16. **Санин А.Л.** Квантовый транспорт электрона в пространстве с однородным положительным зарядом и световой волной // Оптика и спектроскопия. 1994. Т. 77. № 5. С. 822–826.

17. **Санин А.Л.** Уравнения Маделунга и Максвелла–Лоренца для электрона с переменной эффективной массой // Оптика и спектроскопия. 1996. Т. 80. № 4. С. 540–543.

18. **Sanin A.L.** Electron synergetics: Quantum hydrodynamic view-point// Proc. SPIE. 1998. Vol. 3345. P. 122–128.

19. **Sanin A.L.** Quantum fluid dynamics for the simple coulomb model / Proc. SPIE. 1999. Vol. 3687. P. 102–104.

20. **Barut A.O., Dowling J.P., J.F. van Huele** // Quantum electrodynamics based on self-fields, without second quantization // Phys .Rev. A. 1988. Vol. 38, № 9. P. 4405–4412.

В.Д. НОГИН

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ В ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ

Понятие о многокритериальной задаче. Многие задачи, возникающие в самых различных сферах человеческой деятельности, формализуются в виде задачи оптимизации с несколькими критериями оптимальности, образующими векторный критерий

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m),$$

где m — число критериев, $m \geqslant 2$.

Постановка многокритериальной задачи включает два объекта — *множество возможных решений X* и упомянутый *векторный критерий f*, заданный на множестве *X*. Считается, что для любого возможного решения $x \in X$ может быть вычислена соответствующая *векторная оценка* (m-мерный вектор)

$$y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)).$$

Проиллюстрируем введенные термины, рассмотрев задачу выбора наилучшего проектного решения. В этой задаче множество *X* состоит из нескольких конкурсных проектов (например, строительства нового предприятия), а критериями оптимальности могут служить f_1 — стоимость реализации проекта, а также f_2 — величина прибыли, которую обеспечит данное проектное решение (т. е. построенное предприятие). Если ограничить рассмотрение данной задачи лишь одним критерием оптимальности, практическая значимость решения такой задачи будет незначительной. В самом деле, при использовании только первого критерия будет выбран самый дешевый проект, но его реализация может привести к недопустимо малой прибыли. С другой стороны, на строительство самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия оптимальности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если же дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, к двум указанным следует добавить третий критерий и т. д.

Выбор наилучшего решения из множества возможных решений производит некий субъект, и этот же субъект несет полную ответственность за принятое решение. Его называют лицом, принимающим решение (ЛПР). В роли ЛПР может выступать отдельный человек или коллектив, стремящийся достичь определенной цели.

Вернемся к упомянутой выше задаче выбора наилучшего проектного решения. Лицо, принимающее к реализации то или иное проектное решение и несущее ответственность за это решение, зависит от того, каким является проектируемое предприятие — частным или государственным. Если будущее предприятие частное, то, очевидно, лицом, принимающим решение, является глава фирмы. Если же данное предприятие государственное, то ответственность за принятое решение несет, скорее всего, глава администрации района, на территории которого будет построено предприятие.

Далее будем считать, что ЛПР заинтересовано в получении по возможности большего значения по каждому из имеющихся критериев $f_1, f_2, \dots, f_m$. Поскольку минимизация какого-то критерия равносильна максимизации того же самого критерия, взятого с обратным знаком, то сделанное допущение не является ограничительным. В таком случае действительно наилучшим (идеальным) для ЛПР будет решение, которое максимизирует на множестве *X* все указанные критерии одновременно. К сожалению, подобные решения в жизни практически не встречаются. Обычно приходится иметь дело с задачами, в которых решение, оптимальное по какому-то одному критерию, не является таковым ни по какому другому критерию. Это означает, что многокритериальная задача в общем случае не сводима ни к одной, ни к нескольким однокритериальным задачам. Она сложнее их, и для ее решения следует разрабатывать принципиально новые подходы.

Рассмотрим два возможных решения: x' и x''. Если из этих двух решений ЛПР выбирает первое, то это означает, что решение x' для ЛПР является более предпочтительным, чем x''. В этом случае пишут

$$x' \succ x''.$$

Значок $\succ$ служит для обозначения предпочтений ("вкусов") ЛПР и называется *отношением предпочтения.* У каждого ЛПР свои собственные "вкусы", и поэтому каждому ЛПР соответствует свое собственное отношение предпочтения.

Любая задача принятия решений связана с конкретным ЛПР. Поэтому постановка всякой многокритериальной задачи кроме уже упомянутого множества возможных решений X и векторного критерия f включает еще отношение предпочтения данного ЛПР[1]. Сама же задача заключается в выборе среди возможных решений такого (может быть, не единственного) решения, которое было бы наиболее предпочтительным для ЛПР с учетом всех имеющихся критериев оптимальности, составляющих векторный критерий f. Обозначим через $Opt_{\succ}X$ искомое множество (оно может состоять и из одного элемента) всех наиболее предпочтительных (оптимальных) для ЛПР решений. Тем самым *многокритериальная задача состоит в отыскании множества $Opt_{\succ}X$ на основе векторного критерия f.*

Множество Парето[2]. Введем множество номеров критериев $I = \{1,2,\ldots,m\}$ и рассмотрим два произвольно выбранных возможных решения $x', x'' \in X$ и соответствующие им векторные оценки

$$y' = f(x') = (f_1(x'), f_2(x'), \ldots, f_m(x'))$$
и $$y'' = f(x'') = (f_1(x''), f_2(x''), \ldots, f_m(x''))$$

Предположим, что выполняются неравенства $f_i(x') \geqslant f_i(x'')$ для всех $i \in I$, причем хотя бы для одного номера $i \in I$ соответствующее неравенство является строгим. В таком случае кратко пишут

$$f(x') \geq f(x''). \qquad (1)$$

Содержательно неравенство (1) означает, что решение x' для ЛПР по всем имеющимся критериям не хуже, чем x'', причем по крайней мере по какому-то одному критерию оно лучше второго решения. Очевидно, в таком случае при выборе из двух данных решений x' и x'' ЛПР отдаст предпочтение первому из них, т. е. $x' \succ x''$. Итак, второе решение x'' может быть "улучшено" первым решением x', а "улучшаемое" решение ни при каких обстоятельствах не может претендовать на роль оптимального: $x'' \notin Opt_{\succ}X$.

Если из множества X удалить все "улучшаемые" решения (при условии, что они найдутся), то придем к *множеству неулучшаемых* (эффективных или Парето-оптимальных) *решений.* Точнее говоря, решение $x^* \in X$ называют *Парето-оптимальным*, если не существует такого решения $x \in X$, для которого выполняется неравенство $f(x) \geq f(x^*)$.

Обозначим множество всех Парето-оптимальных решений (*множество Парето*) через $P_f(X)$. Оно играет ключевую роль в дальнейшем изложении. К настоящему времени свойства этого множества изучены достаточно подробно (см. [1]), разработаны методы и алгоритмы построения этого множества и все специалисты в области принятия решений единодушно считают, что наилучшие решения многокритериальной задачи следует искать именно среди множества Парето:

$$Opt_{\succ}X \subset P_f(X). \qquad (2)$$

Простые примеры показывают, что непустое множество Парето может представлять собой любое подмножество множества возможных решений (в том числе состоять из одного единственного решения или же $P_f(X) = X$). Чем уже множество Парето, тем менее сложным представляется последующее нахождение множества $Opt_{\succ}X$. Однако практика показывает, что в реальных задачах множество Парето является достаточно широким и его построение не решает задачу принятия решений полностью. *Какие именно Парето-оптимальные решения образуют множество $Opt_{\succ}X$*, это, пожалуй, самый трудный вопрос, с которым приходится сталкиваться при решении любой конкретной многокритериальной задачи. Для ответа на этот вопрос, как правило, приходится привлекать какую-то дополнительную информацию об отношении предпочтения ЛПР.

Основные требования к методам решения многокритериальных задач. Результатом применения подавляющего большинства методов решения многокритериальных задач является некоторое множество. Обозначим это множество через X_0, $X_0 \subset X$ (оно может состоять и из одного элемента). В идеальном случае $X_0 = Opt_{\succ}X$.

[1] Информации об этом отношении, как правило, немного. Если бы оно было точно и полностью известно, то для решения многокритериальной задачи векторный критерий f вообще был бы не нужен.

[2] В. Парето (1848 – 1923) — известный итальянский социолог и экономист.

Как уже было отмечено выше, выбор наилучших решений следует производить в пределах множества Парето. Поэтому *первое требование,* предъявляемое к каждому методу решения многокритериальных задач, можно выразить в виде включения

$$X_0 \subset P_f(X).$$

Второе требование состоит в том, что разработчиками метода должен быть четко очерчен (в терминах свойств объектов X, f и $\succ$) класс многокритериальных задач, для которых гарантированно выполняется если не равенство $X_0 = Opt_{\succ} X$, то хотя бы включение

$$X_0 \subset Opt_{\succ} X.$$

Наконец, поскольку всякий метод, как правило, требует привлечения той или иной дополнительной информации об отношении предпочтения $\succ$ ЛПР, то, согласно *третьему требованию,* эта информация должна быть сформулирована в предельно простой, легко воспринимаемой ЛПР форме.

Описанию всевозможных методов и приемов решения многокритериальных задач посвящены десятки монографий и сотни статей. Однако если произвести их анализ, то выяснится, что ни один из этих методов в полной мере не удовлетворяет всем сформулированным выше требованиям.

Ниже излагается иной подход, основная идея которого состоит в последовательном обоснованном сужении множества Парето. В соответствии с этим подходом на первом шаге с помощью введенного строгим определением понятия количественной информации об относительной важности критериев строится некоторое множество $\hat{X}$, представляющее собой сужение множества Парето:

$$Opt_{\succ} X \subset \hat{X} \subset P_f(X).$$

На втором шаге, используя новую дополнительную информацию об относительной важности критериев, можно построить следующее, еще более узкое множество $\hat{\hat{X}}$, такое, что

$$Opt_{\succ} X \subset \hat{\hat{X}} \subset \hat{X}$$

и т. д. При этом $\hat{X}$, $\hat{\hat{X}}$ и т. д. представляют собой множества Парето относительно некоторых новых вектор-функций, легко вычисляемых по исходному векторному критерию, и для отыскания указанных множеств можно использовать весь арсенал разработанных к настоящему времени методов построения множеств Парето.

Начальные понятия теории относительной важности критериев. Каждое возможное решение $x \in X$ характеризуется соответствующей оценкой $y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$, представляющей собой набор из m чисел (m-мерный вектор). Сравнивая два произвольных возможных решения x' и x'' с точки зрения их предпочтительности, ЛПР на самом деле производит сравнение соответствующих оценок — $f(x')$ и $f(x'')$. Поэтому выбор среди решений сводится к выбору среди оценок, т. е. среди m-мерных векторов. Одни оценки для ЛПР оказываются более предпочтительными, чем другие — это позволяет удалять из всего множества оценок заведомо "неприемлемые" оценки, а значит, и соответствующие им решения.

При $m = 3$ рассмотрим следующие две векторные оценки: $y' = (4 \quad 1 \quad 0)$ и $y'' = (2 \ 2 \ 0)$. Оценка y' по первому критерию "лучше" оценки y'' (так как $4 > 2$), а по второму критерию — "хуже" ($1 < 2$), тогда как по третьему критерию данные оценки равнозначны. Тем самым при переходе от оценки y'' к оценке y' ЛПР добавляет две единицы по первому критерию, но при этом теряет единицу по второму критерию.

Предположим, что при выборе из этих двух оценок ЛПР отдало предпочтение первой, т. е. y'. Спрашивается, каким образом можно объяснить сделанный ЛПР выбор? На наш взгляд, наиболее разумный ответ состоит в следующем. Поскольку ЛПР предпочло "прибавку" по первому критерию, несмотря на "потерю" по второму критерию, то это означает, что для ЛПР первый критерий является более важным, чем второй. При этом для количественной оценки степени важности можно использовать отношение

$$\frac{2-1}{(4-2)+(2-1)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3},$$

выражающее долю "потери" по отношению к сумме "прибавки" и "потери". Чем больше эта доля, тем большая степень важности будет у одного критерия по сравнению с другим.

Например, когда из двух оценок $\tilde{y}' = (3 \quad 1 \quad 0)$ и $y'' = (2 \quad 2 \quad 0)$ ЛПР вновь выбирает первую (т. е. $\tilde{y}'$), это отношение равно

$$\frac{2-1}{(3-2)+(2-1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

А так как $1/2 > 1/3$, то в данном случае для ЛПР степень важности первого критерия по сравнению со вторым критерием будет большей, чем ранее.

Приведенные рассуждения ведут к следующим определениям (см. [2, 3]).

Определение 1. Пусть векторный критерий $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, $m \geqslant 2$, определен на множестве X. Говорят, что *i-й критерий является более важным, чем j-й критерий ($i \neq j$) с положитель-*

ными числовыми параметрами w_i *и* w_j, если для любых x', $x'' \in X$, для которых выполняется

$$f_i(x') > f_i(x''), \quad f_i(x') - f_i(x'') = w_i,$$
$$f_j(x') < f_j(x''), \quad f_j(x'') - f_j(x') = w_j,$$

$f_s(x') = f_s(x'')$ для всех $s \in I$, кроме $s = i$, $s = j$, справедливо соотношение $x' \succ x''$.

Заметим, что в приведенном определении присутствует отношение предпочтения $\succ$, связанное с ЛПР. При этом у каждого ЛПР свое собственное отношение предпочтения, а значит, если для одного ЛПР i-й критерий важнее j-го, то для другого ЛПР этого может и не быть. Иначе говоря, введенное понятие относительной важности критериев носит "субъективный" характер, что хорошо согласуется с интуитивными представлениями об этом понятии.

Определение 2. Пусть i-й критерий важнее j-го с параметрами w_i, w_j. Число

$$k_{ij} = \frac{w_j}{w_j + w_i} \tag{3}$$

называется *коэффициентом относительной важности i-го критерия по сравнению с j-м критерием.*

Очевидно, $0 < k_{ij} < 1$, причем чем ближе этот коэффициент к единице, тем большая степень важности у i-го критерия по сравнению с j-м, и наоборот, чем ближе k_{ij} к нулю, тем меньше указанная степень важности. В "среднем" случае $k_{ij} = 0{,}5$ для получения "прибавки" по i-му критерию в размере w_i единиц ЛПР готово пожертвовать тем же количеством $(w_i = w_j)$ по j-му критерию. Подобным образом без труда можно дать интерпретацию любого числового значения коэффициента k_{ij} $(0 < k_{ij} < 1)$.

Теперь, после того как высказывание *i-й критерий важнее j-го критерия с коэффициентом относительной важности* k_{ij} получило точный смысл, перейдем к обсуждению вопроса учета количественной информации об относительной важности критериев в процессе решения многокритериальных задач.

Использование информации об относительной важности критериев для сужения множества Парето. Как правило, в процессе принятия решений не все участвующие в многокритериальной задаче критерии равноценны для ЛПР; одни из них являются более важными, чем другие. Будем считать, что ЛПР ознакомлено с приведенными выше определениями и готово в терминах коэффициентов относительной важности выразить неравноценность имеющихся критериев.

Пусть ЛПР полагает, что для него i-й критерий важнее j-го с коэффициентом относительной важности k_{ij} $(0 < k_{ij} < 1)$. Спрашивается, каким образом учесть эту дополнительную информацию в процессе принятия решений?

Вспомним установленное ранее включение (2), означающее, что наилучшие решения находятся среди Парето-оптимальных. После того как ЛПР дополнительно сообщило указанную информацию об относительной важности критериев, можно надеяться, что с помощью этой информации будет построено более узкое множество, ограничивающее $Opt_{\succ} X$, чем $P_f(X)$. Иными словами, дополнительная информация позволит удалить из множества Парето $P_f(X)$ какие-то заведомо "негодные" решения и тем самым сузить область дальнейшего поиска множества наилучших решений $Opt_{\succ} X$.

Действительно, при достаточно общих предположениях относительно $\succ$ имеет место следующий результат [2].

Теорема 1. *Пусть i-й критерий важнее j-го с коэффициентом относительной важности k_{ij}. Тогда для вектор-функции $g = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$ вида $g_s = f_s$ для всех $s \in I$, кроме $s = j$, и*

$$g_j = k_{ij} \cdot f_i + (1 - k_{ij}) \cdot f_j \tag{4}$$

выполнено

$$Opt_{\succ} X \subset P_g(X) \subset P_f(X) \tag{5}$$

В соответствии с теоремой 1 учет указанной количественной информации об относительной важности критериев производится следующим образом. Сначала менее важный критерий f_j в списке критериев $f_1, f_2, \ldots, f_m$ заменяется новым — g_j, вычисленным по формуле (4). Образуется новый векторный критерий g, отличающийся от исходного лишь j-м критерием. Затем с помощью известных методов и алгоритмов находится множество Парето $P_g(X)$ относительно векторного критерия g. Если это множество оказывается достаточно узким (в том смысле, что все решения, входящие в него, практически равнозначны для ЛПР), то в качестве наилучшего выбирается любое решение из $P_g(X)$. В противном случае следует попытаться получить от ЛПР новую дополнительную информацию об относительной важности какой-то другой пары критериев и учесть ее, построив еще более узкое множество, чем $P_g(X)$, и т. д. В результате выполнения подобных действий либо придем к достаточно узкому множеству Парето, внутри которого следует выбрать любое решение в качестве наилучшего, либо после учета всей информации об относительной важности критериев очередное множество Парето окажется сравнительно широким, и тогда придется для окончательного выбора наилучшего решения применить какой-нибудь подходящий известный метод решения многокритериальных задач.

Рассмотрим формулу (4) подробнее. Если положительное число k_{ij} вблизи нуля, то новый критерий g_j мало отличается от f_j — это соответствует ситуации, когда i-й критерий незначительно важнее j-го. С увеличением k_{ij} (в пределах от нуля до единицы) уменьшается вклад менее важного критерия f_j в сумму, определяющую g_j; при этом вклад более важного критерия f_i растет. В пределе при $k_{ij} \to 1$ критерий g_j совпадет с критерием f_i, и новый векторный критерий g будет содержать два одинаковых критерия f_i. В этом случае один из них можно просто исключить из общего списка критериев, и менее важный критерий f_j перестанет оказывать какое-либо влияние на дальнейший выбор наилучшего решения.

Проиллюстрируем применение теоремы 1 на следующем простом примере.

Пример. Пусть $m = 2$, $X = \{x', x'', x'''\}$ и

$$f(x') = (5 \quad 2), \qquad f(x'') = (3 \quad 2), \qquad f(x''') = (1 \quad 3).$$

Поскольку $f(x') \geq f(x'')$, то решение x'' "улучшаемое". Неравенства $f(x') \geq f(x''')$, $f(x''') \geq f(x')$ не выполняются — это говорит о том, что остальные два решения "неулучшаемые". Следовательно, именно они составляют множество Парето: $P_f(X) = \{x', x'''\}$. Предположим, что от ЛПР поступила информация о том, что первый критерий важнее второго критерия, причем $k_{12} = 0{,}2$. Тогда в соответствии с формулой (4) имеем

$$g_2(x') = 0{,}2 \cdot f_1(x') + 0{,}8 \cdot f_2(x') =$$
$$= 0{,}2 \cdot 5 + 0{,}8 \cdot 2 = 2{,}6,$$
$$g_2(x''') = 0{,}2 \cdot f_1(x''') + 0{,}8 \cdot f_2(x''') =$$
$$= 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot 3 = 2{,}6,$$

а значит, $g(x') = (5 \quad 2{,}6)$, $g(x''') = (1 \quad 2{,}6)$. Так как $g(x') \geq g(x''')$, то решение x''' не может быть Парето-оптимальным, таковым является решение x': $P_g(X) = \{x'\}$. В итоге получено единственное решение, которое может претендовать на роль наилучшего — x'. Естественно предположить, что в данной задаче искомое множество $Opt_{\succ} X$ содержит хотя бы одно решение. Тогда благодаря включению $Opt_{\succ} X \subset \{x'\}$ немедленно делаем вывод, что решение x' таковым и является.

В рассмотренном примере использование информации об относительной важности одной пары критериев позволило сразу же однозначно определить наилучшее решение. В общем случае на такую "удачу" рассчитывать не приходится и для получения достаточно узкого множества Парето необходимо использовать информацию об относительной важности нескольких (нередко многих) пар критериев.

Относительная важность двух групп критериев и ее использование в процессе принятия решений. Определение 1 легко распространяется с пары критериев i и j на общий случай двух групп критериев A и B (см.[2, 3]).

Определение 3. Пусть $A, B \subset I$, причем эти две группы номеров критериев не содержат ни одного одинакового номера. Говорят, что *группа критериев A важнее группы критериев B с двумя наборами положительных параметров* w_i (для всех $i \in A$) и w_j (для всех $j \in B$), если для всякой пары решений $x', x'' \in X$, для которой выполняется

$$f_i(x') > f_i(x''), \;\; f_i(x') - f_i(x'') = w_i,$$

для всех $i \in A$;

$$f_j(x') < f_j(x''), \;\; f_j(x'') - f_j(x') = w_j,$$

для всех $j \in B$;

$$f_s(x') = f_s(x'') \text{ для всех } s \in I \text{, кроме } s \in A$$

и $s \in B$, справедливо соотношение $x' \succ x''$.

В работе [3] изучены общие свойства введенного понятия.

Что касается коэффициентов относительной важности, то в общем случае двух групп критериев они определяются той же формулой (3), что и для двух критериев.

Например, если первый критерий важнее группы критериев {2,3} с наборами параметров $w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, то оценка $(4 \quad 5 \quad 2)$ предпочтительнее оценки $(3 \quad 7 \quad 5)$, а $(10 \quad 3 \quad 6)$ — предпочтительнее $(9 \quad 5 \quad 9)$ (так как 4 − 3 = 10 − 9 = 1, 7 − 5 = 5 − 3 = 2, 5 − 2 = 9 − 6 = 3), причем $k_{12} = 2/3$, $k_{13} = 3/4$.

Для двух групп критериев аналогом теоремы 1 является следующий результат.

Теорема 2. *Если группа критериев A важнее группы критериев B с коэффициентами относительной важности k_{ij} (для всех $i \in A$, $j \in B$), то имеют место включения (5), где $g = (g_1, g_2, \ldots, g_p)$ — p-мерная вектор-функция, составленная из тех компонент f_i, для которых $i \in I$, $i \notin B$, и новых компонент g_{ij} вида*

$$g_{ij} = k_{ij} \cdot f_i + (1 - k_{ij}) \cdot f_j$$

для всех $i \in A$, $j \in B$.

Здесь $p = m - |B| + |A| \cdot |B|$, где запись $|A|$ означает число элементов множества A (аналогично для $|B|$).

Следует отметить, что число p компонент вектор-функции g может оказаться существенно больше m. Например, при $m = 10$ в случае, когда группа из некоторых пяти критериев является более важной, чем группа из остальных пяти критериев, общее число компонент вектор-функции g будет равно $p = 10 - 5 + 5 \cdot 5 = 30$. Вместо пяти менее важных критериев здесь появляется 25 новых критериев, которые позволяют учесть указанную информацию об относительной важности двух групп критериев.

Общая схема использования количественной информации об относительной важности групп критериев в процессе принятия решений остается такой же, как и в случае отдельных критериев. При этом, как показывает теорема о полноте [4], на основании указанной в определении 3 количественной информации об относительной важности групп критериев можно получить сколь угодно точное представление об отношении предпочтения $\succ$. Иначе говоря, в довольно широком классе многокритериальных задач для отыскания множества $Opt_{\succ} X$ описанным выше способом достаточно обладать только подробной информацией об относительной важности критериев, и никакой другой дополнительной информации не требуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 98-01-00622).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Подиновский В.В., Ногин В.Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
2. **Noghin V.D.** Relative importance of criteria: a quantitative approach //Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. 1997. Vol. 5. P. 355–363.
3. **Ногин В.Д.** Определение и общие свойства относительной важности критериев //Процессы управления и устойчивость: Тр. XXIX науч. конф. НИИ химии СПбГУ. СПб., 1998. С. 373–381.
4. **Noghin V.D.** Theory of relative importance of criteria: a completeness theorem // Multiple Criteria Problems Under Uncertainty: The Third International Workshop. Orekhovo-Zuevo, Russia, 1994. P. 68.

Ю.Д. МАКСИМОВ, В.Д. НОГИН, Ю.А. ХВАТОВ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ СПбГТУ — ВЧЕРА, СЕГОДНЯ, ЗАВТРА

Кафедра высшей математики СПбГТУ образована с момента открытия Санкт-Петербургского политехнического института Петра Великого, т. е. в 1902 году. Ее основателем и бессменным руководителем вплоть до 1935 года был член-корреспондент АН СССР (1924), заслуженный деятель науки РСФСР (1933) Иван Иванович Иванов (1862 – 1939). Он являлся крупным математиком своего времени, автором около 70 научных работ, большая часть которых относится к теории чисел, а также учебников по высшей математике, выдержавших много изданий в период с 1906 по 1927 год.

С момента основания и вплоть до 1927 года на кафедре преподавал профессор А.А. Адамов (1878–1927) — блестящий лектор, автор научных трудов по цилиндрическим функциям и ортогональным многочленам. Его перу принадлежат учебники и задачники по высшей математике, изданные в 1911 – 1925 годах.

Профессор А.Я. Билибин (1879–1935), работавший на кафедре с 1906 по 1924 год, известен как автор учебника “Прямолинейная геометрия”, изданного в 1910 году.

В послереволюционное время с 1920 по 1941 год на кафедре работала плеяда блестящих математиков, всемирно известных ученых, авторов большого числа монографий, учебников и сборников задач, по которым учились и до сих пор учатся многие поколения студентов и аспирантов.

Действительный член АН СССР и почетный член 15 иностранных академий и научных обществ И.М. Виноградов (1891–1983) работал в ЛПИ с 1920 по1934 год, заведовал кафедрой высшей математики с 1930 по 1934 год в отраслевом металлургическом институте. Политехнический институт тогда разделился на семь отраслевых. Во всех отраслевых институтах были свои кафедры высшей математики, которыми