задачи с бесконечным множеством возможных векторов

3.2.1. Отыскание множества парето-оптимальных векторов

Построение множества Парето в задачах с бесконечным множеством возможных векторов оказывается значительно сложнее, чем аналогичная задача в случае конечного множества. Какого-либо универсального метода (алгоритма) для решения этой задачи не существует. Исключение составляют различного рода специальные задачи, рассмотреть которые здесь не представляется возможным.

Отметим лишь простейший случай, когда критериев всего лишь два, т.е. $m = 2$. Тогда множество возможных векторов представляет собой некоторое множество точек плоскости, а множество Парето обычно образует «северо-восточную» часть границы этого множества. Так, на рис. 3.3 изображено множество возможных решений, имеющее вид невыпуклой фигуры. Здесь множество Парето образует дуга AB (без точки B) и отдельно взятая точка C.

3.2.2. Условие существования парето-оптимальных решений (векторов)

В случае, когда множество возможных решений (векторов) является бесконечным, ситуация с существованием парето-оптимальных решений (векторов) также усложняется. Чтобы получить условие существования парето-оптимальных решений (и векторов) приходится накладывать дополнительные ограничения как на множество возможных решений, так и на векторный критерий.

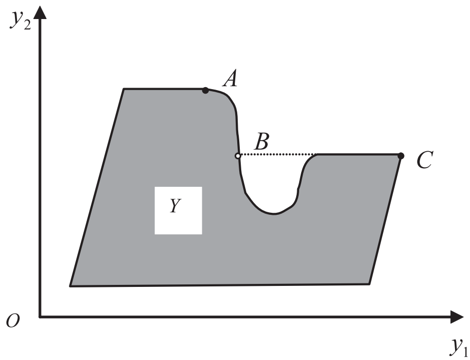

Рис. 3.3. Геометрия парето-оптимальных векторов.

Прежде всего, отождествим возможные решения с векторами арифметического векторного пространства R^n, т.е. будем считать, что всякое возможное решение представляет собой определенный упорядоченный набор вещественных чисел.

Формулируемый ниже результат можно рассматривать как обобщение на случай векторного критерия известной из курса математического анализа теоремы Вейерштрасса о том, что непрерывная функция нескольких переменных всегда достигает своего максимального значения на непустом компактном[6] множестве.

Теорема 3.2 (в терминах решений). *Предположим, что непустое множество возможных решений* X *представляет собой некоторое компактное подмножество пространства* R^n, *т.е.* $X \subset R^n$. *Если компоненты векторного критерия* f *являются непрерывными функциями на множестве* X, *то множество Парето (как решений, так и векторов) не пусто.*

□ Рассмотрим сумму всех компонент векторного критерия, т.е. числовую функцию $F(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$. Она будет непрерывной на множестве X как сумма непрерывных функций. Согласно упомянутой выше теоремы Вейерштрасса из курса математического анализа эта функция достигает своего максимального значения на множестве X. Обозначим указанную точку максимума через $x^* \in X$:

$$F(x^*) \geqq F(x) \quad \text{для всех } x \in X. \tag{3.1}$$

Точка x^* является парето-оптимальной, а значит множество Парето не пусто. Действительно, если это не так, то должна найтись точка $x' \in X$, для которой верно векторное неравенство $f(x') \geq f(x^*)$. Почленно суммируя компоненты векторов в обеих частях этого неравенства, придем к строгому неравенству $F(x') > F(x^*)$, которое не совместимо (3.1) ■

Формально положим в последней теореме $X = Y$ и $f_i(x) = y_i$, $i = 1, 2, ..., m$. Поскольку все получающиеся таким образом критерии линейны, а значит, непрерывны, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3.2 (в терминах векторов). *Предположим, что непустое множество возможных векторов* Y *является компактным подмножеством пространства* R^n. *Тогда множество парето-оптимальных векторов не пусто.*

[6] Напоминаем, что компактным называется замкнутое и ограниченное множество.

3.2.3. Условия парето-оптимальности

В рассматриваемом случае бесконечного числа возможных векторов (решений) нахождение множества Парето путем прямого перебора невозможно в принципе. Поэтому требуются специальные инструменты, облегчающие процесс построения этого множества. Такими «инструментами» могут служить необходимые и/или достаточные условия парето-оптимальности. Здесь ситуация вполне аналогична той, которая существует в обычной теории экстремальных задач: с помощью необходимых условий выделяется множество решений (векторов), которые являются «подозрительными» на парето-оптимальные, тогда как при помощи достаточных условий из полученного множества можно отобрать те решения (векторы), которые действительно парето-оптимальны. В настоящее время разработан достаточно широкий арсенал подобного инструментария, приспособленного для использования в различных классах многокритериальных задач. Ниже приводятся наиболее распространенные образцы из указанного арсенала.

Теорема 3.3 (достаточное условие парето-оптимальности). *Пусть* $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ *— произвольный вектор с положительными компонентами в сумме составляющими единицу*, *т.е.*

$$\mu_i > 0,\ i = 1,2,...,m\ ,\ \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\ .$$

Тогда всякая точка максимума на множестве X ***аддитивной свертки*** F_μ *критериев*, *определяемой равенством*

$$F_\mu(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(x)\ , \tag{3.2}$$

является парето-оптимальной.

□ Обозначим через $x^* \in X$ произвольную точку максимума функции F_μ на множестве X. Таким образом,

$$F_\mu(x^*) \geqq F_\mu(x) \quad \text{для всех } x \in X\ . \tag{3.3}$$

Установим парето-оптимальность точки x^*. Для доказательства предположим противное: существует такая точка $x' \in X$, что имеет место векторное неравенство $f(x') \geq f(x^*)$. Покомпонентно последнее неравенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &f_1(x') \geqq f_1(x^*)\ ,\\ &f_2(x') \geqq f_2(x^*)\ ,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &f_m(x') \geqq f_m(x^*)\ , \end{aligned}$$

где хотя бы одно из неравенств – строгое. Умножим первое из приведенных неравенств на число μ_1, второе – на число μ_2 и т.д. последнее – на μ_m. Так как все числа μ_i положительны, то после выполнения указанной операции умножения смысл знаков неравенств не нарушится. Далее, почленно складывая все образованные неравенства, придем к неравенству $F_\mu(x') > F_\mu(x^*)$, которое не совместимо с (3.3). Полученное противоречие свидетельствует о том, что на самом деле $x^* \in P_f(X)$ ■

Прежде чем формулировать следующий результат, напомним два определения. Множество $X, X \subset R^n$, называют *выпуклым*, если оно вместе с каждой парой своих точек содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Иными словами, множество X выпукло, если для любых точек $x', x'' \in X$ и для любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполнено включение $\lambda x' + (1-\lambda)x'' \in X$. Очевидно, само пространство R^n является выпуклым множеством. Простым примером выпуклого множества может служить многомерный параллелепипед, который задается системой неравенств $a_i \leqq x_i \leqq b_i$, $i = 1,2,...,n$, где все a_i и b_i – фиксированные числа.

Числовую функцию $g(x)$, заданную на выпуклом множестве X, $X \subset R^n$, называют *вогнутой*, если для любых точек $x', x'' \in X$ и для любого числа $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство $g(\lambda x' + (1-\lambda)x'') \geqq \lambda g(x') + (1-\lambda)g(x'')$. Нетрудно проверить (см. ниже упр. 1), что, например, линейная функция $g(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$ является вогнутой на всем пространстве R^n.

Теорема 3.4 (необходимое условие парето-оптимальности в форме аддитивной свертки критериев). *Пусть множество X выпукло и все компоненты вектор-функции f вогнуты на нем. Для любой парето-оптимальной точки $x^* \in P_f(X)$ существует такой вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ с компонентами, обладающими свойством*

$$\mu_i \geqq 0,\ i = 1,2,...,m,\ \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1, \tag{3.4}$$

что аддитивная свертка $F_\mu(x)$ вида (3.2) *в точке x^* достигает своего максимума на множестве X.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [18].

Согласно теоремам 3.3 и 3.4 отыскание множества парето-оптимальных точек при определенных условиях сводится к задаче максимизации аддитивной свертки $F_\mu(x)$ на множестве X. Иначе говоря, варьируя вектор μ в указанных границах и решая соответствующие задачи максимизации аддитивной свертки, в принципе можно построить все множество точек Парето. Такой прием носит название *скаляризации* многокритериальной задачи и состоит он в сведении многокритериальной задачи к семейству обычных (скалярных) экстремальных задач. Сложность реализации этого приема состоит в том, что возможных значений для вектора μ бесконечное число, и перебрать их все невозможно. Поэтому здесь можно говорить лишь о принципиальном сведе́нии, которое реализовать на практике не просто. И еще одно обстоятельство, на которое следует обратить внимание. В теореме 3.3 вектор μ имеет строго положительные компоненты, в сумме дающие единицу, а в теореме 3.4 эти компоненты лишь неотрицательны, а значит, в необходимом условии некоторые из них могут принимать нулевые значения. Эта своеобразная «нестыковка» необходимого и достаточного условия приводит к тому, что скаляризация с вектором μ, имеющим строго положительные компоненты, в общем случае не даст возможность получить все множество Парето, тогда как скаляризация с неотрицательными компонентами может привести к нахождению точек, не являющихся парето-оптимальными. На этот счет существуют соответствующие примеры.

Пример 3.1. Пусть $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 \,|\, (x_1)^2 + (x_2)^2 \leqq 1\}$ (см. рис. 3.4) и $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_2$. Множество возможных решений X представляет собой круг единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 3.4)

Здесь множество X выпукло, а критерии линейны. Парето-оптимальными являются все точки окружности, расположенные в первой четверти. Каждую из этих точек (кроме (0,1) и (1,0)) можно получить в результате максимизации аддитивной свертки $F_\mu(x) = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$ на множестве X с положительными коэффициентами μ_1, μ_2 в сумме, составляющей единицу. В то же время точки (0,1) и (1,0) невозможно получить в результате максимизации аддитивной свертки со строго положительными коэффициентами. Эти точки являются итогом максимизации линейной свертки F_μ лишь с парами коэффициентов $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ и $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$ соответственно.

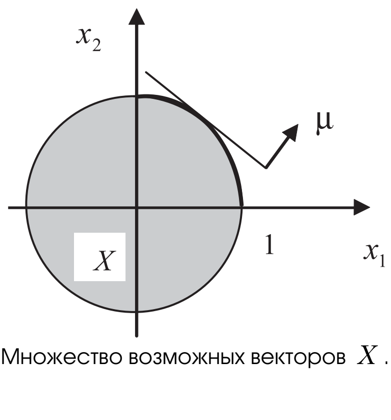

Рис. 3.4. Множество возможных векторов X.

Один из самых распространенных подходов к решению практических многокритериальных задач – *метод аддитивной* (*линейной*) *свертки критериев* – заключается в назначении из тех или иных соображений величин коэффициентов $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$ аддитивной свертки F_μ и последующей ее максимизации на множестве возможных решений X. При этом необходимо отметить, что такой подход не всегда является обоснованным. Существуют примеры, показывающие, что его применение в некоторых задачах может приводить к далеко не лучшим результатам.

3.3. Шкалы критериев и инвариантность множества Парето

3.3.1. Количественные шкалы

Когда речь идет о той или иной прикладной многокритериальной задаче, значения критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ представляют собой результаты измерения в некоторой шкале. Например, если рассматриваемый критерий выражает стоимость проекта, прибыль или затраты, то все эти величины могут быть выражены в рублях, миллионах рублей, долларах, евро или каких-то других денежных единицах. При измерении длин предметов результаты, как известно, получают в метрах, дюймах, футах, ярдах и т.п. Для указания временного промежутка используют часы, секунды, годы, миллионы лет и т.д. Таким образом, при решении конкретных прикладных задачи значения критериев измеряются в пределах той или иной шкалы и выражаются в определенных единицах измерения.

Существуют различные типы шкал измерения. Когда требуется подсчитать число предметов, людей, вещей и т.п., используется так называемая *абсолютная шкала*. Два разных измеряющих, независимо друг от друга выполнив измерения (подсчет) в этой шкале одних и тех же количеств, должны получить абсолютно идентичные результаты.

При измерении, например, такой физической характеристики, как масса предмета, используют различные единицы измерения. Известно, что масса предмета может быть выражена в килограммах, фунтах, тоннах, пудах и т.д. Здесь фиксированным для всех измеряющих оказывается лишь начало отсчета – нуль, который соответствует отсутствию какой-либо массы, тогда как единица измерения может оказаться различной для разных измеряющих. Точнее говоря, результаты измерений y_i' и y_i'' массы одного и того же объекта для двух различных измеряющих, пользующихся разными единица измерений, могут отличаться на некоторый фиксированный положительный множитель α_i, т.е. они связаны соотношением $y_i' = \alpha_i y_i''$. В этом случае говорят, что результаты измерений определяются с точностью до преобразования вида $\phi_i(y_i) = \alpha_i y_i$, где $\alpha_i > 0$. Шкала такого типа называется *шкалой отношений*. Название этой шкалы связано с тем, что при измерении в этой шкале независимо от единицы измерения отношения измерений будут одинаковыми для различных измеряющих. Действительно, пусть один измеряющий для двух объектов получил два числа y_i' и y_i'', а другой для тех же объектов – $\tilde{y}_i'$ и $\tilde{y}_i''$ соответственно. Поскольку $\tilde{y}_i' = \alpha_i y_i'$ и $\tilde{y}_i'' = \alpha_i y_i''$ при некотором положительном α_i, то выполняются равенства

$$\frac{\tilde{y}_i'}{\tilde{y}_i''} = \frac{\alpha_i y_i'}{\alpha_i y_i''} = \frac{y_i'}{y_i''},$$

которые и означают сохранение отношений измерений для различных измеряющих в шкале отношений. Таким образом, если какой-то измеряющий пришел к выводу, что, например, масса одного предмета в два раза больше массы другого предмета, то и другой измеряющий (использующий другие единицы измерения) должен прийти к тому же самому выводу. Это свидетельствует о том, что, при сравнении результатов измерения в шкале отношений, высказывание «во столько-то раз больше (меньше)» является осмысленным.

Нетрудно понять, что измерение таких величин, как прибыль, затраты и т.п., выраженных в единицах какой-либо валюты, также следует производить в шкале отношений.

Шкалой разностей называется такая шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до преобразования $\phi_i(y_i) = y_i + c_i$, где c_i – фиксированное число. Измерения в этой шкале характеризуются сохранением разностей между двумя разными измерениями, выполненными различными измеряющими. Другими словами, для измерений, выполненных в шкале разностей, осмысленным является высказывание «на столько-то больше (меньше)».

Шкалой интервалов называется шкала, в которой результаты измерений определяются с точностью до линейного положительного преобразования вида $\phi_i(y_i) = \alpha_i y_i + c_i$, где $\alpha_i > 0$ и c_i – фиксированные числа. Типичным примером такой шкалы может служить шкала температур. Для измерения температуры существуют, например, шкалы Цельсия и Фаренгейта. Переход от результатов измерений в одной шкале к результатам в другой происходит как раз по формулам вида $\tilde{y}_i = \alpha_i y_i + c_i$.

Все перечисленные выше шкалы – абсолютную, отношений, разностей и интервалов относят к *количественным шкалам*. Понятно, что результаты измерения, инвариантные относительно линейного положительного преобразования $\tilde{y}_i = \alpha_i y_i + c_i$, будут инвариантны и относительно преобразования вида $\tilde{y}_i = a_i y_i$, а также $\tilde{y}_i = y_i + c_i$. По этой причине среди количественных шкал наиболее «общей» оказывается шкала интервалов. Поэтому все утверждения, полученные для измерений, выполненных в шкале интервалов, будут иметь место и для измерений в шкалах отношений и разностей (тем более, для абсолютной шкалы).

3.3.2. Качественные шкалы

Такого рода шкалы используют, например, для измерения различных психофизических величин, силы землетрясения, а также степени разрушения материала или конструкции. Кроме того, качественные шкалы нередко применяют для оценки престижности, привлекательности или эргономичности товара.

Представителем качественной шкалы является *порядковая шкала*, в которой результаты измерений определяются с точностью до преобразований вида $\phi_i(y_i)$, где ϕ_i – строго возрастающая функция. Примерами порядковой шкалы могут служить шкала упорядочения по важности выполнения работ, различные балльные шкалы (например, шкала для оценки успеваемости школьников и студентов, шкалы для измерения силы землетрясения, а также твердости минералов). Для результатов измерений в порядковой шкале лишены смысла высказывания «во столько-то раз больше (меньше)», а также «на столько-то единиц больше (меньше)». По этой причине разница в знании между студентами, получившими четверку и пятерку не равна разнице в знании между теми, кто имеет тройку и четверку, хотя и в первом и во втором случаях разница в оценках одна и та же. В случае измерения в порядковой шкале имеет смысл только отношение «больше-меньше».

Номинальной (или *шкалой наименований*) называется шкала, в которой результаты измерений инвариантны относительно любого взаимно однозначного преобразования. Суть измерения в номинальной шкале заключается в классификации результатов измерений, т.е. в разбиении объектов на классы или группы. В этой качественной шкале теряет смысл даже отношение «больше-меньше». Примером измерения в номинальной шкале может служить классификация людей по половому признаку, по принадлежности к той или иной расе или конфессии и т.п.

Все утверждения, полученные для результатов измерений, выполненных в какой-то качественной (в том числе, порядковой) шкале, имеют место и для любой количественной шкалы, тогда как обратное не верно.

3.3.3. Инвариантность множества Парето относительно строго возрастающего преобразования критериев

Напомним определение множества Парето (в терминах векторов):

$$P(Y) = \{y^* \in Y \mid \text{ не существует такого } y \in Y \text{ , что } y \geq y^*\}.$$

Выполнение неравенства $y \geq y^*$, участвующего в определении множества Парето, означает справедливость покомпонентных неравенств $y_i \geqq y_i^*$ для всех $i = 1,2,...,m$, причем по крайней мере для одного номера i последнее неравенство является строгим.

Пусть ϕ_i – строго возрастающая числовая функция одной переменной, заданная на всей числовой оси, т.е.

$$y_i > y_i' \quad \Leftrightarrow \quad \phi_i(y_i) > \phi_i(y_i')$$

для всех $y_i, y_i' \in R$. Очевидно, в этом случае выполнение равенства $y_i = y_i'$ равносильно выполнению равенства $\phi_i(y_i) = \phi_i(y_i')$. Далее, для такой функции в соответствии с ее определением неравенство $y_i > y_i'$ имеет место тогда и только тогда, когда верно неравенство $\phi_i(y_i) > \phi_i(y_i')$.

Нетрудно видеть, что определение множества Парето по существу не изменится, если к значениям критериев применить строго возрастающее преобразование ϕ_i, т.е. всюду в данном определении функцию $f_i(x)$ заменить на $\phi_i(f_i(x))$. Из этого следует, что множество Парето оказывается инвариантным относительно указанного преобразования, а значит, *понятие множества Парето можно использовать во всех тех случаях, когда измерения значений критериев производят в порядковых* (*тем более, – в любых количественных*) *шкалах.*

Выводы

Благодаря принципу Эджворта-Парето множество парето-оптимальных решений (векторов) играет важную роль в принятии решений при наличии нескольких критериев. Это множество всегда непусто, если множество возможных решений содержит некоторое конечное число элементов. Для бесконечного множества возможных решений можно получить лишь некоторые достаточные условия их существования. Находить парето-оптимальные решения в случае конечного множества возможных решений можно с помощью переборного алгоритма. В бесконечном случае для этой цели служат необходимые и/или достаточные условия парето-оптимальности, например, в терминах аддитивной свертки критериев.

Имеются различные шкалы, в которых производятся измерения критериев. Они делятся на два больших класса – количественные и качественные. При решении практических задач следует грамотно выбирать ту или иную шкалу, так как неправильный ее выбор может привести к получению некорректных результатов.

Основные понятия

Алгоритм нахождения множества Парето, аддитивная свертка критериев, скаляризация многокритериальной задачи, количественные шкалы, качественные шкалы.

Контрольные вопросы

1. Что можно сказать о существовании парето-оптимальных решений в случае, когда множество возможных решений состоит из конечного числа элементов?
2. Опишите алгоритм построения множества Парето для случая конечного множества возможных векторов.
3. Сформулируйте в терминах решений теорему о существовании парето-оптимальных векторов для задачи с бесконечным множеством возможных векторов.
4. Какой вид имеет аддитивная свертка критериев $f_1, f_2, ..., f_m$?
5. В чем заключается «скаляризация» многокритериальной задачи на основе аддитивной свертки критериев?
6. Сформулируйте необходимое (а также достаточное) условие парето-оптимальности для задачи с множеством возможных решений, представляющим собой бесконечное подмножество векторного пространства R^n .
7. На какие две группы можно разделить все возможные шкалы критериев? К какой из этих групп относятся балльные шкалы?
8. Какие количественные шкалы вы знаете? Приведите соответствующие определения и примеры.

Упражнения

1. Установить вогнутость линейной функции $g(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$ на всем пространстве R^n.
2. Доказать вогнутость функции $z = c_1 - |c_2|(x-a)^2 - |c_3|(y-b)^2$ двух переменных x и y на всей плоскости xOy при любых значениях ее коэффициентов.

Указание. Сначала установить эквивалентность вогнутости данной функции вогнутости более простой функции $z = -x^2 - y^2$. Вогнутость последней проверить непосредственно, опираясь на определение вогнутой функции.

3. Рассмотрим производство одним производителем двух товаров с использованием 1 ед. труда L и 1 ед. капитала K. По условию, если какая-то часть данной единицы труда (и капитала) уходит на производство одного товара, то оставшаяся приходится на производство второго товара. Функции полезности данных товаров имеют вид $U_1 = 3 - (L-1)^2 - (K-1.2)^2$ и $U_2 = 5 - (L+0.4)^2 - K^2$, соответственно. Рассмотрим декартову систему координат, в которой горизонтальной является ось OL, а вертикальной – OK. На основе так называемого *ящика Эджворта* (см., например, [3]) убедиться, что множеством Парето (*контрактной кривой*) в данном случае служит отрезок на декартовой плоскости LOK, соединяющий точки (0, 12/35) и (23/30, 1).
4. В предположении, что функция $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ является вогнутой на выпуклом множестве $X, X \subset R^n$, и принимает на нем только положительные значения, установите вогнутость функции $\ln g(x_1, x_2, ..., x_n)$ на том же множестве X.
5. Проверьте справедливость следующего достаточного условия парето-оптимальности в форме мультипликативной свертки:

   Пусть вектор $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ имеет положительные компоненты и все критерии $f_1, f_2, ..., f_n$ принимают положительные значения на множестве X. Если мультипликативная свертка

   $$G_\mu(x) = f_1^{\mu_1}(x) \cdot f_2^{\mu_2}(x) \cdot ... \cdot f_m^{\mu_m}(x)$$

   в точке x^* достигает своего максимума на множестве X, то $x^* \in P_f(X)$.
6. Используя теорему 3.4 и результат упр. 4, докажите следующее необходимое условие парето-оптимальности в форме мультипликативной свертки:

   Пусть множество $X, X \subset R^n$, выпукло и все компоненты вектор-функции $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ вогнуты и положительны на нем. Тогда для *любой парето-оптимальной точки* $x^* \in P_f(X)$ *найдется такой вектор* $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ *с компонентами, обладающими свойством*

$$\mu_i \geqq 0,\ i = 1, 2, ..., m\ ,\ \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\ ,$$

что мультипликативная свертка $G_\mu(x)$ *в точке* x^* *достигает своего максимума на множестве* X .

Глава 4. Относительная важность критериев

Здесь вводится определение относительной важности для двух критериев. В основе этого понятия лежит идея возможности компенсации потерь значений по менее важному критерию возрастанием значений по более важному критерию. Степень относительной важности количественно оценивается положительными параметрами, которые составляют соответственно величину потери по менее важному и величину прироста по более важному критериям.

Показывается, каким образом в процессе принятия решений следует учитывать информацию об относительной важности критериев.

4.1. Поведение человека в многокритериальной среде

Многокритериальные задачи принятия решений представляют собой исключительно сложный класс задач интеллектуальной деятельности человека. Наличие нескольких критериев усиливает нагрузку на ограниченную естественными пределами оперативную память человека, делает задачу, стоящую перед человеком, более неопределенной, требует высокой концентрации внимания и нередко – нестандартного мышления.

К настоящему времени еще нет полной картины того, каким образом и при помощи каких механизмов человек осуществляет выбор в многокритериальной среде. Существуют лишь определенные подходы и варианты предложений решения этих сложных вопросов. При этом они нередко в чем-то противоречат друг другу и в совокупности явно не исчерпывают все возможные способы выбора. Считается, что одной из наиболее типичных черт поведения индивида в ходе решения задачи выбора является расчленение (декомпозиция) исходной проблемы на множество более простых промежуточных задач.

Когда имеется всего два возможных варианта (решения), стратегии поведения человека в условиях многокритериальной среды в этом простейшем случае, можно разделить на два класса:

- стратегия компенсации
- стратегия исключения.

Стратегия компенсации соответствует такой линии поведения человека, при которой низкие показатели по одному критерию (или сразу по нескольким критериям) искупаются (компенсируются) высоким показателем по другому критерию (или одновременно по некоторым другим критериям). Типичный пример выбора при использовании стратегии компенсации – покупка автомобиля, когда невысокая экономичность (т.е. большой расход горючего) может окупаться стильным видом или престижной маркой автомобиля. Другой пример подобного рода – приобретение дома с не совсем удачной планировкой комнат и несколько завышенной ценой, но в тихом районе парковой зоны, расположенном не слишком далеко от места работы.

Стратегия исключения (или *некомпенсирующая стратегия*) состоит в удалении (исключении) из списка имеющихся возможных вариантов тех, которые заведомо не удовлетворяют по какому-то одному или же сразу по нескольким критериям одновременно. Например, при покупке автомобиля или дома покупатель, пользуясь некомпенсирующей стратегией, сразу исключает такие варианты, которые выходят за пределы его финансовых возможностей. Еще один характерный пример некомпенсирующей стратегии, связанный с покупкой автомобиля, – это такая ситуация, когда внимание покупателя сосредотачивается только на моделях с автоматической коробкой передач, а все машины с ручной передачей сразу исключаются из дальнейшего рассмотрения.

4.2. Основные понятия теории относительной важности критериев

4.2.1. Определение относительной важности

Как указывалось ранее, задача многокритериального выбора (в терминах решений) включает множество возможных решений X, векторный критерий $f=(f_1,f_2,...,f_m)$ и отношение предпочтения $\succ_X$, заданное на множестве X. В терминах векторов эта же задача содержит множество возможных векторов $Y, Y \subset R^m$, и отношение предпочтения $\succ$, заданное на пространстве R^m.

Напомним, что множество допустимых векторов определяется равенством

$$Y = f(X) = \{y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при некотором } x \in X\},$$

а отношение предпочтения $\succ_X$ в силу эквивалентности

$$f(x') \succ_Y f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x' \succ_X x \qquad \text{для } x', x \in X$$

тесно связанно с отношением предпочтения $\succ_Y$, заданном на множестве векторов Y. В свою очередь, последнее отношение $\succ_Y$ является сужением отношения предпочтения $\succ$ на множество Y.

В основу теории относительной важности критериев положено следующее определение, реализующее идею компенсации, о которой шла речь в предыдущем разделе.

Определение 4. 1. Пусть *i* и *j* – два различных номера критериев. Говорят, что *i-й критерий f_i важнее j-го критерия f_j с заданными положительными параметрами w_i, w_j*, если для любого вектора $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^m$ имеет место соотношение $y' \succ y$, где $y' = (y_1', y_2', ..., y_n')$, причем

$$y_i' = y_i + w_i; \quad y_j' = y_j - w_j; \quad y_s' = y_s, \quad . \tag{4.1}$$

для всех $s = 1, 2, ..., m, s \neq i, s \neq j$

Рассмотрим векторы $y, y' \in R^m$, участвующие в приведенном определении. Они отличаются лишь i-й и j-й компонентами, причем $y_i' > y_i$ и $y_j' < y_j$. В силу аксиомы 4 о согласовании отношения предпочтения с критериями, ЛПР заинтересовано в максимизации каждой компоненты возможного вектора. Поэтому последние два неравенства означают, что по i-у критерию вектор y' предпочтительнее вектора y, тогда как по j-у критерию наоборот – вектор y предпочтительнее y'. В соответствии с определением 4.1 i-й критерий важнее j-го, если всякий раз при выборе из указанной пары векторов y и y' ЛПР отдаст предпочтение вектору y'. Иначе говоря, ЛПР всегда готово пожертвовать определенным количеством w_j по менее важному j-у критерию ради получения дополнительного количества (компенсации) w_i по более важному i-у критерию при условии сохранения значений всех остальных критериев.

Замечание 4.1. В определении 4.1 присутствует отношение предпочтения $\succ$, которым ЛПР руководствуется процессе принятия решения. Как мы уже знаем, у разных ЛПР отношения предпочтения в общем случае различные. Следовательно, данное определение самым непосредственным образом связано с субъектом (т.е. с ЛПР) и отражает его предпочтения. В этом проявляется «субъективный» характер определения 4.1.

При помощи чисел w_i и w_j можно количественно оценить указанную степень относительной важности. Для этой цели можно использовать, например, отношение w_i / w_j, которое может меняться в пределах от нуля до бесконечности. Однако более удобным оказывается «нормированное» отношение, составленное из указанных двух чисел.

Определение 4. 2. Пусть i-й критерий важнее j-го критерия с положительными параметрами w_i и w_j. Положительное число

$$\theta_{ij} = \frac{w_j}{w_i + w_j} \tag{4.2}$$

называют *коэффициентом относительной важности* для указанной пары критериев.

Так как

$$\theta_{ij} = \frac{1}{\frac{w_i}{w_j} + 1}$$

и отношение w_i / w_j заключено в пределах от нуля до бесконечности, то коэффициент относительной важности всегда удовлетворяет неравенству (условию нормировки): $0 < \theta_{ij} < 1$. Этот коэффициент показывает долю потери по менее важному критерию, на которую согласно пойти ЛПР, в сравнении с суммой указанной потери и прибавки по более важному критерию. Если коэффициент θ_{ij} близок к единице, то это означает, что ЛПР за относительно небольшую прибавку по более важному i-у критерию готово платить довольно большой потерей по менее важному j-у критерию. Такое положение соответствует ситуации, когда i-й критерий имеет сравнительно высокую степень важности по сравнению с j-м критерием. В случае, когда этот коэффициент вблизи нуля, ЛПР согласно пойти на потери по менее важному критерию лишь при условии получения существенной прибавки по более важному критерию. Это означает, что степень важности i-го критерия сравнительно невысока; данное положение и находит свое выражение в малом значении коэффициента относительной важности. Если $\theta_{ij} = 1/2$, то ЛПР готово согласиться на какую-то прибавку по более важному критерию за счет потери по менее важному критерию при условии, что величина потери в точности совпадает с величиной прибавки.

Пример 4.1. Пусть соотношение $(a+1, b-2, c) \succ (a, b, c)$ имеет место при всех числовых значениях параметров a, b и c. Согласно определению 4.1 это означает, что первый критерий важнее второго, причем $w_1 = 1,\ w_2 = 2$. Здесь ЛПР всегда готово пожертвовать двумя единицами по второму (менее важному) критерию ради получения прибавки в одну единицу по первому (более важному) критерию. При этом нетрудно подсчитать коэффициент относительной важности. В данном случае он равен $\theta_{12} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$.

Необходимо добавить, что отмеченная выше степень относительной важности критериев, а значит и величина коэффициента относительной важности θ_{ij}, находится в прямой зависимости от типа шкалы, в которой измеряется тот или иной критерий. Подробнее об этом пойдет речь позже.

4.2.2. Требование инвариантности отношения предпочтения

Далее в данной главе будем предполагать выполненными аксиомы 1, 3 и 4 сформулированные в гл. 2.

Приведем определение инвариантного бинарного отношения. Бинарное отношение $\Re$, заданное на пространстве R^m, называют *инвариантным относительно линейного положительного преобразования*, если для произвольных двух векторов $y, y' \in R^m$ из выполнения соотношения $y \Re y'$ всегда следует соотношение $(\alpha y + c)\Re(\alpha y' + c)$ для любого вектора $c \in R^m$ и всякого положительного числа α. Иначе говоря, отношение $\Re$ является инвариантным относительно положительного линейного преобразования, если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) свойством аддитивности: $y \Re y', \quad c \in R^m \Rightarrow \quad (y+c)\Re(y'+c)$
2) свойством однородности: $y \Re y', \quad \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha y)\Re(\alpha y')$.

Отношения в виде неравенств $>$, $\geqq$, $\geq$, заданных на пространстве R^m, дают простейшие примеры бинарных отношений, инвариантных относительно линейного положительного преобразования. Можно проверить (см. в конце данной главы упр. 2), что лексикографическое отношение также относится к классу инвариантных бинарных отношений.

В целом ряде практически важных задач многокритериального выбора отношение предпочтения $\succ$ можно считать инвариантным относительно линейного положительного преобразования. В соответствии с этим в дополнение к аксиомам 1, 2 и 3 добавим еще одну.

Аксиома 4 (инвариантность отношения предпочтения). *Отношение предпочтения $\succ$ является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.*

Как указано выше, признаком инвариантности отношения $\succ$ является наличие у него свойств аддитивности и однородности.

4.2.3. Упрощение определения 4.1

Определение относительной важности критериев, данное выше, придает точный смысл выражению «i-й критерий важнее j-го критерия с некоторой парой положительных параметров». Это определение в условиях выполнения аксиомы 4 можно существенно упростить. Об этом свидетельствует следующий результат.

Лемма 4.1. *Благодаря свойству аддитивности отношения предпочтения* $\succ$ *вектор* $y \in R^m$ *в определении* 4.1 *можно считать любым фиксированным*, *в том числе*, *равным нулевому вектору.*

□ Пусть соотношение $\tilde{y}' \succ \tilde{y}$ имеет место для произвольно выбранного и зафиксированного вектора $\tilde{y} \in R^m$. При этом вектор $\tilde{y}'$ отличается от вектора $\tilde{y}$ лишь i-й и j-й компонентами: $\tilde{y}'_i = \tilde{y}_i + w_i, \tilde{y}'_j = \tilde{y}_j - w_j$. Из соотношения $\tilde{y}' \succ \tilde{y}$ в силу аддитивности отношения предпочтения $\succ$ немедленно получаем требуемое соотношение

$$y' = \tilde{y}' + (y - \tilde{y}) \succ \tilde{y} + (y - \tilde{y}) = y ,$$

где векторы y' и y – из определения 4.1.

В частности, с самого начала доказательства всегда можно взять $\tilde{y} = 0_m$ ■

Как указано выше, в силу аксиомы 4 отношение предпочтения $\succ$ предполагается инвариантным относительно линейного положительного преобразования. Опираясь на лемму 4.1, сформулируем новое, более простое определение относительной важности, эквивалентное определению 4.1.

Определение 4.3. *Критерий* f_i *важнее критерия* f_j *с положительными параметрами* w_i, w_j, если соотношение $\tilde{y} \succ 0_m$ выполнено для вектора $\tilde{y}$, все компоненты которого, кроме i-й и j-й, равны нулю, причем $\tilde{y}_i = w_i, \tilde{y}_j = -w_j$.

В соответствии с определением 4.3 для того чтобы проверить, действительно ли i-й критерий является важнее j-го критерия с положительными параметрами w_i, w_j, достаточно убедиться лишь в том, что указанный в определении 4.1 вектор $\tilde{y}$ предпочтительнее нулевого вектора.

Пример 4.2. В условиях выполнения Аксиомы 4, если вектор $(0.7, -0.3, 0)$ оказывается для некоторого ЛПР предпочтительнее нулевого вектора $(0, 0, 0)$, то для этого ЛПР первый критерий важнее второго, причем коэффициент относительной важности равен $\theta_{12} = 0.3$.

4.3. Сужение множества Парето на основе информации об относительной важности критериев

4.3.1. Теорема о сужении множества Парето

В соответствии с принципом Эджворта-Парето наилучшие решения следует выбирать среди парето-оптимальных. Если же в задаче принятия решений имеется дополнительная информация о том, что один из критериев важнее другого, то мы праве рассчитывать на то, что такого рода информация позволит облегчить последующий выбор в пределах множества Парето. Иначе говоря, дополнительная информация об относительной важности критериев может быть использована для того, чтобы «забраковать» некоторые парето-оптимальные решения и, тем самым, сузить множество Парето и упростить последующий выбор. Об этом идет речь в следующей теореме, доказательство которой можно найти в [10].

Теорема 4.1. *Предположим, что выполняются аксиомы* $1-4$ *и* i *-й критерий важнее* j *-го с положительными параметрами* w_i, w_j. *Тогда для любого непустого множества выбираемых решений* $C(X)$ *и выбираемых векторов* $C(Y)$ *имеют место включения*

$$C(X) \subset P_{\hat{f}}(X) \subset P_f(X), \tag{4.3}$$

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y), \tag{4.4}$$

где $P_{\hat{f}}(X)$ — *множество парето-оптимальных решений в многокритериальной задаче с множеством возможных решений* X *и «новым» векторным критерием* $\hat{f} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, ..., \hat{f}_m)$, *компоненты которого вычисляются по формулам*

$$\hat{f}_j = w_j f_i + w_i f_j ;$$

$$\hat{f}_s = f_s, \quad s = 1,2,...,m, \; s \neq j, \tag{4.5}$$

а $\hat{P}(Y) = f(P_{\hat{f}}(X))$.

Замечание 4.2. Множество Парето инвариантно относительно строго возрастающего преобразования критериев (см. главу 3). В частности, множество Парето не изменится, если произвольный критерий умножить (или разделить) на какое угодно положительное число. В соответствии с этим разделим критерий $\hat{f}_j$ на положительное число $w_i + w_j$ и оставим для него прежнее обозначение. Тогда первое из равенств (4.5) можно переписать в виде

$$\hat{f}_j = \theta_{ij} f_i + (1-\theta_{ij}) f_j \ , \qquad (4.6)$$

где θ_{ij} – коэффициент относительной важности, определяемый равенством (4.2).

Замечание 4.3. Следует обратить внимание на универсальность теоремы 4.1, проявляющуюся в том, что в ней отсутствуют какие бы то ни было требования к множеству возможных решений X и векторному критерию f. Это говорит о том, что она применима к любой задаче многокритериального выбора, в которой выполнены аксиомы 1 – 4. При этом множество возможных решений (и векторов) может состоять как из конечного, так и бесконечного числа элементов, а функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ могут быть какими угодно – нелинейными, невыпуклыми, невогнутыми, а также не обладать свойством дифференцируемости или непрерывности. Ограничения в условиях теоремы 4.1 накладываются лишь на поведение ЛПР – оно должно вести себя «разумно» в процессе выбора, т.е. удовлетворять аксиомам 1 – 4.

Формула (4.5) (и (4.6)) для вычисления «нового» критерия $\hat{f}$ на основе «старого» f чрезвычайно проста. В соответствии с ней «новый» векторный критерий получается из «старого» заменой менее важного критерия f_j на линейную комбинацию критериев f_i и f_j с положительными коэффициентами $w_j, w_i,$. Все остальные «старые» критерии сохраняются. Нетрудно видеть, что при подобном «пересчете» j-го критерия многие полезные с точки зрения теории экстремальных задач свойства критериев f_i и f_j сохраняются. Например, если указанные критерии являются непрерывными, дифференцируемыми, вогнутыми или линейными, то новый критерий $\hat{f}_j$ так же будет обладать соответствующими свойствами.

Необходимо отметить, что в определенных случаях (в особенности, когда коэффициент относительной важности θ_{ij} близок к нулю, а значит, критерии f_j и $\hat{f}_j$ почти равны друг другу) указанного выше сужения множества Парето может и не произойти из-за совпадения множеств Парето относительно «старого» и «нового» векторных критериев, т.е. $\hat{P}(Y) = P(Y)$. Можно сказать, что в таких случаях имеющаяся информация об относительной важности критериев не является содержательной.

Рис. 4.1 иллюстрирует включения (4.3).

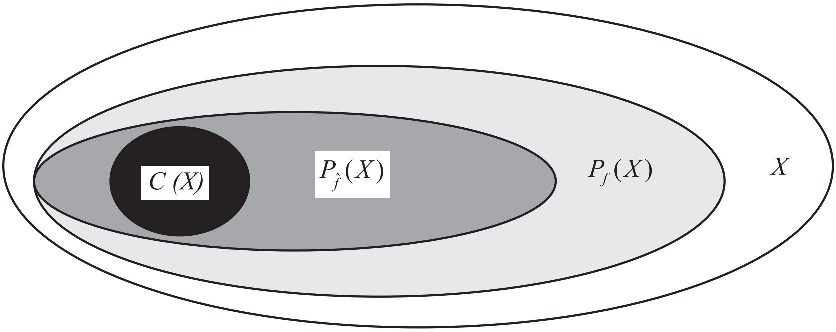

Рис. 4.1. Геометрическая иллюстрация включений (4.3).

Пример 4.3 (задача выбора объекта для инвестирования). Применим теорему 4.1 для решения следующей задачи. Пусть имеется три объекта для инвестирования средств. Для оценки выгодности инвестирования используются два критерия: величина прироста прибыли от вложения, измеряемая в процентах по отношению к исходной сумме инвестирования, и надежность вложенных средств, измеряемая в пятибалльной шкале от 1 до 5.

Будем считать, что прирост надежности при переходе от отметки в 1 балл к отметке в 2 балла точно такой, как и при переходе от отметки k ($k \in \{2,3,4\}$) к отметке $k+1$. Это предположение дает возможность принять, что величина надежности измеряется в количественной шкале (шкале разностей).

Пусть множество возможных векторов Y состоит из трех векторов

$$y^{(1)} = (40,1),\ y^{(2)} = (30,2),\ y^{(3)} = (10,3).$$

Нетрудно видеть, что все три вектора являются парето-оптимальными, т.е. принцип Эджворта-Парето не позволяет сузить область поиска выбираемых векторов.

Предположим, что от ЛПР поступила дополнительная информация о том, что первый критерий (прирост прибыли) важнее второго (надежности). Положим $w_2 = 1$. Тогда пересчитанные согласно формуле (4.5) векторы будут иметь вид

$$\hat{y}^{(1)} = (40, 40 + w_1),\ \hat{y}^{(2)} = (30, 30 + 2w_1),\ \hat{y}^{(3)} = (10, 10 + 3w_1)\ .$$

Система неравенств

$$40 + w_1 \geqq 30 + 2w_1, \quad 40 + w_1 \geqq 10 + 3w_1$$

имеет решение $w_1 \leqq 10$. Следовательно, если ЛПР за прирост прибыли в размере до 10% готово пожертвовать уменьшением величины надежности на одну единицу, то этому ЛПР следует выбирать первый вектор $y^{(1)}$, так как в данном случае $\hat{y}^{(1)} \geqq \hat{y}^{(2)}$ и $\hat{y}^{(1)} \geqq \hat{y}^{(3)}$. Иными словами, если коэффициент относительной важности θ_{12} больше либо равен

$$\frac{1}{10+1} \approx 0.09 ,$$

то выбранным должен быть единственный первый вектор.

Если $10 \leqq w_1 \leqq 20$, то, как нетрудно проверить, выполняется неравенство $\hat{y}^{(2)} \geq \hat{y}^{(3)}$. При этом векторы $\hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(2)}$ оказываются несравнимыми по отношению $\geq$. Значит, $y^{(3)}$ в этом случае следует исключить из числа выбираемых векторов.

Наконец, при $w_1 > 20$ выбранным может оказаться любой из трех имеющихся векторов, так как в этом случае $\hat{y}_2^{(1)} < \hat{y}_2^{(2)} < \hat{y}_2^{(3)}$ и три вектора $\hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(2)}, \hat{y}^{(3)}$ составляют множество Парето $\hat{P}(Y)$. Это означает, что информация о том, что ЛПР за потерю в одну единицу надежности соглашается на прирост прибыли лишь на величину, большую 20%, является в данном случае несущественной. Она не позволяет произвести сужение исходного множества Парето, совпадающего с Y. Иначе говоря, коэффициент относительной важности первого критерия по сравнению со вторым, равный или меньший

$$\theta_{12} = \frac{1}{20+1} \approx 0.048 ,$$

свидетельствует о степени относительной важности, не дающей возможности в данном случае удалить из числа выбираемых ни один из возможных векторов.

4.3.2. Случай линейных критериев

Наиболее простой вид формула (4.6) для пересчета менее важного критерия f_j принимает в случае, когда критерии f_i, f_j линейны. Сформулируем соответствующий результат.

Следствие 4.1. *Если дополнительно к предположениям теоремы* 4.1 *добавить условие* $X \subset R^n$ *и требование линейности критериев* f_i *и* f_j, *т.е.*

$$f_k(x) = \langle c^{(k)}, x \rangle = \sum_{l=1}^{n} c_l^{(k)} x_l, \qquad k = i, j ,$$

где $c^{(k)} = (c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \ldots, c_n^{(k)}) \in R^n$, *то «новый»* j *-й критерий будет иметь вид* $\hat{f}_j(x) = \langle \hat{c}, x \rangle$, *где*

$$\hat{c} = w_j c^{(i)} + w_i c^{(j)} , \quad \text{или} \quad \hat{c} = \theta_{ij} c^{(i)} + (1 - \theta_{ij}) c^{(j)} . \tag{4.7}$$

☐ В самом деле, из формулы (4.5) с учетом свойств скалярного произведения векторов пространства R^m получаем

$$w_j f_i + w_i f_j = w_j\langle c^{(i)},x\rangle + w_i\langle c^{(j)},x\rangle = \langle w_j c^{(i)},x\rangle + \langle w_i c^{(j)},x\rangle = \langle w_j c^{(i)} + w_i c^{(j)},x\rangle = \langle \hat{c},x\rangle.$$

Второе равенство в (4.7) может быть получено аналогично из (4.6) ■

Второе из равенств (4.7) имеет наглядную интерпретацию в случае, когда множеством возможных решений является подмножеством двумерного векторного пространства, т.е. когда $X \subset R^2$ (рис. 4.2).

Чем меньше положительный коэффициент относительной важности θ_{ij} отличается от нуля, тем ближе конец вектора $\hat{c}$ к концу вектора $c^{(j)}$. При увеличении θ_{ij} в пределах интервала $(0,1)$ вектор $c^{(i)}$, соответствующий более важному критерию, как бы притягивает к себе вектор $\hat{c}$, соответствующий новому j-у критерию. В случае $\theta_{ij} = 0.5$ конец вектора $\hat{c}$ будет располагаться в центре отрезка, соединяющего концы двух векторов $c^{(i)}$ и $c^{(j)}$. Если же коэффициент относительной важности близок к единице, то вектор $\hat{c}$ будет мало отличаться от $c^{(i)}$, а значит, векторный критерий $\hat{f}$ будет содержать два почти одинаковых критерия f_i. В этом случае, влияние менее важного критерия f_j, которому соответствует вектор $c^{(j)}$, на решение задачи многокритериального выбора практически исчезнет.

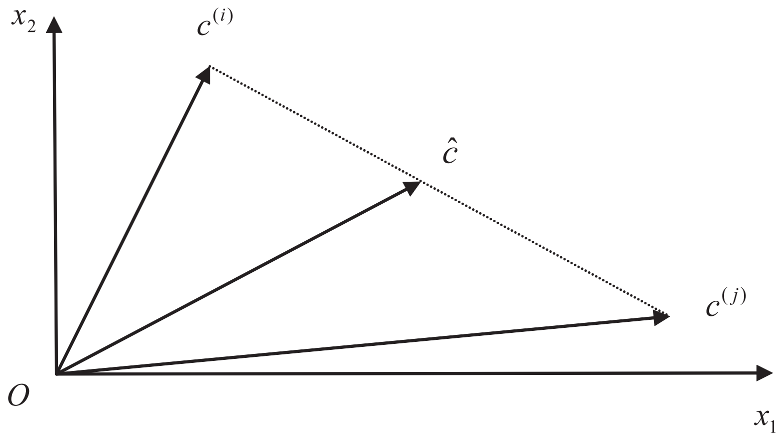

Рис.4.2. Геометрическая иллюстрация второй формулы из (4.7).

4.3.3. Обоснование применение теоремы 4.1 в задачах с количественными критериями

Теорема 4.1 показывает, каким образом информацию об относительной важности критериев можно использовать для сужения множества Парето. Основой этого сужения являются включения

$$C(Y) \subset \hat{P}(Y) \subset P(Y)\,, \tag{4.4}$$

где $\hat{P}(Y) = f(P_{\hat{f}}(X))$ и

$$\hat{f}_j = w_j f_i + w_i f_j\,, \qquad \hat{f}_s = f_s \qquad \text{для всех } s \in I \setminus \{j\}.$$

Рассматриваемый в этой главе подход, связанный с количественными характеристиками относительной важности критериев, предполагает измерение значений критериев в количественных шкалах. Поэтому несомненный интерес представляет установление инвариантности включений (4.4) относительно линейного положительного преобразования критериев. Заметим, что если бы такой инвариантности на самом деле не было, то это означало бы некорректность применения предлагаемого подхода при решении практических многокритериальных задач с количественными критериями.

Теорема 4.2. *Пусть выполняются аксиомы* 1 – 4. *Включения* (4.4) (*а также* (4.3)) *инвариантны относительно линейного положительного преобразования критериев.*

□ Прежде всего заметим, что согласно принципу Эджворта-Парето для любого множества выбираемых векторов справедливы включения $C(Y) \subset \mathrm{Ndom}Y \subset \hat{P}(Y)$ и в определении множества недоминируемых векторов $\mathrm{Ndom}Y$ не содержится никакого упоминания о критериях. Значит, оно не зависит от выбора шкал критериев и является инвариантным относительно любого преобразования критериев.

В предыдущей главе была установлена инвариантность множества Парето относительно строго возрастающего преобразования критериев. Линейное положительное преобразование является частным случаем строго возрастающего преобразования. Поэтому множество Парето $P(Y)$, участвующее в соотношении (4.4), инвариантно относительно линейного положительного преобразования критериев. Остается установить инвариантность множества Парето $\hat{P}(Y)$. Для этого достаточно убедиться в инвариантности лишь строгого неравенства

$$\hat{f}_j = w_j y_i + w_i y_j > w_j \bar{y}_i + w_i \bar{y}_j = \bar{f}_j , \qquad (4.8)$$

содержащего новый j-й критерий, поскольку проверка инвариантности соответствующих неравенств для остальных критериев f_i, $i \neq j$, осуществляется так же , как в предыдущей главе.

Зафиксируем произвольно выбранные положительные числа w_i, w_j и предположим, что i-й критерий важнее j-го с этой парой положительных параметров. Пусть y' и y'' – произвольные два вектора критериального пространства, для которых выполнено соотношение $y' \succ y''$ и которые отличаются друг от друга только i-й и j-й компонентами (т.е. $y'_s = y''_s$ для всех s, кроме $s = i$ и $s = j$), причем

$$w_i = y'_i - y''_i,\ w_j = y''_j - y'_j . \qquad (4.9)$$

Заменим в формуле $\hat{f}_j = w_j y_i + w_i y_j$ из (4.5), определяющей новый j-й критерий, величину y_k на преобразованную величину $\tilde{y}_k = \alpha_k y_k + c_k$ $(\alpha_k > 0)$, $k = i, j$. При этом так как числа w_i, w_j в силу (4.9) зависят от величин y'_i, y'_j, y''_i, y''_j, то в w_i, w_j так же следует выполнить указанную замену. В результате указанной замены вместо $\hat{f}_j$ получим «преобразованный» j-й критерий вида

$$\tilde{\hat{f}}_j = (\alpha_j y''_j + c_j - \alpha_j y'_j - c_j) \cdot (\alpha_i y_i + c_i)$$
$$+ (\alpha_i y'_i + c_i - \alpha_i y''_i - c_i) \cdot (\alpha_j y_j + c_j) ,$$

который может быть представлен в форме

$$\tilde{\hat{f}}_j = \alpha_i \alpha_j w_j y_i + \alpha_i \alpha_j w_i y_j + C , \qquad (4.10)$$

причем константа

$$C = c_i \alpha_j w_j + c_j \alpha_i w_i$$

не зависит от величин y_i, y_j.

Теперь перейдем непосредственно к проверке инвариантности строгого неравенства (4.8). С этой целью предположим, что оно выполняется для произвольных чисел $y_i, y_j, \bar{y}_i, \bar{y}_j$. После умножения обеих частей неравенства (4.8) на положительное число $\alpha_i \alpha_j$ прибавим к обеим частям получившегося неравенства константу C. В результате с учетом представления (4.10) придем к неравенству

$$\tilde{\hat{f}}_j = \alpha_i \alpha_j w_j y_i + \alpha_i \alpha_j w_i y_j + C > \alpha_i \alpha_j w_j \bar{y}_i + \alpha_i \alpha_j w_i \bar{y}_j + C = \tilde{\bar{f}}_j . \qquad (4.11)$$

Следовательно, из выполнения неравенства (4.8) вытекает неравенство (4.11).

С другой стороны, вычитая из обеих частей неравенства (4.11) константу C и деля полученное неравенство на $\alpha_i \alpha_j$, придем к (4.8). Это означает, что неравенства (4.8) и (4.11) эквивалентны.■

Запишем определение коэффициента относительной важности в виде

$$\theta_{ij} = \frac{w_j}{w_i + w_j} = \frac{y''_j - y'_j}{y'_i - y''_i + y''_j - y'_j}, \tag{4.12}$$

где y' и y'' — два вектора критериального пространства, для которых имеет место соотношение $y' \succ y''$ и которые отличаются лишь i-й и j-й компонентами.

Непосредственная проверка показывает, что замена в (4.12) величины y_k на преобразованную величину $\tilde{y}_k = \alpha_k y_k + c_k$ $(\alpha_k > 0)$, $k = i, j$, в общем случае приводит к выражению, отличному от исходного. Это означает, что *коэффициент относительной важности* θ_{ij} *не является инвариантным относительно линейного положительного преобразования критериев*.

Более того, точно так же можно проверить, что он не является инвариантным и относительно преобразований вида $\tilde{y}_k = a_k y_k$ и $\tilde{y}_k = y_k + c_k$, $k = i, j$, которые соответствуют шкале отношений и шкале разностей.

Полученное свидетельствует о том, что *для различных измеряющих* (*различных ЛПР*) *коэффициенты относительной важности критериев могут быть разными*, *даже если они решают одну и ту же задачу выбора*, *имеют одинаковые предпочтения и выполняют измерения в количественной шкале одного и того же типа*. И в этом нет никакого противоречия, поскольку указанные ЛПР могут использовать различные единицы измерения для одних и тех же критериев.

В самом деле, пусть, например, два лица, принимающие решения, производят измерения значений первого критерия в единицах валюты и с точки зрения предпочтений ведут себя совершенно одинаковым образом, но одно из них производит расчет в долларах, а другое — в рублях. Предположим далее, что измерение значений второго критерия осуществляется обоими ЛПР в абсолютной шкале (например, число штук выпускаемых заводом изделий). Для ЛПР, работающего с долларами и готового за добавку в $100 пожертвовать 10 изделиями, коэффициент относительной важности первого критерия в сравнении со вторым составит

$$\theta'_{12} = \frac{10}{100 + 10} \approx 0.09 .$$

Второе ЛПР, оперирующее с рублями (если оно ведет себя так же как первое ЛПР), должно быть готово за 2500 руб. добавки по первому критерию пожертвовать тем же самым количеством изделий (10 штук) по второму критерию, поскольку один доллар (на момент принятия решения) примерно равен двадцати пяти рублям. Поэтому для второго ЛПР коэффициент относительной важности будет равен

$$\theta''_{12} = \frac{10}{3000+10} \approx 0.0033,$$

что значительно меньше, чем у первого. С точки зрения здравого смысла именно так и должно быть, поскольку первый ЛПР использует существенно более «дорогую» единицу валюты, чем второй.

4.4. Использование набора информации об относительной важности критериев

Рассмотрим задачу многокритериального выбора с векторным критерием f. Как правило, на практике имеющиеся в распоряжении критерии не являются равноценными для ЛПР, а значит, существуют пары критериев, в которых один критерий важнее другого. В таком случае необходимо выявить подобного рода информацию для того, чтобы на ее основе можно было осуществить обоснованное сужение множества Парето.

Опишем процедуру выявления у ЛПР информации об относительной важности критериев.

1. Прежде всего, необходимо установить пары «неравноценных» по мнению ЛПР критериев. Пусть, например, среди них оказалась пара, состоящая из i-го и j-го критерия и при этом согласно интуитивным представлениям ЛПР о важности для него i-й критерий более важен, чем j-й.

2. Теперь можно приступить к определению конкретной величины коэффициента относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м. При этом нужно учитывать тот факт, что чем больше окажется этот коэффициент, тем более содержательной будет информация и, тем самым, на бо́льшую степень сужения множества Парето можно рассчитывать. Поэтому ЛПР можно предложить, например, такой вопрос: *каким максимально возможным количеством* w_j *оно готово жертвовать по* j*-у* (*менее важному*) *критерию ради увеличения значения* i*-го* (*более важного*) *критерия на одну единицу*? После того, как ЛПР укажет конкретное число w_j, нетрудно вычислить коэффициент относительной важности

$$\theta_{ij} = \frac{w_j}{1 + w_j}.$$

Как указано выше, чем ближе этот коэффициент окажется к единице, тем, грубо говоря, на бо́льшую степень сужения множества Парето можно рассчитывать.

3. Предположим, что указанным выше способом выявлен целый набор информации об относительной важности критериев, состоящий в том, что i_k-й критерий важнее j_k-го критерия с заданным коэффициентом относительной важности $\theta_{i_k j_k} \in (0,1)$, $k = 1,2,...,M$, где $M \leqq m/2$. При этом считается, что ни один из критериев не может быть важнее самого себя, т.е. ни для какого номера $k = 1,2,...,M$ не выполняется равенство $i_k = j_k$.

Будем говорить, что указанный набор является *набором взаимно независимой информации*, если среди номеров набора $i_1, i_2, ..., i_M$, а также среди номеров набора $j_1, j_2, ..., j_M$ нет ни одной пары одинаковых, причем $\{i_1, i_2, ..., i_M\} \cap \{j_1, j_2, ..., j_M\} = \varnothing$.

Учет набора взаимно независимой информации с целью сужения множества Парето можно осуществлять непосредственно на основе теоремы 4.1. Для этого следует пересчитать все менее важные критерии (номера которых принадлежат набору $j_1, j_2, ..., j_M$) по формуле

$$\hat{f}_{j_k} = \theta_{i_k j_k} f_{i_k} + (1 - \theta_{i_k j_k}) f_{j_k}, \qquad k = 1,2,...,M,$$

и подставить их в исходный векторный критерий f вместо прежних f_{j_k}. В результате выполненной подстановки образуется новый векторный критерий $\hat{f}$. Далее нужно найти множество Парето относительно этого нового векторного критерия. В общем случае оно должно быть уже исходного множества Парето. Тем самым, произойдет сужение множества Парето за счет использования набора взаимно независимой информации об относительной важности критериев.

Если полученный в результате опроса ЛПР набор информации не является набором взаимно независимой информации, то в общем случае применять результат теоремы 4.1 нельзя (см. [10]).

Отметим некоторые частные случаи, когда полученный набор не является набором взаимно независимой информации, однако его учет с помощью теоремы 4.1 возможен.

1) i_1-й критерий важнее i_2-го критерия, который, в свою очередь, важнее i_3-го критерия и т.д. до i_M-го критерия. Тем самым, имеется «цепочка» из M попарно различных критериев, каждый из которых важнее какого-то в точности одного другого критерия. В начале этой «цепочки» располагается критерий, для которого не существует более

важного критерия, а в ее конце – критерий, который не будет важнее ни какого другого критерия. Для учета такого набора взаимно зависимой информации сначала по соответствующей формуле нужно пересчитать наименее важный критерий, расположенный в самом конце указанной цепочки, затем – тот, который важнее наименее важного и т.д. в порядке увеличения важности. В самом конце пересчету подлежит критерий i_2;

2) имеется несколько непересекающихся «цепочек», описанных в предыдущем пункте. Для учета такого рода информации с каждой «цепочкой» критериев следует поступить указанным выше способом;
3) имеется несколько пар критериев, образующих набор взаимно независимой информации, а также несколько непересекающихся цепочек, составленных из критериев, не входящих в пары.

Выводы

Для учета информации об относительной важности критериев вводится специальное математическое определение, смысл которого состоит в том, что из двух критериев более важным является тот, определенное увеличение значений по которому для ЛПР может сопровождаться некоторым уменьшением по менее важному критерию. Существует простой способ учета информации об относительной важности, который состоит в формировании нового векторного критерия, т.е. пересчете менее важного критерия и последующего построения множества Парето относительно нового векторного критерия. Тем самым, на основе информации об относительной важности критериев осуществляется сужение исходного множества Парето.

Основные понятия

Относительная важность критериев, инвариантность отношения предпочтения, сужение множества Парето.

Контрольные вопросы

1. Что означает фраза «один критерий важнее другого» с определенной парой положительных параметров? Каков смысл этих числовых параметров?
2. Приведите определение коэффициента относительной важности критериев.
3. Сформулируйте определение бинарного отношения, инвариантного относительно линейного положительного преобразования, а также Аксиому 4 об инвариантности отношения предпочтения.
4. Приведите упрощенное определение относительной важности критериев. Чем оно отличается от первоначального определения? Какое свойство отношения предпочтения дает возможность упростить определение относительной важности критериев?
5. Каким образом в задаче многокритериального выбора можно учесть дополнительную информацию о том, что один из критериев важнее другого с некоторым коэффициентом относительной важности? Всегда ли подобного рода дополнительная информация проводит к сужению множества Парето? При каких значениях коэффициента относительной важности можно рассчитывать на существенное сужение множества Парето?
6. Почему описанный выше подход к сужению множества Парето на основе информации об относительной важности критериев можно использовать лишь в случае, когда компоненты векторного критерия f измеряются в количественных шкалах?

Упражнения

1. Докажите, что из того, что критерий f_i важнее критерия f_j с коэффициентом относительной важности $\theta_{ij} \in (0,1)$ вытекает относительная важность критерия f_i по сравнению с критерием f_j с любым коэффициентом относительной важности θ'_{ij}, таким, что $\theta'_{ij} < \theta_{ij}$.
2. Убедитесь в том, что лексикографическое отношение является инвариантным относительно линейного положительного преобразования.
3. Пусть $Y = \{y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, y^{(4)}, y^{(5)}\}$, где $y^{(1)} = (3, 5, -2)$, $y^{(2)} = (-1, 3, 0)$, $y^{(3)} = (3, 0, -2)$, $y^{(4)} = (2, -2, 0)$, $y^{(5)} = (-3, 4, 2)$. Известно, что второй критерий важнее третьего с коэффициентом относительной важности

$\theta_{23} = 0{,}7$. Произойдет ли сужение множества Парето после учета этой информации об относительной важности критериев?

4. Исследуйте задачу выбора объекта для инвестирования из примера 4.3 в предположении, что второй критерий (надежности) является более важным, чем первый (прирост прибыли).
5. Продолжим рассмотрение задачи о производстве одним производителем двух товаров с использованием 1 ед. труда и 1 ед. капитала (см. упр. 1 из главы 3). Как известно, каждая точка контрактной кривой (множества Парето) может претендовать на роль «выбранной». Предположим, что выполнены Аксиомы 1 – 4 и дополнительно имеется информация о том, что первый товар (точнее говоря, полезность первого товара) важнее (полезности) второго с коэффициентом относительной важности $\theta_{12} = 0.5$. Показать, что в таком случае выбирать наилучшее сочетание труда и капитала для производителя двух данных товаров следует лишь из подмножества Парето, которое представляет собой правую половину отрезка, соединяющего точки (0, 12/35) и (23/30, 1) (т.е. из отрезка, соединяющего точки (23/60, 47/70) и (23/30, 1)).

   Указание. Использовать теорему 4.1. С этой целью построить множество Парето относительно «нового» векторного критерия вида $(U_1, 0.5U_1 + 0.5U_2)$.
6. Пусть f_i и f_j – два различных критерия, которые подлежат минимизации. Убедитесь, что в таком случае определение относительной важности критериев принимает следующую форму.

   Критерий f_i *важнее критерия* f_j *с заданными положительными параметрами* w_i, w_j , если для любого вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^m$ имеет место соотношение $y' \succ y$, где $y' = (y_1', y_2', \ldots, y_n')$, причем

   $$y_i' = y_i - w_i, \quad y_j' = y_j + w_j, \quad y_s' = y_s, \quad \text{для всех } s = 1,2,\ldots,m,\ s \neq i,\ s \neq j .$$

   При этом коэффициент относительной важности определяется той же формулой (4.2) и теорема 4.1 полностью сохраняется.
7. Убедиться, что при $\theta_{ij} + \theta_{ji} < 1$ возможна ситуация, когда критерий f_i важнее критерия f_j , а критерий f_j , в свою очередь, важнее критерия f_i . Каким образом можно учесть такой набор взаимно зависимой информации об относительной важности критериев?

Глава 5. Целевое программирование

Целевое программирование включает определенный круг однотипных методов решения многокритериальных задач, в основе которых лежит стремление в качестве наилучшего выбрать такой допустимый вектор, который расположен ближе всех остальных допустимых векторов к некоторому «идеальному» (не являющемуся допустимым) вектору или же целому множеству «идеальных» векторов.

5.1. Метод целевого программирования

5.1.1. Введение

В основе метода, получившего наименование *целевого программирования* лежит простое эвристическое соображение – стараться в качестве наилучшего выбрать такой возможный вектор, который в критериальном пространстве расположен ближе всех остальных допустимых векторов к некоторому «идеальному» или же к целому множеству «идеальных» векторов. Другими словами, в соответствии с целевым программированием, идеал – это недостижимая цель, к которой следует стремиться максимально приблизиться. При этом в качестве «идеального» нередко берется вектор, составленный из максимальных значений компонент векторного критерия, а варьирование метрики для измерения расстояния в критериальном пространстве приводит к целому семейству однотипных вариантов метода целевого программирования, которые, однако, могут приводить к различным конечным результатам. Для обоснованного выбора той или иной метрики никаких четких рекомендаций не выработано; здесь чаще всего исходят из соображений простоты, а именно, – применяют такую метрику, чтобы получающаяся в итоге экстремальная задача приближения была наиболее простой в вычислительном отношении.

Родоначальниками целевого программирования считаются А. Чарнс и В. Купер, которые в 1953 году использовали указанное выше эвристическое соображение для решения многокритериальной задачи линейного программирования. В 1961 году свой метод они изложили в книге. Позже на эту тему были написаны десятки (если не сотни) статей и выпущено несколько книг. Несмотря на отсутствие логического фундамента (его заменяет указанное эвристическое соображение) методы целевого программирования широко используются при решении различных прикладных задач, в которых присутствует несколько критериев.

5.1.2. Метод целевого программирования

Опишем метод целевого программирования. Пусть имеется набор критериев $f_1, f_2, ..., f_m$, каждый из которых желательно максимизировать на множестве возможных решений X. В соответствии с методологией целевого программирования будем считать, что в критериальном пространстве R^m задано непустое множество U, которое обычно называют *множеством «идеальных»* (или *«утопических»*) *векторов*. При этом считается, что это множество не достижимо, т.е. имеет место равенство $U \cap Y = \varnothing$, где Y означает множество возможных векторов, т.е. $Y = f(X)$.

Кроме того, на критериальном пространстве R^m должна быть задана *метрика*, т.е. такая числовая функция $\rho = \rho(y,z)$, которая каждой паре векторов y,z критериального пространства сопоставляет определенное неотрицательное число, называемое *расстоянием* между векторами y и z.

Всякая метрика, по определению, должна удовлетворять следующим аксиомам (для всех векторов y,z,w):

1) (неотрицательность метрики) $\rho(y,z) \geqq 0$; $\rho(y,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = z$;
2) (симметричность метрики) $\rho(y,z) = \rho(z,y)$;
3) (неравенство треугольника) $\rho(w,z) \leqq \rho(w,y) + \rho(y,z)$.

В соответствии с методом целевого программирования выбираемым (наилучшим, оптимальным или наиболее удовлетворительным) объявляется такое решение $x^* \in X$, для которого выполнено равенство

$$\inf_{y \in U} \rho(f(x^*), y) = \min_{x \in X} \inf_{y \in U} \rho(f(x), y),$$

означающее, что вектор $f(x^*)$, соответствующий наилучшему решению x^*, должен располагаться от множества идеальных векторов на минимальном возможном расстоянии.

В частном случае множество идеальных векторов U может состоять из одного элемента. Нередко таким единственным элементом служит вектор, составленный из максимальных значений критериев, т.е.

$$U = \{u\}, \quad u = (\max_{x \in X} f_1(x), ..., \max_{x \in X} f_m(x)).$$

Один из наиболее простых способов образования идеального множества U состоит в задании его при помощи линейных неравенств и уравнений:

$$y_i = f_i(x) \geqq \alpha_i \qquad \text{для всех } i \in I_1$$

$$y_i = f_i(x) = \beta_i \qquad \text{для всех } i \in I_2,$$

где I_1 и I_2 образуют разбиение множества номеров критериев $I = \{1, 2, ..., m\}$ (т.е. $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ и $I_1 \cup I_2 = I$), а фиксированные числа α_i и β_i определяют некоторые «пороговые» (предельно низкие) значения критериев.

Необходимо отметить, что если указанное целевое множество U естественным образом не диктуется условиями конкретной многокритериальной задачи, то его формирование может вызывать определенные трудности.

Кроме того, в целевом программировании существует еще одна проблема – выбор метрики. Чаще всего при решении прикладных задач используют какую-либо метрику[7] из следующего параметрического семейства

$$\rho_a^{(s)}(y,z) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \left| y_i - z_i \right|^s \right)^{1/s},$$

где $s \geqq 1$ и

$$a = (a_1, ..., a_m); \; a_i > 0 \text{ для всех } i = 1, 2, ..., m.$$

Здесь может быть и $s = +\infty$; в этом предельном случае получаем так называемую *чебышёвскую* (*равномерную*) *метрику*

$$\rho_a^{(+\infty)}(y,z) = \max_{i=1,2,...,m} a_i \left| y_i - z_i \right|.$$

Варьируя вектор параметров a, стремятся учесть «неравноценность» критериев, придавая большее значение той компоненте вектора параметров, которая соответствует критерию большей «ценности».

В частном случае, когда $s = 2$ и $a_i = 1$, $i = 1, 2, ..., m$, получаем обычную евклидову метрику

$$\rho^{(2)}(y,z) = \sqrt{(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + ... + (y_m - z_m)^2}.$$

[7] Доказательство того, что каждая функция указанного семейства представляет собой метрику, можно найти в книге Колмогорова А.Н. и Фомина С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972, С. 48.

5.1.3. Достаточное условие парето-оптимальности

Необходимо отметить, что использование некоторых метрик в рамках целевого программирования может приводить к решениям, которые не являются парето-оптимальными. Поэтому в целевом программировании значительное место уделяется нахождению условий, при которых использование той или иной метрики заведомо приводит к парето-оптимальным решениям.

Приведем один из результатов подобного рода.

Теорема 5.1. *Пусть для некоторых фиксированных чисел* $u_1, u_2, ..., u_m$ *выполняются неравенства* $u_i \geqq \sup\limits_{y \in Y} y_i$ и $a = (a_1, ..., a_m)$, $a_i > 0$, $i = 1,2,...,m$. *Тогда всякая точка максимума числовой функции*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \left| u_i - y_i \right|^s \right)^{1/s} \qquad \text{при } s \in [1, +\infty) \tag{5.1}$$

на множестве возможных векторов Y *является парето-оптимальной.*

□ Пусть функция (5.1) достигает максимума в точке $y^* \in Y$. Предположим противное: точка y^* не является парето-оптимальной. Это означает, что найдется точка $y \in Y$, для которой верно неравенство $y \geq y^*$. Отсюда нетрудно вывести выполнение неравенств $\left| u_i - y_i \right| \geqq \left| u_i - y_i^* \right|$, $i = 1,2,...,m$, где по крайней мере для одного индекса i соответствующее неравенство — строгое. Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \left| u_i - y_i \right|^s > \sum_{i=1}^{m} a_i \left| u_i - y_i^* \right|^s ,$$

а значит имеет место неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \left| u_i - y_i \right|^s \right)^{1/s} > \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \left| u_i - y_i^* \right|^s \right)^{1/s} ,$$

противоречащее тому, что y^* — точка максимума функции (5.1) на множестве Y ■

В теореме 5.1 указано целое семейство функций (5.1), каждая из которых может быть использована в качестве метрики при реализации того или иного варианта метода целевого программирования.

5.2. Модифицированный метод целевого программирования

Обсудим возможность комбинирования целевого программирования с описанным в главе 4 методом сужения области компромиссов на основе информации об относительной важности критериев. Эта комбинация имеет наименование *модифицированного метода целевого программирования*. В соответствии с этим методом вначале следует выявить возможную информацию об относительной важности критериев. В общем случае это может быть целый набор сведений. Далее на основе этого набора необходимо произвести сужение множества Парето, т.е. удалить все те возможные векторы, которые не совместимы с имеющейся информацией. В результате такого удаления будет получено некоторое подмножество исходного множества Парето. Если последнее множество оказывается сравнительно широким и больше никакой дополнительной информации об относительной важности критериев для дальнейшего его сужения получить не удается, то в таком случае для завершения процесса поиска наилучшего решения предлагается применить метод целевого программирования. Разумеется, когда исходное множество возможных решений бесконечно, отыскание указанного подмножества может составить непростую вычислительную задачу. Однако для конечного множества возможных решений описанная процедура легко программируется и может быть с успехом реализована с помощью компьютера.

Пример 5.1. Рассмотрим двухкритериальную задачу выбора наилучшего проектного решения о строительстве некоторого предприятия. Будем считать, что первым критерием является величина затрат на строительство предприятия, а вторым – величина экологического ущерба, измеряемые в некоторых единицах валюты (например, млн. руб.). Пусть имеется три проекта (возможных двумерных вектора):

$$y^{(1)} = (30, 2), \quad y^{(2)} = (28, 4), \quad y^{(3)} = (24, 6)\,.$$

Требуется выбрать наилучший проект при условии, что ЛПР за снижение экологического ущерба в одну единицу готово пожертвовать увеличением на ту же одну единицу затрат на строительство предприятия.

Приступим к решению задачи. Каждый из имеющихся двух критериев подлежит минимизации. Нетрудно видеть, что все три возможных вектора являются парето-оптимальными, т.е. применение принципа Эджворта-Парето в данном случае не приводит к сужению множества Парето. Из условия задачи следует, что второй критерий важнее первого с коэффициентом относительной важности $\theta_{21} = 0.5$ (см. упр. 6 в главе 4). В соответствии с формулой (4.6) пересчитываем возможные векторы. В результате получим

$$\hat{y}^{(1)} = (16, 2), \quad \hat{y}^{(2)} = (16, 4), \quad \hat{y}^{(3)} = (15, 6)\ .$$

Здесь второй вектор $\hat{y}^{(2)}$ не является парето-оптимальным, и потому его можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Остаются первый и третий векторы. Поскольку никакой другой дополнительной информации о структуре предпочтений ЛПР нет, то для того, чтобы из двух оставшихся векторов окончательно выбрать какой-то один, воспользуемся методом целевого программирования. За «идеальный» вектор в данном случае естественно выбрать начало координат $\mathbf{0} = (0, 0)$ (этому вектору отвечает «идеальная» ситуация нулевых затрат на строительство при отсутствии какого-либо экологического ущерба). В качестве метрики будем использовать обычное евклидово расстояние $\rho^{(2)}$ с вектором $a \ = (1, 1)$, имеющим одинаковые компоненты, поскольку относительная важность критериев уже была учтена на этапе использования информации об относительной важности критериев. В результате несложных вычислений получаем

$$\rho^{(2)}(y^{(1)}, \mathbf{0}) = \sqrt{16^2 + 2^2} = \sqrt{260} < \sqrt{261} = \sqrt{15^2 + 6^2} = \rho^{(2)}(y^{(2)}, \mathbf{0}).$$

Следовательно, согласно модифицированному методу целевого программирования следует выбрать первый вектор $y^{(1)}$.

Замечание 5.1. Нетрудно проверить, что применение к векторам $\hat{y}^{(1)}$ и $\hat{y}^{(3)}$ метода целевого программирования с тем же самым идеальным вектором $\mathbf{0}$, но с чебышевской (равномерной) метрикой, приведет к выбору не первого, а третьего вектора $y^{(3)}$ в качестве наилучшего.

Выводы

В основе метода целевого программирования лежит эвристическая идея выбора такого допустимого вектора, который находится ближе всех остальных к некоторому множеству «идеальных» векторов. Для измерения расстояния между точкой и множеством используется та или иная метрика. Наличие целого семейства метрик порождает в многоцелевом программировании проблему выбора той или иной метрики. Практическая реализация метода целевого программирования приводит к решению определенной экстремальной задачи с одним критерием и ее результат в общем случае зависит от выбора метрики.

Основные понятия

«Идеальный» вектор, множество «идеальных» векторов, метрика, целевое программирование.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте аксиомы метрики.
2. Какой вид имеет чебышёвская (равномерная) метрика?
3. Что такое множество идеальных векторов?
4. В чем заключается основная идея метода целевого программирования?
5. Сформулируйте теорему о парето-оптимальности всякой точки максимума для семейства метрик (5.1).
6. В чем состоит идея модифицированного метода целевого программирования?

Упражнения

1. Убедитесь, что евклидова метрика удовлетворяет аксиомам метрики.
2. Докажите, что чебышёвская (равномерная) метрика удовлетворяет аксиомам метрики.
3. Изобразите линии уровня трех функций $z_1 = |y_1| + |y_2|$, $z_2 = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2}$ и $z_3 = \max\limits_{i=1,2} y_i$ двух переменных, которые выражают расстояние от точки $y = (y_1, y_2)$ плоскости до начала координат, вычисленное с помощью трех различных метрик. Укажите такие три различные точки плоскости, что минимум первой, второй и третьей функций на этом множестве трех точек достигается соответственно в первой, второй и третьей точках.

Глава 6. Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий (сокращенно: МАИ) предназначен для решения многокритериальных задач с конечным множеством возможных векторов. Его применение основано на экспертной информации об относительной важности критериев в виде матрицы парных сравнений.

Этот метод был предложен американским математиком Т. Саати в 1972 г. Впоследствии он оформился в целый раздел принятия решений при наличии нескольких критериев. В настоящее время МАИ прочно вошел в теорию и практику многокритериального выбора.

На основе МАИ был разработан пакет EXPERT CHOICE для поддержки принятия решений, получивший мировое признание и широкое распространение за рубежом. Этот пакет в своей деятельности успешно используют такие гиганты бизнеса, как General Motors, Lockheed, Ford Motor Company, Ferrari, General Electric и многие другие.

6.1. Предварительные сведения из линейной алгебры

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел $a_{ij}, i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n$, которая записывается в виде

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} \quad a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \quad a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \quad a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами. Первый индекс указывает номер строки, в которой расположен данный элемент, а второй – номер столбца. Например, элемент a_{34} находится в третьей строке и четвертом столбце.

Если число строк и столбцов матрицы одинаковое и равно n, то такую матрицу называют *квадратной* или *матрицей n-го порядка*. Элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы n-го порядка составляют *главную диагональ* этой матрицы.

В частном случае матрица может иметь лишь одну строку (один столбец). В таком случае ее называют *вектор-строкой* (соответственно *вектор-столбцом*).

Две матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ одинакового размера называют *равными* и при этом пишут $A = B$, если их элементы, расположенные в одних и тех строках и столбцах, совпадают, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для всех номеров $i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n$.

Матрицы можно складывать и умножать на любое число. Для сложения двух матриц $A = (a_{ij})_{m\times n}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$ одинакового размера следует сложить элементы этих матриц, расположенные на одних и тех же местах, т.е.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\ ...\ a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\ ...\ a_{2n}+b_{2n} \\ .... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2}\ ...\ a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для умножения числа λ на матрицу $A = (a_{ij})_{m\times n}$ необходимо все элементы этой матрицы умножить на данной число, т.е.

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12}\ ...\ \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22}\ ...\ \lambda a_{2n} \\ .... \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{2m}\ ...\ \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу $A = (a_{ij})_{m\times n}$ размера $m\times n$ можно умножить на матрицу $B = (b_{ij})_{n\times p}$ размера $n\times p$. *Произведением* матрицы A на матрицу B называется матрица C, обозначаемая $C = AB$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},$$

где $i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n$. Для перемножения матриц их размеры должны быть согласованы, т.е. число столбцов первой матрицы A должно совпадать с числом строк второй матрицы B. Поэтому если одну матрицу можно умножить на вторую, то из этого в общем случае не следует возможность перемножения этих матриц в обратном порядке. Что касается квадратных матриц, то их можно перемножать в любом порядке.

Пример 6.1. Пусть имеется квадратная матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$ и вектор-столбец x с компонентами $x_1,x_2,...,x_n$. Тогда

$$Ax=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу $A=(a_{ij})_{m\times n}$. *Транспонированная матрица* обозначается A^T и определяется равенством

$$A^T=(a_{ji})_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\,...\,a_{m1} \\ a_{12} & a_{22}\,...\,a_{m2} \\ \multicolumn{2}{c}{.......................} \\ a_{1n} & a_{2n}\,...\,a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Квадратную матрицу $A=(a_{ij})_{n\times n}$, для которой выполняется равенство $A^T=A$, называют *симметричной*. У симметричной матрицы совпадают элементы, расположенные симметричным образом относительно главной диагонали, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$, для всех $i,j=1,2,...,n$.

Частным случаем симметричной является *единичная матрица* n-го порядка

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0\,...\,0 \\ 0 & 1\,...\,0 \\ \multicolumn{2}{c}{.............} \\ 0 & 0\,...\,1 \end{pmatrix},$$

у которой диагональные элементы равны единице, а все остальные – нулю.

Пусть задана квадратная матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Определитель матрицы A будем обозначать $\det(A)$. *Определитель n-го порядка* матрицы A это число, которое представляет собой сумму всех $n!$ произведений элементов данной матрицы A, взятых в точности по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. При этом каждое из всех указанных произведений снабжается знаком + или –, выбираемым в соответствии с определенным правилом, которое здесь воспроизводиться не будет.

Определителем матрицы первого порядка, т.е. числа, является само это число. Определители второго и третьего порядков определяются следующим образом:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22} ,$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Пусть имеется квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Число λ называют *собственным значением* матрицы A, а ненулевой вектор-столбец $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ — *собственным вектором*, соответствующим собственному значению λ, если имеет место векторное равенство

$$Ax = \lambda x . \qquad 6.1)$$

Замечание 6.1. Умножая обе части векторного равенства (6.1) на произвольное число α, отличное от нуля, получим равенство $A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$, означающее, что вектор αx так же является собственным вектором, отвечающим собственному значению λ. Из этого следует, что одному собственному значению отвечает бесконечное число различных собственных векторов.

В курсе линейной алгебры доказывается следующий результат.

Теорема 6.1. *Число λ является собственным значением квадратной матрицы A тогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda E) = \mathbf{0} . \qquad (6.2)$$

Уравнение (6.2), в левой части которого записан определитель матрицы $A - \lambda E$, представляет собой алгебраическое уравнение n-й степени и его корни при $n > 4$ в общем случае можно найти лишь приближенно. Таким образом, для того чтобы найти собственные значения некоторой матрицы, следует отыскать все корни уравнения (6.2), что может составить непростую вычислительную задачу.

6.2. Идеальный вариант сравнения. Матрица относительных весов

Пусть имеется набор из n объектов (элементов), которые обозначим $A_1, A_2, ..., A_n$. Предположим, что каждому объекту A_k поставлено в соответствие определенное положительное число w_k. Это число будем именовать *весом* объекта A_k, $k = 1,2,...,n$. Не уменьшая общности последующего рассмотрения, можно считать, что веса всех объектов подчинены условию нормировки

$$w_1 + w_2 + ... + w_n = 1.$$

Тем самым, суммарный вес всех объектов равен 100%, а величина $w_k \cdot 100\%$ выражает собой вес k-го объекта, выраженный в процентах.

Образуем матрицу относительных весов

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент a_{ij} матрицы относительных весов A представляет собой отношение веса i-го объекта A_i к весу j-го объекта A_j, т.е. $a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$ для всех номеров $i, j = 1,2,...,n$.

Отметим следующие свойства матрицы A относительных весов.

1) Все элементы матрицы A положительны, причем элементы главной диагонали равны единице, т.е. $a_{ij} = w_i/w_j > 0$ и $a_{ii} = w_i/w_i = 1$ для всех номеров $i, j = 1,2,...,n$.
2) Матрица A *обратно симметрична*, т.е. ее элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, являются обратными по отношению друг к другу: $a_{ij} = w_i/w_j = \dfrac{1}{w_j/w_i} = \dfrac{1}{a_{ji}}$ для всех номеров $i, j = 1,2,...,n$.

3) Матрица A обладает ***свойством совместности*** в том смысле, что для всех номеров $i, j, k = 1, 2, ..., n$ имеют место равенства $a_{ij} \cdot a_{jk} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} = a_{ik}$.

4) Число n является собственным значением матрицы A, а вектор-столбец весов $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ – соответствующим собственным вектором. Иначе говоря, выполняется равенство

$$Aw = nw . \tag{6.3}$$

Для того чтобы убедиться в справедливости четвертого свойства, т.е. векторного равенства (6.3), рассмотрим k-ю компоненту вектора Aw . Она является результатом умножения k-й строки матрицы A на вектор w:

$$(a_{k1} \quad a_{k2} \ldots a_{kn}) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = a_{k1} w_1 + a_{k2} w_2 + \ldots + a_{kn} w_n =$$

$$= \frac{w_k}{w_1} w_1 + \frac{w_k}{w_2} w_2 + \ldots + \frac{w_k}{w_n} w_n = n w_k .$$

Как видим, полученный результат nw_k совпадает с k-й компонентой вектора nw , стоящего в правой части равенства (6.3). Благодаря произвольности выбора номера k равенство (6.3) можно считать доказанным.

Лемма 6.1. *Матрица относительных весов* A *имеет только два различных собственных значения* 0 *и* n .

□ Используя свойства определителей, устанавливаемые в курсе линейной алгебры, получаем

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} (1-\lambda) & \frac{w_1}{w_2} & \frac{w_1}{w_3} \ldots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & (1-\lambda) & \frac{w_2}{w_3} \ldots & \frac{w_2}{w_n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \frac{w_n}{w_3} \ldots & (1-\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} (1-\lambda) & 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \ldots 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 \ldots (1-\lambda) \end{pmatrix} = (-1)^n \lambda^{n-1}(\lambda - n) = 0 .$$

Следовательно, характеристическое уравнение для матрицы относительных весов имеет ровно два корня: 0 и *n*. Согласно теореме 6.1 именно эти числа являются собственными значениями матрицы *A* ■

После введения обозначения $\lambda_{\max} = \max\{0, n\} = n$ равенство (6.3) можно переписать в форме

$$Aw = \lambda_{\max} w . \qquad (6.4)$$

Именно это равенство лежит в основе метода анализа иерархий.

6.3. Метод анализа иерархий

6.3.1. Матрица парных сравнений

В предыдущем разделе предполагалось, что веса объектов $A_1, A_2, ..., A_n$, т.е. числа $w_1, w_2, ..., w_n$, заранее заданы. Такое положение соответствует идеальному варианту сравнения объектов. Что касается задач, возникающих на практике, то в них веса как раз неизвестны и подлежат определению. В этих задачах требуется найти положительные числа $w_1, w_2, ..., w_n$ (обычно удовлетворяющие дополнительному условию нормировки $w_1 + w_2 + ... + w_n = 1$), которые выражают собой определенные «веса» («ценности» или «важности») объектов $A_1, A_2, ..., A_n$.

В качестве примера подобной задачи можно упомянуть задачу определения размера инвестиций в ряд объектов, когда определенную сумму денег (не уменьшая общности, эту сумму всегда можно считать равной единице) требуется распределить между n объектами $A_1, A_2, ..., A_n$ для инвестирования. В этой задаче искомое число w_k будет выражать долю инвестиций, приходящуюся на объект A_k, $k = 1, 2, ..., n$.

Итак, пусть имеется набор объектов $A_1, A_2, ..., A_n$ и требуется определить веса каждого из них, т.е. числа $w_1, w_2, ..., w_n$. Существует широкий круг методов, предназначенных для решений этой задачи. Один из наиболее простых заключатся в предварительном попарном сравнении имеющихся объектов с целью построения так называемой *матрицы парных сравнений*

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Произвольный элемент a_{ij} этой матрицы выражает собой число, показывающее во сколько раз вес объекта A_i больше веса объекта A_j. Эти числа назначаются экспертами в результате попарного сравнения объектов. Отсюда и происходит наименование этой матрицы.

Нетрудно понять, что матрица парных сравнений в идейном отношении имеет много общего с введенной ранее матрицей относительных весов. В идеальном случае (когда эксперты по сути дела знают или точно угадывают «истинные» отношения весов объектов) матрица парных сравнений должна в точности совпадать с некоторой матрицей относительных весов, т.е. для всех $i,j=1,2,...,n$ должны выполняться равенства $a_{ij}=\dfrac{w_i}{w_j}$ при некоторых положительных числах w_i и w_j. В действительности эксперты не знают заранее веса объектов и указывают лишь результаты попарного сравнения весов объектов в виде коэффициентов a_{ij}, поэтому указанные равенства часто нарушаются, и матрица парных сравнений оказывается не совпадающей с матрицей относительных весов.

Тем не менее, исходя из указанной связи между матрицами относительных весов и матрицей парных сравнений и стремясь к тому, чтобы различие между ними было как можно меньше, представляется разумным предполагать, что матрица парных сравнений должна обладать всеми перечисленными ранее четырьмя свойствами матрицы относительных весов. В соответствии с этим согласно МАИ считается, что

1) Все элементы матрицы парных сравнений A положительны, а ее диагональные элементы равны единице, т.е. $a_{ij}>0, a_{ii}=1$ для всех номеров $i,j=1,2,...,n$.
2) Матрица парных сравнений обратно симметрична, т.е. $a_{ij}={}^{1}\!/_{a_{ji}}$ для всех номеров $i,j=1,2,...,n$.
3) Матрица парных сравнений совместна, т.е. равенства $a_{ij}=a_{ik}\cdot a_{kj}$ имеют место для всех номеров $i,j,k=1,2,...,n$.
4) Искомый вектор-столбец весов $w=(w_1,w_2,...,w_n)^T$ является собственным вектором, соответствующим максимальному собственному значению $\lambda_{\max}$ матрицы A, т.е. имеет место равенство (6.4).

6.3.2. Описание МАИ

Метод анализа иерархий предполагает выполнение следующих трех этапов.

I. С привлечением эксперта формируется матрица парных сравнений $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

Произвольный элемент a_{ij} этой матрицы представляет собой положительное число, показывающее во сколько раз вес объекта A_i больше веса объекта A_j.

Сразу следует сказать, что при формировании матрицы парных сравнений добиться от эксперта выполнения первых двух свойств 1) – 2) не составляет труда (для этого сразу следует положить все диагональные элементы матрицы равными единице, а все элементы, расположенные ниже главной диагонали, вычислить на основе свойства обратной симметричности, используя элементы, расположенные выше главной диагонали, которые получены от эксперта). Таким образом, от эксперта необходимо получить только сведения о результатах сравнения объектов, содержащуюся в $\frac{n(n-1)}{2}$ элементах матрицы A, расположенных выше главной диагонали.

При этом третье свойство (свойство совместности) на практике, как правило, оказывается невыполненным. По этой причине матрица парных сравнений, как правило, отличается от «идеальной» матрицы относительных весов тем, что она не удовлетворяет свойству совместности 3). Кроме того, у матрицы парных сравнений максимальное собственное значение чаще всего не совпадает с n. Как установлено в [23], всегда выполняется неравенство $\lambda_{\max} \geqq n$, причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда матрица A обладает свойством совместности. Автор МАИ, Т. Саати, ввел специальный числовой показатель

$$\mathrm{CI} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1},$$

называемый *индексом совместности*, который оценивает «степень невыполнения» свойства совместности. Так, если индекс совместности не превосходит 0.1, т.е. $\mathrm{CI} \leq 0.1$, то «степень невыполнения» свойства совместности считается приемлемой и построенная матрица парных сравнений используется на следующих этапах для определения весового вектора. В противном случае рекомендуется предложить эксперту произвести уточнение элементов матрицы A таким образом, чтобы индекс совместности оказался в допустимых пределах. После того, как матрица парных сравнений A с приемлемым индексом совместности сформирована, переходят к следующему (второму) этапу.

II. На этом (втором) и последующем этапах используется последнее, четвертое свойство матрицы парных сравнений. А именно, применяя соответствующие численные методы, следует найти максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы A (для этого нужно вычислить максимальный вещественный корень алгебраического уравнения n-й степени (6.2)). Поскольку величина собственного значения непрерывно зависит от коэффициентов матрицы A, «небольшое» отклонение коэффициентов этой матрицы от коэффициентов «идеальной» матрицы относительных весов, выражаемое в выполнении неравенства $\mathrm{CI} \le 0.1$, должно, по мнению автора метода, привести к малой величине ошибки последующего вычисления весового вектора. Это обстоятельство служит определенным оправданием применения МАИ.

III. Далее, подставив найденное максимальное собственное значение $\lambda_{\max}$ в (6.4), полученная таким образом однородная система линейных уравнений (6.4) решается относительно неизвестного вектора $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^{\mathrm{T}}$ (для этого может быть использован, например, известный из курса линейной алгебры метод последовательного исключения неизвестных Жордана-Гаусса). Найденное решение этой системы в виде набора n положительных чисел $(w_1, w_2, ..., w_n)$ и составит искомый весовой вектор. При необходимости этот вектор всегда можно нормировать, т.е. разделить каждую его компоненту на сумму всех компонент.

Замечание 6.2. Анализ приведенных этапов МАИ показывает, что уже для сравнительно небольшого числа сравниваемых объектов (например, при $n \geq 5$) реализация этого метода может потребовать преодоления существенных вычислительных трудностей.

Пример 6.2. Предположим, что в результате попарных сравнений экспертом была сформирована матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем при помощи МАИ соответствующий вектор весов. Прежде всего, заметим, что данная матрица не является совместной, так как $a_{12}a_{23}=6\neq 2=a_{13}$.

Составляем характеристическое уравнение:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 1/2 & 1-\lambda & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+3\lambda^2+\frac{4}{3}=0\,.$$

Находим максимальный (вещественный) корень этого уравнения $\lambda_{\max}\approx 3.14>3$. Вычисляем индекс совместности $CI=\dfrac{3.14-3}{2}=0.07$. Как видим, он не превышает порогового уровня 0.1. Составляем однородную систему линейных уравнений (6.4). Она в данном случае будет иметь вид

$$\begin{cases} -2.14w_1+2w_2+2w_3=0, \\ 1/2\,w_1-2.14w_2+3w_3=0, \\ 1/2\,w_1+1/3\,w_2-2.14w_3=0. \end{cases}$$

Находим одно из ее ненулевых решений (один из собственных векторов, соответствующих найденному собственному значению) $w_1\approx 2.88,\ w_2\approx 2.08,\ w_3\approx 1$. После деления каждого из этих чисел на их сумму получаем искомый нормированный весовой вектор $\hat{w}_1\approx 0.48,\ \hat{w}_2\approx 0.35,\ \hat{w}_3\approx 0.17$.

6.4. Упрощенный вариант МАИ

6.4.1. Введение

Выше было указано, что матрица парных сравнений A, формируемая экспертами, как правило, не является совместной и ее максимальное собственное значение оказывается строго больше числа сравниваемых объектов n. Несовместность матрицы парных сравнений является следствием избыточности информации, содержащейся в этой матрице. Оказывается, процедуру построения матрицы парных сравнений можно существенно упростить, требуя от эксперта сведения не обо всех $\dfrac{n(n-1)}{2}$ элементах этой матрицы, расположенных выше главной диагонали, а лишь об определенных $n-1$ элементах, на основе которых затем можно легко вычислить все остальные элементы этой матрицы, а также искомый весовой вектор.

Упрощенный вариант МАИ, излагаемый ниже, оказывается существенно проще МАИ как на стадии формирования матрицы парных сравнений, так и в ходе вычисления весового вектора для сколь угодно большого конечного числа сравниваемых объектов. Этот вариант соответствует тому идеальному случаю, когда матрица парных сравнений совпадает с матрицей относительных весов.

6.4.2. Построение матрицы парных сравнений на основе схемы сравнения с образцом

Обсудим вопрос построения матрицы парных сравнений, удовлетворяющей первым трем из перечисленных выше свойств. В силу первых двух свойств диагональные элементы матрицы парных сравнений известны – это единицы. Далее выделяется объект («образец»), с которым эксперту удобнее всего сравнивать все остальные объекты. Этому объекту присваивают первый номер. Остальные объекты могут быть пронумерованы любым способом. Далее эксперту предлагают сравнить вес первого объекта с весом второго объекта и указать положительное число, показывающее во сколько раз вес первого объекта больше веса второго объекта. В результате выполнения такого сравнения эксперт назначает некоторое положительное число a_{12}. Далее для сравнения с первым объектом рассматривается третий объект и в результате сравнения экспертом указывается число a_{13}, и т.д. После выполнения сравнений первого объекта со всеми остальными будут назначены положительные числа $a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}$. Тем самым, с учетом равенства $a_{11} = 1$ будет известна вся первая строка матрицы A.

Остальные элементы матрицы A можно найти на основе свойств 2) и 3) матрицы парных сравнений. Благодаря этим свойствам имеют место равенства

$$a_{ij} = a_{i1} \cdot a_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{1i}}, \text{ для всех } i, j = 2, ..., n, \qquad (6.5)$$

с помощью которых однозначно вычисляются элементы остальных строк матрицы A.

6.4.3. Нахождение весового вектора

После того как матрица $A=(a_{ij})_{n\times n}$ указанным способом построена, можно найти весовой вектор $w=(w_1,w_2,...,w_n)^T$. Его компоненты вычисляются по формуле

$$w_i=\frac{a_{1n}}{a_{1i}},\quad i=1,2,...,n-1;\quad w_n=1. \tag{6.6}$$

Вектор весов w, найденный по формуле (6.6), не удовлетворяет требованию нормировки, так как его последняя компонента равна единице. Для того чтобы он был нормирован, каждую его компоненту следует разделить на сумму всех компонент, т.е. на величину $w_1+w_2+...+w_{n-1}+1$, где все слагаемые w_i, $i=1,2,...,n-1$, определены по формуле (6.6).

Обоснование выбора компонент вектора весов w по формуле (6.6) дается в следующем утверждении.

Теорема 6.2. *Пусть матрица* $A=(a_{ij})_{n\times n}$, *обладающая свойствами* 1) – 2), *построена на основе элементов первой строки в соответствии с формулой* (6.5). *Эта матрица определяется однозначно и обладает всеми свойствами матрицы относительных весов. При этом свойство* 4), *т.е. равенство* (6.3), *имеет место для вектора* w, *компоненты которого вычислены по формуле* (6.6).

□ Единственность матрицы A, построенной из заданных элементов первой строки при помощи формулы (6.5) вытекает непосредственно из этой формулы. В самом деле, предположим, что существует матрица $A'=(a'_{ij})_{n\times n}$, $A'\neq A$, имеющая ту же самую первую строку (а значит, тот же самый первый столбец), что и матрица A, т.е. $a'_{1j}=a_{1j}$, $j=1,2,...,n$, причем

$$a'_{ij}=\frac{a'_{1j}}{a'_{1i}}=\frac{a_{1j}}{a_{1i}},\qquad \text{для всех } i,j=2,...,n.$$

Так как согласно предположению $A'\neq A$, то для некоторых номеров $i,j\in\{2,...,n\}$ верно неравенство $a'_{ij}\neq a_{ij}$. С другой стороны, верно как равенство $a_{ij}=\dfrac{a_{1j}}{a_{1i}}$, так и равенство $a'_{ij}=\dfrac{a_{1j}}{a_{1i}}$, откуда следует $a'_{ij}=a_{ij}$, что противоречит сделанному ранее предположению $a'_{ij}\neq a_{ij}$. Следовательно, матрица A определяется однозначно.

Для матрицы $A=(a_{ij})_{n\times n}$, построенной из заданных элементов первой строки при помощи формулы (6.5), свойство совместности имеет место, так как равенство

$$a_{ik}\,a_{kj}=\frac{a_{1k}}{a_{1i}}\cdot\frac{a_{1j}}{a_{1k}}=\frac{a_{1j}}{a_{1i}}=a_{ij}$$

выполняется для всех номеров $i,j,k=1,2,...,n$.

Благодаря формулам (6.5) – (6.6) для произвольного элемента a_{ij} матрицы A справедливо представление

$$a_{ij} = \frac{a_{1j}}{a_{1i}} = \frac{a_{1n}}{a_{1i}} \Big/ \frac{a_{1n}}{a_{1j}} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Это означает, что матрица A является некоторой матрицей относительных весов, а значит, согласно лемме 6.1 она имеет два собственных значения 0 и n.

Таким образом, матрица A обладает всеми свойствами 1) – 4) матрицы относительных весов ■

Замечание 6.3. Нетрудно заметить, что компоненты весового вектора w, найденного с помощью формулы (6.6), составляют последний столбец матрицы A, построенной на основе первой строки при помощи формулы (6.5).

Проиллюстрируем применение предложенного выше подхода на следующем примере.

Пример 6.3. Пусть имеется четыре объекта для инвестирования A_1, A_2, A_3, A_4. Требуется распределить единичную сумму по этим объектам, исходя из критерия надежности вложения средств в эти объекты. Предположим, что в результате сравнения по критерию надежности первого объекта со всеми остальными, от эксперта были получены следующие данные: $a_{12} = 3, a_{13} = 0.5, a_{14} = 2$. Здесь, например, число $a_{13} = 0.5$ означает, что по мнению эксперта надежность третьего объекта для инвестирования в два раза выше надежности первого объекта.

В соответствии с формулой (6.5) матрица парных сравнений (относительных весов) будет иметь следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/2 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1/6 & 2/3 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1/2 & 3/2 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

На самом деле вся эта матрица для нахождения вектора весов не нужна; требуются лишь элементы ее последнего столбца. Именно они составляют весовой вектор: $w_1 = 2, w_2 = 2/3, w_3 = 4, w_4 = 1$. После нормировки, которая состоит в делении всех полученных компонент на $^{23}\!/_{3}$, приходим к окончательному результату

$$\hat{w}_1 = {}^{6}\!/_{23},\ \hat{w}_2 = {}^{2}\!/_{23}, \hat{w}_3 = {}^{12}\!/_{23}, \hat{w}_4 = {}^{3}\!/_{23}.$$

Найденные веса указывают доли, в соответствии с которыми следует осуществить распределение единичной суммы по имеющимся четырем объектам для инвестирования, если в качестве основы взять указанные выше результаты сравнения экспертом надежности первого объекта по сравнению с надежностью остальных объектов.

6.4.4. Упрощенный вариант МАИ на основе схемы последовательного сравнения объектов

Оказывается, упрощенный вариант МАИ можно также реализовать, взяв за основу не элементы первой строки матрицы парных сравнений, а и другие определенные наборы из $n-1$ элементов матрицы парных сравнений.

Рассмотрим, например, набор элементов $a_{12}, a_{23}, ..., a_{n-1,n}$. Этому набору соответствует следующая *схема последовательного сравнения*. Из имеющегося набора объектов произвольно выбирается какой-то один. Ему присваивается первый номер. Для него с целью последующего сравнения подбирается другой объект (которому присваивается второй номер), наиболее «подходящий» для сравнения с первым. В результате сравнения становится известен элемент a_{12}. Дальнейшие действия аналогичны: для второго объекта подбирается наиболее «удобный» для сравнения третий объект; в результате сравнения становится известен элемент a_{23} и т.д.

Формула для последовательного вычисления всех остальных элементов матрицы A, расположенных выше главной диагонали, на основе набора $a_{12}, a_{23}, ..., a_{n-1,n}$ имеет вид

$$a_{ij} = a_{i,j-1} \cdot a_{j-1,j}\,, \qquad i = 1, ..., n-2;\ i < j-1\,. \tag{6.7}$$

Согласно этой формуле сначала можно найти все элементы первой строки в порядке возрастания номера столбца, затем аналогично – все элементы второй строки, начиная с a_{24}, и т.д. до последнего элемента $a_{n-2,n}$. Последний столбец построенной матрицы будет являться искомым (ненормированным) весовым вектором.

Можно проверить (см. ниже упр. 5), что компоненты (ненормированного) весового вектора на основе набора элементов $a_{12}, a_{23}, ..., a_{n-1,n}$ могут быть непосредственно вычислены по формуле

$$w_k = a_{k,k+1} \cdot a_{k+1,k+2} \cdot ... \cdot a_{n-1,n}\,,\ k = 1, 2, ..., n-1; \quad w_n = 1\,. \tag{6.8}$$

6.5. Применение МАИ к решению многокритериальных задач

Обратимся к многокритериальной задаче с векторным критерием

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m),$$

заданным на конечном множестве возможных решений X. Предположим, что для ЛПР каждый из критериев f_i желательно максимизировать.

В соответствии с методом анализа иерархий выбираемым (наилучшим или оптимальным) решением $x^* \in X$ многокритериальной задачи объявляется то, которое доставляет наибольшее возможное значение «аддитивной свертке» критериев $\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x)$, т.е. такое решение $x^* \in X$, для которого выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x^*) = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x).$$

При этом положительные коэффициенты $w_1, w_2, \ldots, w_m$ свертки $\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x)$ определяются на основе МАИ (или его упрощенного варианта). С этой целью эксперту для сравнения по важности предлагается набор критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Именно они выступают в качестве сравниваемых объектов.

Получив в распоряжение конкретные значения (веса) $w_1, w_2, \ldots, w_m$ и подставив их в аддитивную свертку $\sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x)$, можно приступать к ее максимизации на множестве возможных решений X. В результате этой максимизации будет получено решение x^*, которое согласно МАИ следует выбирать.

Замечание 6.4. Следует иметь в виду, что изложенный выше подход к решению многокритериальной задачи на основе МАИ (или его упрощенного варианта) в отличие от подхода, основанного на понятии относительной важности критериев (см. главу 4), не имеет строгого обоснования. В первую очередь это относится к назначению экспертом элементов матрицы парных сравнений. Дело в том, что разные эксперты могут назначать различные элементы, которым будут соответствовать отличающиеся друг от друга наборы весов $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Спрашивается, какой из полученных наборов будет «истинным»? Этот вопрос каждый исследователь решает по-своему, осуществляя определенный произвол, поскольку отсутствуют формальные определения элементов a_{ij} матрицы парных сравнений и весов объектов.

Второе «слабое место» МАИ связано со способом скаляризации многокритериальной задачи. Выбор аддитивной свертки критериев означает определенный «произвол», поскольку, как нам известно (см., например, теорему 5.1), имеется много различных методов скаляризации многокритериальной задачи. При этом выбор того или иного способа скаляризации (свертки) в сильной степени влияет на точку максимума свертки. И существуют примеры, которые наглядно демонстрируют, что применение МАИ может приводить к результатам, которые противоречат здравому смыслу (см. ниже упр. 6).

6.6. Анализ иерархии целей

6.6.1. Иерархическая структура целей

Пусть имеется некоторый конечный набор возможных решений X, из которого предстоит выбрать «наилучшее» решение. Напомним, что в самом широком смысле «наилучшим» обычно считается такое решение, которое в наиболее полной мере удовлетворяет определенной (глобальной) цели, которую ЛПР преследует в результате своей деятельности.

Предположим, что при формировании математической модели принятия решений в какой-то конкретной задаче степень удовлетворения указанной цели удалось выразить с помощью *одного* числового критерия (показателя) f таким образом, что, например, большее значение этого критерия соответствует большей степени удовлетворения цели, а меньшее – соответственно, меньшей степени удовлетворения. В таком случае вопрос выбора «наилучшего» решения сводится к обычной (т.е. однокритериальной) задаче максимизации числовой функции (критерия первого уровня) f на множестве возможных решений X и решение этой задачи не вызывает принципиальных трудностей.

К сожалению, действительность такова (и это характерно для экономических задач!), что при формировании математической модели чаще всего не удается описанным выше образом выразить глобальную цель ЛПР в терминах одного числового критерия. Как правило, при ближайшем рассмотрении выясняется, что эта цель может быть лишь расчленена (декомпозирована) на целый ряд более простых (локальных) подцелей. Если при этом для каждой отдельной подцели удастся построить отвечающий ей критерий, то в результате будет получена многокритериальная задача с набором критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ второго уровня и для ее решения, в частности, можно применить МАИ или его упрощенный вариант так, как это было описано в предыдущем разделе.

Следует заметить, что в некоторых сложных задачах принятия решений не удается построить не только один, но даже все упомянутые критерии $f_1, f_2, ..., f_m$ для выражения локальных целей (т.е. подцелей) ЛПР. Это происходит из-за того, что сами эти локальные цели представляют собой сложный «конгломерат устремлений», включающий набор более простых составляющих.

Обозначим через i номер подцели, для выражения которой не удалось сформировать соответствующий числовой критерий f_i. В этом случае i-ю подцель можно попытаться вновь расчленить на ряд еще более простых подцелей следующего уровня и попытаться для их математического выражения построить соответствующий набор критериев третьего уровня. В свою очередь, построение одного, нескольких или даже всех критериев $f_{i1}, f_{i2}, ..., f_{im}$, выражающих определенные подцели третьего уровня, вновь может натолкнуться на серьезные трудности и опять придется какие-то критерии пытаться представить в виде определенного конечного набора некоторых критериев уже четвертого уровня. И т.д.

Указанным способом, в результате выполнения некоторого конечного числа описанных действий будет выявлена определенная *иерархическая* (древовидная) *структура целей* (или *иерархия целей*), которую можно наглядно изобразить графически (см. рис. 6.1). Эта структура действительно напоминает разветвленное перевернутое дерево, корень которого располагается на самом верхнем (первом) уровне и соответствует глобальной цели ЛПР, а ветви последовательно опускаются на все более высокий (по номеру) уровень.

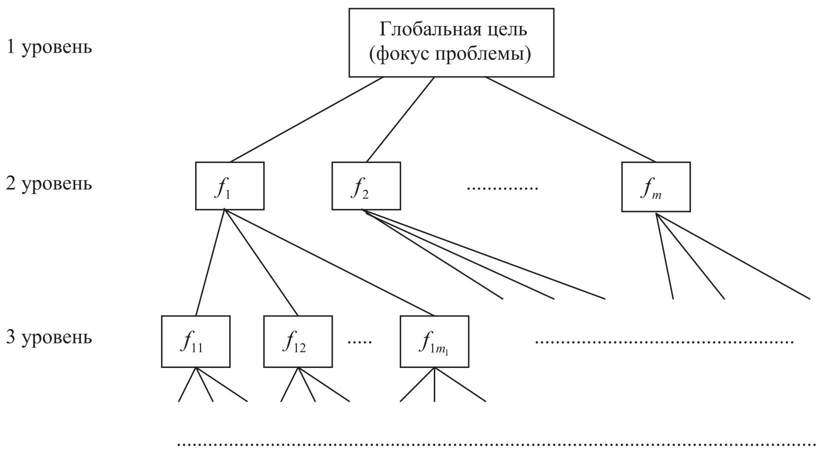

Рис. 6.1. Иерархическая структура целей.

Следует обратить внимание на то, что в конкретных задачах это дерево может не оказаться абсолютно симметричным в том смысле, что его ветви могут иметь различную длину (измеряемую в количестве уровней), считая от корня. Например, если имеется две цели на втором уровне (т.е. $m = 2$), то из них только первая может расчленяться на несколько подцелей (которым отвечают, например, критерии f_{11}, f_{12}, f_{13} третьего уровня), тогда как вторая цель вполне может быть выражена одним критерием f_2. В результате здесь получается четыре *критерия* $f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_2$ *нижнего уровня* (три из них третьего уровня, а один – второго), которые и следует учитывать в процессе дальнейшего решения многокритериальной задачи. При этом говорят, что критерии f_{11}, f_{12}, f_{13} *подчинены* критерию f_1, а критерии f_1, f_2 подчинены глобальной цели (фокусу проблемы). В соответствии с этим критерии нижнего уровня характеризуются тем, что им не подчиняется ни один критерий.

Введенная терминология заимствована из трактовки иерархической структуры в виде отношения подчиненности, когда имеется один «высокий начальник», в подчинении которого находится ряд заместителей, каждый из которых, свою очередь, может иметь власть над некоторыми подразделениями или же отдельными людьми и т.д. Следует отметить, что в непосредственном подчинении могут находиться только критерии соседних (т.е. предыдущего и последующего) уровней. Причем каждый критерий (кроме критерия первого уровня) находится в подчинении какого-то одного критерия, уровень которого на единицу меньше.

6.6.2. Решение многокритериальных задач с иерархической структурой целей

Для решения многокритериальных задач со сложной иерархической структурой целей можно использовать описанный ранее МАИ или его упрощенный вариант следующим образом.

Пусть задана некоторая иерархия целей. Сначала рассматривают все критерии нижнего уровня, которые выражают определенные подцели того или иного иерархического уровня, заданы в виде числовых функций, определенных на множестве возможных решений, и подлежат максимизации. Они могут отвечать уровням иерархии с различными номерами. Для каждого из критериев нижнего уровня следует вычислить числа, являющиеся значениями данного критерия на каждом элементе предварительного пронумерованного множества возможных решений.

Обозначим через n число возможных решений, т.е. $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. В результате указанных выше вычислений каждому критерию f_α нижнего уровня в иерархической структуре целей должен быть поставлен в соответствие n-мерный вектор значений $(f_\alpha(x_1), f_\alpha(x_2)..., f_\alpha(x_n))$. На этом первый этап расчета завершен.

На втором этапе среди критериев нижнего уровня выделяются группы, которые подчинены одной и той же цели (критерию). Для каждой такой группы с привлечением экспертов при помощи МАИ (или его упрощенного варианта), примененного к *множеству критериев* данной группы, вычисляется вектор, компоненты которого выражают нормированные веса критериев этой группы относительно критерия, в подчинении которого они находятся. При этом размерность полученного нормированного весового вектора будет равна числу критериев данной группы. Затем критерию, в подчинении которого находятся критерии данной группы, ставится в соответствие вектор, представляющий собой взвешенную сумму n-мерных векторов, соответствующих критериям данной группы и полученных на первом этапе, а коэффициентами этой суммы являются компоненты вектора, выражающего найденные нормированные веса критериев.

Поясним сказанное на следующем примере. Пусть критерии $f_{11}, f_{12}, ..., f_{1m_1}$ входят в число критериев нижнего уровня и подчиняются критерию f_1. После выполнения первого этапа каждому из них поставлен в соответствие n-мерный вектор $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(m_1)}$ соответственно. Предположим, что в результате сравнения эксперта (по весу) критериев $f_{11}, f_{12}, ..., f_{1m_1}$ относительно критерия f_1 при помощи МАИ (или его упрощенного варианта) был получен нормированный весовой вектор с компонентами $w_1, w_2, ..., w_{m_1}$. Тогда критерию f_1 следует сопоставить вектор, представляющий собой взвешенную сумму вида

$$w_1 y^{(1)} + w_2 y^{(2)} + ... + w_{m_1} y^{(m_1)}.$$

Дальнейшие этапы выполняются аналогично. А именно, из числа тех критериев, относительно которых на предыдущем этапе вычислялись нормированные весовые векторы, следует выделить группы, подчиненные одной и той же цели (критерию), расположенной на более высоком иерархическом уровне. С этими группами необходимо действовать так же, как было описано выше, чтобы в результате критерию, которому они подчиняются, поставить в соответствие определенный n-мерный вектор, найденный как некоторая взвешенная сумма. И т.д.

В результате после выполнения какого-то конечного числа этапов вычислений *каждому* из критериев *второго* уровня будет поставлен в соответствие определенный n-мерный вектор. Обозначим эти векторы через $z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(m)}$. Затем с привлечением эксперта при помощи МАИ (или его упрощенного варианта) определяются нормированные веса критериев $f_1, f_2, ..., f_m$ второго уровня относительно фокуса проблемы. Пусть это будут положительные числа, которые обозначим через $v_1, v_2, ..., v_m$. В итоге окончательный результат может быть найден как взвешенная сумма векторов $z^{(1)}, z^{(2)}, ..., z^{(m)}$ с коэффициентами $v_1, v_2, ..., v_m$:

$$w = v_1 z^{(1)} + v_2 z^{(2)} + ... + v_m z^{(m)} .$$

При желании вектор w можно нормировать, т.е. все его компоненты разделить на сумму всех компонент. Его i-я компонента будет выражать итоговый вес i-го возможного решения ($i = 1, 2, ..., n$) с учетом всей заданной сложной иерархической структуры целей. После этого согласно МАИ выбирается решение, имеющее максимальный вес. Оно и признается «наилучшим».

6.6.3. Пример

Проиллюстрируем описанный метод простым примером. Предположим, что задана некоторая иерархия целей (см. рис. 6.2) и $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. В данном случае имеется шесть критериев нижнего уровня $f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_2, f_{31}, f_{32}$, которые подразделяются на три группы: $\{f_{11}, f_{12}, f_{13}\}$, $\{f_2\}$ и $\{f_{31}, f_{32}\}$. Если все критерии нижнего уровня заданы, то вычисляем их значения на возможных решениях и критерию f_{11} ставим в соответствие трехмерный вектор $y^{(1)} = (f_{11}(x_1), f_{11}(x_2), f_{11}(x_3))$,
критерию f_{12} – вектор $y^{(2)} = (f_{12}(x_1), f_{12}(x_2), f_{12}(x_3))$,
критерию f_{13} – вектор $y^{(3)} = (f_{13}(x_1), f_{13}(x_2), f_{13}(x_3))$,
критерию f_2 – вектор $y^{(4)} = (f_2(x_1), f_2(x_2), f_2(x_3))$,
критерию f_{31} – вектор $y^{(5)} = (f_{31}(x_1), f_{31}(x_2), f_{31}(x_3))$
и критерию f_{32} – вектор $y^{(6)} = (f_{32}(x_1), f_{32}(x_2), f_{32}(x_3))$.

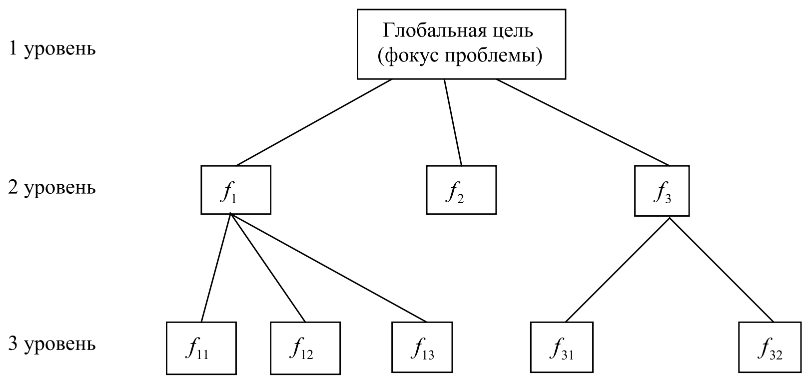

Рис. 6.2. Иерархия целей

Если же один, несколько или все последние критерии аналитически не заданы, то для получения соответствующих векторов $y^{(i)}$ можно применить МАИ (или его упрощенный вариант). Например, для формирования вектора $y^{(1)}$ следует привлечь эксперта и на основе его информации в виде матрицы относительных весов для решений x_1, x_2, x_3 (относительно критерия f_{11}) вычислить требуемый трехмерный вектор $y^{(1)}$.

Рассмотрим первую группу критериев $\{f_{11}, f_{12}, f_{13}\}$ нижнего уровня. От эксперта получаем матрицу третьего порядка относительных весов для критериев данной группы и с помощью МАИ (или его упрощенного варианта) вычисляем нормированный весовой вектор для этой группы. Обозначим его компоненты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Критерию f_1 ставим в соответствие вектор

$$z^{(1)} = \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_2 y^{(2)} + \alpha_3 y^{(3)}.$$

Аналогично вычисляется нормированный весовой вектор с компонентами β_1, β_2 для группы нижнего уровня $\{f_{31}, f_{32}\}$. После чего критерию f_3 ставится в соответствие вектор

$$z^{(2)} = \beta_1 y^{(5)} + \beta_2 y^{(6)}.$$

Далее по той же схеме следует вычислить нормированный весовой вектор для группы критериев f_1, f_2, f_3. Обозначим его компоненты w_1, w_2, w_3.

Теперь можно записать окончательный результат. Это будет трехмерный вектор

$$w_1 z^{(1)} + w_2 y^{(4)} + w_3 z^{(2)}.$$

Его i-я компонента будет выражать окончательный вес i-го возможного решения ($i = 1, 2, 3$) с учетом иерархии целей, изображенной на рис. 6.2.

Выводы

Метод анализа иерархий (МАИ), предназначенный для отыскания «весов» объектов, основан на использовании матрицы парных сравнений. Его реализация требует вычисления максимального собственного значения этой матрицы и соответствующего собственного вектора. Это может составить сложную вычислительную задачу.

Существует более простая и надежная версия — упрощенный вариант МАИ. Оба метода могут быть использованы при решении многокритериальных задач со сложной иерархической структурой целей.

Основные понятия

Матрица относительных весов, матрица парных сравнений, метод анализа иерархий, иерархия целей.

Контрольные вопросы

1. Приведите определение собственного значения и собственного вектора квадратной матрицы.
2. Что называется матрицей относительных весов? Перечислите свойства этой матрицы.
3. Что такое матрица парных сравнений? С какой задачей связана эта матрица? Каким образом на практике осуществляется построение этой матрицы?
4. Опишите все этапы МАИ и охарактеризуйте их сложность с вычислительной точки зрения.
5. Сформулируйте упрощенный вариант МАИ на основе схемы сравнения с образцом. Какие формулы в этом случае используются?
6. Опишите упрощенный вариант МАИ на основе схемы последовательного сравнения объектов.
7. Каким образом МАИ и упрощенный вариант МАИ можно применять для решения многокритериальных задач?
8. Как выглядит иерархическая структура целей?
9. Каким образом для решения многокритериальной задачи со сложной иерархией целей можно применить МАИ?

Упражнения

1. Вычислите все собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Пусть матрица парных сравнений имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1 & 2.5 \\ 1/3 & 1/2.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Является ли эта матрица совместной? Каков ее индекс совместности? Найдите соответствующий этой матрице нормированный весовой вектор на основе МАИ.
3. Определите на основе упрощенного варианта МАИ весовой вектор для задачи сравнения пяти объектов, если эксперт в результате сравнения объектов представил следующие данные: $a_{12} = 3,\quad a_{13} = 2,\quad a_{14} = 1/3,\quad a_{15} = 1/2$.
4. Докажите, что при использовании упрощенного варианта МАИ на основе схемы последовательного сравнения формула для вычисления остальных элементов матрицы A, обладающей свойствами 1) – 4) матрицы относительных весов, действительно имеет вид (6.7).
5. Убедитесь в том, что при использовании упрощенного варианта МАИ на основе схемы последовательного сравнения для вычисления компонент (ненормированного) весового вектора может быть использована формула (6.8).
6. Задача состоит в приобретении прямоугольного участка земли для последующего строительства дома. Предположим, что имеются следующие три варианта: 100×100, 50×200 и 70×150, где измерение производится, например, в метрах. Убедитесь геометрически, что третий участок, площадь которого максимальна, ни при каких положительных весах w_1, w_2 критериев (т.е. длины и ширины) не может оказаться выбранным (т.е. иметь наибольший вес), если выбор осуществляется на основе МАИ или упрощенного варианта МАИ, использующих аддитивную свертку критериев.

Темы курсовых работ

1. Углубленное изучение свойств множества Парето.
2. Вклад В. Парето в математическую экономику.
3. Функции выбора. Принцип Эджворта-Парето в терминах функций выбора.
4. Слабо эффективные и собственно эффективные решения многокритериальных задач.
5. Относительная важность для двух групп критериев и ее применение в процессе принятия решений.
6. Использование набора информации об относительной важности критериев для сужения множества Парето.
7. Методы назначения приоритетов, близкие к МАИ.

Литература

1. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. – М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2006.
2. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирования решений в экономике. – М.: «Финансы и статистика», 2001.
3. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: «ДИС», 1997.
4. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981.
5. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. – М.: Логос, 2000.
6. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения. – М.: Наука, 1987.
7. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. М.: Наука, 1979.
8. Лотов А.В. и др. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. – М.: Наука, 1997.
9. Мамиконов Ф.Г. Принятие решений и информация. – М.: Наука, 1983.
10. Ногин В.Д. Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход (2–е изд.). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005 .
11. Ногин В.Д. и др. Основы теории оптимизации. – М.: Высшая школа, 1986.
12. Ногин В.Д. Логическое обоснование принципа Эджворта-Парето// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002, № 7, с. 951–957.
13. Ногин В.Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев //Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004, т. 44, №7, с. 1261–1270.
14. Ногин В.Д. Обобщенный принцип Эджворта-Парето и границы его применимости// Экономика и математические методы, 2005, т. 41, № 3, С. 128-134.

15. Ногин В.Д. Принцип Эджворта-Парето в терминах нечеткой функции выбора// Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, т. 46, № 4, с. 582–591.
16. Плаус С. Психология оценки и принятия решений. – М.: «Филинъ», 1998.
17. Подиновский В.В. Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – В сб. «Многокритериальные задачи принятия решений», М.: Машиностроение, 1978, с. 48-82.
18. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.
19. Саати Т., Кернс . Аналитическое планирование. Организация систем. – М.: Радио и связь, 1991.
20. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1989.
21. Розен В.В. Цель – оптимальность – решение. М.: Радио и связь, 1982.
22. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978.
23. Noghin V.D. Relative importance of criteria: a quantitative approach //J. of Multi-Criteria Decision Analysis, 1997, v. 6, pp. 355–363.
24. Noghin V.D. What is the relative importance of criteria and how to use it in MCDM //Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, v. 507 (“Multiple Criteria Decision Making in the New Millennium”, eds. Köksalan, S. Zionts), Springer, 2001, pp. 59-68.
25. Noghin V.D. An Axiomatization of the Generalized Edgeworth-Pareto Principle in Terms of Choice Functions //Mathematical Social Sciences, 2006, v. 52, No 2, pp. 210–216.
26. Saaty T.L. Multicriteria Decision Making. The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation. – University of Pittsburgh, 1990.
27. Steuer R. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application. – J.Wiley&Sons Inc., N.Y.-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1986. Русский перевод: Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения / Пер с англ. М. Радио и связь. 1992.
28. Yu P.L. Multiple Criteria Decision making: Concepts, Techniques, and Extensions. – Plenum Press, N.Y.-London, 1985.

Ногин Владимир Дмитриевич,
д.ф-м.н., профессор кафедры математики СПб филиала ГУ-ВШЭ

Принятие решений при многих критериях

Учебно-методическое пособие

Рецензенты: *Н.А. Зенкевич,* к.ф-м.н., доцент факультета ПМ-ПУ СПбГУ
А.С. Рыбакин, к.т.н., доцент кафедры математики СПБ ф ГУ-ВШЭ
Тех. редактор *А.А. Кузнецов*
Верстка *Е. Е. Свежинцев*

Издательство «Ютас»
190008, Санкт-Петербург, ул. Рощинская, д. 36,
тел. (812) 388-03-21;
e-mail: jutasprint@gmail.com

Подписано в печать 20.07.2007. Формат 60x88/16
Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.
Объем: 6,5 печ. л., ???? учетно-издат. л.
Тираж 150. Заказ №

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии ООО «Ютас»
190008, Санкт-Петербург, ул. Рощинская, д. 36
тел./факс (812) 388-03-21; e-mail: jutasprint@gmail.com